Posudek doktorské práce Mgr. Martina Koce s názvem
"Sigma-porous sets and the differentiation theory."

V předmluvě je stručně podána historie σ-pórovitých množin a následuje přehled obsahu následujících kapitol z nichž každá odpovídá jedné z pěti autorových publikací. Čtyři z nich byly již uveřejněny (dvě v Real Anal. Exchange, třetí v CMUC - spoluautorem je L. Zajíček, další v AUC), pátá je zaslána do nespecifikovaného časopisu (spoluautorem je opět L. Zajíček).

Protože většina textu se zabývá pórovitostí, chci připomenout to, co je pro specialisty samozřejmostí: prefix "σ-" označuje spočetná sjednocení množin s uvedenou vlastností.

První článek zobecňuje následující výsledek (srovnej [44, Remark 2.8(ii)], [25]): *V každém neprázdném topologicky úplném prostoru bez izolovaných bodů existuje uzavřená (*) shora pórovitá množina, která není sjednocením spočetně mnoha (**) zdola pórovitých množin.* Předložené zobecnění pokrývá téměř všechny mně známé varianty pojmu pórovitosti; je formulováno v theoremu 1.2.3 a spočívá ve dvou aspektech. Za prvé lze 'obyčejnou' pórovitost nahradit pojmem, ve kterém je požadovaná velikost pórů řízená předem danou funkcí. To se v zápise projeví vložením "(g_1)" a "(g_2)" na místa označené hvězdičkami. Obě funkce jsou v podstatě libovolné, musí splňovat jen nějaké přirozené podmínky. Za druhé lze místo horní pórovitosti požadovat dokonce mnohem silnější pojem (shell porosity). Dále je zajímavé, že při vhodné volbě funkce g_1 získáme dokonce tzv. silně (shora) pórovitou množinu (Corollary 1.4.1(ii), str. 22).

Druhý článek zavádí (v separabilním metrickém prostoru) nový pojem množiny (shora) pórovité vzhledem k míře (borelovské, regulární a konečné), který je přímým zobecněním pojmu pórovitosti míry[1] z [34] (Mera, Morán); důležitá související práce je [35] (Mera, Morán, Preiss, Zajíček). Kromě tohoto pojmu (tj. μ-upper porous) jsou též definovány pojmy (s)-μ-upper porous ('s' znamená 'strong') a μ-approximately porous. Autor dokazuje (Proposition 2.3.10 na straně 35, Corollary 2.3.6 na straně 33) rovnost mezi odpovídající σ-ideály a také σ-ideálem generovaným společně jednak μ-nulovými množinami, jednak množinami shora pórovitými (nebo dokonce silně shora pórovitými ve verzi dle Theoremu 2.3.8). Část zformulovaná v Corollary 2.3.6 je známa — Ville Suomala[2] to zaznamenává a připisuje [34] a [35]. Avšak podobně jako v prvním článku, i zde autor vyšetřuje také určitou (g)-modifikaci pojmu horní μ-pórovitosti, kde g je nějaká vhodná řídící (růstová) funkce. Hlavním výsledkem článku je tedy Theorem 2.3.5, který říká, že množina je σ-μ-(g)-shora pórovitá, právě když je sjednocením μ-nulové množiny a σ-(g)-shora pórovité množiny.

Třetí článek se zabývá množinami A_f bodů ve kterých je funkce f (libovolná reálná funkce na otevřeném intervalu I) lipschitzovská zleva ale nikoliv lipschitzovská zprava. Je podána úplná charakterizace malosti množin A_f. To znamená, že je zformulována jednoduchá podmínka charakterizující ty množiny $A \subset I$, které

[1] Zde použitá (implicitní) definice pórovité míry se nepatrně liší od podání podle V. Suomaly. Suomala (Upper porous measures on metric spaces, Illinois J. Math, 2008, preprint dostupný na Suomalově www stránce) definuje pórovitost míry požadavkem pórovitosti nikoliv ve všech ale v μ-skoro všech bodech. Podle přítomných argumentů, viz též [35, Proposition 3.4], jsou tyto definice ekvivalentní.

[2] On the porosity of measures, prezentace na FGS4 v Greifswaldu, 2008, dostupné na internetu, str. 4.

jsou podmnožinou A_f pro nějaké f. Je také ukázáno, že nezáleží, zda uvažujeme f libovolné nebo jen f spojité. Článek navazuje na práce L.V. Kantoroviche (1932), B.S. Thomsona a L. Zajíčka a podstatně je rozšiřuje — vztah k nim je také podrobně prozkoumán. Část článku je věnována monotoním sjednocením P-pórovitých množin, a P-reducibilním množinám na metrických prostorech s abstraktní pórovitostí P.

Čtvrtý článek je tématicky velmi blízký předcházejícímu, zabývá se však funkcemi f (na přímce) s hodnotami v metrickém prostoru X. Proto jsou Diniho derivace (horní/dolní, zleva/zprava) i jednostranné derivace nahrazeny metrickými derivacemi, které byly zavedeny B. Kirchheimem. Autor dokazuje, že je-li f spojitá, pak množina bodů, ve kterých jsou jednostranné dolní metrické derivace f různé, je první kategorie (Theorem 4.3.2). Z příkladu 4.3.1 vyplývá, že nemusí být σ-pórovitá ani nulová. Dále dokazuje (pro obecnou f), že A_f je σ-silně zleva pórovitá (viz Theorem 4.3.3 v reformulaci poznámky 4.3.4). Tento čtvrtý článek zřejmě vyšel před třetím, ale myslím, že by bylo vhodné do této práce zapracovat to, co lze do něj snadno přenést. Domnívám se, že množiny A_{pq} v důkazu theoremu 4.3.4 jsou v každém z indexů monotonní a že se lze 'omezit na diagonálu'. Místo σ-silně zleva pórovité množiny tak dostaneme dokonce monotonní sjednocení silně zleva pórovitých množin podobně jako v theoremu 3.2.2. A pokud X obsahuje bilipschitzovskou kopii přímky, získáme dokonce ekvivalenci podobnou té v theoremu 3.2.2.

Ve pátém článku je dokázáno zobecnění známé Whitneyovy věty o rozšiřování $\mathcal{C}^1$ funkcí z uzavřené množiny, které je zároveň zobecněním 'podobné' věty Aversy, Laczkoviche a Preisse (ta se liší tím, že rozšiřuje nespojité derivace). Dokázána a použita je nová verze věty o rozšiřování baireovských funkcí.

Práce představuje po odborné stránce zajímavé čtení. Všechny její části obsahují nové, původní výsledky; dobře vysvětlují jejich motivaci a (s výjimkou speciálního případu Lemma 2.3.4, jak vysvětluji v připomínkách, a Corollary 2.3.6, viz výše) velmi pečlivě popisují jejich vztah k výsledkům dosud známým.

Práce splňuje požadavky na doktorskou práci. Doporučuji, aby byl doktorandovi udělen titul Ph.D.

V Praze dne 21.12.2011

Jan Kolář

Seznam některých komentářů oponenta.

* strana 6, řádek 18–19, "It was proved ... this quantity ...": Za prvé, 'porosity' v předcházející větě je (nebo má být, doufám) vlastnost a nikoliv kvantita. Za druhé tuto 'quantity' by bylo potřeba nejprve definovat. Předpokládám, že tato věta byla součástí jiného textu a je v předmluvě jen omylem.

* strana 7, řádek 8 (též str. 34 ř. 3): Myslím, že "needs not" není správně anglicky. Protože need je použito jako modální sloveso, mělo by být pravděpodobně bez koncového -s.

* Kapitoly by měly začínat na lichých stránkách.

Kapitola 1

* strana 20, řádek 7, "and similarly ..." — Tomuto místu nerozumím. Tvrzení odvozuji z monotonie $n \mapsto \rho(z, y_n)$ (kterou lze zajistit například úpravou (ii)) nebo z monotonie $n \mapsto \operatorname{dist}(z, N_n)$ (která vyplývá z $N_n \neq \emptyset$, (ix), (vii) a (ii) za použití nerovnosti $\rho(z, y_n) \geq \alpha_n$ plynoucí z (iii)).

* Na straně 21, řádek 15, se tvrdí, že F_k je uzavřená (F_k je definováno na ř. 13). Vzhledem k tomu, že definice F_k obsahuje (v některých případech nekonečné) sjednocení, vyžaduje toto tvrzení důkaz. Prosím o vysvětlení tohoto místa. Je zde možná souvislost s inkluzí $(D_k)' \subset \ldots$ níže na řádku 22. (Podrobnější vysvětlení mohl text možná obsahovat i u zmíněné inkluze a dále u tvrzení na řádcích -5 a -4, počítáno zdola.)

Kapitola 2

* strana 29, řádek 8: "$= \frac{1}{4}$" by mělo být "$= \frac{1}{2}$"

* strana 30, Lemma 2.3.4: Vzhledem k délce a náročnosti důkazu tohoto lemma by bylo vhodné uvést, že důležitý speciální případ tohoto lemma, $g(t) = t$, vyplývá z [35], konkrétně z Proposition 3.4 na straně 7 (v preprintové verzi [35]). (S pak může být navíc uzavřená a silně shora pórovitá.)

Kapitola 5

* v definici u na straně 60 (řádek 4) chybí absolutní hodnota: $|l|$.

* strana 61, ř.-7: "Lemma 5.2.4" má být "Theorem 5.2.4". (Poznámka: Takových chyb je možné se vyvarovat používáním například \label{l:eBaire} (pro lemma) a \label{thm:eBaire} (pro větu) namísto prostého \label{eBaire}. Pak při úpravě l: na thm: upravíme i Lemma na Theorem.)

* Toto není připomínka ale návrh na možné zpřehlednění důkazu Thm 5.2.4: Předně poznamenejme, že $[-\infty, \infty]$ lze (topologicky) identifikovat s $[-1, 1]$ a tedy lze Theorem 5.2.1 aplikovat na funkce s hodnotami v $[-\infty, \infty]$.

Nyní k důkazu Thm 5.2.4: odstraníme jeho závislost na EB_1 a na Michaelově selekční větě, což jsou první dva odstavce důkazu (11 řádek). Jako dodatečný (nepodstatný) zisk nám g vyjde dokonce spojitá na $X \setminus H$ (protože $\tau(H, \omega)$ souhlasí s metrickou topologií na $X \setminus H$). (Dále se nabízí možnost vložit do (ii) nějaký 'modulus'.)

První úprava bude vložení ω do Definition 5.2.2 a na konec Remark 5.2.3. Vynecháme zmíněných prvních 11 řádků důkazu; φ nebude použito, novou definici ψ podáme vzápětí. Položíme $Z = \emptyset$, $V = X$ (respektive přepíšeme důkaz odpovídajícím způsobem).

(Je-li l omezená, vycházelo $Z = \emptyset$, a $V = X$ i bez úprav. Pak tedy bylo $g = g_2$ na celém $X \setminus H$ a šlo by položit například $\psi(x) = \varphi(x) = 1 + \sup |l|$. Podstatné je ale vypořádat se s případem neomezené l.)

Položíme $\psi(x) = 1/\sqrt{\operatorname{dist}(x, H)}$ pro $x \in X \setminus H$, $\psi(x) = \infty$ pro $x \in H$. Místo topologie τ_H použijeme $\tau(H, \omega)$, kde zvolíme $\omega(t) = t^2$, viz Remark 5.2.3. Namísto (5.2.2) definujeme $g = g_2$. Vlastnost (i) není potřeba dokazovat, vyplývá z vlastností g_2. Zavedeme ω také do (5.2.5) a (5.2.6):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{dist}(x_n, H)}{\varrho(x_n, a)^2} = 0 \tag{5.2.5*}$$

Zbytek důkazu zůstává stejný, s drobnou úpravou: V případě, že (5.2.5*) platí, vynásobením odmocniny z (5.2.5*) a vztahu $\psi(x)\sqrt{\operatorname{dist}(x, H)} = 1$ vypočteme limitu prvního sčítance v (5.2.4). Druhý sčítanec má též limitu nula protože ovšem z (5.2.5*) vyplývá (5.2.5).

* Nakonec poznamenávám, že čtenář může přivítat odkaz na definici Lusin-Menchevovy vlastnosti ([31, p. 85]) a případně též zmínku, že jde (v jiné terminologii) o binormalitu (ve dvojici s metrickou topologií).