Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vlasta Chmelíková

Zlatý řez

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: PhDr. Alena Šarounová, CSc.

Studijní program: Matematika,
Učitelství matematiky – deskriptivní geometrie pro střední školy

2008

Tato práce by nevznikla bez podpory několika osob, kteří mi zapůjčili potřebnou literaturu, pomohli s překlady z cizích jazyků nebo poskytli cenné rady a informace. Patří k nim zejména PhDr. Alena Šarounová, CSc., doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc., Mgr. Zuzana Štauberová a doc. RNDr. Leo Boček, CSc. Dále bych nerada zapomněla na Bc. Luboše Moravce, který mi pomohl s instalací a ovládáním počítačových programů, a studenty semináře deskriptivní geometrie z Gymnázia Na Pražačce (školní rok 2007/2008), kteří složili papírové modely těles na fotografiích v kapitole 4. Všem, kteří nějakým způsobem přispěli ke vzniku této práce, velmi děkuji.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 25.7.2008 Vlasta Chmelíková

Název práce: Zlatý řez
Autor: Bc. Vlasta Chmelíková
Katedra: Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: PhDr. Alena Šarounová, CSc.
e-mail vedoucího: `sarounov@karlin.mff.cuni.cz`

Abstrakt: Tento text vznikl především jako vzdělávací materiál pro učitele matematiky a deskriptivní geometrie na středních školách, ale je vhodný i pro studenty středních a vysokých škol a další zájemce o problematiku zlatého řezu. Práce obsahuje výpočet a vlastnosti zlatého čísla, různé druhy konstrukcí zlatého řezu, jeho výskyt a užití v planimetrii a stereometrii, historický vývoj zlatého řezu a jeho souvislost s uměním, architekturou, přírodou, psychologií aj. Dále jsou připojeny ukázky úloh ze starších učebnic a návrhy pracovních listů pro zpestření hodin matematiky.

Klíčová slova: zlatý řez, zlaté číslo, Fibonacciho posloupnost, pravidelné mnohostěny

Title: The Golden Section
Author: Bc. Vlasta Chmelíková
Department: Department of Mathematics Education
Supervisor: PhDr. Alena Šarounová, CSc.
Supervisor's e-mail address: `sarounov@karlin.mff.cuni.cz`

Abstract: This text has been written especially as an educational material for secondary school teachers of mathematics and descriptive geometry, however it can be interesting also for students of secondary schools and universities and for another persons interested in problems of the golden section. The thesis includes a calculation and properties of the golden number, several construction methods of the golden section, its occurence and use in plane and solid geometry, history of the golden section and its connections with art, architecture, nature, psychology, etc. In addition, there are added examples from older textbooks and proposals of the jobsheets for improvement of the mathematics lessons.

Keywords: golden section, golden number, Fibonacci sequence, regular polyhedra

Obsah

Úvod

Tato diplomová práce je určena především středoškolským učitelům matematiky a deskriptivní geometrie, studentům středních i vysokých škol a dalším zájemcům, kteří si chtějí rozšířit znalosti o zlatém řezu. V textu se snažím vyhýbat tradičnímu vysokoškolskému výkladu ve stylu definice – věta – důkaz (ačkoliv ve všech případech to nebylo možné, přece jen se jedná o matematickou práci) a namísto toho podat informace snazší, širšímu okruhu čtenářů přísupnější formou. Až na výjimky není k pochopení práce třeba vyšších znalostí matematiky.

Práce je členěna do deseti kapitol, které jsou ve většině případech dále děleny na menší podkapitoly. V prvních čtyřech kapitolách jsou uvedeny souvislosti zlatého řezu s matematikou, respektive geometrií. V první kapitole je zlatý řez definován, vypočtena hodnota zlatého čísla a uvedeny jeho další vlastnosti včetně spojitostí s Fibonacciho posloupností nebo řetězovými zlomky. Ve druhé kapitole jsou vypsány postupy různých konstrukcí rozdělení úsečky zlatým řezem. Na začátku této kapitoly je stručně vysvětlen způsob zápisu jednotlivých konstrukcí, tento zápis je pak používán i v kapitolách dalších. U všech postupů konstrukcí je třeba brát v potaz i příslušný obrázek, který je v podstatě součástí návodu. (Samotný zápis konstrukce pro jednoduchost neupřesňuje, které z více řešení je v daném kroku správné.) V páté kapitole shrnuji stručně historii zlatého řezu od starověku do počátku novověku. Šestá kapitola se také částečně zabývá historií, ovšem z jiného pohledu. Uvádím zde výskyt zlatého řezu v starších učebnicích a porovnání s učebnicemi současnými. Poslední čtyři kapitoly se věnují výskytu zlatého řezu v praxi. Zde je třeba uvědomit si nebezpečnost zaokrouhlování (zejména v přírodě). Aplikace zlatého řezu je proto v některých případech jen výsledkem zprůměrování hodnot získaných opakovanými měřeními.

Diplomová práce volně navazuje na mou bakalářskou práci *Zlatý řez* [13]. V zájmu plynulosti čtení se v textu na tuto bakalářskou práci neodkazuji. Převzaty a přepracovány (popřípadě doplněny) jsou zejména podkapitoly 1.1, 1.2, 1.4, 3.1, 3.2, 3.4, 3.5, 4.1 a část kapitoly 2.

Kromě uvedené literatury jsem některé informace čerpala z Internetu. V případě použití většího množství informací je internetový zdroj uveden v textu jako poznámka pod čarou. Dále jsem často využívala vícejazyčnou internetovou encyklopedii Wikipedia[1].

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page`

Práce byla napsána sázecím systémem LaTeX [26]. Většina obrázků byla vytvořena nebo upravena pomocí aplikací GeoGebra 3.0.2.0 a GIMP 2.4.6. Soupis obrázků, které jsou naskenované nebo převzaté z Internetu je uveden na konci seznamu literatury.

Termín *zlatý řez* se v poslední době vrací do popředí zájmu. Bývá často zadáván jako téma seminárních prací, objevují se překlady zahraniční literatury, zvyšuje se množství odkazů na Internetu atd. Jako zajímavost uvedu doslovné znění otázky z televizní soutěže AZ-kvíz vysílané Českou televizí dne 18. 6. 2007.

> *Tímto termínem se v klasické polygrafii označuje geometricky stanovené místo na stránce, kam se umísťuje hlavní titulek. Jak zní výraz, kterým se již ve středověku vyjadřoval ideální harmonický kompoziční poměr?*

Správnou odpovědí na otázku měl být, jak jinak, zlatý řez.

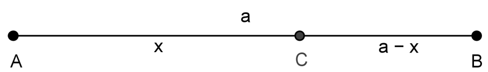
Kapitola 1

Zlaté číslo a jeho vlastnosti

1.1 Výpočet zlatého čísla

Rozdělit úsečku AB délky a zlatým řezem znamená nalézt na úsečce AB bod C tak, že při označení $|AC| = x$, $|CB| = a - x$, kde $x > a - x$ (obr. 1.1), platí:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}. \tag{1.1}$$



Obrázek 1.1: Dělení úsečky zlatým řezem I

Neboli slovy:

> *Úsečka rozdělená zlatým řezem je rozdělená na dvě nestejně dlouhé části tak, že poměr délky celé úsečky ku délce větší části je stejný jako poměr délky větší části úsečky ku délce části menší.*

Tento poměr se značívá řeckým písmenem φ (fí) a nazývá se *zlaté číslo*. Jaká je jeho hodnota?

Za jednotku zvolíme délku úsečky AB, tedy $a = 1$ a dosadíme do vztahu (1.1). Dostaneme rovnici

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1 - x}, \tag{1.2}$$

což je rovnice s jednou neznámou x, kde x značí délku úsečky z intervalu $(0; 1)$. Obě strany rovnice jsou tedy definovány. Tuto rovnici převedeme ekvivalentními úpravami na kvadratickou rovnici

$$x^2 + x - 1 = 0 \tag{1.3}$$

a pomocí diskriminantu vypočítáme kořeny:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1+\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \\ x_2 &= \frac{-1-\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Druhý kořen je záporný, nemůže proto představovat délku úsečky. První kořen je iracionální číslo, přibližně rovno hodnotě 0,61803. Vyhovuje tedy našim požadavkům a nadále jej budeme považovat za hledanou délku x.

Pro poměr φ, který máme určit, platí $\varphi = \frac{a}{x}$. Dosadíme-li $a = 1$ a $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, dostáváme:

$$\varphi = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

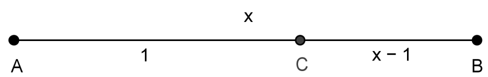
což je přibližně 1,61803.

Označíme-li převrácenou hodnotu druhého kořene x_2 symbolem $\tilde{\varphi}$, vychází:

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1-\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

což je přibližně -0,61803.

Zlaté číslo lze odvodit i jinak. Vyjdeme od úsečky AB neznámé délky x, přičemž $1 < x < 2$. Tuto úsečku rozdělíme bodem C tak, že $|AC| = 1$, tedy $|CB| = x - 1$ a $|AC| > |CB|$ (obr. 1.2).



Obrázek 1.2: Dělení úsečky zlatým řezem II

Nyní budeme hledat délku x tak, aby bod C dělil úsečku AB ve zlatém řezu. Musí tedy platit:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}. \tag{1.4}$$

Po odstranění zlomků ekvivalentními úpravami ($x \neq 1$, obě strany rovnice (1.4) jsou definovány) obdržíme rovnici

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{1.5}$$

jejíž kořeny jsou:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi; \\ x_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \tilde{\varphi}. \end{aligned}$$

Tímto způsobem jsme ihned obdrželi hodnotu zlatého čísla, protože hledaný poměr délek celé úsečky ku délce větší části byl přímo označen jako neznámá x $\left(\text{přesněji } \frac{x}{1}\right)$.

1.2 Vlastnosti zlatého čísla

Pro zlaté číslo φ a číslo $\tilde{\varphi}$ platí několik zajímavých vztahů:

1. $\boldsymbol{\varphi \cdot \tilde{\varphi} = -1}$

   Důkaz: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\tilde{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

   $$\begin{aligned} L &= \varphi \cdot \tilde{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1 \\ P &= -1 \\ L &= P \end{aligned}$$

   ⊠

2. $\boldsymbol{\varphi + \tilde{\varphi} = 1}$

   Důkaz: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\tilde{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

   $$\begin{aligned} L &= \varphi + \tilde{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ P &= 1 \\ L &= P \end{aligned}$$

   ⊠

3. $\boldsymbol{\varphi^{-1} = \varphi - 1}$

Důkaz: $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned} L &= \varphi^{-1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ P &= \varphi - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ L &= P \end{aligned}$$

⊠

4. $\boldsymbol{\varphi^{2} = \varphi + 1}$

Důkaz: $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned} L &= \varphi^{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ P &= \varphi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ L &= P \end{aligned}$$

⊠

5. $\boldsymbol{\tilde{\varphi}^{2} = \tilde{\varphi} + 1}$

Důkaz: $\tilde{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned} L &= \tilde{\varphi}^{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2} = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ P &= \tilde{\varphi} + 1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ L &= P \end{aligned}$$

⊠

6. $\boldsymbol{\varphi^3 = \dfrac{\varphi + 1}{\varphi - 1}}$

Důkaz: $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned}
L &= \varphi^3 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{1+3\sqrt{5}+3\cdot 5+5\sqrt{5}}{8} = 2+\sqrt{5}\\
P &= \frac{\varphi+1}{\varphi-1} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = 2+\sqrt{5}\\
L &= P
\end{aligned}$$

⊠

7. $\boldsymbol{\varphi = \dfrac{\varphi^3 + 1}{\varphi^3 - 1}}$

Důkaz: $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned}
L &= \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\
P &= \frac{\varphi^3+1}{\varphi^3-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3+1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3-1} = \frac{24+8\sqrt{5}}{8+8\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\
L &= P
\end{aligned}$$

⊠

Vlastnosti 1, 2, 3, 4 a 5 vyplývají také ihned z rovnice (1.5). Vlastnosti 1, 2 díky vztahům mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice[1], vlastnost 3 obdržíme ekvivalentní úpravou rovnice (1.5) a dosazením φ za x, vlastnosti 4, 5 získáme převedením lineárního a absolutního členu rovnice (1.5) na pravou stranu. Vlastnosti 6, 7 jsou navzájem ekvivalentní. Ze vztahu 6 lze vhodnými úpravami[2] obdržet vztah 7.

[1]Takzvané Viètovy vztahy. Pro kořeny rovnice $x^2 + px + q = 0$, kde $p, q \in R$, $p^2 - 4q \geq 0$, platí: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

[2]Původní rovnici $\varphi^3 = \dfrac{\varphi+1}{\varphi-1}$ vynásobíme dvojčlenem $(\varphi - 1)$, dostáváme $\varphi^3 \cdot (\varphi - 1) = \varphi + 1$, levou stranu roznásobíme a členy ze strany pravé převedeme doleva, máme tedy $\varphi^4 - \varphi^3 - \varphi - 1 = 0$, teď z prvního a třetího členu vytkneme φ a z druhého a čtvrtého členu vytkneme (-1). Dostáváme $\varphi \cdot (\varphi^3 - 1) - (\varphi^3 + 1) = 0$. Nyní převedeme člen $-(\varphi^3 + 1)$ na pravou stranu a celou rovnici vydělíme $(\varphi^3 - 1)$. Tedy $\varphi = \dfrac{\varphi^3+1}{\varphi^3-1}$. Jelikož $\varphi \neq 1$, byly všechny úpravy ekvivalentní (nikde jsme nedělili ani nenásobili nulou).

1.3 Zlaté číslo jako řetězový zlomek

Jako řetězový zlomek
mi zlatý střed bere spánek.
Jedničky jen přičítám
a v hlavě z toho zmatek mám.

[Paul S. Bruckman, úryvek z básně *Vždy ve středu.*]

Řetězový zlomek je výraz, pomocí nějž se dají zapsat iracionální čísla ve tvaru zlomku s velkou přesností (jak známo, iracionální číslo přesně zlomkem vyjádřit nelze). Jak zapsat číslo řetězovým zlomkem si pro snadnější pochopení ukážeme nejprve na čísle racionálním.

Racionální čísla jsou taková, která lze zapsat zlomkem s celočíselným čitatelem i jmenovatelem. Řetězový zlomek kladného[3] racionálního čísla je výraz tvaru

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_n}}}}, \tag{1.6}$$

kde $q_2, q_3, \dots, q_n \in \mathsf{N}$; $q_1 \in \mathsf{N}_0$. Občas se také používá zápis

$$[q_1, q_2, \dots, q_n].$$

Hledání takového řetězového zlomku si vysvětlíme na příkladu:

Zapište řetězovým zlomkem zlomek $\dfrac{44}{13}$.

Výpočet:

$$\frac{44}{13} = 3 + \frac{5}{13} = 3 + \cfrac{1}{\frac{13}{5}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \frac{3}{5}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{3}}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{2}{3}}} =$$

$$= 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

Postup výpočtu je založen na Eukleidově algoritmu hledání největšího společného dělitele dvou přirozených čísel. Konečnost řetězového zlomku je zajištěna díky tomu, že dvě přirozená čísla mají vždy společného dělitele (v „nejhorším" případě je tímto dělitelem jednička). Řetězovým zlomkům tohoto typu se říká konečné řetězové zlomky.

[3] Pro záporná racionální čísla stačí ve výrazu (1.6) všechna znaménka „+" zaměnit za znaménka „−" a jinak postupovat jako u kladného zlomku.

Je-li dané číslo iracionální, nelze jej zapsat konečným řetězovým zlomkem. V takovém případě mluvíme o nekonečném řetězovém zlomku, což je výraz ve tvaru

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \frac{1}{q_4 + \frac{1}{q_5 + \cdots}}}}, \tag{1.7}$$

kde $q_2, q_3, q_4, \dots \in \mathsf{N}$; $q_1 \in \mathsf{N}_0$. Občas se také používá zápis

$$[q_1, q_2, q_3, \dots].$$

Nalezení řetězového zlomku iracionálního čísla je trochu náročnější. Postup si zase ukážeme na příkladu:

> Zapište řetězovým zlomkem číslo $\sqrt{5}$.
>
> Výpočet:
>
> $$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{q_2} \Rightarrow q_1 = 2$$
>
> Číslo 2 není těžké odhadnout. Určili jsme je jako největší celé číslo menší než $\sqrt{5}$. Z předchozího vztahu vyjádříme q_2. Po úpravách vyjde
>
> $$q_2 = \sqrt{5} + 2 \Rightarrow q_2 = 4.$$
>
> Hodnotu q_2 jsme určili stejným způsobem jako hodnotu q_1. Máme již výraz
>
> $$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{q_3}},$$
>
> přičemž $4 + \frac{1}{q_3} = \sqrt{5} + 2$. Z této rovnice vyjádříme q_3. Vyjde
>
> $$q_3 = \sqrt{5} + 2 \Rightarrow q_3 = 4.$$

Takto bychom mohli pokračovat dále. Jistě je z průběhu výpočtu patrné, že hledaný řetězový zlomek má tvar $[2, 4, 4, 4, 4, \dots]$. Výpočet ale můžeme v určitém kroku ukončit, získáme tak velmi přesnou aproximaci iracionálního čísla zlomkem. V našem příkladu jsme zjistili, že $\sqrt{5} \doteq 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}}$. Výraz na pravé straně můžeme zpátky upravit do podoby klasického zlomku:

$$2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}} = 2 + \frac{1}{\frac{17}{4}} = 2 + \frac{4}{17} = \frac{38}{17}.$$

Například pomocí kapesního kalkulátoru lze rychle ověřit, jak blízký je zlomek $\frac{38}{17}$ číslu $\sqrt{5}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &\doteq 2.236067\ldots \\ \frac{38}{17} &\doteq 2.235294\ldots \end{aligned}$$

Budeme-li hledat (stejným způsobem jako v předchozím případě) řetězový zlomek zlatého čísla, dospějeme po chvíli k závěru, že

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}}, \tag{1.8}$$

neboli

$$\varphi = [1, 1, 1, 1, \ldots].$$

Takový řetězový zlomek je příkladem periodického[4] řetězového zlomku s jednoprvkovou periodou.

Podobně zajímavý je tento zápis zlatého čísla:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}} \tag{1.9}$$

V knize [16] uvádí autor trochu zjednodušená odvození (musíme si uvědomit, že s nekonečnými výrazy nelze vždy pracovat stejně, jako s konečnými) rovností (1.8) a (1.9):

> Dejme tomu, že hodnotu, kterou hledáme, označíme jako x. Dostaneme tedy
>
> $$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$
>
> Nyní obě strany rovnice umocněme na druhou. Druhá mocnina x je x^2 a umocněním výrazu na pravé straně zmizí vnější odmocnina (z definice druhé odmocniny). Obdržíme tak
>
> $$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$$
>
> Povšimněme si však, že druhý výraz na pravé straně pokračuje do nekonečna, takže se vlastně rovná našemu původnímu x. Dostáváme tedy

[4] Periodický řetězový zlomek s k-prvkovou periodou je zlomek ve tvaru $[q_1, q_2, \ldots, q_k, q_1, q_2, \ldots, q_k, q_1, \ldots]$.

kvadratickou rovnici $x^2 = 1 + x$. To je však přesně ta rovnice, která definuje zlatý řez! Zjistili jsme tak, že naše nekonečné vyjádření je vlastně rovno φ.

Obdobně budeme postupovat u řetězového zlomku.

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

Opět si všimneme, že vzhledem k nekonečnému charakteru řetězového zlomku je *jmenovatel* výrazu na pravé straně rovnice ve skutečnosti totožný s x. Máme tedy rovnici

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Vynásobením obou stran výrazem x dostaneme $x^2 = x + 1$, což je znovu rovnice definující zlatý řez! Zjišťujeme tak, že i tento pozoruhodný řetězový zlomek je roven φ.

1.4 Zlaté číslo a Fibonacciho posloupnost

Hodnotu φ lze získat i jiným způsobem než rozdělením úsečky zlatým řezem. Zlaté číslo totiž velmi úzce souvisí s Fibonacciho[5] posloupností. Jde o rekurentně zadanou posloupnost, jejíž původ je v následující úloze [1]:

> Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, ze všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku. Jelikož první pár v prvním měsíci dá potomstvo, zdvojnásob, a v tomto měsíci budeš mít 2 páry; z nich jeden pár, totiž první, rodí i v následujícím měsíci, takže ve druhém měsíci budeš mít 3 páry; z nich v následujícím měsíci 2 páry dají potomstvo, takže v třetím měsíci se zrodí ještě 2 páry králíků – počet párů králíků v tomto měsíci dosáhne 5; z nich v dalším měsíci dávají potomstvo 3 páry, takže počet párů králíků ve čtvrtém měsíci dosáhne 8; z nich 5 párů zrodí dalších 5 párů, které přičteny k 8 párům dají v pátém měsíci 13 párů; z nich 5 párů, narozených v tomto měsíci, nedá v dalším

[5] Leonardo Pisánský zvaný Fibonacci žil na přelomu 12. a 13. století v italské Pise. V roce 1202 vydal latinsky psané dílo „Kniha o abaku“ (latinsky „Liber Abaci“), ve kterém uvádí velké množství početních metod aritmetiky, algebry a teorie čísel, včetně demonstrujících příkladů [1].

měsíci potomstvo, kdežto ostatních 8 párů rodí – v šestém měsíci stoupne tedy počet na 21 párů; přičteme-li 13 párů, které se zrodí v sedmém měsíci, dostaneme 34 párů; přičteme-li 21 párů, narozených v osmém měsíci, dostaneme v tomto měsíci 55 párů; sečteme-li tyto páry s 34 páry narozenými v devátém měsíci, dostaneme 89 párů; k těm přičteme 55 párů, které se zrodí v desátém měsíci, takže v tomto měsíci máme 144 párů; opět přičteme 89 párů, které se zrodí v jedenáctém měsíci, takže v tomto měsíci máme 233 párů; znovu přičteme 144 párů narozených v posledním měsíci a dostaneme 377 párů; tolik párů přivedl na svět onen první pár průběhem jednoho roku. Skutečně, na tomto okraji můžeš vidět[6], jak to děláme; nejprv sečteme první číslo s druhým, t. j. 1 a 2; druhé s třetím; třetí se čtvrtým, pak čtvrté s pátým a tak dál a dál, až sečteme desáté s jedenáctým, t. j. 377; tak je to možné dělat dál do nekonečného počtu měsíců.

Povzneseme se nad nereálnost úlohy a podíváme se, jak tedy vypadá Fibonacciho posloupnost. V tabulce níže jsou přehledně zapsány počty párů králíků na konci každého měsíce v průběhu jednoho roku. Pořadové číslo měsíce v roce je označeno písmenem k, přičemž nultý měsíc symbolizuje počáteční stav. Počet starých párů králíků (schopných plodit v příštím měsíci potomstvo) je značen S_k, počet mladých párů (narozených tento měsíc) je značen M_k. Celkový počet všech párů králíků na konci každého měsíce je uveden v posledním řádku tabulky (převzato z [1]).

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
M_k	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
Celkem	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Posloupnost v posledním řádku je hledaná Fibonacciho posloupnost. Její prvky se nazývají Fibonacciho čísla. Označíme-li tato čísla F_k, je vidět, že platí:

$$F_k = S_k + M_k = S_k + S_{k-1} = F_{k-1} + F_{k-2}.$$

Často se tato posloupnost zavádí následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3, \\ F_1 &= 1, \\ F_2 &= 1. \end{aligned}$$

Rozdíl oproti předcházející rekurentní definici na základě úlohy o králících je nepatrný, n je rovno $k + 2$ a na začátek jsme přidali jeden prvek. V dalším textu budu předpokládat tento druhý způsob zavedení. V následující tabulce je přehled prvních patnácti členů Fibonacciho posloupnosti:

[6] Fibonacci doplnil na okraji stránky text jednoduchým schématem.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Občas je dodefinováván ještě nultý člen Fibonacciho posloupnosti:

$$F_0 = 0.$$

Pomocí rekurentní definice lze postupně získávat jednotlivé členy posloupnosti. Pokud bychom ale chtěli určit n-tý člen pro velké n, byl by tento postup velmi zdlouhavý. K přímému výpočtu prvku F_n pro dané n existuje tzv. *Binetův vzorec*, ve kterém vystupují hodnoty φ a $\tilde{\varphi}$:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}. \tag{1.10}$$

Platnost tohoto vzorce dokážeme:

Dosadíme-li do Binetova vzorce postupně $n = 1$ a $n = 2$, musí vyjít (je-li vzorec správný) $F_1 = 1$ a $F_2 = 1$. Dále ověříme, že pro Binetův vzorec platí rekurentní vztah $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Při výpočtu je využito vlastností $\varphi + 1 = \varphi^2$, $\tilde{\varphi} + 1 = \tilde{\varphi}^2$ dokázaných v podkapitole 1.2.

$n = 1$:

$$F_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$$

$n = 2$:

$$F_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 1 + 2\sqrt{5} - 5}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1$$

$$\begin{aligned}
F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\
F_n &= \frac{\varphi^{n-1} - \tilde{\varphi}^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n-2} - \tilde{\varphi}^{n-2}}{\sqrt{5}} \\
F_n &= \frac{\varphi^{n-2}(\varphi + 1) - \tilde{\varphi}^{n-2}(\tilde{\varphi} + 1)}{\sqrt{5}} \\
F_n &= \frac{\varphi^{n-2} \cdot \varphi^2 - \tilde{\varphi}^{n-2} \cdot \tilde{\varphi}^2}{\sqrt{5}} \\
F_n &= \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Binetův vzorec lze odvodit i jiným způsobem. Pokusme se vyjádřit přirozené mocniny čísla φ pomocí lineárních výrazů. Víme, že $\varphi^2 = \varphi + 1$. Když tuto rovnici vynásobíme φ, obdržíme:

$$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi,$$

což lze dále upravit:

$$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = (\varphi + 1) + \varphi = 2\varphi + 1.$$

Tento postup můžeme zobecnit:

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \varphi + 1 / \cdot \varphi^n \\ \varphi^{n+2} &= \varphi^{n+1} + \varphi^n \end{aligned}$$

Získali jsme rekurentní vyjádření pro φ^{n+2}. Známe-li lineární výraz pro φ^{n+1} a pro φ^n, obdržíme jejich součtem lineární výraz pro φ^{n+2}. Následuje schéma, v němž lineární výraz na každém řádku je součtem lineárních výrazů ve dvou předcházejících řádcích.

$$\begin{array}{l} \varphi^2 = \varphi + 1 = \varphi + 1 \\ \varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1 \\ \varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2 = 3\varphi + 2 \\ \varphi^5 = \varphi^4 + \varphi^3 = 5\varphi + 3 \\ \varphi^6 = \varphi^5 + \varphi^4 = 8\varphi + 5 \\ \varphi^7 = \varphi^6 + \varphi^5 = 13\varphi + 8 \\ \varphi^8 = \varphi^7 + \varphi^6 = 21\varphi + 13 \end{array}$$

atd.

Ze schématu je vidět, že platí

$$\varphi^n = F_n \cdot \varphi + F_{n-1},\ n \geq 2. \tag{1.11}$$

Analogicky můžeme pracovat s číslem $\tilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^2 &= \tilde{\varphi} + 1 / \cdot \tilde{\varphi}^n \\ \tilde{\varphi}^{n+2} &= \tilde{\varphi}^{n+1} + \tilde{\varphi}^n \end{aligned}$$

Máme rekurentní vyjádření pro $\tilde{\varphi}^{n+2}$. Známe-li lineární výraz pro $\tilde{\varphi}^{n+1}$ a pro $\tilde{\varphi}^n$, obdržíme jejich součtem lineární výraz pro $\tilde{\varphi}^{n+2}$. Následuje opět schéma, v němž lineární výraz na každém řádku je součtem lineárních výrazů ve dvou předcházejících řádcích.

$$\begin{array}{l} \tilde{\varphi}^2 = \tilde{\varphi} + 1 = \tilde{\varphi} + 1 \\ \tilde{\varphi}^3 = \tilde{\varphi}^2 + \tilde{\varphi} = 2\tilde{\varphi} + 1 \\ \tilde{\varphi}^4 = \tilde{\varphi}^3 + \tilde{\varphi}^2 = 3\tilde{\varphi} + 2 \\ \tilde{\varphi}^5 = \tilde{\varphi}^4 + \tilde{\varphi}^3 = 5\tilde{\varphi} + 3 \\ \tilde{\varphi}^6 = \tilde{\varphi}^5 + \tilde{\varphi}^4 = 8\tilde{\varphi} + 5 \\ \tilde{\varphi}^7 = \tilde{\varphi}^6 + \tilde{\varphi}^5 = 13\tilde{\varphi} + 8 \\ \tilde{\varphi}^8 = \tilde{\varphi}^7 + \tilde{\varphi}^6 = 21\tilde{\varphi} + 13 \end{array}$$

atd.

Ze schématu je vidět, že platí

$$\tilde{\varphi}^n = F_n \cdot \tilde{\varphi} + F_{n-1},\ n \geq 2. \tag{1.12}$$

Nyní odečteme rovnici (1.12) od rovnice (1.11) a takto získanou rovnici upravíme:

$$\begin{aligned}
\varphi^n - \tilde{\varphi}^n &= (F_n \cdot \varphi + F_{n-1}) - (F_n \cdot \tilde{\varphi} + F_{n-1}) \\
\varphi^n - \tilde{\varphi}^n &= F_n \cdot \varphi + F_{n-1} - F_n \cdot \tilde{\varphi} - F_{n-1} \\
\varphi^n - \tilde{\varphi}^n &= F_n \cdot \varphi - F_n \cdot \tilde{\varphi} \\
\varphi^n - \tilde{\varphi}^n &= F_n(\varphi - \tilde{\varphi}) / : (\varphi - \tilde{\varphi}) \\
F_n &= \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\varphi - \tilde{\varphi}} \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Výraz ve jmenovateli můžeme vyčíslit:

$$\varphi - \tilde{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

Tuto hodnotu dosadíme do jmenovatele na pravé straně rovnice (1.13) a obdržíme tak již známý Binetův vzorec

$$F_n = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}.$$

Zajímavou souvislost zlatého čísla a Fibonacciho čísel objevil pravděpodobně Johannes Kepler[7]. Podíváme se na posloupnost prvků $a_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$; $n \geq 1$, tedy na posloupnost tvořenou podíly sousedních prvků Fibonaciho posloupnosti. Zde je přehled prvních deseti členů:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1 \\
a_2 &= \frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2 \\
a_3 &= \frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1.5 \\
a_4 &= \frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1.\overline{6} \\
a_5 &= \frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1.6
\end{aligned}$$

[7] Johannes Kepler ($*$ 27. 12. 1571, † 15. 11. 1630), významný německý matematik, astronom a astrolog.

$$
\begin{aligned}
a_6 &= \frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1.625 \\
a_7 &= \frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} \doteq 1.615 \\
a_8 &= \frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} \doteq 1.619 \\
a_9 &= \frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} \doteq 1.6176 \\
a_{10} &= \frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} = 1.6\overline{18} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Čím větší je n, tím více se hodnoty a_n blíží k zlatému číslu. Vypočítáme-li limitu a_n pro n jdoucí k nekonečnu, zjistíme, že skutečně platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \varphi. \tag{1.14}$$

Výpočet limity:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{n+1} - \tilde{\varphi}^{n+1}}{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n} = \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} \varphi^{n+1} - \lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}^{n+1}}{\lim_{n\to\infty} \varphi^n - \lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}^n} = \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} \varphi^{n+1} - 0}{\lim_{n\to\infty} \varphi^n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^n \cdot \varphi}{\varphi^n} = \lim_{n\to\infty} \varphi = \varphi
\end{aligned}
$$

Při výpočtu bylo využito pravidel pro počítání s limitami (zjednodušeně: limita součtu je součet limit, ...) a pravidla: $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$ pro $0 \leq |b| \leq 1$. Jelikož $|\tilde{\varphi}| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| \in (0;1)$, je $\lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}^n = 0$.

Zlaté číslo můžeme tedy také definovat jako limitu posloupnosti, jejíž prvky jsou podíly sousedních členů Fibonacciho posloupnosti. K této definici není zapotřebí dělit úsečku zlatým řezem.

Analogicky bychom mohli postupovat s posloupností $c_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$; $n \geq 1$. Limita této posloupnosti (pro n jdoucí k nekonečnu) vyjde $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\tilde{\varphi}$.

1.5 Číslo zlaté, stříbrné a bronzové

Jistě mnohé napadá, zda je vedle zlatého čísla φ i nějaké číslo stříbrné a bronzové. Odpověď zní ano, taková čísla existují a mají stejně jako číslo zlaté spoustu zajímavých vlastností. Zde se s nimi stručně seznámíme.

Stříbrné číslo je číslo $s = \sqrt{2} + 1$. Jeho zápis pomocí řetězového zlomku je následující:

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}},$$

neboli

$$[2, 2, 2, \dots].$$

Stříbrné číslo můžeme rovněž získat jako limitu posloupnosti $\frac{P_{n+1}}{P_n}$, pro n jdoucí k nekonečnu, kde P_n jsou takzvaná Pellova čísla, členy Pellovy posloupnosti. Tu lze definovat rekurentně, ale existuje i vzorec pro n-tý člen.

Rekurentní definice:

$$\begin{aligned} P_n &= 2 \cdot P_{n-1} + P_{n-2},\ n \geq 2, \\ P_0 &= 0, \\ P_1 &= 1. \end{aligned}$$

Vzorec pro n-tý člen:

$$P_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

Prvních osm členů Pellovy posloupnosti vypadá tedy následovně:

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots$$

Za **bronzové číslo** bývá považováno číslo $b = \frac{\sqrt{13} + 3}{2}$. Zapíšeme-li je řetězovým zlomkem, dostaneme výraz:

$$3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}}}},$$

neboli

$$[3, 3, 3, \dots].$$

I k tomuto číslu existuje odpovídající posloupnost. Její rekurentní zadání je:

$$\begin{aligned} B_n &= 3 \cdot B_{n-1} + B_{n-2},\ n \geq 2, \\ B_0 &= 0, \\ B_1 &= 1. \end{aligned}$$

Vzorec pro n-tý člen:

$$B_n = \frac{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^n}{\sqrt{13}}.$$

Prvních osm členů této posloupnosti (nepodařilo se mi objevit žádný používaný název):

$$0, 1, 3, 10, 33, 109, 360, 1198, \ldots$$

Hledání podobných čísel a k nim příslušných posloupností lze zobecnit. Označíme-li $\varphi = k_1$, $s = k_2$ a $b = k_3$, potom můžeme zapsat obecný předpis čísla k_m, kde $m \in \mathsf{N}$:

$$k_m = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}. \tag{1.15}$$

Čísla k_m lze zapsat nekonečným řetězovým zlomkem ve tvaru

$$[m, m, m, \ldots].$$

a můžeme je rovněž obdržet jako limitu patřičné posloupnosti $\frac{A_{n+1}}{A_n}$, kde posloupnost A_n má rekurentní zadání:

$$\begin{aligned} A_n &= m \cdot A_{n-1} + A_{n-2},\ n \geq 2, \\ A_0 &= 0, \\ A_1 &= 1. \end{aligned}$$

Vzorec pro n-tý člen této posloupnosti pak bude:

$$A_n = \frac{{k_m}^n - (m - k_m)^n}{\sqrt{m^2 + 4}}.$$

Na závěr uvádím tabulku, ve které je přehled výše popsaných čísel.

m	řetězový zlomek	k_m	$m - k_m$	A_n
1	[1, 1, 1, ...]	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$A_n = 1 \cdot A_{n-1} + A_{n-2}$
2	[2, 2, 2, ...]	$\frac{2+\sqrt{8}}{2}$	$\frac{2-\sqrt{8}}{2}$	$A_n = 2 \cdot A_{n-1} + A_{n-2}$
3	[3, 3, 3, ...]	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{13}}{2}$	$A_n = 3 \cdot A_{n-1} + A_{n-2}$
4	[4, 4, 4, ...]	$\frac{4+\sqrt{20}}{2}$	$\frac{4-\sqrt{20}}{2}$	$A_n = 4 \cdot A_{n-1} + A_{n-2}$
5	[5, 5, 5, ...]	$\frac{5+\sqrt{29}}{2}$	$\frac{5-\sqrt{29}}{2}$	$A_n = 5 \cdot A_{n-1} + A_{n-2}$
6	[6, 6, 6, ...]	$\frac{6+\sqrt{40}}{2}$	$\frac{6-\sqrt{40}}{2}$	$A_n = 6 \cdot A_{n-1} + A_{n-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	[m, m, m, ...]	$\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}$	$\frac{m-\sqrt{m^2+4}}{2}$	$A_n = m \cdot A_{n-1} + A_{n-2}$

Zajímavostí je, že čísla k_m umocněná na velmi vysokou mocninu se blíží celým číslům (bezprostředně za desetinnou čárkou se vyskytuje velký počet nul nebo devítek). Například[8]:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{99} = 489\,526\,700\,523\,968\,661\,124.\overbrace{0\ldots0}^{20\times}2\,042\ldots$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{100} = 792\,070\,839\,848\,372\,253\,126.\overbrace{9\ldots9}^{20\times}8\,737\ldots$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{999} = 60\,069\,305\ \overbrace{3\ldots3}^{198\,cifer}\ 124.\overbrace{0\ldots0}^{208\times}16\,647\ldots$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1000} = 97\,194\,177\ \overbrace{7\ldots8}^{198\,cifer}\ 126.\overbrace{9\ldots9}^{208\times}89\,711\ldots$$

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{99} = 78\,486\,117\,902\,932\,683\,818\,009\,467\,010\,929\,214.\overbrace{0\ldots0}^{37\times}12\,741\ldots$$

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{100} = 189\,482\,250\,299\,273\,866\,835\,746\,159\,841\,800\,035\,873.\overbrace{9\ldots9}^{38\times}4\,722\ldots$$

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{999} = 24\,712\,099\ \overbrace{9\ldots9}^{372\,cifer}\ 213.\overbrace{9\ldots9}^{128\times}7\,448\ldots$$

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{1000} = 59\,660\,286\ \overbrace{9\ldots1}^{372\,cifer}\ 873.\overbrace{9\ldots9}^{128\times}3\,834\ldots$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{99} = 2\,338\,988\ \overbrace{9\ldots5}^{42\,cifer}\ 236.\overbrace{0\ldots0}^{51\times}\ 427\ldots$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{100} = 7\,725\,155\ \overbrace{7\ldots2}^{42\,cifer}\ 998.\overbrace{9\ldots9}^{51\times}\ 870\ldots$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{999} = 229\,188\,792\ \overbrace{4\ldots5}^{507\,cifer}\ 235.\overbrace{9\ldots9}^{496\times}76\,061\ldots$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{1000} = 756\,959\,160\ \overbrace{0\ldots9}^{507\,cifer}\ 998.\overbrace{9\ldots9}^{496\times}20\,858\ldots$$

[8]Výpočty byly provedeny pomocí internetové kalkulačky, která je k dispozici na `http://www.alpertron.com.ar/BIGCALC.HTM`.

Kapitola 2

Konstrukce zlatého řezu

Způsobů, jak konstrukčně rozdělit úsečku zlatým řezem, je více. Některé konstrukce pocházejí ze starověku, některé vznikly teprve nedávno. Zde je přehled různých konstrukcí, s kterými jsem se při zkoumání zlatého řezu setkala. Konstrukce jsou doplněny symbolickým zápisem jednotlivých kroků, aby bylo zřejmé, v jakém pořadí byly provedeny. V zápisech je u každého kroku uveden nejprve objekt, který se v tuto chvíli konstruuje, poté za středníkem následují vlastnosti tohoto objektu, podle kterých poznáme, jak jej sestrojit. Některé postupy nepopisují rozdělení dané úsečky ve zlatém řezu, ale nalezení chybějící části původní úsečky, je-li dána větší (menší) část z jejího rozdělení zlatým řezem. Pořadí konstrukcí je naprosto náhodné. U všech konstrukcí je uveden početní důkaz, kterým je ověřeno, že řešení skutečně odpovídá zadání, tedy že poměry délek příslušných úseček se skutečně rovnají zlatému číslu. Autorem konstrukce 1 byl pravděpodobně Herón z Alexandrie (viz 5.2). Konstrukce 4 je inspirována konstrukcí z Eukleidových Základů v tvrzení XI. v knize druhé (viz 5.1). Konstrukce 5, 6 a 7 vznikly jako úpravy konstrukcí, které jsou uvedeny v práci [6] na stranách 27–33. Konstrukce 8 je úpravou konstrukce uvedené v knize [4] na stranách 22–23, konstrukce 9 je úpravou konstrukce z knihy [37], strany 24–25. Konečně konstrukce 10 je uvedena spíše jako zajímavost. Není totiž konstrukcí v pravém slova smyslu, ale návodem, jak získat zlatý řez úsečky skládáním papíru.

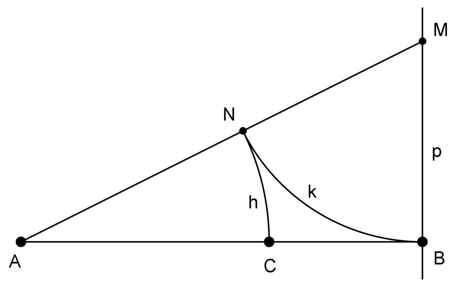
Konstrukce 1

Je dána úsečka AB libovolné délky. Úkolem je rozdělit tuto úsečku v bodě C zlatým řezem tak, aby $|AC| > |BC|$.

Postup konstrukce (obr. 2.1):

1. $\leftrightarrow p; p \perp AB, B \in p$
2. $M; M \in p, |MB| = \frac{1}{2}|AB|$

3. $k; k(M, |MB|)$
4. $N; N \in (k \cap AM)$
5. $h; h(A, |AN|)$
6. $C; C \in (h \cap AB)$



Obrázek 2.1: Konstrukce 1

Důkaz:

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AB. Nechť $|AB| = a$. Potom:

$$\begin{aligned}
|BM| &= \frac{a}{2}, \\
|MN| &= |BM| = \frac{a}{2}, \\
|AM| &= \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}, \\
|AC| &= |AN| = |AM| - |MN| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1), \\
|BC| &= |AB| - |AC| = a - \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).
\end{aligned}$$

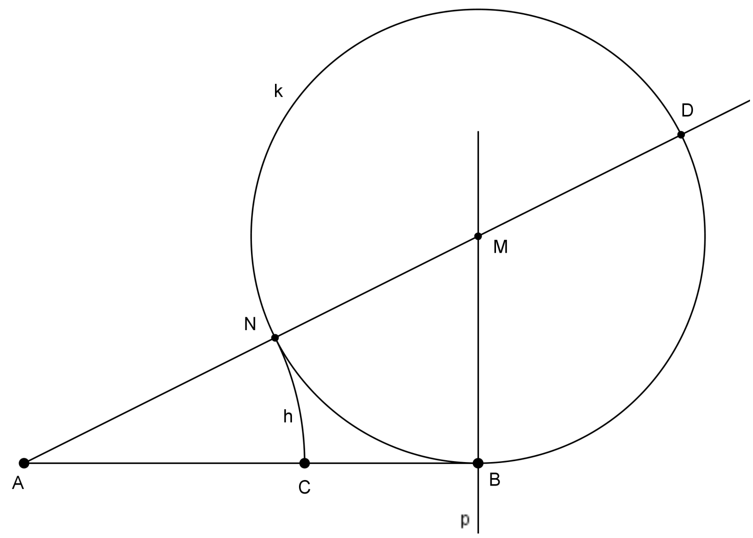
Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi, \\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)}{\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

Konstrukci 1 lze snadno dokázat také pomocí mocnosti bodu ke kružnici. Pro potřeby tohoto důkazu označíme druhý průsečík kružnice k s přímkou AM písmenem D (obr. 2.2). Potom platí:

$$\begin{aligned}
|AN| \cdot |AD| &= |AB|^2, \\
|AC| \cdot |AD| &= |AB|^2, \\
\frac{|AD|}{|AB|} &= \frac{|AB|}{|AC|},
\end{aligned}$$



Obrázek 2.2: Konstrukce 1 – důkaz

$$
\begin{aligned}
\frac{|AN| + |ND|}{|AB|} &= \frac{|AC| + |CB|}{|AC|}, \\
\frac{|AC| + |AB|}{|AB|} &= \frac{|AC| + |CB|}{|AC|}, \\
\frac{|AC|}{|AB|} + 1 &= 1 + \frac{|CB|}{|AC|}, \\
\frac{|AC|}{|AB|} &= \frac{|CB|}{|AC|}, \\
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{|AC|}{|CB|},
\end{aligned}
$$

což jsme chtěli dokázat.

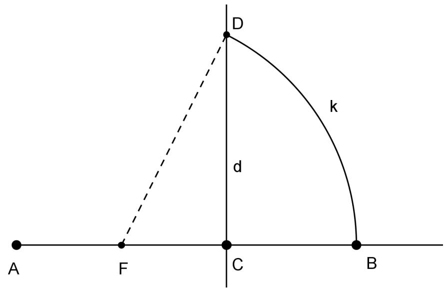
$\boxtimes$

Konstrukce 2

Je dána úsečka AC libovolné délky. Úkolem je nalézt na polopřímce AC bod B tak, aby bod C dělil úsečku AB ve zlatém řezu a současně $|AC| > |BC|$.

Postup konstrukce (obr. 2.3):

1. $F; F \in \frac{1}{2}|AC|$
2. $d; d \perp AC, C \in d$
3. $D; |CD| = |AC|, D \in d$
4. $k; k(F, |FD|)$
5. $B; B \in (\mapsto AC \cap k)$



Obrázek 2.3: Konstrukce 2

Důkaz:

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AC. Nechť $|AC| = b$. Potom:

$$\begin{aligned}
|AF| &= |CF| = \frac{b}{2}, \\
|CD| &= b, \\
|DF| &= |BF| = \sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b}{2}\sqrt{5}, \\
|AB| &= |AF| + |BF| = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{5} = \frac{b}{2}(1+\sqrt{5}), \\
|BC| &= |BF| - |CF| = \frac{b}{2}\sqrt{5} - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}(\sqrt{5}-1).
\end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{\frac{b}{2}(1+\sqrt{5})}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi, \\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{b}{\frac{b}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

Konstrukce 3

Je dána úsečka BC libovolné délky. Úkolem je nalézt na polopřímce BC bod A tak, aby bod C dělil úsečku AB zlatým řezem a současně $|AC| > |BC|$.

Postup konstrukce (obr. 2.4):

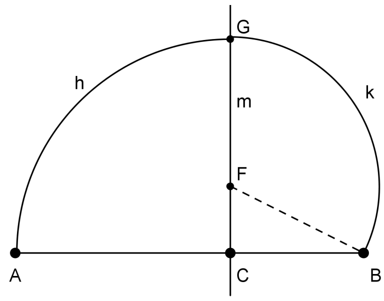
1. $\leftrightarrow m; m \perp BC, C \in m$
2. $F; F \in m, |FC| = \frac{1}{2}|BC|$

3. $k; k(F, |FB|)$

4. $G; G \in (\mapsto CF \cap k)$

5. $h; h(C, |CG|)$

6. $A; A \in (\mapsto BC \cap h)$



Obrázek 2.4: Konstrukce 3

Důkaz:

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky BC. Nechť $|BC| = c$. Potom:

$$\begin{aligned}
|CF| &= \frac{c}{2}, \\
|BF| &= |FG| = \sqrt{c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{c}{2}\sqrt{5}, \\
|AC| &= |CG| = |CF| + |FG| = \frac{c}{2} + \frac{c}{2}\sqrt{5} = \frac{c}{2}(1 + \sqrt{5}), \\
|AB| &= |AC| + |BC| = \frac{c}{2}(1 + \sqrt{5}) + c = \frac{c}{2}(3 + \sqrt{5}).
\end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{\frac{c}{2}(3 + \sqrt{5})}{\frac{c}{2}(1 + \sqrt{5})} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi, \\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{c}{2}(1 + \sqrt{5})}{c} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

⊠

Konstrukce 4

Je dána úsečka AB libovolné délky. Úkolem je rozdělit tuto úsečku v bodě C zlatým řezem tak, aby $|AC| > |BC|$.

Postup konstrukce (obr. 2.5):

1. $d; d \perp AB, A \in d$

2. $S; S \in d, |AS| = \frac{1}{2}|AB|$

3. $k; k(S, |SB|)$

4. $E; E \in (\mapsto SA \cap k)$

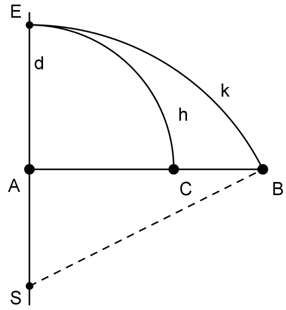
5. $h; h(A, |AE|)$

6. $C; C \in (AB \cap h)$

Důkaz:

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AB.

Nechť $|AB| = a$. Potom:



Obrázek 2.5: Konstrukce 4

$$\begin{aligned} |AS| &= \frac{a}{2}, \\ |SB| &= |ES| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}, \\ |AE| &= |AC| = |ES| - |AS| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1), \\ |BC| &= |AB| - |AC| = a - \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{a}{2}(3-\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi, \\ \frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)}{\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi. \end{aligned}$$

⊠

Konstrukce 5

Je dána úsečka AB libovolné délky. Úkolem je rozdělit tuto úsečku v bodě C zlatým řezem tak, aby $|AC| > |BC|$.

Postup konstrukce (obr. 2.6):

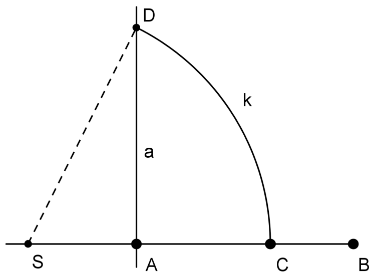
1. $\leftrightarrow a; a \perp AB, A \in a$

2. $D; D \in a, |AD| = |AB|$

3. $S; S \in \leftrightarrow AB, |AS| = \frac{1}{2}|AB|$

4. $k; k(S, |SD|)$

5. $C; C \in (k \cap AB)$



Obrázek 2.6: Konstrukce 5

Důkaz:

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AB. Nechť $|AB| = a$. Potom:

$$
\begin{aligned}
|AD| &= a, \\
|AS| &= \frac{a}{2}, \\
|DS| &= |CS| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}, \\
|AC| &= |CS| - |AS| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1), \\
|BC| &= |AB| - |AC| = a - \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).
\end{aligned}
$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$
\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi, \\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)}{\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}
$$

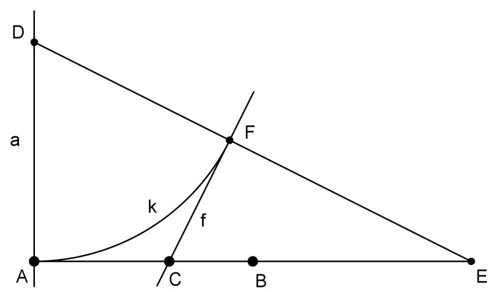
⊠

Konstrukce 6

Je dána úsečka AB libovolné délky. Úkolem je rozdělit tuto úsečku v bodě C zlatým řezem tak, aby $|AC| > |BC|$.

Postup konstrukce (obr. 2.7):

1. $\leftrightarrow a; a \perp AB, A \in a$
2. $D; D \in a, |AD| = |AB|)$
3. $k; k(D, |AB|)$
4. $E; E \in\mapsto AB, B \in \frac{1}{2}|AE|$
5. $F; F \in (k \cap DE)$
6. $\leftrightarrow f, f \perp DE, F \in f$
7. $C; C \in (f \cap AB)$



Obrázek 2.7: Konstrukce 6

Důkaz:

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AB. Nechť $|AB| = a$. Potom:

$$\begin{aligned} |AD| &= |BE| = a, \\ |AE| &= 2a, \\ |DE| &= \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}, \\ |DF| &= a, \\ |EF| &= |DE| - |DF| = a\sqrt{5} - a = a(\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Trojúhelníky AED a FEC jsou podobné podle věty uu[1], proto platí:

$$\frac{|EF|}{|CE|} = \frac{|AE|}{|DE|},$$

z tohoto vztahu vypočítáme délku úsečky CE:

$$|CE| = \frac{|EF| \cdot |DE|}{|AE|} = \frac{a(\sqrt{5}-1) \cdot a\sqrt{5}}{2a} = \frac{a\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

Vyjádříme délky dalších úseček:

$$\begin{aligned} |AC| &= |AE| - |CE| = 2a - \frac{a\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1), \\ |BC| &= |CE| - |BE| = \frac{a\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2} - a = \frac{a}{2}(3-\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi, \\ \frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)}{\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi. \end{aligned}$$

⊠

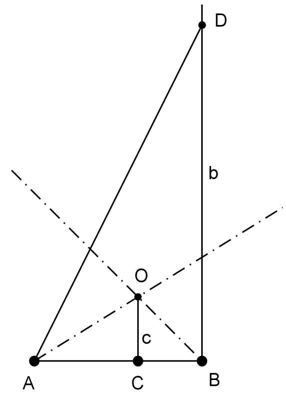
Konstrukce 7

Je dána úsečka AB libovolné délky. Úkolem je rozdělit tuto úsečku v bodě C zlatým řezem tak, aby $|AC| > |BC|$.

[1]Dva trojúhelníky jsou podobné podle věty uu, shodují-li se ve dvou úhlech.

Postup konstrukce (obr. 2.8):

1. $\leftrightarrow b; b \perp AB, B \in b$
2. $D; D \in b, |BD| = 2|AB|$
3. $\triangle ABD$
4. $O; O$ je střed kružnice vepsané $\triangle ABD$[2]
5. $\leftrightarrow c; c \perp AB, O \in c$
6. $C; C \in (c \cap AB)$



Obrázek 2.8: Konstrukce 7

Důkaz:

Než začneme počítat, je třeba si uvědomit, že délka úsečky BC je totožná s poloměrem ϱ kružnice vepsané trojúhelníku ABD. Tento poloměr vypočítáme pomocí běžně užívaných vzorců, které lze najít například ve středoškolských matematických tabulkách. Při výpočtu použijeme tyto vzorce:

$\varrho = \dfrac{S}{s}$, kde S značí obsah trojúhelníku a s poloviční obvod, přičemž $S = \dfrac{ab}{2}$ (v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b) a $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ (v libovolném trojúhelníku se stranami a, b, c).

Opět si nejprve vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AB. Nechť $|AB| = a$. Potom:

$$\begin{aligned}
|BD| &= 2a,\\
|AD| &= \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5},\\
S &= \frac{a \cdot 2a}{2} = a^2, \quad s = \frac{a + 2a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{2}(3+\sqrt{5}),\\
\varrho &= |BC| = \frac{S}{s} = \frac{a^2}{\frac{a}{2}(3+\sqrt{5})} = \frac{2a}{3+\sqrt{5}} = \frac{a}{2}(3-\sqrt{5}),\\
|AC| &= |AB| - |BC| = a - \frac{a}{2}(3-\sqrt{5}) = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1).
\end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi,\\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)}{\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

[2]Střed kružnice vepsané danému trojúhelníku je průsečíkem os vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku.

Konstrukce 8

Je dána úsečka AC libovolné délky. Úkolem je nalézt na polopřímce AC bod B tak, aby bod C dělil úsečku AB ve zlatém řezu a současně $|AC| > |BC|$.

Postup konstrukce (obr. 2.9):

1. $k_1; k_1(A, |AC|)$
2. $k_2; k_2(C, |AC|)$
3. $K; K \in (k_1 \cap k_2)$
4. $L; L \in \mapsto KA, A \in \frac{1}{2}|KL|$
5. $M; M \in \mapsto KC, C \in \frac{1}{2}|KM|$
6. $k; K \in k, L \in k, M \in k$[3]
7. $B; B \in (\mapsto AC \cap k)$

Důkaz:

Pro potřeby důkazu označím písmenem D střed úsečky AC a písmenem S střed kružnice k (což je kružnice opsaná trojúhelníku KLM, obr. 2.10). V důkazu je opakovaně využit vzorec pro výpočet výšky rovnostranného trojúhelníku[4] (trojúhelníky ACK a KLM jsou rovnostranné) a fakt, že v rovnostranném trojúhelníku výšky splývají s těžnicemi a s osami stran, čili jejich průsečík dělí každou z nich v poměru 2 : 1. Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AC. Nechť $|AC| = b$. Potom:

$$
\begin{aligned}
|AD| &= |CD| = \frac{b}{2}, \\
|AK| &= |CK| = b, \\
|DK| &= \frac{b}{2}\sqrt{3}, \\
|LM| &= |KM| = |KL| = 2b, \\
|SK| &= |BS| = \frac{2}{3} \cdot \frac{2b}{2}\sqrt{3} = \frac{2b}{3}\sqrt{3}, \\
|DS| &= |SK| - |DK| = \frac{2b}{3}\sqrt{3} - \frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{b}{6}\sqrt{3},
\end{aligned}
$$

[3]Kružnice k je kružnicí opsanou trojúhelníku KLM. Středem kružnice opsané danému trojúhelníku je průsečík os stran tohoto trojúhelníku.

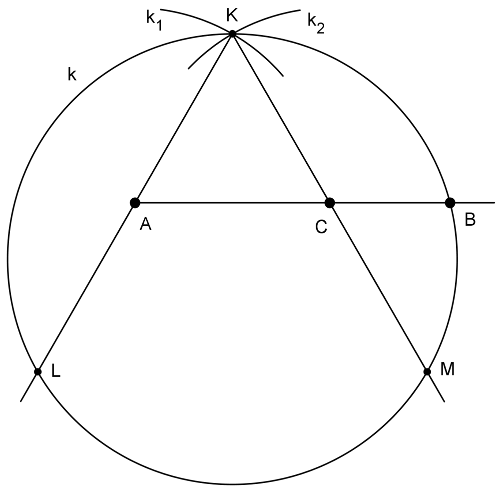
[4]Výšku v rovnostranného trojúhelníku, jehož strany mají délku a, vypočteme podle vzorce: $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

$$
\begin{aligned}
|BD| &= \sqrt{|BS|^2 - |DS|^2} = \sqrt{\left(\frac{2b}{3}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{b}{6}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{b}{2}\sqrt{5}, \\
|BC| &= |BD| - |CD| = \frac{b}{2}\sqrt{5} - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1), \\
|AB| &= |BD| + |AD| = \frac{b}{2}\sqrt{5} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{5}).
\end{aligned}
$$

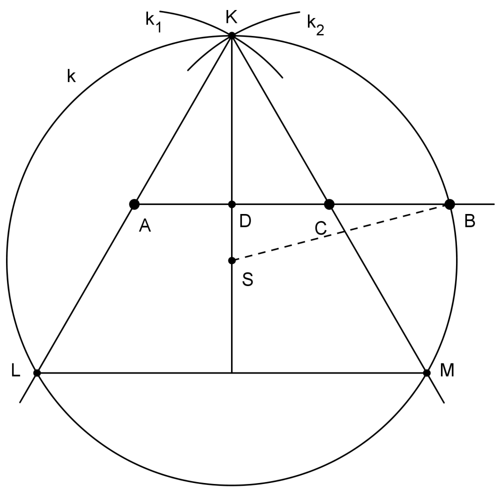
Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$
\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{\frac{b}{2}(1+\sqrt{5})}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi, \\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{b}{\frac{b}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}
$$

⊠



Obrázek 2.9: Konstrukce 8



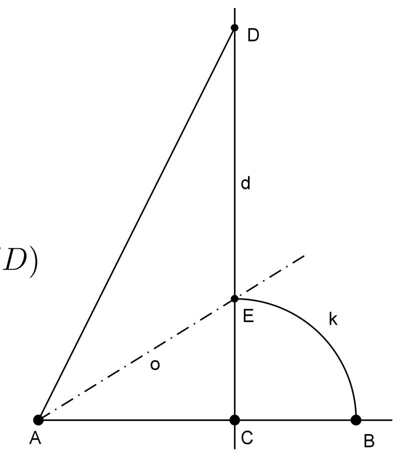
Obrázek 2.10: Konstrukce 8 – důkaz

Konstrukce 9

Je dána úsečka AC libovolné délky. Úkolem je nalézt na polopřímce AC bod B tak, aby bod C dělil úsečku AB ve zlatém řezu a současně $|AC| > |BC|$.

Postup konstrukce (obr. 2.11):

1. $d; d \perp AC, C \in d$
2. $D; |DC| = 2|AC|, D \in d$
3. $\triangle ACD$
4. $\leftrightarrow o$; osa vnitřního úhlu u vrcholu A (v $\triangle ACD$)
5. $E; E \in (o \cap CD)$
6. $k; k(C, |CE|)$
7. $B; B \in (\hookrightarrow CA \cap k)$



Obrázek 2.11: Konstrukce 9

Důkaz:

V důkazu využijeme goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku a vzorec $\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, který v našem případě bude platit i bez absolutní hodnoty ($\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ použijeme pro podíl délek úseček, bude tedy kladný).

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AC. Nechť $|AC| = b$. Potom:

$$\begin{aligned}
|CD| &= 2b,\\
|AD| &= \sqrt{b^2 + (2b)^2} = b\sqrt{5},\\
|\sphericalangle DAC| &= \alpha,\\
\cos\alpha &= \frac{b}{b\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}},\\
\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},\\
\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{|CE|}{|AC|} \Rightarrow |CE| = |BC| = |AC|\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{b}{2}(\sqrt{5}-1),\\
|AB| &= |AC| + |BC| = b + \frac{b}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{b}{2}(1+\sqrt{5}).
\end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{\frac{b}{2}(1+\sqrt{5})}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi,\\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{b}{\frac{b}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

⊠

Konstrukce 10

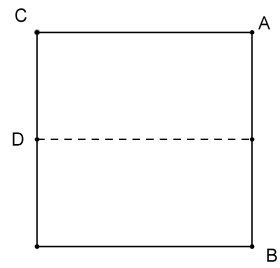
Je dána úsečka AB libovolné délky. Úkolem je rozdělit tuto úsečku v bodě C zlatým řezem tak, aby $|AC| > |BC|$.

Postup pomocí přehýbání papíru:

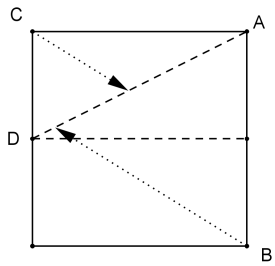
Z papíru vystřihneme čtverec, jehož délka je rovna délce úsečky AB. Tento čtverec přeložíme v polovině (vznikne obdélník) a opět rozevřeme. Střed strany protější ke straně AB označíme písmenem D, druhý krajní bod úhlopříčky čtverce vedené z bodu B označíme písmenem C (obr. 2.12).

Papír přeložíme podél pomyslné úsečky AD a opět rozložíme. Nyní přiložíme bod C na přehyb AD tak, aby úsečka CD splývala s úsečkou AD. Obdobně vrchol B přiložíme na přehyb AD tak, aby úsečka AB splývala s úsečkou AD (obr. 2.13).

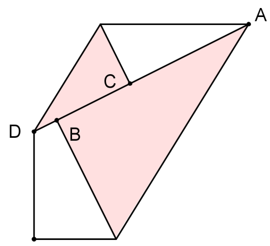
Nyní bod C dělí úsečku AB ve zlatém řezu tak, jak bylo požadováno v zadání (obr. 2.14).



Obrázek 2.12: Konstrukce 10 a)



Obrázek 2.13: Konstrukce 10 b)



Obrázek 2.14: Konstrukce 10 c)

Důkaz:

Nejprve si vyjádříme délky jednotlivých úseček pomocí dané (libovolné, ale pevné) velikosti úsečky AB. Nechť $|AB| = a$. Potom:

$$
\begin{aligned}
|AC| &= a, \\
|CD| &= \frac{a}{2}, \\
|AD| &= \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.
\end{aligned}
$$

Po přiložení vrcholů B, C na přehyb AD:

$$
\begin{aligned}
|AC| &= |AD| - |CD| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1), \\
|AB| &= a, \\
|BC| &= |AB| - |AC| = a - \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).
\end{aligned}
$$

Nyní můžeme vypočítat hodnoty příslušných poměrů:

$$\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{a}{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi, \\
\frac{|AC|}{|BC|} &= \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)}{\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

⊠

U této úlohy je třeba si uvědomit, že postup je sice teoreticky přesný, ale v praxi je velmi obtížné této přesnosti dosáhnout. Stoprocentní přesnost těžko zajistíme při rýsování, natož při přehýbání papíru, kde má velký vliv nejen preciznost naší práce, ale navíc i druh, síla, vlhkost papíru a další okolnosti.

Kapitola 3

Zlatý řez v planimetrii

Zlaté číslo – poměr zlatého řezu – se objevuje v mnoha rovinných i prostorových geometrických útvarech, a to často na místech, kde by je nikdo nečekal. Některé útvary si dokonce vysloužily adjektivum *zlatý* (zlatý obdélník, zlatý trojúhelník, zlatá spirála). V této kapitole se seznámíme s výskytem zlatého řezu v rovinných obrazcích a ukážeme si několik zajímavých planimetrických úloh, jejichž řešení nějakým způsobem se zlatým řezem souvisí.

3.1 Zlatý obdélník

Zlatým obdélníkem nazýváme takový obdélník s rozměry $a \times b$, $a > b$, pro který platí:

$$\frac{a}{b} = \varphi,$$

neboli délky jeho stran jsou v poměru zlatého řezu.

Zlatý obdélník má jako jediný ze všech obdélníků následující zajímavou vlastnost:

> *Oddělíme-li od zlatého obdélníku $ABCD$ $(a \times b)$ čtverec $AEFD$ $(b \times b)$, bude zbylý obdélník $BCFE$ $(b \times (a - b))$ opět zlatý* (obr. 3.1).

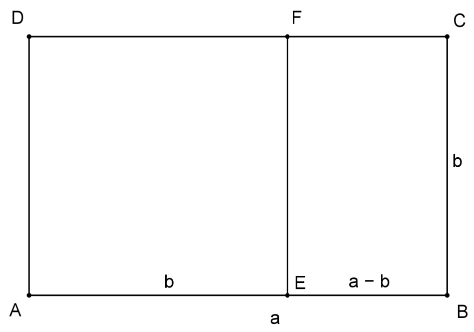
Ukážeme si, že výše zmíněné pravidlo platí pouze pro zlatý obdélník (neboli neexistuje jiný poměr délek stran obdélníku, který by se zachoval po odebrání čtverce, než zlaté číslo).

Předpokládejme libovolný obdélník s rozměry $a \times b$, kde $a > b$. Poměr $\frac{a}{b}$ označme m. Hledáme m takové, aby platilo

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a - b},$$

což je ekvivalentní podmínka s podmínkou

$$\frac{b}{a} = \frac{a - b}{b}.$$



Obrázek 3.1: Oddělení čtverce od zlatého obdélníku

Dosadíme $\frac{a}{b} = m$ (respektive $\frac{b}{a} = \frac{1}{m}$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} &= m - 1, \\ 0 &= m^2 - m - 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

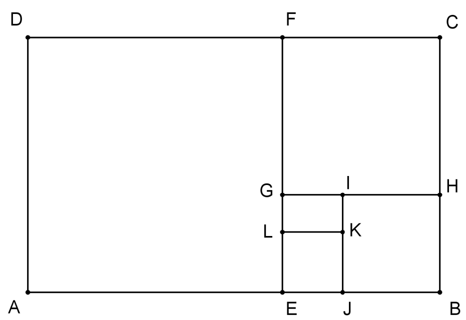
Rovnice 3.1 má kořeny

$$m_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, m_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

přičemž druhý kořen nepřichází v úvahu, jelikož je záporný a m značí poměr délek stran, tedy podíl dvou kladných čísel. Získali jsme tedy pouze jedno řešení:

$$m = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi,$$

což znamená, že uvedená vlastnost platí pouze pro obdélník, jehož strany jsou v poměru φ.



Obrázek 3.2: Postupné oddělování čtverců

V oddělování čtverců lze stejným způsobem pokračovat. Získáme tak stále menší a menší zlaté obdélníky $EBHG$, $EGIJ$, $GIKL, \ldots$ (obr. 3.2).

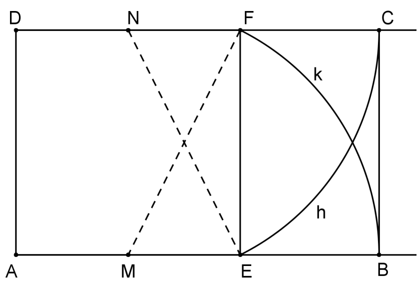
Zlatý obdélník lze narýsovat mnoha způsoby. Vždy můžeme postupovat tak, že pomocí některé z konstrukcí v kapitole 2 narýsujeme dvě úsečky, jejichž poměr délek je zlaté číslo, a tyto úsečky použijeme jako strany hledaného obdélníku. Existují ale i konstrukce zaměřené přímo na hledání zlatého obdélníku.

Konstrukce 1

Sestrojte zlatý obdélník $ABCD$, je-li dána jeho kratší strana AD.

Řešení (obr. 3.3):

1. $E, F; AEFD$ je čtverec
2. $M; M \in \frac{1}{2}|AE|$
3. $N; N \in \frac{1}{2}|DF|$
4. $k; k(M; |FM|)$
5. $h; h(N; |EN|)$
6. $B; B \in (\mapsto AE \cap k)$
7. $C; C \in (\mapsto DF \cap h)$
8. obdélník $ABCD$



Obrázek 3.3: Konstrukce 1

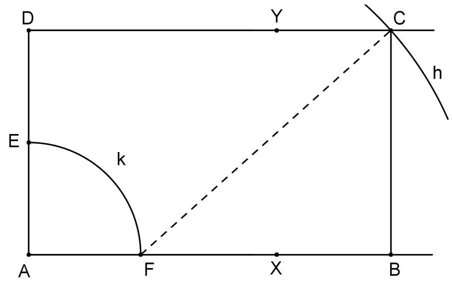
Tato konstrukce vychází z konstrukce 2 uvedené na straně 27.

Konstrukce 2

Sestrojte zlatý obdélník $ABCD$, je-li dána jeho kratší strana AD.

Řešení (obr. 3.4):

1. $\mapsto AX; AX \perp AD$
2. $\mapsto DY; DY \perp AD$
3. $E; E \in \frac{1}{2}|AD|$
4. $k; k(A; |AE|)$



Obrázek 3.4: Konstrukce 2

5. $F; F \in (\mapsto AX \cap k)$

6. $h; h(F, 3|AE|)$

7. $C; C \in (\mapsto DY \cap h)$

8. $B; B \in \mapsto AX, |AB| = |CD|$

9. obdélník $ABCD$

Ukážeme si, že zde uvedená konstrukce dává korektní výsledek:

Nechť $|AD| = b$, potom:

$$\begin{aligned}
|AE| &= |AF| = \frac{b}{2}, \\
|CF| &= 3 \cdot |AE| = \frac{3b}{2}, \\
|BC| &= |AD| = b, \\
|BF| &= \sqrt{|CF|^2 - |CB|^2} = \sqrt{\frac{9b^2}{4} - b^2} = \frac{b}{2}\sqrt{5}, \\
|AB| &= |AF| + |BF| = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{5} = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{5}), \\
\frac{|AB|}{|AD|} &= \frac{\frac{b}{2}(1 + \sqrt{5})}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.
\end{aligned}$$

Poměr stran narýsováného obdélníku je tedy skutečně roven zlatému číslu.

Další dvě konstrukce byly inspirovány konstrukcemi uvedenými v [34] na stranách 27 a 29.

Konstrukce 3

K pravoúhlému trojúhelníku s odvěsnami dlouhými 3 a 4 jednotky délky a s přeponou dlouhou 5 jednotek délky připište zlatý obdélník tak, aby jeho kratší strana byla shodná s delší odvěsnou.

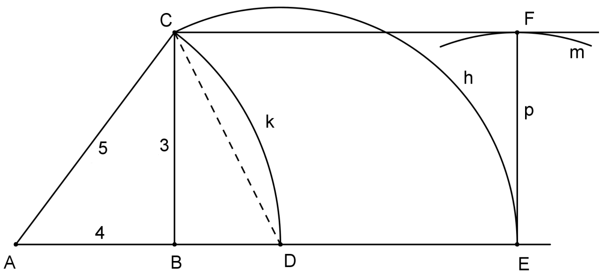
Řešení (obr. 3.5):

Pravoúhlý trojúhelník popíšeme ABC, kde BC je delší odvěsna a AC přepona. K odvěsně BC připíšeme podle následujícího postupu obdélník $BEFC$.

1. $k; k(A, |AC|)$

2. $D; D \in (\mapsto AB \cap k)$

3. $h; h(D, |CD|)$
4. $E; E \in (\mapsto AB \cap h)$
5. $\leftrightarrow p; p \perp BE, E \in p$
6. $m; m(E, |BC|)$
7. $F; F \in (p \cap m)$
8. obdélník $BEFC$



Obrázek 3.5: Konstrukce 3

Ještě ověříme, že obdélník $BEFC$ je opravdu zlatý. Víme, že $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|AC| = 5$. Dále platí:

$$\begin{aligned} |AD| &= 5, \\ |BD| &= |AD| - |AB| = 5 - 3 = 2, \\ |CD| &= |DE| = \sqrt{|BC|^2 + |BD|^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \\ |BE| &= |BD| + |DE| = 2 + 2\sqrt{5} = 2(1 + \sqrt{5}), \\ \frac{|BE|}{|BC|} &= \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi. \end{aligned}$$

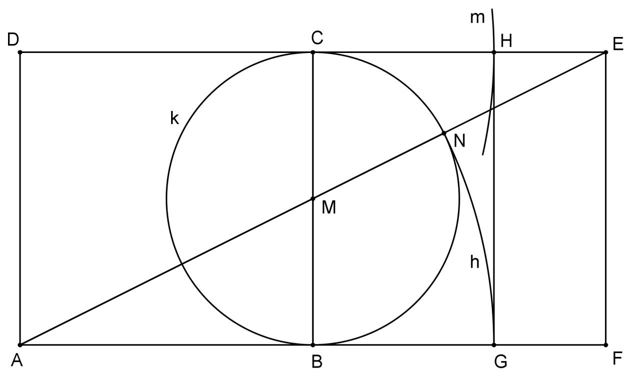
Poměr délek delší a kratší strany obdélníku $BEFC$ je roven φ, obdélník je tedy zlatý.

Konstrukce 4

Mějme dva shodné čtverce $ABCD$, $BCEF$ (stranu BC mají společnou). Úkolem je oddělit od čtverce $BCEF$ obdélník $EFGH$ tak, aby obdélník $AGHD$ byl zlatý.

Řešení (obr. 3.6):

1. $M; M \in (CB \cap AE)$
2. $k; k(M, |BM|)$
3. $N; N \in (EM \cap k)$
4. $h; h(A, |AN|)$
5. $G; G \in (BF \cap h)$
6. $m; m(D, |AN|)$
7. $H; H \in (CE \cap m)$



Obrázek 3.6: Konstrukce 4

8. obdélník $AGHD$

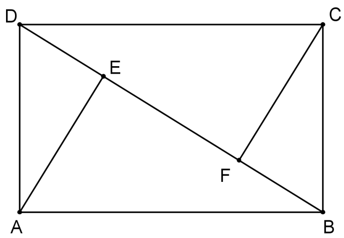
Opět ověříme, že obdélník $AGHD$ je skutečně zlatý. Nechť strany daných čtverců mají délku a. Tedy $|AB| = |BC| = \cdots = a$. Potom:

$$\begin{aligned} |BM| &= |MN| = \frac{a}{2}, \\ |AM| &= \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}, \\ |AN| &= |AG| = |MN| + |AM| = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}(1+\sqrt{5}), \\ \frac{|AG|}{|AD|} &= \frac{\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

V souvislosti se zlatým obdélníkem uvedu dále jednu zajímavou planimetrickou úlohu převzatou z knihy [37].

Je dán zlatý obdélník $ABCD$. Sestrojíme úhlopříčku BD a z bodů A, C na ní spustíme kolmice. Paty kolmic označíme E, F. Porovnejte délky úseček AE, EF, FC (obr. 3.7).



Obrázek 3.7: Příklad

Řešení:

Označme velikost úhlu ABE jako α, velikost úhlu BAE jako β. Jelikož úhel AEB je pravý, platí, že $\alpha + \beta = 90°$ (aby součet úhlů v trojúhelníku byl 180°). Díky tomu je ale i $|\sphericalangle DAE| = \alpha$, $|\sphericalangle FBC| = \beta, \ldots$ a trojúhelníky ABD, EBA, EAD jsou podobné (podle věty uu). Platí:

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|EB|}{|EA|} = \frac{|EA|}{|ED|}. \tag{3.2}$$

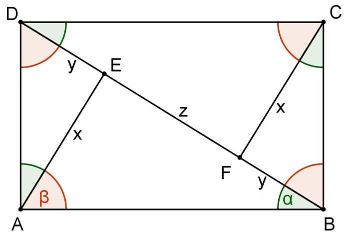
Navíc z předpokladů víme, že $\dfrac{|AB|}{|AD|} = \varphi$. Označme dále $|AE| = |FC| = x$, $|EF| = z$, $|DE| = |BF| = y$ (obr. 3.8) a dosaďme do vztahu (3.2):

$$\varphi = \frac{z+y}{x} = \frac{x}{y}$$

Odtud plyne, že úsečka délky $z + y$ je rozdělena zlatým řezem na části x a y, neboli $z + y = x + y$, a tedy $z = x$.

Zjistili jsme, že $|AE| = |EF| = |FC|$.

Z průběhu odvození této vlastnosti je navíc zřejmé, že pro obdélník jiných rozměrů tato vlastnost neplatí. Délky úseček AE, EF, FC se dají zjistit samozřejmě i početně. Za jednotku délky zvolíme $|AD|$, pro delší stranu obdélníku potom platí: $|AB| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Délku x určíme například takto:



Obrázek 3.8: Řešení příkladu

$$
\begin{aligned}
|BD| &= \sqrt{|AB|^2 + |AD|^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, \\
S_{ABD} &= \frac{|AB| \cdot |AD|}{2} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot 1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \\
S_{ABD} &= \frac{|BD| \cdot x}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot S_{ABD}}{|BD|}.
\end{aligned}
$$

Do posledního vztahu můžeme dosadit (obsah trojúhelníku ABD i délku úsečky BD známe) a vyjádřit hodnotu x číselně. Dopočítání hodnot y a z je pak už pouze záležitostí Pythagorovy věty a práce se zlomky a odmocninami.

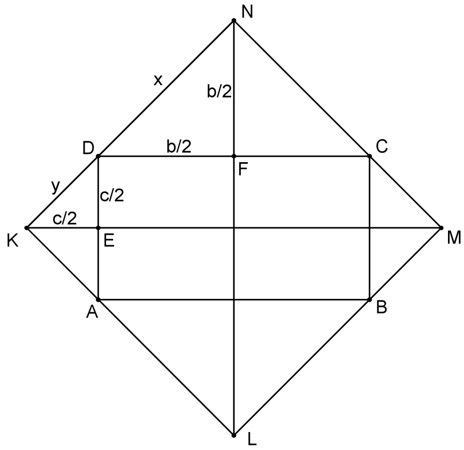
Nakonec ještě upozorním na „vlastnost zlatého obdélníku“, která se v literatuře o zlatém řezu velmi často objevuje, ale dle mého názoru trochu neprávem. Jako výsada zlatého obdélníku bývá uváděno následující tvrzení:

Vepíšeme-li zlatý obdélník do čtverce tak, že strany obdélníku jsou rovnoběžné s úhlopříčkami čtverce, budou vrcholy obdélníku dělit jednotlivé strany čtverce zlatým řezem.

Problém je v tom, že uvedená vlastnost funguje pro obdélník, jehož strany jsou v libovolném poměru, nikoliv pouze v poměru zlatého řezu. Bude-li mít například vepisovaný obdélník strany v poměru 3 : 4, budou jeho vrcholy dělit strany čtverce také v poměru 3 : 4. Důvod je velmi prostý:

Daný čtverec označíme $KLMN$, obdélník $ABCD$. Nechť $|AB| = b$, $|BC| = c$, tedy strany obdélníku jsou v poměru $\dfrac{b}{c}$. Délky úseček, na které dělí vrcholy obdélníku jednotlivé strany čtverce, označíme x, y. Průsečík úseček CD a LN označíme písmenem F, průsečík úseček AD a KM písmenem E (obr. 3.9). Trojúhelníky KED, DFN jsou podobné (podle věty *uu*). Oba jsou rovnoramenné a pravoúhlé. Platí:

$$
\begin{aligned}
|DN| &= x,\\
|DF| &= |FN| = \frac{b}{2},\\
|DK| &= y,\\
|EK| &= |DE| = \frac{c}{2}.
\end{aligned}
$$



Obrázek 3.9: Obdélník ve čtverci

Z podobnosti trojúhelníků plyne:

$$
\begin{aligned}
\frac{|DF|}{|EK|} &= \frac{|DN|}{|DK|},\\
\frac{\frac{b}{2}}{\frac{c}{2}} &= \frac{x}{y},\\
\frac{b}{c} &= \frac{x}{y}.
\end{aligned}
$$

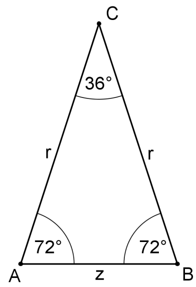
Poměr $\frac{x}{y}$ je roven poměru $\frac{b}{c}$, ale nezáleží na tom, jaká je konkrétní hodnota podílu $\frac{b}{c}$. V žádném kroku důkazu jsme nepotřebovali předpoklad, že $\frac{b}{c} = \varphi$. Uvedené tvrzení tedy není výsadou zlatého obdélníku, ale platí pro obdélník libovolných rozměrů.

3.2 Zlatý trojúhelník

Zlatý trojúhelník je takový rovnoramenný trojúhelník s ramenem délky r a základnou délky z, pro který platí:

$$\frac{r}{z} = \varphi,$$

neboli poměr délek ramene a základny je zlaté číslo.



Obrázek 3.10: Zlatý trojúhelník

Každý zlatý trojúhelník má proti základně úhel o velikosti 36° a při základnách úhly velké 72° (obr. 3.10). Tuto skutečnost si dokážeme:

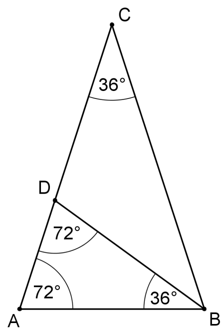
Za jednotku délky zvolíme základnu trojúhelníku. Nyní, aby byl trojúhelník zlatý, musí mít ramena délku $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Velikost úhlu při základně označíme α a trojúhelník rozdělíme výškou k základně na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Pro úhel α platí:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}. \tag{3.3}$$

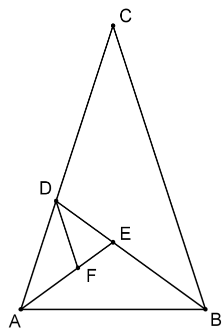
Zbývá nám dokázat, že $\cos 72° = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$. Potom by úhel α měřil 72°, druhý úhel při základně musí být shodný (jedná se o rovnoramenný trojúhelník) a na úhel naproti základně zbývá 36° (součet úhlů v trojúhelníku musí být 180°). Vztahu $\cos 72° = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$ budeme muset prozatím věřit. Jeho platnost je dokázána v podkapitole 3.4, protože pomocí pravidelného pětiúhelníku je důkaz poměrně elegantní a snadnější, než důkazy jiné.

Tvrzení platí i obráceně. Má-li rovnoramenný trojúhelník velikosti vnitřních úhlů 72°, 72° a 36°, je tento trojúhelník zlatý. Platí-li totiž, že $\cos 72° = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$, potom je poměr délek poloviny základny a ramene $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$, poměr délek základny a ramene tedy bude $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$ a převrácená hodnota tohoto zlomku udává poměr délek ramene a základny daného trojúhelníku: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

Vepíšeme-li do zlatého trojúhelníku ABC se základnou AB rovnoramenný trojúhelník DAB s ramenem AB a základnou AD, bude tento trojúhelník opět zlatý. Trojúhelník DAB má totiž shodné úhly s trojúhelníkem ABC. Úhel u vrcholu A mají oba trojúhelníky společný. Tento úhel měří 72°. Trojúhelník DAB je rovnoramenný se zákaldnou AD, proto úhel u vrcholu D musí být shodný s úhlem u vrcholu A a měří tedy také 72°. Na třetí vnitřní úhel zbývá 36°. Jelikož mají vnitřní úhly trojúhelníku DAB velikosti 72°, 72° a 36°, je zlatý (obr. 3.11).



Obrázek 3.11: Vepsaný trojúhelník



Obrázek 3.12: Další vepsané trojúhelníky

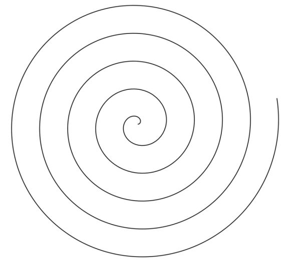
Stejně jako u zlatého obdélníku můžeme do sebe vepisovat stále menší a menší zlaté trojúhelníky ADB, DEA, $EFD, \ldots$ (obr. 3.12).

3.3 Zlatá spirála

Spirála, které se občas říká zlatá, je speciálním případem logaritmické spirály. Proto nejprve stručně vysvětlím, co je logaritmická spirála (a spirála vůbec).

Spirály jsou rovinné křivky, které lze zavést tak, že vznikají jako trajektorie bodu pohybujícího se nějakým předepsaným způsobem po polopřímce (vzdaluje se od počátku polopřímky), přičemž se tato polopřímka současně otáčí okolo svého počátku. (Obecně se bod může pohybovat po přímce, která se otáčí okolo libovolného pevného bodu, nám však postačí toto zjednodušení.) Část polopřímky ohraničená jejím počátkem a bodem spirály se nazývá průvodič daného bodu. Počátek otáčející se polopřímky bývá nazýván pólem spirály. Mezi nejznámější spirály patří Archimédova spirála a logaritmická spirála.

Archimédova spirála (obr. 3.13) vzniká jako trajektorie bodu, který se od počátku polopřímky vzdaluje rovnoměrně. Jinými slovy, kolikrát zvětšíme úhel otočení polopřímky, tolikrát se vzdálí bod od počátku polopřímky. Vzdálenost jednotlivých závitů je pak konstantní. Rovnice Archimédovy spirály v polárních souřadnicích (r, Θ) vypadá následovně[1]



Obrázek 3.13: Archimédova spirála

$$r = a \cdot \Theta,$$

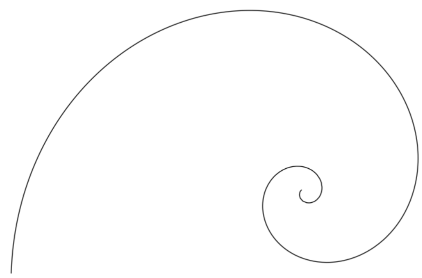
kde a je libovolná kladná konstanta. S touto spirálou se setkáme například při pohledu z boku na srolovaný koberec.

Definice logaritmické spirály je trochu složitější. Její rovnice v polárních souřadnicích má tvar

$$r = a \cdot e^{b \cdot \Theta}, \tag{3.4}$$

kde a, b jsou kladné reálné konstanty a e je základ přirozeného logaritmu.

Tato křivka (obr. 3.14) má spoustu zajímavých vlastností. Je to transcendentní křivka[2], která protíná průvodiče svých bodů pod konstantním úhlem ω, (úhel průvodiče a křivky se měří jako úhel průvodiče daného bodu a tečny křivky v tomto bodě) přičemž pro tento úhel platí [25]:



Obrázek 3.14: Logaritmická spirála

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{b}.$$

Aritmetické posloupnosti úhlů Θ přísluší geometrická posloupnost délek průvodičů r. V tabulce jsou uvedeny hodnoty úhlu Θ zvyšující se s diferencí jedna. K nim příslušné délky průvodičů se pokaždé násobí kvocientem e^b.

Θ	0	1	2	3	4	...
r	a	ae^b	ae^{2b}	ae^{3b}	ae^{4b}	...

S rostoucí hodnotou úhlu Θ se křivka vzdaluje od svého pólu, naopak s klesající hodnotou úhlu Θ se k pólu nekonečně přibližuje. Přitom má „stále stejný tvar“.

[1] Polární souřadnice udávají polohu bodu A pomocí jeho vzdálenosti r od počátku soustavy souřadnic P a úhlu Θ (theta), který svírá polopřímka PA s kladným směrem osy x. (Úhel Θ se zadává v radiánech.)

[2] Transcendentní křivka je taková křivka, kterou lze vyjádřit pouze transcendentním předpisem (transcendentní předpis je každý předpis, který není algebraický), oproti tomu algebraické křivky lze vyjádřit algebraickou rovnicí: $a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_ny^n = 0$.

Kdybychom vzali její část blízko pólu a zvětšili jí, dostali bychom část téže logaritmické spirály, jen dál od pólu.

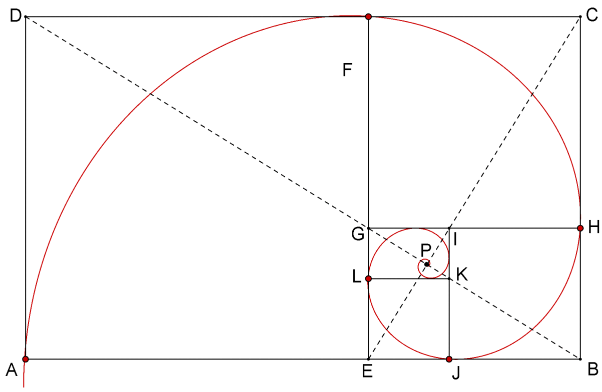
Zlatou spirálu získáme speciální volbou konstanty b, a to takovou, aby pro $\Theta = \dfrac{\pi}{2}$ bylo $e^{b\cdot\Theta} = \varphi$. To znamená, že $b = \dfrac{2\ln\varphi}{\pi}$. Dosazením této hodnoty b do předpisu (3.4) dostáváme:

$$\begin{aligned} r &= a \cdot e^{\frac{2\ln\varphi}{\pi}\cdot\Theta}, \\ r &= a \cdot e^{\ln\varphi\cdot\frac{2\Theta}{\pi}}, \\ r &= a \cdot \varphi^{\frac{2\Theta}{\pi}}. \end{aligned}$$

Konstantu a můžeme zvolit za jednotku délky. Potom má rovnice zlaté spirály v polárních souřadnicích tvar

$$r = \varphi^{\frac{2\Theta}{\pi}}.$$

Tuto spirálu lze vkreslit do obrázku, který jsme získali vepisováním stále menších zlatých obdélníků do sebe. Spirála bude procházet po řadě vrcholy A, F, H, J, $L, \ldots$ Její pól P je průsečík úseček BD, CE. Při změně úhlu o 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ se změní délka průvodiče φ krát (obr. 3.15).

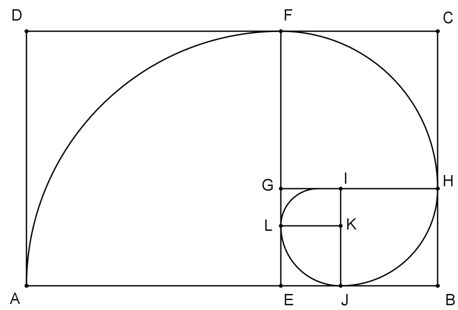


Obrázek 3.15: Zlatá spirála a zlaté obdélníky

Zlatou spirálu lze poměrně dobře aproximovat pomocí čtvrtkružnic. Sestrojíme-li oblouk $\widehat{AB}$ se středem E, na něj připojíme oblouk $\widehat{FH}$ se středem G atd., získáme křivku, která je na první pohled téměř totožná se zlatou spirálou (obr. 3.16).

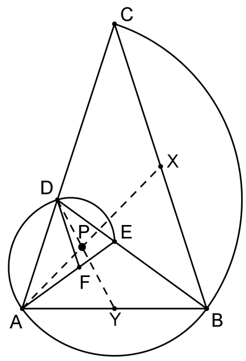
Logaritmickou spirálou lze proložit i vrcholy do sebe vepisovaných zlatých trojúhelníků. Na spirále budou ležet po řadě body C, B, A, D, $E, \ldots$, pólem je průsečík úseček AX, DY, kde X je střed strany BC a Y střed strany AB. I tato logaritmická spirála má (podle [4]) předpis, ve kterém figuruje číslo φ:

$$r = \varphi^{\frac{5\Theta}{3\pi}}.$$



Obrázek 3.16: Aproximace zlaté spirály ve zlatém obdélníku

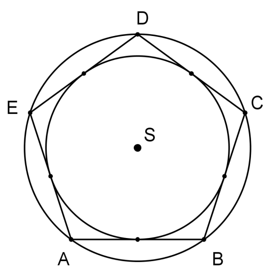
Tento předpis obdržíme, dosadíme-li do rovnice (3.4) $b = \frac{2\ln\varphi}{3\pi}$ a konstantu a zvolíme za jednotku délky. Délka průvodiče se změní φ krát, změníme-li úhel Θ o $108°$ $\left(\frac{3\pi}{5}\right)$. Spirálu lze opět aproximovat pomocí kružnicových oblouků (obr. 3.17). Oblouk $\widehat{BC}$ je částí kružnice se středem D, oblouk $\widehat{AB}$ je částí kružnice se středem E, oblouk $\widehat{AD}$ je částí kružnice se středem F atd.



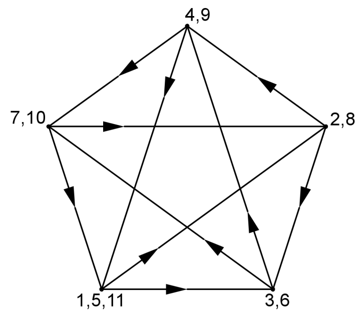
Obrázek 3.17: Aproximace logaritmické spirály ve zlatém trojúhelníku

3.4 Pravidelný pětiúhelník

Mnohoúhelník, který má pět shodných stran a pět shodných vnitřních úhlů, se nazývá pravidelný pětiúhelník. Stejně jako všem dalším pravidelným mnohoúhelníkům, můžeme pravidelnému pětiúhelníku opsat i vepsat kružnici, přičemž tyto kružnice mají tentýž střed (obr. 3.18).



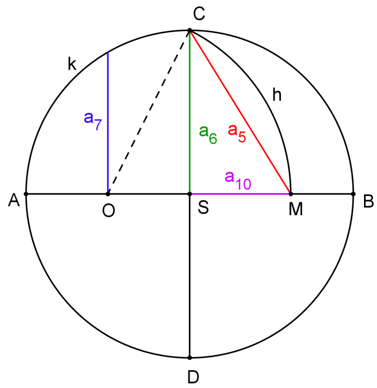
Obrázek 3.18: Kružnice opsaná a vepsaná



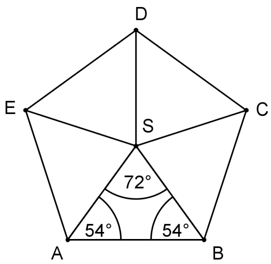
Obrázek 3.19: Pětiúhelník jedním tahem

Pro zajímavost podotkněme, že je to jediný pravidelný mnohoúhelník, který má stejný počet stran a úhlopříček, a také mnohoúhelník s nejmenším počtem vrcholů, který lze včetně úhlopříček nakreslit jedním tahem (obr. 3.19).

Na středních školách se žáci většinou učí, jak sestrojit pravidelný pětiúhelník, známe-li poloměr kružnice opsané. K tomů slouží pomocná konstrukce (obr. 3.20), kde vyjdeme od dané kružnice k se středem S, sestrojíme její průměr AB a průměr k němu kolmý CD. Dále najdeme střed O poloměru AS a sestrojíme kružnici h se středem O a poloměrem OC. Průsečík kružnice h s úsečkou BS označíme M. Nyní se délka úsečky CM rovná délce strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného do kružnice k. Navíc délka úsečky MS je velikost strany pravidelného desetiúhelníku, poloměr kružnice k je velikost strany pravidelného šestiúhelníku a polovina tětivy kolmé na průměr AB a procházející bodem O je přibližně délka pravidelného sedmiúhelníku vepsaného do kružnice k. Tato konstrukce bývá vyučována jako návod, bez důkazu.



Obrázek 3.20: Konstrukce ze SŠ



Obrázek 3.21: Vnitřní úhly

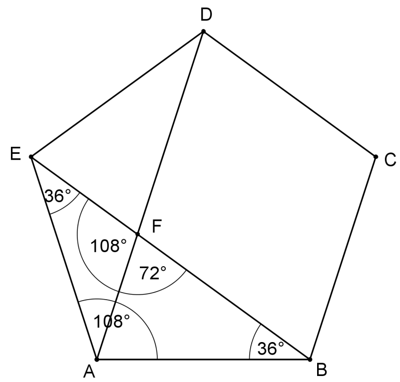
Další možnou a snadnou konstrukcí je konstrukce pomocí úhloměru. Pravidelný pětiúhelník (dále jen pětiúhelník) můžeme rozdělit na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků se společným vrcholem ve středu kružnice opsané. Každá strana pětiúhelníku je základnou jednoho rovnoramenného trojúhelníku. Nyní můžeme dopočítat vnitřní úhly těchto trojúhelníků. Plný úhel u středu kružnice opsané jsme rozdělili na pět shodných, čili na pětkrát 72° ($5 \cdot 72 = 360$). Úhly při základnách musí být shodné. Jelikož součet úhlů v trojúhelníku je 180°, na oba úhly zbývá v každém trojúhelníku 108°, každý tedy měří 54° (obr. 3.21). Mimochodem jsme tímto postupem zjistili i velikost vnitřního úhlu pětiúhelníku, stačí sečíst dva vnitřní úhly u základen trojúhelníků, obdržíme 108°. Známe-li vnitřní úhly trojúhelníků, můžeme pomocí úhloměru tyto trojúhelníky narýsovat a postupně tak získat celý pětiúhelník. Lze v tomto případě začít i od dané strany pětiúhelníku. Nejedná se ovšem o pravou eukleidovskou konstrukci (t.j. o konstrukci prováděnou pouze pomocí kružítka a pravítka, na kterém navíc není žádné měřítko a „nemá druhý okraj“ – nelze jím kreslit rovnoběžky).

Uvedu zde tři tvrzení o zlatém řezu v pravidelném pětiúhelníku (včetně důkazů). Použití některých z nich umožňuje narýsovat pětiúhelník, je-li dána jeho strana, bez použití úhloměru. Také si ukážeme, proč je hodnota $\cos 72°$ rovna $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$ a proč je konstrukce pětiúhelníku popsaná ve druhém odstavci této pokapitoly správná.

Tvrzení 1:

V pravidelném pětiúhelníku dělí průsečík dvou úhlopříček, které nemají společný krajní bod, každou z nich ve zlatém řezu.

Důkaz (obr. 3.22):



Obrázek 3.22: Tvrzení 1

Mějme pětiúhelník $ABCDE$. Průsečík úhlopříček AD, BE označíme F. Trojúhelník ABE je rovnoramenný, protože jeho strany AB, AE jsou shodné. Vnitřní úhel trojúhelníku ABE u vrcholu A měří 108°. Úhly u základny BE musí být shodné, každý tedy měří 36° (108+36+36 = 180). Trojúhelník EAF je také rovnoramenný. Víme, že úhel AEB měří 36°. Úhel EAD je shodný s úhlem AEB, protože trojúhelníky ABE, EAD jsou shodné, měří tedy také 36°. Na vnitřní úhel u vrcholu F v trojúhelníku EAF zbývá 108°. Trojúhelníky BEA, EAF jsou tedy podobné podle věty *uu*. Platí

$$\frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|EF|}. \tag{3.5}$$

Dopočítáním úhlů zjistíme, že trojúhelník ABF je také rovnoramenný se základnou AF. Proto $|AB| = |BF|$. Navíc platí, že $|AB| = |AE|$. Dosadíme-li do vztahu (3.5) za $|AE|$ a $|AB|$ velikost $|BF|$, obdržíme

$$\frac{|BE|}{|BF|} = \frac{|BF|}{|EF|},$$

přičemž bod F leží na úsečce BE. Znamená to tedy, že bod F dělí úsečku BE zlatým řezem.

⊠

Tvrzení 2:

Poměr délek úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku je zlaté číslo.

Důkaz (obr. 3.23):

Z předchozího víme, že $|\sphericalangle AEB| = 36°$. Stejně tak $|\sphericalangle CED| = 36°$. Na úhel BEC zbývá také 36°, protože $|\sphericalangle AED| = 108°$. Trojúhelník BCE je rovnoramenný se základnou BC. Úhly u základny musí být shodné, mají tady velikost 72°. Stejné úhly, jak víme z předchozího důkazu, jsou i v trojúhelníku AFB. Trojúhelníky BCE, AFB jsou podobné podle věty *uu*. Proto

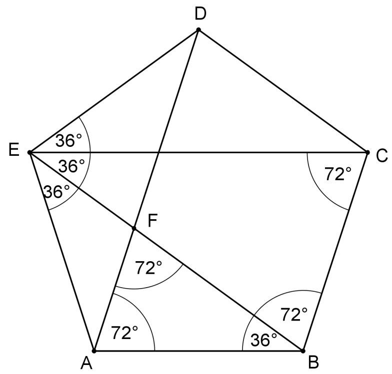
$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|AF|}. \tag{3.6}$$

Dále platí:

$$\begin{aligned} |BC| &= |AB| = |BF|, \\ |AF| &= |EF|, \end{aligned}$$

tedy $\dfrac{|BC|}{|AF|} = \dfrac{|BF|}{|EF|}$. Podle tvrzení 1 platí:

$$\frac{|BF|}{|EF|} = \varphi.$$



Obrázek 3.23: Tvrzení 2

Vrátíme-li se zpět ke vztahu (3.6), dostáváme:

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|AF|} = \frac{|BF|}{|EF|} = \varphi.$$

⊠

Tvrzení 3:

Sestrojíme-li všechny úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, dostaneme pěticípou hvězdu, uvnitř které je opět pravidelný pětiúhelník. Poměr délek stran původního a nového pětiúhelníku se rovná druhé mocnině zlatého čísla.

Důkaz (obr. 3.24):

Původní pětiúhelník označme $ABCDE$ a délku jeho strany a, nový pětiúhelník označme $KLMNO$, délku jeho strany x. Platí:

$$\begin{aligned} |AE| &= |AO| = a, \\ |AK| &= |DO| = a - x. \end{aligned}$$

Podle tvrzení 2 dále víme, že $\dfrac{|AO|}{|DO|} = \varphi$. Dále platí:

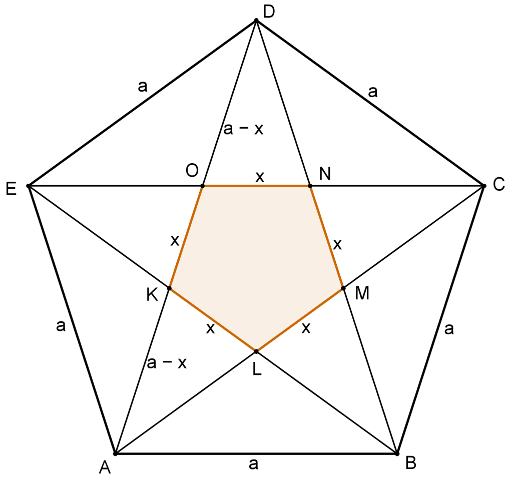
$$\frac{|AO|}{|DO|} = \frac{|AO|}{|AK|} = \frac{a}{a-x},$$

neboli

$$\varphi = \frac{a}{a-x}.$$

Poslední rovnost dále upravíme:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi} &= \frac{a-x}{a},\\
\frac{1}{\varphi} &= 1-\frac{x}{a},\\
\frac{x}{a} &= 1-\frac{1}{\varphi},\\
\frac{x}{a} &= \frac{\varphi-1}{\varphi},\\
\frac{a}{x} &= \frac{\varphi}{\varphi-1},\\
\frac{a}{x} &= \frac{\varphi}{\frac{1}{\varphi}},\\
\frac{a}{x} &= \varphi^2,
\end{aligned}$$



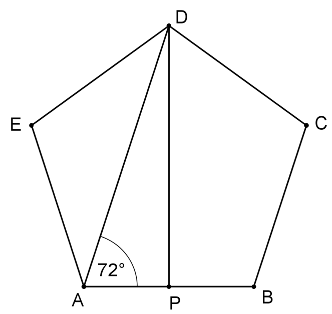
Obrázek 3.24: Tvrzení 3

což jsme chtěli dokázat. Při úpravách jsme využili vlastnost zlatého čísla $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$ dokázanou v podkapitole 1.2.

$\boxtimes$

Nyní můžeme ukázat, proč $\cos 72^\circ = \dfrac{1}{1+\sqrt{5}}$, jak jsme použili v podkapitole 3.2. Délku strany pětiúhelníku $ABCDE$ můžeme zvolit za jednotku délky, tedy $|AB| = 1$. Potom (podle tvrzení 2) $|AD| = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Víme, že $|\sphericalangle DAB| = 72^\circ$. Spustíme-li z bodu D kolmici na úsečku AB a označíme-li její patu P (obr. 3.25), pak v trojúhelníku APD platí:

$$\cos 72^\circ = \frac{|AP|}{|AD|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}.$$



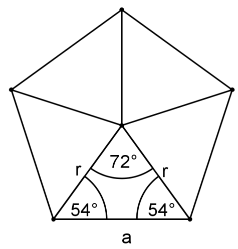
Obrázek 3.25: Trojúhelník APD

Dále si ukážeme, že „středoškolská“ konstrukce pětiúhelníku vepsaného do dané kružnice (obr. 3.20) je korektní. Je-li poloměr dané kružnice r, potom

$$\begin{aligned}
|OC| &= |OM| = \sqrt{|OS|^2 + |SC|^2} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2} = \frac{r}{2}\sqrt{5},\\
|SM| &= |OM| - |OS| = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1),\\
|CM|^2 &= |CS|^2 + |SM|^2 = r^2 + \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2 = \frac{r^2}{2}(5-\sqrt{5}).
\end{aligned}$$

Rozdělíme-li pětiúhelník na shodné rovnoramenné trojúhelníky, pak v každém trojúhelníku podle kosinové věty platí (obr. 3.26):

$$
\begin{aligned}
a^2 &= r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 72^\circ, \\
a^2 &= 2r^2(1 - \cos 72^\circ), \\
a^2 &= 2r^2\left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{5}}\right), \\
a^2 &= \frac{r^2}{2}(5 - \sqrt{5}),
\end{aligned}
$$



Obrázek 3.26: Kosinová věta

neboli $a^2 = |CM|^2$. Odtud $a = |CM|$, konstrukce je tedy správná.

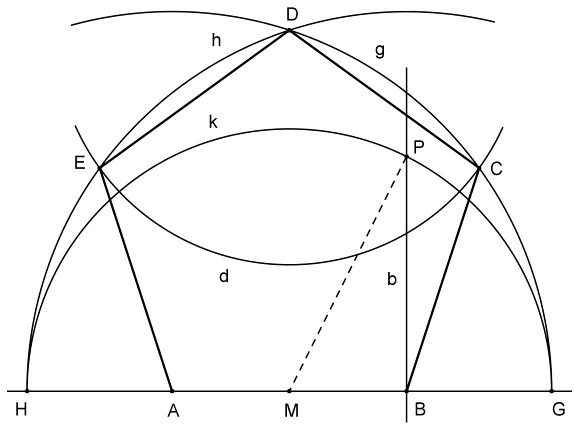
Nyní si (již bez důkazů) ukážeme několik konstrukcí pravidelného pětiúhelníku, které jsou založeny na tvrzeních 1, 2 (strana 52). S využitím postupů, jak sestrojit zlatý řez úsečky, uvedených v kapitole 2 bychom podobných konstrukcí vymysleli jistě mnoho. Zde popsané návody byly vytvořeny na základě konstrukcí z knihy [34].

Konstrukce 1

> Je dána strana AB pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$. Sestrojte tento pětiúhelník.

Postup konstrukce (obr. 3.27):

1. $\leftrightarrow b; b \perp AB, B \in b$
2. $P; P \in b, |BP| = |AB|$
3. $M; M \in \frac{1}{2}|AB|$
4. $k; k(M, |MP|)$
5. $G; G \in (\mapsto AB \cap k)$
6. $H; H \in (\mapsto BA \cap k)$
7. $g; g(A, |AG|)$
8. $h; h(B, |BH|)$
9. $D; D \in (g \cap h)$
10. $d; d(D, |AB|)$
11. $C; C \in (d \cap g)$
12. $E; E \in (d \cap h)$



Obrázek 3.27: Konstrukce 1

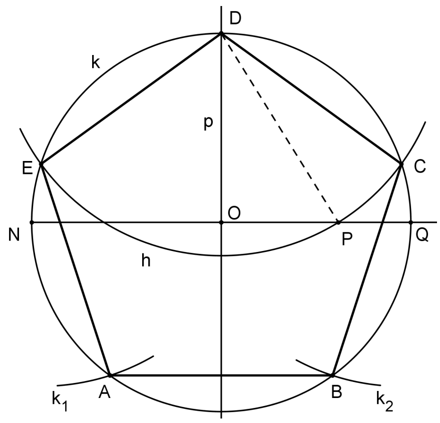
13. pětiúhelník $ABCDE$

Konstrukce 2

> Je dán poloměr r kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku. Najděte tento pětiúhelník.

Postup konstrukce (obr. 3.28):

1. $k; k(O, r)$
2. $N; N \in k$
3. $Q; Q \in (\hookrightarrow ON \cap k)$
4. $P; P \in OQ, \dfrac{NP}{NO} = \dfrac{NO}{OP}$ (O dělí NP zlatým řezem)
5. $\leftrightarrow p; p \perp ON, O \in p$
6. $D; D \in (\leftrightarrow p \cap k)$
7. $h; h(D, |DP|)$
8. $C, E; C, E \in (h \cap k)$
9. $k_1; k_1(E, |DP|)$
10. $k_2; k_2(C, |DP|)$
11. $A; A \in (k_1 \cap k)$
12. $B; B \in (k_2 \cap k)$
13. pětiúhelník $ABCDE$



Obrázek 3.28: Konstrukce 2

Tento postup v podstatě odpovídá středoškolské konstrukci popsané na straně 54.

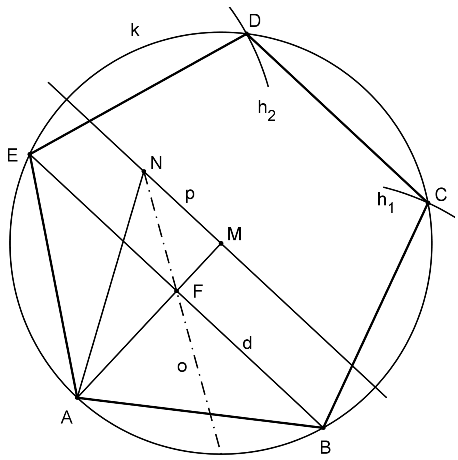
Konstrukce 3

> Je dán poloměr r kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku. Najděte tento pětiúhelník.

Postup konstrukce (obr. 3.29):

1. $k; k(M, r)$
2. $A; A \in k$

3. $\leftrightarrow p; p \perp AM, M \in p$
4. $N; N \in p, |MN| = \dfrac{1}{2}|AM|$
5. $o; o$ je osa úhlu MNA
6. $F; F \in (AM \cap o)$
7. $\leftrightarrow d; d \perp AM, F \in d$
8. $B, E; B, E \in (\leftrightarrow d \cap k)$
9. $h_1; h_1(B, |AB|)$
10. $h_2; h_2(E, |AB|)$
11. $C; C \in (h_1 \cap k)$
12. $D; D \in (h_2 \cap k)$
13. pětiúhelník $ABCDE$



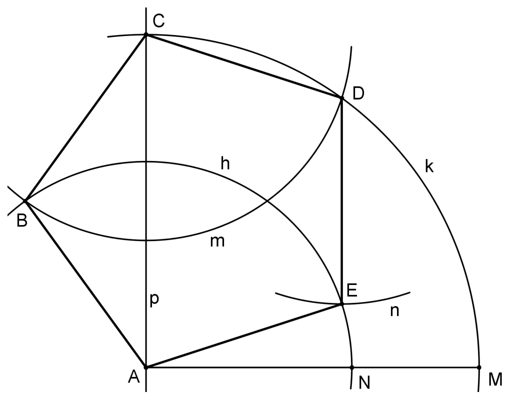
Obrázek 3.29: Konstrukce 3

Konstrukce 4

Je dána délka úhlopříčky u pravidelného pětiúhelníku. Najděte tento pětiúhelník.

Postup konstrukce (obr. 3.30):

1. $AM; |AM| = u$
2. $N; N \in AM, \dfrac{|AM|}{|AN|} = \dfrac{|AN|}{|NM|}$ (N dělí AM zlatým řezem)
3. $\leftrightarrow p; p \perp AM, A \in p$
4. $k; k(A, |AM|)$
5. $C; C \in (\leftrightarrow p \cap k)$
6. $h; h(A, |AN|)$
7. $m; m(C, |AN|)$
8. $B; B \in (h \cap m)$
9. $D; D \in (k \cap m)$
10. $n; n(D, |AN|)$
11. $E; E \in (h \cap n)$
12. pětiúhelník $ABCDE$

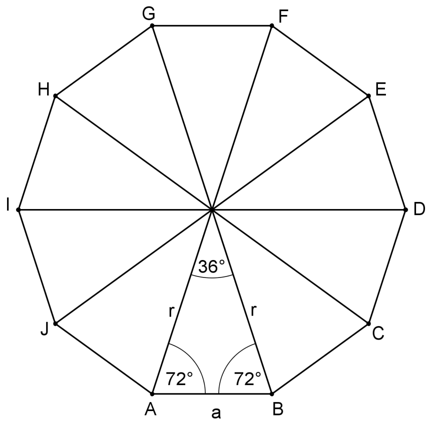


Obrázek 3.30: Konstrukce 4

3.5 Pravidelný desetiúhelník

Pravidelný desetiúhelník (dále jen desetiúhelník) je konvexní mnohoúhelník, který má deset shodných stran a deset shodných vnitřních úhlů.

Tento obrazec rozdělíme na deset shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž základny jsou strany desetiúhelníku a ramena jsou poloměry kružnice desetiúhelníku opsané (všechny trojúhelníky mají společný vrchol – střed této kružnice), a dopočítáme velikosti vnitřních úhlů rovnoramenných trojúhelníků (obr. 3.31). Plný úhel okolo středu kružnice opsané jsme rozdělili na deset shodných úhlů, každý má tedy velikost 36°. Na úhly při základně v každém trojúhelníku zbývá 144° (180 − 36 = 144), každý z nich má tedy velikost 72° (musí být shodné).



Obrázek 3.31: Desetiúhelník

V podkapitole 3.2 jsme se dozvěděli, že trojúhelník, jehož vnitřní úhly mají velikosti 36°, 72°, 72° je zlatý. To znamená, že poměr délek ramena a základny je zlaté číslo φ. V případě desetiúhelníku to znamená, že poměr poloměru kružnice opsané r a strany desetiúhelníku a_{10} je φ, neboli

$$\frac{r}{a_{10}} = \varphi,$$

což znamená, že

$$r = a_{10} \cdot \varphi. \tag{3.7}$$

Tato skutečnost nás opravňuje k tvrzení, že délka úsečky SM (obr. 3.20) je skutečně délkou pravidelného desetiúhelníku vepsaného do kružnice k. Z výpočtu na straně 54, při kterém jsme dokazovali správnost středoškolské konstrukce pravidelného pětiúhelníku vepsaného do dané kružnice, totiž vyplývá:

$$\begin{aligned} |OM| &= |OC| = \frac{r}{2}\sqrt{5}, \\ |OS| &= \frac{r}{2}, \\ |SM| &= |OM| - |OS| = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Poslední řádek je při označení $|SM| = a_{10}$ ekvivalentní se vztahem (3.7).

3.6 Další rovinné útvary a úlohy

V této podkapitole bych ráda ukázala některé zajímavé úlohy nebo konstrukce v rovině, které nešlo tematicky zařadit do předchozích částí.

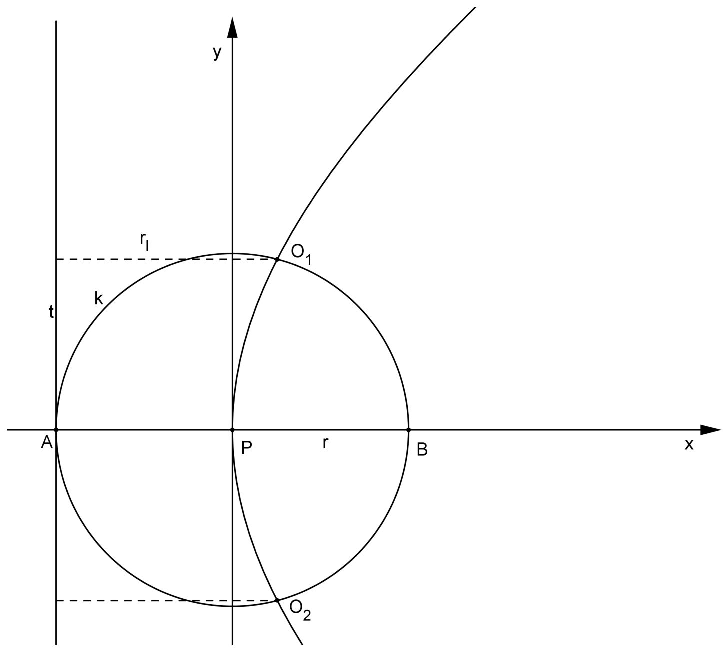
Úloha 1

Je dána kružnice k. V koncovém bodě A průměru AB je vedena tečna t. Jest sestrojiti kružnici l, jejíž střed je na kružnici k a která se dotýká přímky t a prochází bodem B. (Tato úloha je z knihy [5].)

Řešení (obr. 3.32):

Úlohu můžeme řešit analyticky. Nejprve vhodně zvolíme kartézskou soustavu souřadnic. Její počátek umístíme do středu kružnice k (s poloměrem r), průměr AB nechť leží na ose x. Dané objekty mají tedy rovnice:

$$k : x^2 + y^2 = r^2,$$
$$t : x = -r,$$
$$A[-r; 0], B[r; 0].$$



Obrázek 3.32: Úloha 1 – volba soustavy souřadnic

Střed O hledané kružnice l musí splňovat dvě podmínky. Za prvé má ležet na kružnici k, čili jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici kružnice k, za druhé jeho vzdálenosti od přímky t a od bodu B musí být stejné, protože kružnice l se má dotýkat přímky t a současně procházet bodem B. To znamená, že střed O bude ležet na parabole, jejíž řídící přímkou je přímka t a ohniskem bod B. Tato parabola má rovnici $y^2 = 4rx$. Její vrchol je uprostřed mezi ohniskem a řídící přímkou, t. j. v počátku, a její parametr je vzdálenost ohniska a řídící přímky, tedy $2r$.

Bod O má vyhovovat rovnicím $x^2 + y^2 = r^2$ a $y^2 = 4rx$. Řešíme-li soustavu těchto rovnic, vyjde

$$x_1 = r(\sqrt{5} - 2),$$
$$x_2 = -r(\sqrt{5} + 2).$$

Evidentně vyhovuje první výsledek (x-ová souřadnice bodu O musí být větší než $(-r)$, aby kružnice l ležela ve stejné polorovině určené přímkou t jako bod B). Poloměr r_l kružnice l získáme, přičteme-li k výsledku x_1 ještě vzdálenost r. Tedy

$$r_l = x_1 + r = r(\sqrt{5} - 2) + r = r(\sqrt{5} - 1).$$

Z výsledku můžeme dále odvodit:

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_l} &= \frac{1}{1 - \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \\ \frac{2r}{r_l} &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi, \end{aligned}$$

neboli poloměr hledané kružnice l je větší částí průměru kružnice k rozděleného zlatým řezem. Úloha má dvě řešení (průsečíky kružnice k s parabolou jsou dva, oba mají shodnou x-ovou souřadnici a v obou případech má hledaná kružnice týž poloměr r_l).

V knize [5] je řešení této úlohy provedeno synteticky s užitím Pythagorovy věty a vět Eukleidových. Závěr je však stejný.

Úloha 2

Určete velikosti vnitřních úhlů rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$, jestliže trojúhelníky ABC, ACD jsou rovnoramenné (zadání této úlohy je přeformulovaným zadáním úlohy z učebnice [17].)

Řešení (obr. 3.33):

Označíme $|\sphericalangle DAC| = \alpha_2$, $|\sphericalangle BAC| = \alpha_1$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $|\sphericalangle BCA| = \gamma_1$, $|\sphericalangle ACD| = \gamma_2$, $|\sphericalangle CDA| = \delta$ a ujasníme si, co pro tyto úhly platí:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma_2 \text{ (střídavé úhly)}, && (3.8) \\ \alpha_2 &= \gamma_2 \text{ (rovnoramenný trojúhelník } ACD), && (3.9) \\ \gamma_1 &= \beta \text{ (rovnoramenný trojúhelník } BCA), && (3.10) \\ \beta &= \alpha_1 + \alpha_2 \text{ (rovnoramenný lichoběžník } ABCD). && (3.11) \end{aligned}$$

Podle (3.8) a (3.9) platí

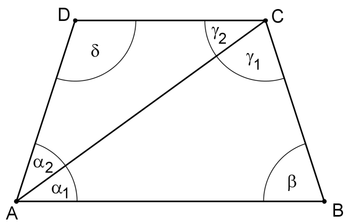
$$\alpha_1 = \alpha_2, \tag{3.12}$$

podle (3.11) a (3.12) platí

$$\beta = 2\alpha_1 \tag{3.13}$$

a podle (3.10) a (3.13) je

$$\gamma_1 = 2\alpha_1. \tag{3.14}$$



Obrázek 3.33: Úhly v rovnoramenném lichoběžníku

Proto pro součet úhlů v trojúhelníku BCA platí:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta + \gamma_1 &= 180°, \\ \alpha_1 + 2\alpha_1 + 2\alpha_1 &= 180°, \\ 5\alpha_1 &= 180°, \\ \alpha_1 &= 36°. \end{aligned}$$

Nyní už není problém dopočítat velikosti dalších úhlů:

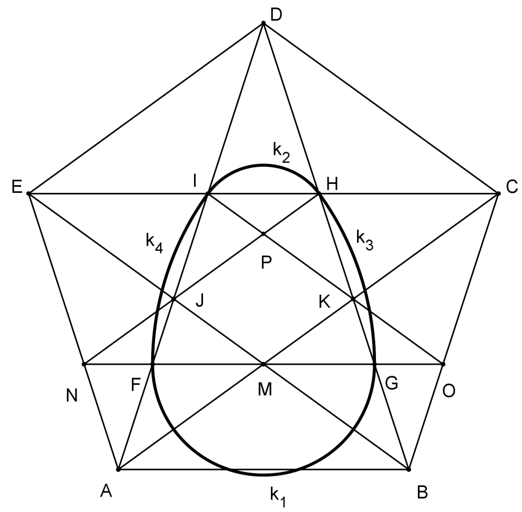
$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 2\alpha_1 = 72°, \\ \beta &= \gamma_1 = 72°, \\ \alpha_2 &= \alpha_1 = 36°, \\ \gamma_2 &= \alpha_2 = 36°, \\ \delta &= \gamma_1 + \gamma_2 = 108°. \end{aligned}$$

A proč tento příklad uvádím? Aniž bychom o to usilovali, souvisí výsledek se zlatým číslem. Trojúhelník BCA je podle velikostí vnitřních úhlů zlatý. Poměr délek úhlopříčky a ramena lichoběžníku je díky tomu roven φ.

Úloha 3

Kresba obrysu vejce (podle konstrukce uvedené v [34]).

Postup konstrukce (obr. 3.34):



Obrázek 3.34: Obrys vejce

1. pravidelný pětiúhelník $ABCDE$
2. $H; H \in (BD \cap CE)$
3. $I; I \in (AD \cap CE)$
4. $M; M \in (AC \cap BE)$
5. $J; J \in (AD \cap BE)$
6. $K; K \in (BD \cap AC)$
7. $N; N \in (\mapsto HJ \cap AE)$
8. $O; O \in (\mapsto IK \cap BC)$
9. $F; F \in (AD \cap NO)$
10. $G; G \in (BD \cap NO)$; navíc $M \in NO$
11. $P; P \in (HJ \cap IK)$
12. $k_1; k_1(M, |MF| = |MG|)$; stačí oblouk $\widehat{FG}$
13. $k_2; k_2(P, |PI| = |PH|)$; stačí oblouk $\widehat{HI}$
14. $k_3; k_3(N, |NH| = |NG|)$; stačí oblouk $\widehat{GH}$
15. $k_4; k_4(O, |OI| = |OF|)$; stačí oblouk $\widehat{IF}$

Nyní křivka složená z oblouků $\widehat{FG}$, $\widehat{GH}$, $\widehat{HI}$, $\widehat{IF}$ velmi připomíná obrys vejce. Přitom zlaté číslo najdeme v obrázku hned několikrát, protože jsme pracovali s úhlopříčkami pravidelného pětiúhelníku. Například $\dfrac{|CE|}{|EH|} = \dfrac{|CE|}{|CI|} = \dfrac{|AD|}{|AI|} = \cdots = \varphi$.

Úloha 4

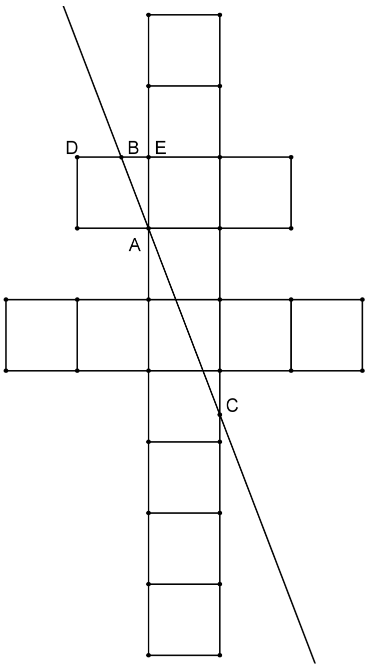
Veďte bodem A přímku BC tak, aby rozdělila plochu Lotrinského kříže[3] na dvě části stejného obsahu. V jakém poměru dělí bod B úsečku DE (obr. 3.15)?

[3]Lotrinský kříž, původně snad znak Jany z Arku, složený z patnácti jednotkových čtverců byl za 2. světové války symbolem svobodných francouzských sil.

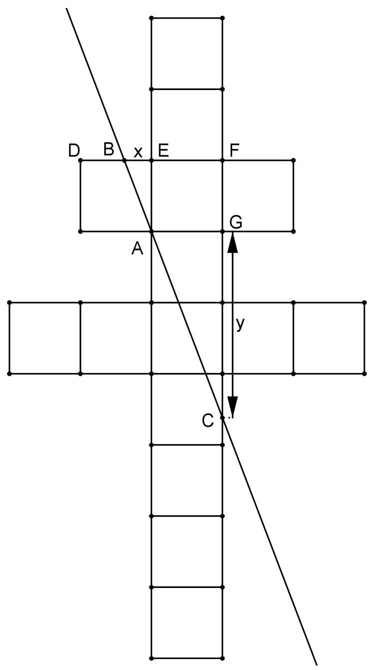
Řešení (obr. 3.16):

Jelikož je obsah celého kříže 15 čtverečných jednotek, plocha každé oblasti, na kterou jsme kříž rozdělili, je 7,5 jednotek čtverečných. Podívejme se na pravoúhlé trojúhelníky BFC, BEA, AGC. Označíme-li délku úsečky BE písmenem x a délku úsečky CG písmenem y, potom

$$\begin{aligned} S_{BFC} &= \frac{(x+1)(y+1)}{2}, \\ S_{BEA} &= \frac{x}{2}, \\ S_{AGC} &= \frac{y}{2}. \end{aligned}$$



Obrázek 3.35: Lotrinský kříž – zadání



Obrázek 3.36: Lotrinský kříž – řešení

Pro tyto trojúhelníky ale také platí

$$\begin{aligned} S_{BFC} &= 7,5-5, \\ S_{BEA}+S_{AGC} &= 7,5-6, \end{aligned}$$

protože plocha horní části kříže musí mít velikost 7.5 čtverečných jednotek a obsah každého čtverce je jedna. Spojíme-li uvedené vztahy dohromady, dostáváme

$$\frac{(x+1)(y+1)}{2} = 7.5 - 5 \Leftrightarrow xy + x + y = 4, \tag{3.15}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 7.5 - 6 \Leftrightarrow x + y = 3. \tag{3.16}$$

Řešením této soustavy jsou uspořádané dvojice

$$\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right], \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right],$$

přičemž druhé řešení nevyhovuje, jelikož (jak je patrné z obrázku) přímka BC musí mít takový sklon, aby $y > x$, jinak by plochu kříže nerozdělila na stejné části. Zjistili jsme tedy, že $|BE| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Dopočítáme ještě délku úsečky BD a zjistíme hodnoty příslušných poměrů:

$$|BD| = |DE| - |BE| = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\frac{|BD|}{|BE|} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \varphi.$$

Bod B dělí úsečku DE na dvě části, jejichž poměr je zlaté číslo. Tedy bod B dělí tuto úsečku ve zlatém řezu.

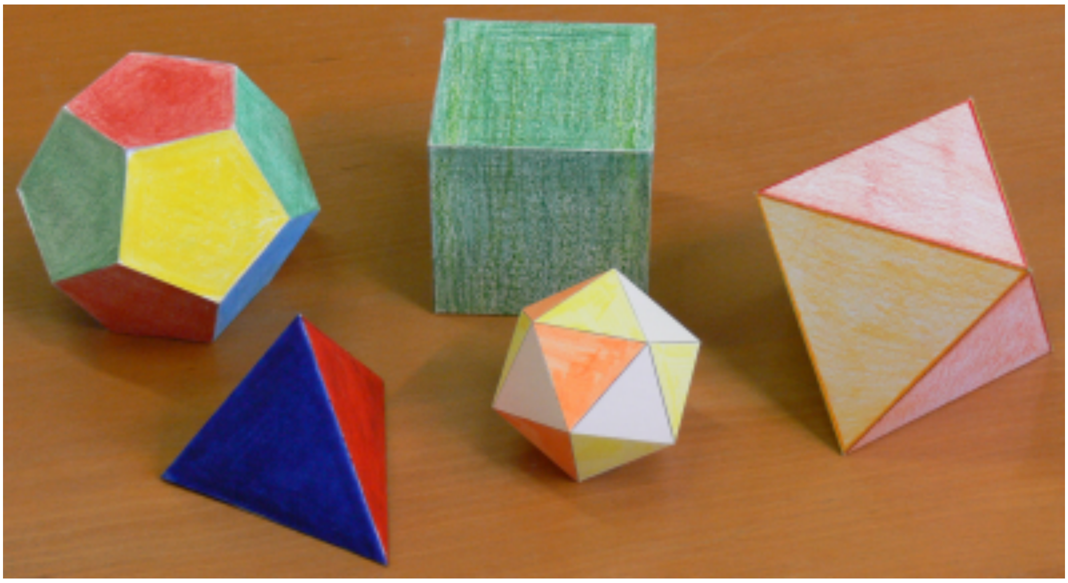
Kapitola 4

Zlatý řez ve stereometrii

Poměr φ se nezřídka objevuje i v prostorových útvarech, a to zejména v pravidelných mnohostěnech. Proto jim věnuji samostatnou podkapitolu.

4.1 Pravidelné mnohostěny

Než si ukážeme, kde všude můžeme na pravidelných mnohostěnech zlaté číslo najít, trochu si tato tělesa představíme.



Obrázek 4.1: Pravidelné mnohostěny

Pravidelným mnohostěnem rozumíme konvexní mnohostěn, jehož stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a jehož vrcholy jsou všechny téhož typu (to znamená, že z každého vrcholu vychází stejný počet hran). Těmto tělesům lze opsat i vepsat kulovou plochu, přičemž obě kulové plochy mají tentýž střed. Tomuto středu se také říká střed pravidelného mnohostěnu. Opsaná kulová plocha prochází všemi vrcholy mnohostěnu, vepsaná kulová plocha se dotýká každé stěny mnohostěnu v jejím středu.

Pravidelných mnohostěnů je právě pět. Pravidelný čtyřstěn, pravidelný šestistěn (též krychle), pravidelný osmistěn, pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn (obr. 4.1). Jednoduché zdůvodnění, proč právě pět a ne více, je uvedeno například v učebnici [24] na straně 129. Základní informace o těchto tělesech jsou vypsány v následující tabulce.

název	s	h	v	n	h_v
čtyřstěn	4	6	4	3	3
krychle	6	12	8	4	3
osmistěn	8	12	6	3	4
dvanáctistěn	12	30	20	5	3
dvacetistěn	20	30	12	3	5

Vysvětlivky k tabulce:

s... počet stěn mnohostěnu

h... počet hran mnohostěnu

v... počet vrcholů mnohostěnu

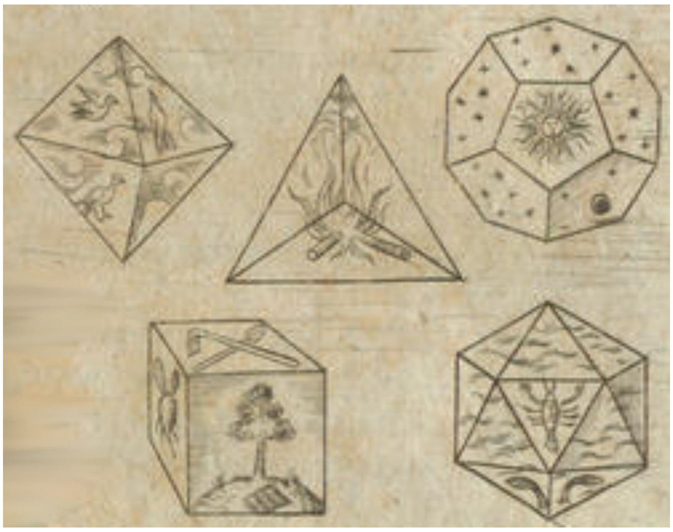
n... počet stran jedné stěny

h_v... počet hran vycházejících z jednoho vrcholu

V další tabulce je přehled vzorců pro výpočet povrchu (P), objemu (V) a poloměru opsané (r) i vepsané (ϱ) kulové plochy všech mnohostěnů.

název	P	V	r	ϱ
čtyřstěn	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$
krychle	$6a^2$	a^3	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$
osmistěn	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$
dvanáctistěn	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$	$\frac{a\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$	$\frac{a}{20}\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}$
dvacetistěn	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3}{12}(3+\sqrt{5})$	$\frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$	$\frac{a\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})$

Pravidelné mnohostěny se též nazývají platónská (nebo Platónova) tělesa podle řeckého filosofa Platóna[1]. Ten tato tělesa považoval za symboly živlů (obr. 4.2). Krychle podle jeho učení představovala zemi, osmistěn vzduch, čtyřstěn oheň a dvacetistěn vodu. Dvanáctistěn označil za symbol vesmíru, veškerého jsoucna apod.



Obrázek 4.2: Pravidelné mnohostěny jako symboly živlů tak, jak je zpodobnil J. Kepler ve své knize *Harmonices Mundi*

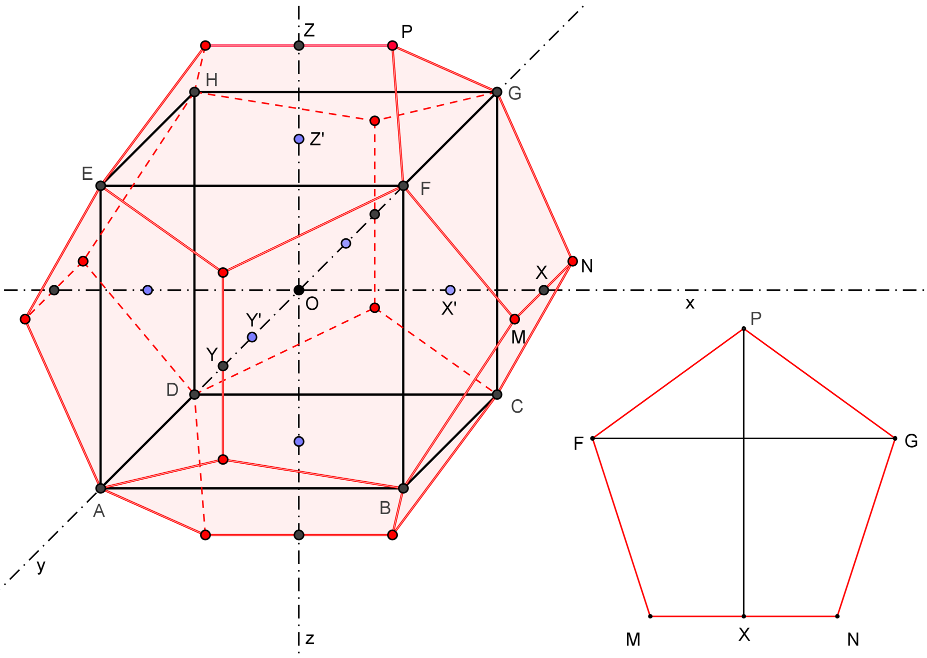
Zlaté číslo nalezneme na pravidelných mnohostěnech hned několikrát, zejména při různém vepisování jednoho mnohostěnu do druhého. Uvedu zde několik zajímavostí, kde všude se tedy můžeme s poměrem zlatého řezu u těchto těles setkat.

Nejzajímavější je zřejmě **dvanáctistěn**. Jeho stěny jsou pravidelné pětiúhelníky, které se zlatým řezem souvisí velmi úzce (viz podkapitola 3.4). Většinu vztahů pro výpočet délek různých významných úseček v tomto tělese, velikostí úhlů a dalších vlastností lze jednoduše zapsat užitím zlatého čísal φ. Například poloměr koule opsané je roven $\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \varphi$, délka tělesové úhlopříčky je $a\sqrt{3}\varphi$, nebo pro odchylku tělesových úhlopříček α platí $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\varphi\sqrt{3}}$. V knize [16] na straně 67 se uvádí, že pro délku hrany dvanáctistěnu rovnou jedné je povrch dvanáctistěnu $\frac{15\varphi}{\sqrt{3-\varphi}}$ a objem $\frac{5\varphi^3}{6-2\varphi}$. Oba vztahy můžeme snadno ověřit. Dosadíme-li za φ hodnotu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, vyjde po patřičných úpravách totéž, jako kdybychom dosadili do patřičných vzorců (uvedených na začátku této kapitoly v tabulce) $a = 1$. Další výpočty související s pravidelným dvanáctistěnem a s dalšími pravidelnými mnohostěny, ze kterých vyplývají zde uvedené vztahy pro výpočet délky tělesové úhlopříčky aj. jsou podrobně provedeny v [14].

[1] Platón (vlastním jménem Aristoklés, asi 428 – 347 př. n. l.) založil v Athénách filosofickou školu Akadémia, kde se vyučovala i matematika.

V téže práci jsou odvozeny všechny vzorce pro výpočty povrchů, objemů a poloměrů vepsaných i opsaných kulových ploch.

Do dvanáctistěnu lze vepsat krychli tak, že všechny hrany krychle splývají s některou stěnovou úhlopříčkou dvanáctistěnu. Díky tomu je poměr délek hrany krychle a hrany dvanáctistěnu zlaté číslo. Těchto vlastností lze využít pro konstrukci pravidelného dvanáctistěnu ve volném rovnoběžném promítání (obr. 4.3).



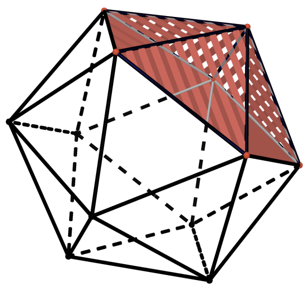
Obrázek 4.3: Pravidelný dvanáctistěn opsaný krychli

Nejprve sestrojíme krychli $ABCDEFGH$ tak, že její střed splývá s počátkem soustavy souřadnic a stěny leží v rovinách rovnoběžných s rovinami určenými souřadnicovými osami. Stranou si zkonstruujeme pravidelný pětiúhelník $MNGPF$ zadaný délkou úhlopříčky (totožná s délkou hrany krychle). Tento pětiúhelník umístíme ke krychli tak, že jeho úhlopříčka FG splývá s hranou krychle FG a střed X strany MN leží na ose x. Patu kolmice z bodu P k ose z označíme Z. Průsečík kladné poloosy x se stěnou krychle označme X', průsečík kladné poloosy z se stěnou krychle označme Z' a průsečík kladné poloosy y se stěnou krychle označme Y'. Dále vyznačme na kladné polose y bod Y tak, že $|OY| = |OX| = |OZ|$ (vzdálenosti se sobě rovnají ve skutečnosti, při volném rovnoběžném promítání dochází samozřejmě ke zkreslení podle zvolených parametrů promítání). Body X, Y, Z leží vždy ve středu nějaké hrany dvanáctistěnu a délku těchto hran známe. Každý vrchol krychle je současně vrcholem dvanáctistěnu a dvanáctistěn je středově souměrný podle počátku. Navíc platí:

$$\frac{|OX|}{|OX'|} = \frac{|OY|}{|OY'|} = \frac{|OZ|}{|OZ'|} = \varphi.$$

Bude-li délka hrany krychle v naší konstrukci dvě jednotky délky, potom lze dopočítat souřadnice všech vrcholů sestrojeného dvanáctistěnu:

$[\pm 1; \pm 1; \pm 1]$ (vrcholy krychle – celkem 8),
$\left[\pm\varphi; \pm\frac{1}{\varphi}; 0\right]$ (vrcholy „vlevo a vpravo“ – celkem 4),
$\left[0; \pm\varphi; \pm\frac{1}{\varphi}\right]$ (vrcholy „vpředu a vzadu“ – celkem 4),
$\left[\pm\frac{1}{\varphi}; 0; \pm\varphi\right]$ (vrcholy „nahoře a dole“ – celkem 4).



Obrázek 4.4: Jehlan na dvacetistěnu

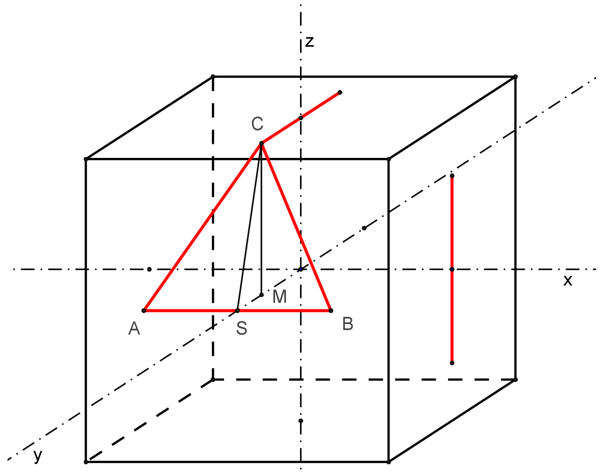
Další pro nás zajímavý mnohostěn je pravidelný **dvacetistěn**. Také na něm můžeme najít pravidelný pětiúhelník, stačí, když si představíme pětiboký jehlan, jehož plášť tvoří pět stěn dvacetistěnu se společným vrcholem. Podstavou tohoto jehlanu je pravidelný pětiúhelník (obr. 4.4). V knize [16] je na straně 67 jako zajímavost uvedeno, že objem dvacetistěnu s jednotkovou hranou je roven výrazu $\frac{5\varphi^5}{6}$. Dle mého názoru se však jedná o omyl, protože objem tohoto dvacetistěnu je roven $\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}$, což je asi 2,18, zatímco výraz $\frac{5\varphi^5}{6}$ má přibližně hodnotu 9,24. Ovšem můžeme najít jiný vztah pro dvacetistěn, který lze zapsat pomocí φ, například pro odchylku sousedních stěn ω pravidelného dvacetistěnu platí $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\varphi}{\sqrt{3}}$.

Dvacetistěn lze zkonstruovat pomocí duality s dvanáctistěnem[2] nebo opět pomocí krychle. Dvacetistěn totiž lze vepsat do krychle takovým způsobem, že některé hrany dvacetistěnu leží ve stěnách krychle (v každé stěně leží jedna hrana) rovnoběžně s hranami krychle a navíc středy těchto hran dvacetistěnu splývají se středy stěn krychle (podle [37]).

Dejme tomu, že krychli, jejíž hranu zvolíme za jednotku délky, umístíme do soustavy souřadnic tak, že střed krychle splývá s počátkem soustavy souřadnic. Hranu dvacetistěnu označíme x. Souřadnice bodů A, B, C jsou tedy:

[2] Dvě tělesa jsou duální, lze-li je navzájem (při vhodném poměru velikostí) do sebe vepsat tak, že vrcholy jednoho tělesa leží ve středech stěn druhého. Jelikož dvanáctistěn a dvacetistěn jsou duální tělesa, získáme vrcholy dvacetistěnu tak, že zkonstruujeme středy stěn dvanáctistěnu (a naopak). Více o dualitě těles v [14].

$$A\left[-\frac{x}{2};\frac{1}{2};0\right],\ B\left[\frac{x}{2};\frac{1}{2};0\right],\ C\left[0;\frac{x}{2};\frac{1}{2}\right].$$



Obrázek 4.5: Dvacetistěn v krychli – výpočet

Nyní vypočteme délku x tak, aby byl trojúhelník ABC rovnostranný. Pro x tedy musí platit, že $|AB| = |BC| = |AC| = x$. Označíme-li střed strany AB jako S a patu kolmice spuštěné z bodu C do roviny os x, y jako M (obr. 4.5), potom

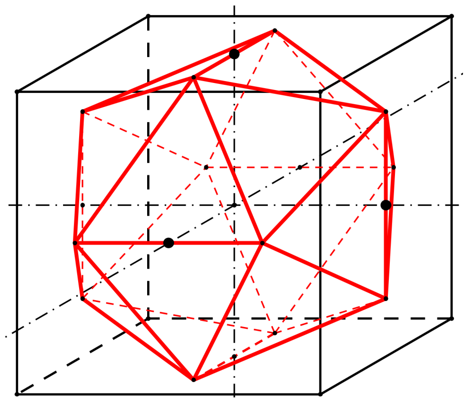
$$\begin{aligned}
|SC|^2 &= |SM|^2 + |CM|^2 = \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \\
|AC|^2 &= |AS|^2 + |SC|^2, \text{ tedy} \\
x^2 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Po úpravě poslední rovnice obdržíme rovnici

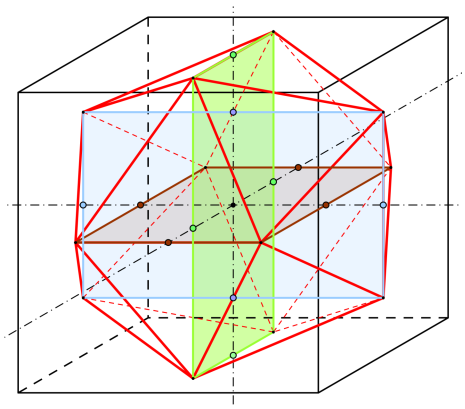
$$0 = x^2 + x - 1,$$

jejíž kořeny jsou $\frac{1}{\varphi}$ a $(-\varphi)$. V úvahu vezmeme pouze první kořen, jelikož délka hrany nemůže být záporné číslo. Poměr délek hran krychle a dvacetistěnu je tedy φ. Nyní můžeme dvacetistěn narýsovat, stačí jen rozdělit hranu krychle zlatým řezem a zjistit tak délku hrany dvacetistěnu (obr. 4.6).

Zjistili jsme, že do pravidelného dvacetistěnu lze vepsat tři zlaté obdélníky se společným středem ležící v navzájem kolmých rovinách tak, že kratší strany obdélníků splývají s hranami dvacetistěnu. Delší strany obdélníků mají stejnou délku jako hrana krychle, do které jsme dvacetistěn vepisovali (obr. 4.7, 4.8). Díky dualitě dvacetistěnu s dvanáctistěnem lze tytéž obdélníky vepsat do pravidelného dvanáctistěnu tak, že vrcholy těchto obdélníků splývají se středy stěn dvanáctistěnu.



Obrázek 4.6: Dvacetistěn v krychli

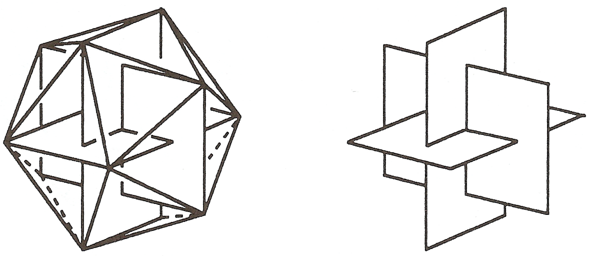


Obrázek 4.7: Zlaté obdélníky vepsané do dvacetistěnu I

Bude-li mít krychle, od které vycházíme, hranu dlouhou 2φ, potom souřadnice vrcholů dvacetistěnu budou

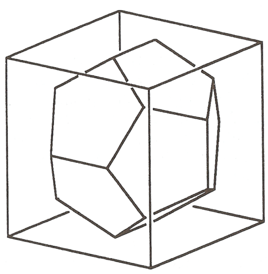
$$[\pm\varphi; 0; \pm 1],\ [0; \pm 1; \pm\varphi],\ [\pm 1; \pm\varphi; 0].$$

Hrana dvacetistěnu je v tomto případě dlouhá dvě jednotky délky.



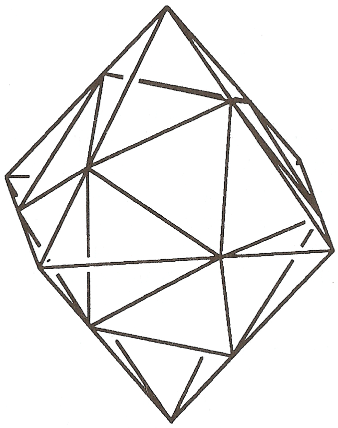
Obrázek 4.8: Zlaté obdélníky vepsané do dvacetistěnu II

Do krychle lze vepsat i pravidelný dvanáctistěn. Potom poměr délek hrany dvanáctistěnu a hrany krychle je $\frac{1}{\varphi^2}$ (obr. 4.9) [37].

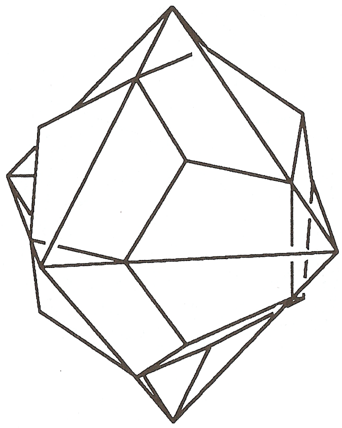


Obrázek 4.9: Dvanáctistěn v krychli

Dvanáctistěn a dvacetistěn lze vepsat pro nás zajímavým způsobem i do pravidelného osmistěnu. Vepíšeme-li dvacetistěn do osmistěnu tak, jak je vidět na obrázku (4.10), budou vrcholy dvacetistěnu dělit hrany osmistěnu zlatým řezem. Pokud do osmistěnu „vepíšeme“ (nejde o skutečné vepsání, protože některé vrcholy dvanáctistěnu jsou vně osmistěnu) dvanáctistěn tak, jak je vidět na obrázku (4.11), budou vrcholy dvanáctistěnu dělit hrany osmistěnu v poměru $1 : \varphi^2$ [37].



Obrázek 4.10: Dvacetistěn v osmistěnu

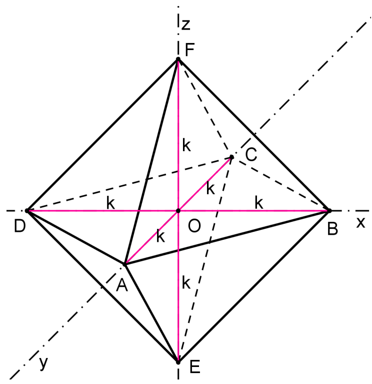


Obrázek 4.11: Dvanáctistěn v osmistěnu

Nakonec upozorním na jedno nedopatření uvedené v knize [4]. Autor zde píše, že souřadnice vrcholů pravidelného osmistěnu jsou

$$[\pm\varphi^2; 0; 0],\ [0; \pm\varphi^2; 0],\ [0; 0; \pm\varphi^2].$$

Ne, že by to nebyla pravda, ale za φ^2 můžeme dosadit libovolnou kladnou konstantu k a získáme také souřadnice vrcholů pravidelného osmistěnu. Tento osmistěn má střed v počátku soustavy souřadnic, jeho vrcholy leží na souřadnicových osách a jeho tělesová úhlopříčka má délku $2k$ (obr. 4.12).



Obrázek 4.12: Osmistěn

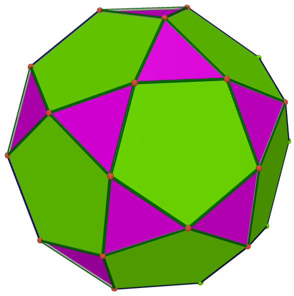
4.2 Další tělesa a prostorové úlohy

Zlatý řez se objevuje na mnoha dalších tělesech. Významnou skupinu mnohostěnů tvoří polopravidelné mnohostěny[3], mezi které patří Archimédova tělesa[4]. Některé vzorce pro výpočet povrchu, objemu atd. těchto těles lze jednoduše přepsat pomocí

[3]Polopravidelné mnohostěny jsou mnohostěny, jejichž stěny jsou tvořeny pravidelnými mnohoúhelníky dvou nebo tří typů a jejichž vrcholy jsou všechny stejného typu (v každém vrcholu se setkávají tytéž hrany v daném pořadí).

[4]Třináct mnohostěnů, které objevil a popsal řecký matematik a fyzik Archimédés (287 – 212 př. n. l.). Vznikají ořezáváním hran nebo vrcholů pravidelných mnohostěnů.

zlatého čísla. Například poloměr opsané kulové plochy tělesa nazývaného icosidodecahedron[5] (obr. 4.13) je roven zlatému číslu φ nebo poloměr kulové plochy, která se dotýká hran tělesa zvaného truncated icosahedron[6] (obr. 4.14) je roven $\frac{3}{2}\varphi$ (v obou případech je hodnota poloměru uvedena pro jednotkovou délku hrany). Na obou zde zmíněných tělesech jsou některé stěny tvořené pravidelnými pětiúhelníky [14].



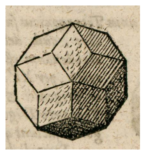
Obrázek 4.13: Icosidodecahedron

Obrázek 4.14: Truncated icosahedron

Další zajímavou skupinu těles tvoří konvexní mnohostěny, jejichž stěny jsou kosočtverce. Ve speciálním případě jsou všechny stěny tvořeny takzvanými zlatými kosočtverci. Zlatý kosočtverec je takový kosočtverec, pro jehož úhlopříčky e, f, $e > f$ platí:

$$\frac{e}{f} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Takové mnohostěny známe čtyři. Prvním a pravděpodobně nejdříve objeveným je takzvaný Keplerův třicetistěn (rhombic tricontahedron). Tento mnohostěn popsal Johannes Kepler ve své práci *Harmonices Mundi* (1619). Jde o konvexní těleso, jehož povrch se skládá z třiceti shodných zlatých kosočtverců (obr. 4.15).



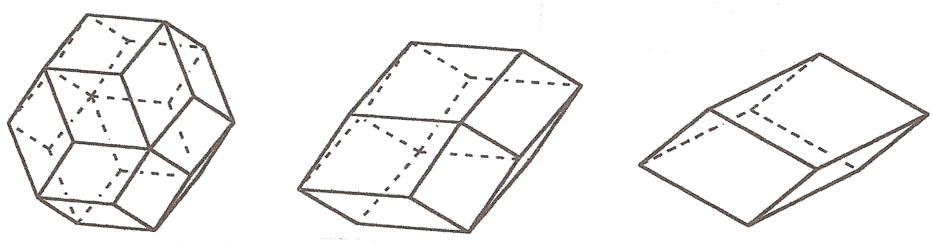
Obrázek 4.15: Keplerův třicetistěn

Z třicetistěnu lze postupným odebíráním stěn vytvořit další tři tělesa, jejichž stěny jsou shodné zlaté kosočtverce: Kosočtverečný dvacetistěn (rhombic icosahedron), kosočtverečný dvanáctistěn druhého druhu[7] (rhombic dodecahedron of the second kind) a zlatý klenec (golden rhombohedron), což je speciální rovnoběžnostěn, jehož stěny (je jich šest) jsou zlaté kosočtverce (obr. 4.16).

[5]Názvy Archimédových těles používané v angličtině se většinou do češtiny nepřekládají. Bývají odvozeny od pravidelného mnohostěnu, ze kterého těleso vzniklo. Icosidodecahedron lze získat z pravidelného dvanáctistěnu nebo z pravidelného dvacetistěnu.

[6]Názvy Archimédových těles používané v angličtině se většinou do češtiny nepřekládají. Bývají odvozeny od pravidelného mnohostěnu, ze kterého těleso vzniklo. Truncated icosahedron získáme, odřízneme-li vrcholy pravidelného dvacetistěnu. Toto těleso svým tvarem připomíná fotbalový míč.

[7]Existuje ještě kosočtverečný dvanáctistěn prvního druhu (nazývaný jen kosočtverečný dvanáctistěn).



Obrázek 4.16: Kosočtverečný dvacetistěn, dvanáctistěn a zlatý klenec

Z dvaceti zlatých klenců lze sestavit kosočtverečný šedesátistěn (rhombic hexecontahedron). Toto těleso je už ale nekonvexní.

Pro zajímavost si ještě ukážeme výskyt zlatého řezu jinde než na mnohostěnech. V knize [5] je na straně 111 tučným písmem uvedena tato věta:

> *Rovinou podstavy kulové úseče, jejíž objem je polovicí objemu příslušné výseče, je rozdělen poloměr koule zlatým řezem, přičemž je vzdálenost d větším úsekem poloměru r.*

Věta je v knize odvozena v předcházející úloze, kterou zde uvedu včetně řešení. V zájmu srozumitelnosti a snadné čitelnosti však nebudu doslova citovat autora.

Zadání:

> V jaké vzdálenosti od středu koule musí být podstava kulové úseče, aby její objem byl polovinou objemu příslušné kulové výseče?

Řešení (obr. 4.17):

Hledanou vzdálenost označme d, přičemž $d = r - v$, kde r je poloměr koule a v je výška kulové úseče. Objem kulové úseče se vypočítá podle následujícího vzorce:

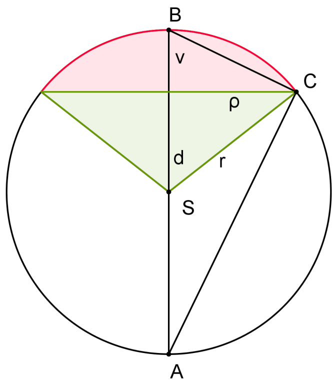
$$V = \frac{\pi v}{6}(3\varrho^2 + v^2),$$

kde ϱ je poloměr podstavy kulové úseče. Tento objem má být polovinou objemu příslušné výseče. Protože objem výseče je součtem objemu úseče a objemu kužele s podstavou, jako má úseč, a s vrcholem S (S je střed koule), musí být objem úseče stejný jako objem zmíněného kužele. Proto:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi v}{6}(3\varrho^2 + v^2) &= \frac{1}{3}\pi\varrho^2 d \\
\frac{\pi v}{6}(3\varrho^2 + v^2) &= \frac{1}{3}\pi\varrho^2(r - v) / \cdot \frac{6}{\pi} \\
3\varrho^2 v + v^3 &= 2\varrho^2 r - 2\varrho^2 v \\
5\varrho^2 v + v^3 - 2\varrho^2 r &= 0.
\end{aligned}$$

Do poslední rovnice dosadíme za ϱ^2 výraz $v(2r - v)$, protože podle Eukleidovy věty o výšce platí v pravoúhlém trojúhelníku ABC vztah:

$$\varrho^2 = v(2r - v).$$



Obrázek 4.17: Úloha: Určení vzdálenosti kulové úseče od středu koule

Obdržíme tedy:

$$\begin{aligned} 5v^2(2r - v) + v^3 - 2rv(2r - v) &= 0 \\ 12v^2r - 4v^3 - 4vr^2 &= 0 / : (-4v) \\ v^2 - 3rv + r^2 &= 0, \end{aligned}$$

což je kvadratická rovnice pro v. Její kořeny jsou

$$v_1 = \frac{r}{2}(3 + \sqrt{5}); \quad v_2 = \frac{r}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Nyní můžeme dopočítat vzdálenost d postupným dosazením výsledků v_1, v_2 do rovnice $d = r - v$:

$$\begin{aligned} d_1 &= r - \frac{r}{2}(3 + \sqrt{5}) = -\frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1), \\ d_2 &= r - \frac{r}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

Jelikož $d_1 < 0$, vyhovuje pouze výsledek d_2. Tedy $d = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Podívejme se ještě, jaký je poměr $\frac{r}{d}$:

$$\frac{r}{d} = \frac{r}{\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

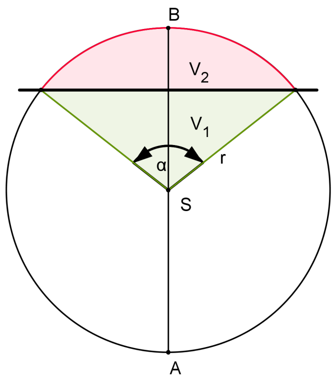
Hodnota poměru $\frac{r}{d}$ je zlaté číslo, což odpovídá výše uvedenému tvrzení.

V téže knize je na straně 220 uvedena ještě jedna zajímavá úloha.

Zadání:

> Jak veliký je středový úhel kulové výseče, jejíž objem je půlen rovinou hranového kruhu?

Úloha je té předchozí velmi podobná. Hlavní myšlenka zůstává stejná, jen místo vzdálenosti podstavy úseče od středu koule hledáme příslušný středový úhel kulové výseče (obr. 4.18). Výsledek vychází přibližně 103°39'.



Obrázek 4.18: Úloha: Určení středového úhlu kulové výseče

Kapitola 5

Historie

5.1 Zlatý řez v Eukleidových Základech

Řecký geometr Eukleidés (2. pol. čtvrtého a 1. pol. třetího st. př. n. l.) je jedním z nejznámějších matematiků starověku. O jeho životě se mnoho neví. Z děl pozdějších autorů lze vyčíst, že žil za vlády Ptolemaia I.[1] v Alexandrii. Jeho nejvýznamnější dílo *Základy* (řecky *Stoicheia*, latinsky *Elementa*) bylo pravděpodobně napsáno někdy okolo roku 300 př. n. l. Kromě tohoto snad nejdůležitějšího geometrického díla v dějinách vůbec, sepsal několik dalších matematických spisů, ne všechny se však dochovaly.

Základy, skládající se ze třinácti knih (částí), jsou systematickým shrnutím tehdejších geometrických znalostí. Po Bibli se staly nejvydávanější knihou a přes 2000 let sloužily jako učebnice geometrie. Je v nich položen základ „eukleidovské geometrie" budované deduktivním způsobem (v tehdejší době jedinečným).

Podle struktury textu lze usoudit, že jednotlivé knihy Základů nevznikaly postupně tak, jak jsou číslovány (kdyby při psaní určité knihy věděl Eukleidés to, co je psáno v knihách předcházejících, patrně by postupoval při dokazování některých tvrzení jinak). Také je pravděpodobné, že autory některých částí jsou další matematici žijící ve stejné době jako Eukleidés nebo dříve.

Pro nás je podstatné, že právě v Základech se nám dochoval zatím snad nejstarší písemný záznam o zlatém řezu. Eukleidés nazývá zlatý řez poměrem „krajním a středním". V úvodu šesté knihy je uvedena následující definice (cituji z českého překladu Františka Servíta z roku 1907 [28]):

> *Pravíme, že přímka*[2] *jest rozdělena poměrem krajním a středním, když větší úsečka má se k menší jako celá k větší*[3].

[1] Ptolemaios I. (367-283 př. n. l.), makedonský generál Alexandra Velikého, v roce 305 př. n l. se stal vládcem Egypta.

[2] Slovem přímka je zde (stejně jako v dalších tvrzeních) myšlena úsečka.

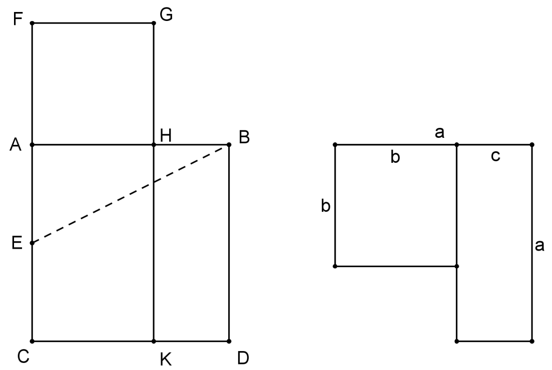
[3] Poznámka F. Servíta: Rozdělení „zlatým řezem", kdež úsečka větší je střední úměrnou.

Dále uvedu pro zajímavost několik tvrzení z Eukleidových Základů souvisejících se zlatým řezem. Tvrzení jsou opět vypsána z knihy [28]. Kde je třeba, doplňuji tvrzení vysvětlením, přepisem do dnešního jazyka nebo náznakem důkazu pomocí současných algebraických zápisů. Eukleidovy důkazy jsou poměrně zdlouhavé a z hlediska dnešního jazyka náročné, proto je neuvádím. Podrobnější rozbor většiny následujících vět a jejich důkazů nalezne čtenář v práci [15]. Znění některých tvrzení vypadá spíš jako zadání úlohy. V Základech však úlohy a tvrzení nejsou rozlišovány, navíc u úloh je vždy dokazována správnost řešení. U jednotlivých tvrzení je vyobrazen obrázek stejný, jako v Základech u důkazu tohoto tvrzení. Jsou-li obrázky dva, ten vpravo slouží k názornějšímu pochopení mého vysvětlení daného tvrzení. Není-li uveden žádný obrázek, znamená to, že nebyl ani v Základech.

Kniha druhá, tvrzení XI. (obr. 5.1):

> *Rozděl danou přímku tak, aby pravoúhelník z celé a z jedné úsečky rovnal se čtverci úsečky zbývající.*

Úlohu snadno objasníme, přepíšeme-li ji pomocí matematických vztahů. Je dána úsečka délky a, kterou máme rozdělit na dvě úsečky délek b, c (tedy $b + c = a$). Nechť $b > c$. Uvažujeme obdélník, jehož kratší strana má délku c a delší délku a, a čtverec se stranou délky b. Porovnáme-li jejich obsahy, dostáváme $b^2 = a \cdot c$, po úpravě $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ nebo také $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$, z čehož plyne, že je daná úsečka dělena ve zlatém řezu.

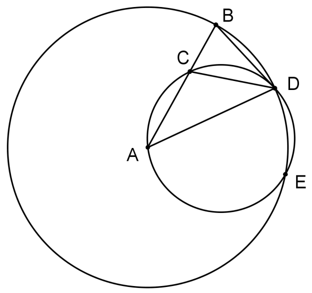


Obrázek 5.1: Kniha druhá, tvrzení XI.

Kniha čtvrtá, tvrzení X. (obr. 5.2):

> *Sestroj rovnoramenný trojúhelník mající úhly na základně jednotlivě dvakrát větší úhlu třetího.*

Takový trojúhelník nazýváme zlatý. Poměr délek jeho ramena a základny je zlaté číslo. V Základech je tento trojúhelník dále používán při vepisování pravidelného pětiúhelníku do dané kružnice.

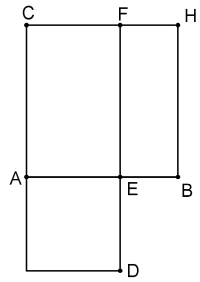


Obrázek 5.2: Kniha čtvrtá, tvrzení X.

Kniha šestá, tvrzení XXX. (obr. 5.3):

Rozděl přímku omezenou poměrem krajním a středním.

Dnešními slovy řečeno: Rozděl danou úsečku zlatým řezem.

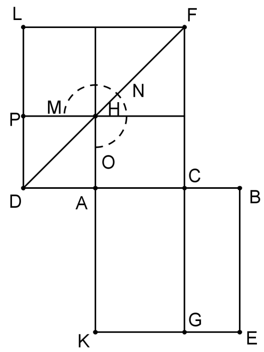


Obrázek 5.3: Kniha šestá, tvrzení XXX.

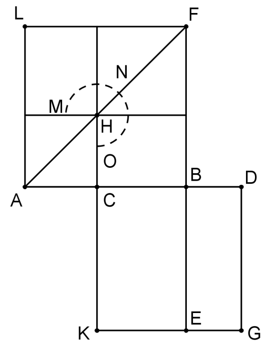
Kniha třináctá, tvrzení I. (obr. 5.4):

Když se rozdělí přímka poměrem krajním a středním, čtverec z větší úsečky, zvětšené o polovici celé, rovná se pateronásobnému čtverci z polovice.

Označíme-li délku dané úsečky a a rozdělíme-li ji na dvě části x a $a-x$ zlatým řezem, musí platit $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, neboli po úpravě $x^2 + ax - a^2 = 0$. Tvrzení můžeme přepsat následovně $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = 5 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Úpravou této rovnice dostáváme vztah $x^2 + ax - a^2 = 0$, který je podle předpokladů splněn.



Obrázek 5.4: Kniha třináctá, tvrzení I.



Obrázek 5.5: Kniha třináctá, tvrzení II.

Kniha třináctá, tvrzení II. (obr. 5.5):

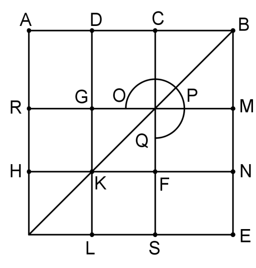
> *Když je čtverec přímky pateronásobkem čtverce z úsečky její, rozdělí-li se řečená úsečka zdvojnásobena jsouc poměrem krajním a středním, větší úsečka (nová) je zbývající částí přímky počáteční.*

Je dána úsečka AB a bod C ležící mezi body A, B tak, že platí: $|AB|^2 = 5 \cdot |AC|^2$. Uvažujeme-li bod D na polopřímce AB takový, že $|CD| = 2 \cdot |AC|$, a rozdělíme-li úsečku CD zlatým řezem, bude délka většího dílu úsečky CD rovna délce úsečky BC.

Kniha třináctá, tvrzení III. (obr. 5.6):

> *Když se rozdělí přímka poměrem krajním a středním, čtverec menší úsečky zvětšené o polovici úsečky větší rovná se pateronásobnému čtverci z polovice úsečky větší.*

Přímku délky a rozdělíme zlatým řezem na části dlouhé x a $a - x$ tak, že $x > a - x$. Čtverec menší úsečky zvětšené o polovici větší zapíšeme: $\left(a - x + \frac{x}{2}\right)^2$, pateronásobek čtverce z polovice úsečky větší zapíšeme: $5 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2$. Dostáváme tedy rovnici $\left(a - x + \frac{x}{2}\right)^2 = 5 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2$, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na rovnici zlatého řezu $x^2 + ax - a^2 = 0$, o které z předpokladů víme, že je splněna.

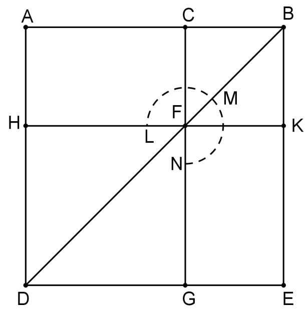


Obrázek 5.6: Kniha třináctá, tvrzení III.

Kniha třináctá, tvrzení IV. (obr. 5.7):

Když se přímka rozdělí poměrem krajním a středním, součet čtverců z celé a z úsečky menší je třikrát větší nežli čtverec úsečky větší.

Přímku délky a rozdělíme zlatým řezem na části dlouhé x a $a - x$, $x > a - x$. Tvrzení přepsané do rovnice vypadá následovně: $a^2 + (a - x)^2 = 3 \cdot x^2$. Úpravou této rovnice opět získáme rovnici zlatého řezu.

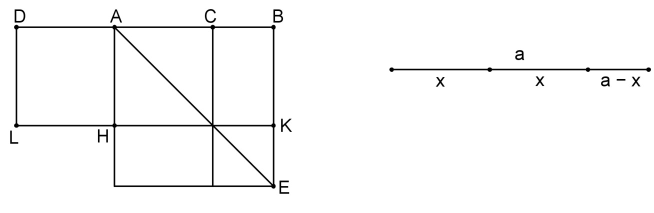


Obrázek 5.7: Kniha třináctá, tvrzení IV.

Kniha třináctá, tvrzení V. (obr. 5.8):

Když se přímka rozdělí poměrem krajním a středním a připojí se k ní rovná úsečce větší, celá přímka rozdělena jest poměrem krajním a středním, a větší úsečkou jest přímka počáteční.

K přímce délky a rozdělené zlatým řezem na úsečky délek x, $a - x$ ($x > a - x$) připojíme úsečku délky x. Nyní má platit: $\frac{a+x}{a} = \frac{a}{x}$. Úpravou této rovnice získáme rovnici $x^2 + ax - a^2 = 0$, která z předpokladů platí.



Obrázek 5.8: Kniha třináctá, tvrzení V.

Kniha třináctá, tvrzení VI.:

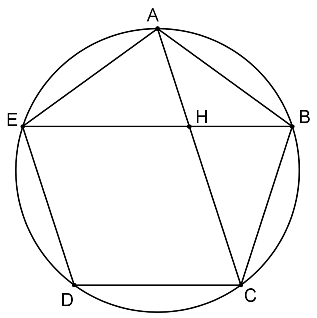
Když se přímka změrná rozdělí poměrem krajním a středním, každá z úseček je nezměrná, nazývaná úsečnicí.

Dnešními slovy řečeno: Rozdělíme-li úsečku, jejíž délka je racionální číslo, zlatým řezem, budou mít takto získané části původní úsečky iracionální délku. Pojem úsečnice je zaveden v knize desáté, kde je používán právě pro „nezměrnou“ úsečku získanou dělením úsečky „změrné“.

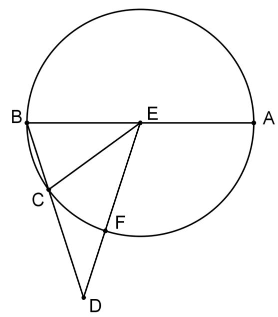
Kniha třináctá, tvrzení VIII. (obr. 5.9):

> *Když jsou v pětiúhelníku stejnostranném a stejnoúhlém proti dvěma sousedním úhlům úhlopříčky, protínají se navzájem poměrem krajním a středním, a větší jejich úsečky rovnají se stranám pětiúhelníku.*

Pětiúhelníkem stejnostranným a stejnoúhlým se myslí pravidelný pětiúhelník (má „stejné úhly, stejné strany“). Vezmeme-li dvě různé úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, které nemají společný krajní bod, dělí jejich průsečík každou z nich ve zlatém řezu (viz podkapitola 3.4).



Obrázek 5.9: Kniha třináctá, tvrzení VIII.



Obrázek 5.10: Kniha třináctá, tvrzení IX.

Kniha třináctá, tvrzení IX. (obr. 5.10):

> *Když se sečtou strana šestiúhelníku a strana desetiúhelníku, do téhož kruhu vepsaných, celá přímka jest rozdělena poměrem krajním a středním a její úsečkou větší je strana šestiúhelníku.*

Platnost tohoto tvrzení vyplývá například ze středoškolské konstrukce pravidelného pětiúhelníku popsané na straně 54.

Tvrzení ze začátku 13. knihy jsou dále použita při konstrukci pravidelných mnohostěnů vepisováním do kulové plochy. Touto částí ale Základy nekončí. Ke třinácti knihám byly později připojeny další dvě, takzvané *Dodatky.* Jejich autorem již pravděpodobně není Eukleidés. Za autora čtrnácté knihy je považován Hypsikles z Alexandrie[4], autorem patnácté knihy je možná Isidor z Milétu[5] nebo některý z jeho

[4]Hypsikles z Alexandrie (asi 190-120 př. n. l.), řecký matematik.

[5]Isidor z Milétu (442-537 n. l.), architekt, podílel se na stavbě chrámu Hagia Sofia v Konstantinopoli (dnešní Istambul).

žáků [2]. Obě knihy pojednávají o pravidelných mnohostěnech. V knize čtrnácté jsou dvě věty související se zlatým řezem. Věty cituji z knihy [2], kde je uveden Smolíkův[6] překlad Dodatků. Pro dělení úsečky zlatým řezem užívá termín poměr vnější a střední.

Věta 5.:

> Rozdělíme-li dovolnou přímku v poměru vnějším a středním, má se přímka, jejíž čtverec se rovná součtu čtverce celé oné přímky a čtverce části její větší k přímce, jejíž čtverec se rovná součtu čtverce téže celé přímky a čtverce části její menší, jako se má hrana krychle k hraně dvacetistěnu.

Symbolicky bychom tuto poměrně komplikovaně formulovanou větu mohli zapsat následovně:

> Danou úsečku délky a rozdělíme zlatým řezem na díly x a $a - x$ tak, že $x > a - x$. Potom poměr $\frac{b}{c}$, kde $b^2 = a^2 + x^2$, $c^2 = a^2 + (a - x)^2$, je shodný s poměrem délek hran krychle a pravidelného dvacetistěnu vepsaných téže kulové ploše.

Věta 7.:

> Rozdělíme-li dvě přímky v poměru vnějším a středním mají se přímky ty k sobě jako jejich části.

Větu opět převedu do dnešního symbolického zápisu:

> Jsou dány dvě úsečky délek a, b. Obě tyto úsečky rozdělíme zlatým řezem, úsečku délky a tak rozdělíme na úsečky délek x a $a-x$, přičemž $x > a-x$, úsečku délky b rozdělíme na úsečky délek y a $b - y$, přičemž $y > b - y$. Potom $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Sama textu rozumím tak, že závěrečným tvrzením je rovnost poměrů $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ (při výše zavedeném označení), ale v důkazu se dokazuje rovnost $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$, která je však s rovností $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ ekvivalentní.

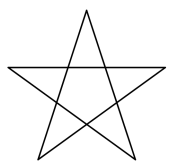
5.2 Zlatý řez u dalších autorů starověku

Zlatý řez byl pravděpodobně znám ještě před Eukleidem. Pythagorejci[7] měli ve znaku pentagram (obr. 5.11), symbol, ve kterém lze najít zlatý řez hned několikrát.

[6] Josef Smolík (∗ 5. 11. 1832, † 12. 9. 1915), středoškolský profesor matematiky a fyziky, působil zejména v Praze a v Pardubicích (více o jeho životě a díle v knize [3]).

[7] Žáci pythagorejské školy, kterou okolo roku 530 př. n l. založil v Krotónu (jihoitalská dórská kolonie) Pýthagorás ze Samu.

Byl to pravděpodobně právě jeden z Pythagorejců – **Hippasos z Metapontu** – kdo objevil nesouměřitelnost[8] strany a úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku pomocí nekonečného vepisování pětiúhelníků do sebe. Je možné, že nesouměřitelnost a iracionální čísla byla jako první objevena prostřednictvím zlatého řezu, většinou se však má za to, že tyto fenomény byly odhaleny zkoumáním poměru úhlopříčky a strany čtverce [16].



Obrázek 5.11: Pentagram

Řecký matematik **Theaitétos** (asi 415–369 př. n l.) vepsal pravidelný pětiúhelník do kružnice, dokázal, že pravidelných mnohostěnů existuje právě pět, a je považován za prvního matematika, který tato tělesa sestrojil. Je pravděpodobné, že z jeho prací čerpal Eukleidés při psaní desáté a třinácté knihy svých Základů.

Herónovi z Alexandrie (asi 10–70 n. l.) je připisována dnes asi nejznámější konstrukce zlatého řezu (viz Konstrukce 1 v kapitole 2), která je jakousi obměnou konstrukce uvedené v Základech v knize druhé, tvrzení XI. Herón se také zabýval aproximací obsahu pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku, kružnicí opsanou pravidelnému pětiúhelníku a objemem pravidelného dvanáctistěnu a dvacetistěnu [8].

Dalším významným matematikem, jehož práce souvisí se zlatým řezem, je **Klaudios Ptolemaios** (asi 90–165 n. l.), řecký geograf, astronom a astrolog, který pravděpodobně žil v Alexandrii. Jeho nejznámější prací je bezpochyby *Velká skladba* (řecky *Megalé syntaxis*), známá pod názvem *Almagest* [33]. Ptolemaios sestavil tabulky tětiv (délky tětiv příslušné středovým úhlům v závislosti na poloměru kružnice) srovnatelné s moderními trigonometrickými tabulkami. Zabýval se i výpočtem tětiv příslušných k úhlům 36° a 72°, což jsou strany pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku vepsaných do dané kružnice. Při těchto výpočtech pracoval se zlatým řezem a pokusil se určit hodnotu φ [8].

Poslední matematik tohoto období, kterého zde uvedu, je **Pappos z Alexandrie** (žil pravděpodobně v 1. pol. 4. st. n. l.). Kromě jiného se zabýval konstrukcí pravidelného dvanáctistěnu a dvacetistěnu a výpočtem objemů pravidelných mnohostěnů. Konstrukce dvanáctistěnu a dvacetistěnu uvádí ve třetí knize svého díla *Synagoge* (celkem 8 knih). Pappovo pojetí je zcela odlišné od Eukleidových Základů. Výpočet objemů popisuje v knize páté. Uvádí zde rovněž několik lemmat využívajících zlatý řez. Například [8]:

- Rozděl úsečku AB zlatým řezem v bodě G tak, že GB je menší částí původní úsečky. Potom $\dfrac{|AB|^2}{5 \cdot |GB|^2} > \dfrac{4}{3}$.
- Nechť AG je průměr kružnice se středem E. Sestroj úsečku BD takovou, že $BD \perp AG, D \in AG$, B leží na kružnici a platí: $|AG| = 3 \cdot |GD|$. Sestroj troj-

[8]Dvě úsečky jsou nesouměřitelné, jestliže jejich délky nemají žádného společného celočíselného dělitele.

úhelník AGB. Dále rozděl úsečku BG zlatým řezem v bodě T tak, že BT je delší část úsečky BG. Na úsečce AG sestroj bod Z tak, aby $|EG|^2 = 5 \cdot |EZ|^2$. Potom platí: $\dfrac{|BT|^2}{|GZ|^2} = \dfrac{5}{3}$.

5.3 Zlatý řez v arabské matematice

Arabská matematika, o které zde bude řeč, se rozvíjela v období od začátku 9. století do přibližně poloviny 10. století. K nejznámějším autorům patří matematik a astronom **Muhammad al-Chwárizmí** (asi 780–850 n. l.), který se věnoval zejména algebře. Jedna jeho úloha zní [8]:

> *Rozdělím deset na dvě části. Jednu vynásobím deseti a druhou sama sebou. Tyto součiny pak budou stejné.*

Zapíšeme tuto úlohu pomocí rovnice:

> Číslo 10 jsme rozdělili na x a $10-x$, přičemž x vynásobíme desíti a $10-x$ vynásobíme výrazem $10 - x$. Má nastat následující rovnost:
>
> $$10x = (10 - x)^2.$$
>
> Tuto rovnost lze ale přepsat následovně:
>
> $$\frac{10}{10-x} = \frac{10-x}{x},$$
>
> což je rovnice pro rozdělení úsečky délky 10 zlatým řezem, kde x je menší částí původní úsečky. Je ovšem otázkou, zda al-Chwárizmí měl v úmyslu použít zlatý řez.

Dalším významným arabským matematikem byl **Abú Kámil** (asi 850–930 n. l.). Kámil použil vlastnosti zlatého řezu ve dvou knihách: (*Kniha o algebře, Kniha o pětiúhelníku a desetiúhelníku*). Podrobněji jsou práce arabských matematiků související se zlatým řezem zpracovány v [15].

5.4 Zlatý řez v období renesance

Ve středověku o matematiku (včetně zlatého řezu) poněkud opadl zájem. Jednu z výjimek tvoří Fibonacciho posloupnost, kterou popsal Fibonacci ve svém díle *Liber Abaci* (více viz 1.4). Rozkvět zlatého řezu nastal až v období renesance, zejména díky několika malířům a matematikům současně.

Prvním z nich byl ital **Piero della Francesca** (asi 1415–1492). Napsal *Traktát o abaku, Traktát o perspektivě* a *Knížečku o pěti pravidelných tělesech.* V jeho díle se objevuje řada úloh a řešení na téma pravidelný pětiúhelník a pravidelná tělesa.

Počítá délky stran a úhlopříček, obsahy, povrchy a objemy zmíněných geometrických objektů, přičemž v řadě jeho řešení figuruje zlatý řez [16]. Zde je malá ukázka z jeho díla:

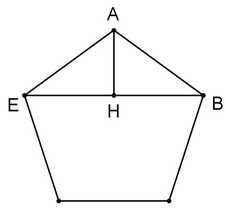
> *Úhlopříčka pravidelného pětiúhelníku měří 12. Nalezněte stranu tohoto pětiúhelníku.*

Víme, že strana je větší částí úhlopříčky rozdělené zlatým řezem. Na tomto principu je založeno i Francescovo řešení. Další příklad:

> *Strana pravidelného pětiúhelníku měří 4. Nalezněte úhlopříčku tohoto pětiúhelníku.*

Jedná se o obrácenou úlohu k předchozímu příkladu. Na tomto faktu je založeno i její řešení. A ještě jedna úloha:

> *Strana pravidelného pětiúhelníku měří 4. Nalezněte výšku AH na úhlopříčku BE* (obr. 5.12).



Obrázek 5.12: Výška na úhlopříčku v pětiúhelníku

Velkou část z Francescova díla převzal italský mnich **Luca Pacioli** (1445–1517). Sepsal dílo *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (*Souhrn poznatků o aritmetice, geometrii, poměrech a úměrnosti*), které lze považovat za jakousi středověkou encyklopedii matematiky. Většinu Francescova díla o tělesech použil ve svém třísvazkovém traktátu o zlatém řezu *De divina proportione* (*Božská proporce*). V páté kapitole prvního svazku uvádí pět důvodů, proč by se podle jeho názoru měl zlatý řez označovat jako božská proporce [16].

- „Protože je jeden a více jich není.“ Pacioli přirovnává jedinečnost zlatého řezu k tomu, že jednota „je nejvyšším přídomkem samého Boha“.
- Pacioli shledává podobnost mezi definicí zlatého řezu z přesně tří délek[9] a existencí svaté Trojice – Otce, Syna a Ducha svatého.

[9]Daná úsečka a její dvě části vzniklé po rozdělení zlatým řezem.

- Vidí obdobu v rozumové neuchopitelnosti Boha a ve skutečnosti, že zlatý řez je iracionální číslo. Přímo napsal: „Jako není možné patřičně definovat Boha a nelze jej pochopit pomocí slov, tak ani naše proporce nemůže být vymezena pochopitelnými čísly, ani vyjádřena nějakou racionální veličinou; vždy zůstane skrytá, utajená a, jak ji nazývají matematici, iracionální.“

- Pacioli přirovnává všudypřítomnost a neměnnost Boha k soběpodobnosti spojené se zlatým řezem – k tomu, že hodnota tohoto poměru je vždy stejná a nezávisí na délce rozdělené úsečky ani na velikosti pětiúhelníku, tedy útvarů, z nichž se poměry délek vypočítávají.

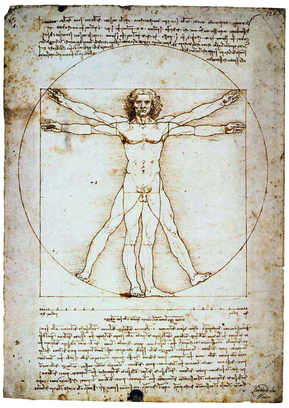
- Pátý důvod prozrazuje ještě platónstější názor na existenci, než zastával sám Platón. Pacioli uvádí, že stejně jako Bůh pomocí páté esence, ztělesněné dvanáctistěnem, uvedl v bytí celý vesmír, tak zase zlatý řez dává existenci dvanáctistěnu, jelikož toto těleso bez něj sestrojit nelze. Dodává, že ani další čtyři platónská tělesa (představující zemi, vodu, vzduch a oheň) není možné srovnávat mezi sebou bez zlatého řezu.

Ve druhém svazku *De divina proportione* pojednává Pacioli o proporcích a jejich využití v architektuře a struktuře lidského těla. Jeho zpracování je založeno na práci římského architekta Marka Vitruvia Pollia[10]. Vitruvius napsal [21]:

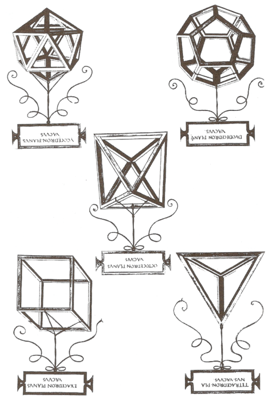
> Příroda totiž vytvořila lidské tělo tak, že obličej od brady k hornímu konci čela k začátku vlasových kořínků měří $\frac{1}{10}$ těla a stejně tolik i natažená dlaň od kloubu v zápěstí ke konečku prostředního prstu...
>
> Přirozeným středem lidského těla je pupek. Položí-li se totiž člověk naznak s roztaženýma rukama i nohama a umístí-li se střed kružítka na jeho pupek, bude se čára opsané kružnice dotýkat prstů obou rukou i nohou. Stejně tak jako se podává na lidském těle obrazec kružnice, právě tak lze na něm zjistit i obrazec čtverce...
>
> Vytvořila-li tedy příroda lidské tělo tak, aby proporce jeho částí zachovávaly daný poměr k jeho celkovému útvaru, je zřejmé, že předchůdci důvodně zavedli, aby se i při stavebních výtvorech zachovával přesný rozměrový soulad jejich jednotlivých částí v poměru ke vzhledu celkového útvaru...

Na základě těchto slov vytvořil Leonardo da Vinci kresbu „Vitruviánského muže“, někdy též zvanou „Vitruviánský člověk“ (obr. 5.13).

[10]Marcus Vitruvius Pollio (1. st. př. n. l.) byl široce vzdělaný římský architekt. Ve svém díle *Deset knih o architektuře* se zabývá architekturou, stavebním inženýrstvím, gnómonikou, naukou o sestrojování přístrojů na měření času a naukou o sestrojování strojů na zdvihání pevných těles a vody, výběrem místa a dispozicí staveb, naukou o stavebních materiálech, ... Podle něj je estetika architektury založena na číselných vztazích odvozených z proporcí lidského těla [21].



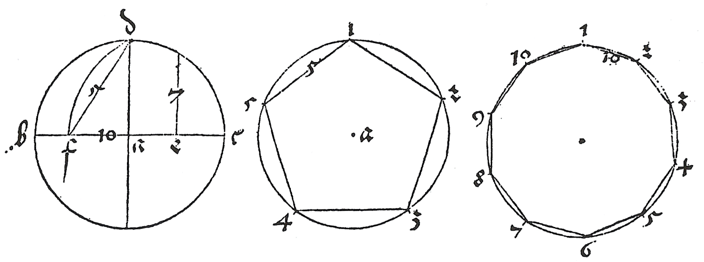
Obrázek 5.13: Vitruviánský muž



Obrázek 5.14: Ilustrace knihy *De divina proportione*

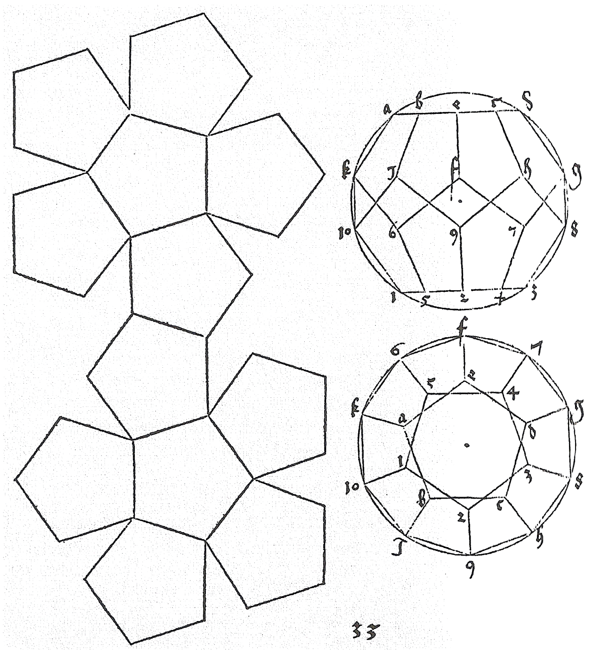
V mnoha pracích o zlatém řezu je možné se dočíst, že podle Pacioliho určuje zlatý řez proporce všech uměleckých děl. Pacioli ale obhajuje spíše vitruviánský systém založený na jednoduchých racionálních poměrech [16]. Pravdou ale je, že Vitruviovy proporce jsou občas blízké zlatému číslu. Jedná se totiž často o poměry typu $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, čili o podíly sousedních členů Fibonacciho posloupnosti (viz podkapitola 1.4).

Zajímavé ilustrace knihy *De divina proportione* vytvořil rovněž Leonardo da Vinci. Jeho originální kresby mnohostěnů (obr. 5.14) inspirovaly mnohé další umělce.



Obrázek 5.15: Pravidelný pětiúhelník a desetiúhelník

Dalším významným renesančním umělcem a matematikem v jedné osobě byl německý malíř **Albrecht Dürer** ($*$ 21. 5. 1471, † 6. 4. 1528). Dürer byl přesvědčen, že matematika je významnou složkou umění. Pobýval v Itálii, kde se seznámil s dílem Luca Pacioliho. Zajímala ho geometrie, zkoumal lidský pohyb a proporce. Ve své knize *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit* (*Pojednání o měření s kružítkem a pravítkem*) klade důraz na to, že výtvarník má znát geometrii. Se zlatým řezem z této knihy souvisí zejména popis konstrukce logaritmické spirály, přesné i přibližné konstrukce mnohoúhelníků (včetně pětiúhelníku a desetiúhelníku - obr. 5.15) a Platónova tělesa, u kterých (stejně jako u mnoha dalších těles) rozkreslil jako jeden z prvních autorů sítě (obr. 5.16), z nichž se tato tělesa dají složit [16].



Obrázek 5.16: Pravidelný dvanáctistěn a jeho síť

5.5 Zlatý řez v novověku

Od přelomu 15. a 16. století se zlatý řez objevuje v pracích mnoha autorů, většinou ale jako přepracování starších výsledků. Například italský matematik **Rafael Bombelli** (1526–1572) ve své knize *Algebra* řeší úlohy související se zlatým řezem nebo popisuje Herónovu konstrukci rozdělení usečky zlatým řezem či Ptolemaiovu konstrukci nalezení strany pravidelného pětiúhelníku. Rovněž se zabývá pravidelnými mnohostěny. Zlatý řez ve svých pracích použili i Francouz **Petrus Ramus** (1515–1572) nebo Belgičan **Simon Stevin** (1548–1620) [8].

Jak už jsem se zmínila v první kapitole, se zlatým řezem pracoval také **Johannes Kepler** (∗ 27. 12. 1571, † 15. 11. 1630). Tento významný německý matematik, astronom a astrolog je znám zejména díky objevu tří zákonů o pohybu planet. V roce 1597 uvedl Kepler v dopise svému profesoru Michaelu Mästlinovi tuto úlohu [8]:

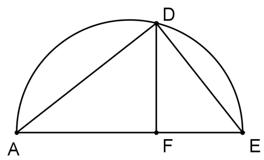
> *Když nad úsečkou rozdělenou zlatým řezem sestrojíme pravoúhlý trojúhelník tak, že daná úsečka je jeho přeponou a pravý úhel leží kolmo nad dělícím bodem, potom délka kratší odvěsny tohoto trojúhelníku bude rovna délce větší části rozdělené úsečky.*

Keplerův důkaz úlohy(v zájmu srozumitelnosti poupraven):

> Mějme úsečku AE rozdělenou zlatým řezem. Dělícím bodem je bod F, přičemž FA je delší část rozdělené úsečky. Sestrojme kolmici k AE

v bodě F a polokružnici nad průměrem AE. Průsečík D je vrchol pravého úhlu trojúhelníku EAD. Chceme dokázat, že $|DE| = |FA|$ (obr. 5.17).

Víme, že $\triangle EFD \sim \triangle DFA \sim \triangle ADE$, proto $|AE| : |ED| = |ED| : |EF|$. Protože úsečka AE je bodem F rozdělena ve zlatém řezu, platí navíc $|AE| : |AF| = |AF| : |EF|$. Z posledních dvou vztahů vyplývá, že $|AF| = |ED|$.



Obrázek 5.17: Trojúhelník z Keplerovy úlohy

S tímto trojúhelníkem pracuje Kepler dále. Dokazuje, že

$$|AE| : |AD| = |AD| : |ED|,$$

neboli nejdelší strana trojúhelníku k prostřední se má stejně jako prostřední k nejkratší. V tomto příkladu je určitá analogie se zlatým řezem úsečky, jen je definice přenesena na délky stran pravoúhlého trojúhelníku.

Dále Kepler pracoval s Fibonacciho čísly, která patrně objevil nezávisle na Fibonaccim. Právě Keplerovi je připisován objev skutečnosti, že podíly sousedních členů této posloupnosti se blíží zlatému číslu.

Názvy „zlatý řez“ a „zlaté číslo“ se v různých jazycích objevily v literatuře až v 19. století. Vývoj terminologie zlatého řezu podrobně rozebírá například Roger Herz-Fischler v knize [8] na stranách 164–170. V téže době se také objevují teorie proporcí lidského těla založené na zlatém řezu či výzkumy experimentální estetiky, která mimo jiné zjišťovala, jakou roli má zlatý řez v působení na lidskou psychiku. Osob zabývajících se touto problematikou je mnoho, o některých se zmiňuji v dalších kapitolách této práce.

Kapitola 6

Zlatý řez v hodinách matematiky na středních školách

V této kapitole se podíváme na posun učiva během posledních přibližně sta let. Co se dnes žáci dozví ve škole o zlatém řezu a co se asi dozvěděli dříve? S jakou částí středoškolské matematiky zlatý řez souvisí a kde bychom ho tedy měli hledat ve středoškolských učebnicích? V závěru kapitoly jsou návrhy pracovních listů a skládanky z papíru pro mladší i starší žáky. Vyučující mohou tyto příklady využít přímo v hodinách, ať už jako učební materiál nebo jako zábavné zpestření výuky. Pracovní listy také mohou posloužit jako inspirace k přípravě vlastních zadání na stejné nebo podobné téma.

6.1 Učebnice

Následující podkapitola je tematicky rozdělena na tři části. V první části se podíváme na některé učebnice vycházející od počátku 20. století do 2. světové války. V druhé části jsou zařazeny učebnice používané v období od konce 2. světové války přibližně do roku 1989 a konečně ve třetí části učebnice používané v současnosti. Je zajímavé sledovat posun obsahu učiva i stylu výkladu (nejen zlatého řezu), který se bezesporu zjednodušuje, aby byl čitelnější a záživnější. Úlohy důkazového typu, které vyžadují po studentech hlubší zamyšlení a pochopení souvislostí, postupně vystřídaly úlohy jednodušší, často spočívající v dosazení do nějakého daného vzorce. To, co bývalo ve starších učebnicích podáváno jako příklad, který má student sám vyřešit (často důkaz nějaké matematické věty nebo odvození vzorečku) bývá dnes součástí autorem vysvětlené teorie (nebo v učebnici zcela chybí). Jestli je to posun správný, nechť si každý zváží sám. Zde se podívejme na konkrétní ukázky výkladu i příkladů včetně jejich řešení.

6.1.1 Učebnice vydané před 2. světovou válkou

V žádné učebnici planimetrie (z těch, které jsem měla možnost vidět) vydané v tomto období nechybí kapitola nebo alespoň odstavec o zlatém řezu. V různých sbírkách úloh jejich autoři při tvorbě zadání předpokládali, že studenti zlatý řez znají. Není-li zlatému řezu vyčleněna samostatná kapitola, bývá zařazen do kapitoly *Střední měřicky úměrná*, *Pythagorova věta*, popřípadě *Mocnost bodu ke kružnici.* Nejčastěji se vyskytující příklady na užití zlatého řezu jsou úlohy o pravidelném pětiúhelníku a pravidelném desetiúhelníku, a to početní i konstrukční. Příklady se v různých učebnicích s drobnými obměnami opakují, uvedu zde tedy jen určitý výběr. Čtenáře upozorňuji, že v tomto období se body občas značily malými písmeny a úsečky či přímky velkými – tedy přesně obráceně, než jak jsme zvyklí nyní.

Definici zlatého řezu často předchází definice střední měřicky úměrné (dnes bychom řekli střední geometricky úměrná nebo častěji geometrický průměr). Jedno z mnoha znění je [29]:

> *Rovnají-li se v úměře oba vnitřní členy* ($a : b = b : c$)*, nazýváme úměru spojitou, člen vnitřní* (b) *slove střední (měřicky) úměrnou.*

Zlatý řez bývá definován následujícím způsobem [18]:

> *Úsečka a je rozdělena dle zlatého řezu, když její větší úsek x je střední úměrnou úseku menšího* ($a - x$) *a celé úsečky a.*

V dalších učebnicích jsou definice střední úměrné i zlatého řezu obdobné, popřípadě je místo definice zlatého řezu uvedena tato úloha [36]:

> *Rozděliti danou úsečku tak ve dva díly, aby větší byl střední úměrnou menšího a celku.*

Většinou následuje řešení úlohy a vysvětlení, že takovému rozdělení úsečky se říká zlatý řez.

V dalším textu naleznete několik doslovných ukázek (s výjimkou číslování obrázků a celkové úpravy textu, kterou se snažím v zájmu přehlednosti sjednotit) ze starších učebnic. Ukázky jsou chronologicky seřazeny podle roku vydání dané učebnice. Kde je třeba, jsou doplněny komentářem.

Strnad A.: Geometrie pro vyšší školy reálné, díl II. 1903, [30]

Kapitola I. Základy goniometrie, § 3. Výpočet funkcí goniometrických.
Řešená úloha 3 na straně 9:

> Vypočítati jest goniometrické funkce úhlů 18° a 72°.
>
> Řešení: V pravidelném desetiúhelníku jest strana $a = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

Jelikož jest $\sin 18° = \frac{a}{2} : r$, vypočítáme $\sin 18° = \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, a dle § 2.2 $\cos 18° = \sin 72° = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg} 18° = \operatorname{cotg} 72° = \sqrt{\sqrt{5}-2}$.

Komentář: Autor v řešení předpokládá povědomí o výskytu daných úhlů v pravidelném desetiúhelníku a znalost vztahu mezi délkou strany desetiúhelníku a poloměrem kružnice jemu opsané. Mezivýpočty neuvádí. Paragraf 2.2, na který se odkazuje, pojednává o vztazích mezi goniometrickými funkcemi. Ve výsledku hodnoty funkce tangens pro úhel 18° (respektive funkce cotangens pro úhel 72°) je v učebnici chyba, správný výsledek je (po úpravě) $\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$.

Kapitola III. Rozšíření pojmů goniometrických, § 16. Rovnice goniometrické. Řešená úloha na straně 55:

Řešte:

$$\cos x = \operatorname{tg} x$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \sin x - 1 &= 0 \\ \sin x &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803 \\ x_1 &= 38°10', \; x_2 = 2R - x_1 \end{aligned}$$

Komentář: Řešení je uvedeno jen na intervalu $\langle 0; 2\pi\rangle$, ačkoliv v zadání toto omezení není. V takovém případě dnes automaticky předpokládáme, že řešení hledáme v celém oboru reálných čísel. Výpočty jsou opět provedeny velmi stručně. Označení pravého úhlu velkým písmenem R se dnes na středních školách, pokud je mi známo, běžně nepoužívá. Úlohu zde uvádím pro její zajímavý mezivýsledek – $\sin x$ je roven převrácené hodnotě zlatého čísla.

Strnad A., Rašín K.: Geometrie pro vyšší reálky, díl II., 1912 [31]

Kapitola X. Útvary podobné, § 46. Střední měřická úměrná. Řešená úloha 6 na straně 18:

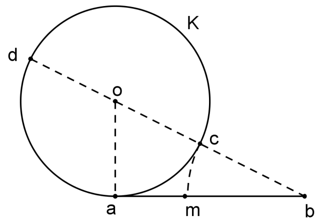
Danou úsečku rozděliti jest zlatým řezem, t. j. tak, aby menší díl měl se k většímu jako tento k celku.

Řešení (obr. 6.1): Učiňme

$$\begin{aligned} ao &\perp ab, \; ao = \frac{1}{2}ab, \\ oc &= oa, \; bm = bc; \end{aligned}$$

bod m dělí úsečku ab způsobem žádaným.

Důkaz: Sestrojíme-li kružnici K, jest



Obrázek 6.1: Příklad

$$\begin{aligned} bd : ba &= ba : bc \\ (bd - ba) : ba &= (ba - bc) : bc \\ bm : ba &= am : bm, \end{aligned}$$

čili

$$am : bm = bm : ab.$$

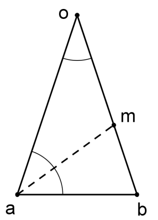
Dodatek: Kdybychom ab za bod b prodloužili a učinili pak $bn = bd$, byla by délka an v bodě b zlatým řezem rozdělena a body a, b, m, n tvořily by harmonickou čtveřinu.

Komentář: Konstrukce popsaná v řešení odpovídá Herónově konstrukci zlatého řezu, důkaz je proveden s užitím mocnosti bodu ke kružnici. O čtyřech kolineárních[1] bodech říkáme, že tvoří harmonickou čtveřinu, je-li jejich dvojpoměr[2] roven jedné.

Kapitola X. Útvary podobné, § 46. Střední měřická úměrná.
Řešená úloha 7 na straně 18:

Strana pravidelného desetiúhelníka do kružnice vepsaného rovná se většímu dílu poloměru rozděleného zlatým řezem.

Důkaz (obr. 6.2): Budiž ab strana pravidelného 10tiúhelníka vepsaného do kružnice středu o. V rovnoramenném trojúhelníku abo jest úhel ramen 36°, úhel při podstavě 72°. Rozpůlíme-li úhel a příčkou am, bude



Obrázek 6.2: Příklad

$$ab = am = om.$$

Ježto $\triangle abm \sim \triangle abo$, jest

$$bm : ab = ab : ob$$

čili

$$bm : om = om : ob.$$

Komentář: Za úlohou jsou připojeny dodatky, jeden z nich zní:

Trojúhelník těchže úhlů omezen jest stranou a dvěma úhlopříčkami pravid. 5tiúhelníka. Proto strana pravid. 5tiúhelníka rovná se většímu dílu úhlopříčky rozdělené zlatým řezem.

[1] Kolineární body jsou takové body, které leží na jedné přímce.

[2] Absolutní hodnotu dvojpoměru čtyř různých kolineárních (t. j. ležících na jedné přímce) bodů A, B, C, D vypočteme jako podíl výrazů $\frac{|AC|}{|BC|}$, $\frac{|AD|}{|BD|}$. Znaménko dvojpoměru pak závisí na vzájemném uspořádání těchto bodů. (Tato definice je velmi zjednodušená.)

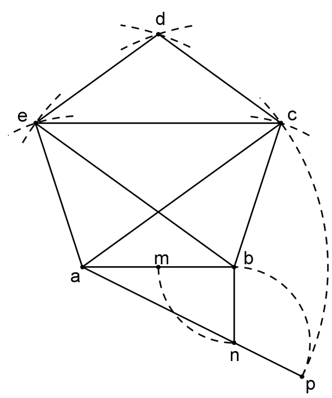
Kapitola X. Útvary podobné, § 46. Střední měřická úměrná.
Výběr z neřešených úloh na stranách 19–20:

> 17. a) V obr. (6.1) jest bd bodem c děleno dle zlatého řezu. b) Prodloužíme-li ab o délku $bf = mb$, jest af bodem b děleno dle zlatého řezu.
>
> 18. Je-li přepona trojúhelníka pravoúhlého výškou dělena dle zlatého řezu, jest menší odvěsna rovna většímu dílu přepony.
>
> 20. Úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka dělí se vzájemně dle zlatého řezu.
>
> 21. Větší díl strany pravidelného desetiúhelníka (pětiúhelníka) rozdělené dle zlatého řezu rovná se rozdílu poloměru opsané kružnice a strany (úhlopříčky a strany).
>
> 23. Sestrojiti pravidelný pětiúhelník a) dána-li jeho úhlopříčka, b) dán-li součet strany a úhlopříčky.

Komentář: V úlohách číslo 17, 18, 20 a 21 je úkolem dané tvrzení dokázat.

Kapitola XIII. Užití algebry v geometrii, § 65. Řešení úloh geometrických s užitím algebry.
Řešená úloha 3 na straně 83:

> Sestrojiti jest pravidelný pětiúhelník, dána-li jeho strana.
>
> Rozbor (obr. 6.3): Je-li $\overline{ab} = a$ daná strana, x úhlopříčka žádaného pětiúhelníka, platí dle věty Ptolemaeovy pro čtyřúhelník $abce$ $x^2 = ax + a^2$ aneb $x^2 - ax - a^2 = 0$; odtud $x = \dfrac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2}$.
>
> Ježto x může míti jen hodnotu absolutní, jest $x = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} + \dfrac{a}{2}$.
>
> Sestrojení patrno z obrazce, v němž
>
> $bn \perp ab, \quad \overline{am} = \overline{bm} = \overline{bn} = \overline{np}; \quad \overline{ap} = x.$



Obrázek 6.3: Příklad

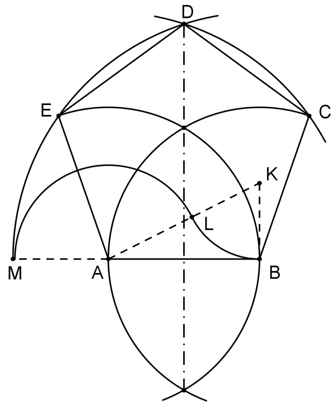
Komentář: Ptolemaeova věta říká, že v tětivovém čtyřúhelníku[3] se součin délek úhlopříček rovná součtu součinů délek obou dvojic protilehlých stran. Ve čtyřúhelníku $ABCD$, který má úhlopříčky e, f tedy (při dnešním běžně používaném značení) platí: $ef = ac + bd$. Díky této větě se v úloze objeví rovnice pro zlatý řez a aniž by jej bylo využito, vyplývá z řešení, že délka úhlopříčky je rovna délce strany vynásobené zlatým číslem.

[3] Tětivový čtyřúhelník je takový čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici.

Havelka J.: Geometrie pro ústavy učitelské, díl I., 1922, [9]

Kapitola III. Úhelníky, § 15. Mnohoúhelníky pravidelné.
Výklad na stranách 47–48:

> Konstrukce pravidelného pětiúhelníka, je-li dána jeho strana. Sestrojení úhlopříčky ze strany (obr. 6.4):
>
> 1. stranu rozpůlíme symetrálou
> 2. na kolmici ve vrcholu B naneseme $\frac{1}{2}$ strany, totéž naneseme na spojnici $\overline{AK}$ v úsečce $\overline{KL}$.
>
> Poloměrem $\overline{AL}$ rýsovaná kružnice protne prodlouženou stranu $\overline{AB}$ v bodě M; úsečka $\overline{BM}$ rovná se úhlopříčce pětiúhelníka. Poloměrem $\overline{MB}$ protneme původní kružnice z A i B a obdržíme body C, E, jakož i D.



Obrázek 6.4: Příklad

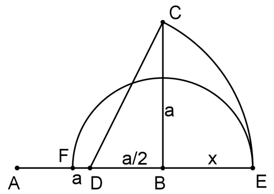
Komentář: V popisu konstrukce autor využívá skutečnosti, že poměr délek úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku je zlaté číslo. Tento fakt ovšem nezmiňuje.

Kapitola IV. Útvary podobné, § 22. Pythagorova věta, odstavec 72. Zlatý řez.
Strany 71–73:

Autor uvádí definici zlatého řezu, Herónovu konstrukci (včetně důkazu) a další konstrukci (viz níže), již bez důkazu. Následují věty související s konstrukcí pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku (opět včetně důkazu). V závěru podkapitoly je cvičení obsahující 8 neřešených úloh. Zde jsou vybrané úryvky:

> Rozděliti danou úsečku a v díly x, $(a - x)$, podle úměry $a : x = x : (a - x) \dots$
>
> Větší díl úsečky je střední měřickou úměrnou celé úsečky a menšího dílu…
>
> Jiná konstrukce zlatého řezu: Na kolmici k úsečce a (obr. 6.5) v bodě B naneseme úsečku a k bodu C. Úsečku a rozpůlíme a poloměrem DC opíšeme oblouk k bodu E. V trojúhelníku DBC platí: $\overline{CD}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BC}^2$.
>
> Strana pravidelného pětiúhelníku je větším úsekem zlatým řezem rozdělené úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku…
>
> Strana pravidelného desetiúhelníku je větším úsekem poloměru opsané kružnice zlatým řezem rozděleného…

Úloha 8.: Dokažte, že v pravidelném pětiúhelníku dělí průsečík úhlopříček tyto zlatým řezem!



Obrázek 6.5: Konstrukce zlatého řezu

Vojtěch J.: Geometrie pro IV. a V. třídu škol středních, 1924 [36]

Kapitola V. Stejnolehlost a podobnost, § 24. Mocnost bodu ke kružnici, odstavec 93. Zlatý řez.
Strany 109–110:

Úloha: Rozděliti danou úsečku tak ve dva díly, aby větší byl střední úměrnou menšího a celku.

Komentář: Úloha je řešena konstrukčně – Herónovou konstrukcí.

Jiné znění úlohy: Rozděliti danou úsečku a v díly x, $a - x$ dle úměry $a : x = x : (a - x)$.

Komentář: Tato úloha je v knize řešena početně, výpočet vychází z konstrukčního řešení předchozí úlohy. Autor dospěje k rovnici $x^2 + ax - a^2 = 0$ a následně pak k řešení $x = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Na závěr podkapitoly je menším písmem uvedena tato poznámka:

Rozdělení úsečky takové, že větší díl je střední úměrnou menšího a celku, nazývá se někdy zlatým řezem. Znali je už Pythagorovci; jméno „zlatý řez“ vzniklo však až v 19. století asi podle Keplerova názvu „sectio divina“ (řez božský).

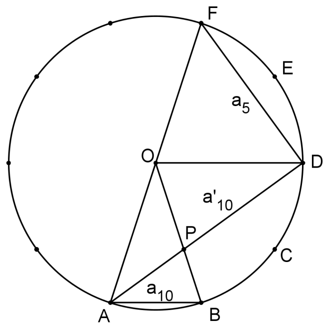
Řezu tomu dáván význam esthetický: obdélník (formát knihy, obrazu, půdorys), jehož rozměry jsou díly úsečky, řezem tímto rozdělené, platil za zvlášť úhledný. Také v rozměrech částí lidského těla a rostlin spatřovány úsečky takto úměrné. Je-li $a = 1$, jest $x = 0.61803\ldots$, přibližně $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}\,\cdots$

Kapitola V. Stejnolehlost a podobnost, § 24. Mocnost bodu ke kružnici, odstavec 94. Strana pravidelného desetiúhelníku.
Strana 110:

> Poučka 42. Strana pravidelného desetiúhelníku rovná se větší části poloměru opsané kružnice, rozděleného zlatým řezem . . .
>
> Délku a_{10} strany pravidelného desetiúhelníku vyjádříme poloměrem r opsané kružnice podle odst. 93 ve vzorci $a_{10} = r \cdot \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Kapitola V. Stejnolehlost a podobnost, § 24. Mocnost bodu ke kružnici, odstavec 95. Strana pravidelného pětiúhelníku.
Strany 111–112:

> Vepíšeme-li do kružnice pravidelný desetiúhelník $ABCDEFG\ldots$ a spojíme-li jeho vrcholy ob jeden, dostaneme pravidelný pětiúhelník $ACEG\ldots$ Spojíme-li jeho vrcholy ob dva, vznikne pravidelný desetiúhelník hvězdovitý $ADG\ldots$ Jak vypočítáme jejich strany?



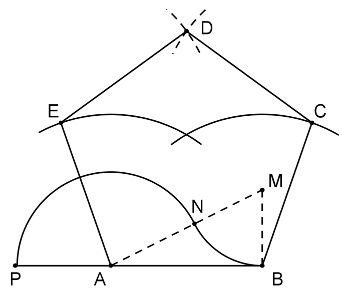
Obrázek 6.6: Hvězdovitý desetiúhelník

Komentář: Výpočet je proveden pomocí nákresu (6.6), s využitím podobnosti trojúhelníků a předchozích pouček o zlatém řezu. Výsledky jsou následující. Délka strany hvězdovitého desetiúhelníku: $\overline{a_{10}} = \dfrac{r^2}{a_{10}} = r\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ a délka strany pravidelného pětiúhelníku: $a_5 = r\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Maška O.: Matematika v úlohách, III. díl, 1930 [17]

Kapitola IV. Shodnost obrazců, § 12. Mnohoúhelníky.
Řešená úloha 201 na straně 102:

> Sestrojení pravidelného pětiúhelníka ze známé strany $a = AB$ pomocí sestrojení úhlopříčky.
>
> Řešení (obr. 6.7): Veď $BM \perp AB$, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Poloměrem $\overline{AN}$ opiš oblouk z A do P, pak $\overline{BP}$ je úhlopříčka pravid. pětiúhelníka.
>
> Ze známé strany a úhlopříčky sestrojí se pětiúhelník podle obrazce snadno.



Obrázek 6.7: Příklad

Komentář: Bod P je zkonstruován v podstatě podle Herónovy konstrukce tak, aby podíl $\overline{BP} : \overline{AB}$ (tedy podíl délek úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku) byl roven zlatému číslu. Řešení je ale podáno jen jako strohý návod, bez bližšího vysvětlení. Otázkou je, zda v tuto chvíli měl student zlatý řez znát. Myslím si, že ne, protože kapitola zaměřená na zlatý řez se v této knize vyskytuje později (viz dále) a pojem zlatý řez u této úlohy není vůbec zmíněn.

Kapitola V. Stejnolehlost a podobnost, § 19. Zlatý řez. Pravidelný pětiúhelník.
Strany 148–150:

V daném paragrafu je uvedeno 5 řešených úloh (číslovaných čísly 296–300). Jelikož se úlohy podobají předchozím, řešení nevypisuji. Ve všech úlohách se užívá zlatý řez v souvislosti s pravidelným pětiúhelníkem nebo desetiúhelníkem, přičemž znalost zlatého řezu a jeho výskytu v těchto mnohoúhelnících je zde považována za samozřejmost.

> 296. Stanoviti stranu a_{10} pravid. 10tiúhelníka vepsaného do kružnice poloměru r.
>
> 297. Z dané strany a_{10} vypočísti stranu a_5 pravid. pětiúhelníka vepsaného do kružnice a vyjádřiti a_5 poloměrem r.

298. Sestrojiti úhly 18°, 36°, 54°, 72°.

299. Vypočísti délky úhlopříček pravid. desetiúhelníka, vepsaného do kružnice poloměru r.

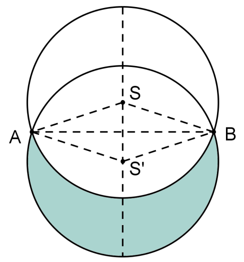
300. Dokázati, že v pravid. 5tiúhelníku protínají se úhlopříčky podle zlatého řezu.

Dvořák J.: Maturitní otázky z matematiky, 1934 [5]

Tato kniha je souborem řešených příkladů koncipovaných jako opakování a příprava k maturitě. Sbírka je rozdělena na čtyři kapitoly (planimetrie, stereometrie, rovinná trigonometrie a sférická trigonometrie). První tři kapitoly obsahují celkem 333 úloh, z toho minimálně u pěti se objevuje zlatý řez přímo jako součást zadání, u dalších sedmi je využit při řešení. Autor předpokládá, že studenti zlatý řez i pravidla související se zlatým řezem a pravidelným pětiúhelníkem (desetiúhelníkem) znají a dokážou při řešení použít. Zde je výběr ukázkových úloh.

Kapitola Planimetrie, úloha 51 na straně 46:

Jest vypočítati obsah měsíčku, který vytvořují dvě kružnice téhož poloměru r, je-li rozdělen podle zlatého řezu poloměr jedné kružnice středem kružnice druhé.



Obrázek 6.8: Příklad

Řešení (obr. 6.8): Poněvadž je $\overline{SS'}$ větší částí poloměru rozděleného zlatým řezem, rovná se straně pravidelného desetiúhelníku vepsaného do kružnice; v rovnoramenném trojúhelníku $SS'A$ jest $\sphericalangle S'AS = 36°, \sphericalangle AS'S = 72°, \sphericalangle ASB = \sphericalangle AS'B = 144°$.

Obsah měsíčku $P = U_2 - U_1$, kde $U_2 = \dfrac{\pi r^2(360° - 144°)}{360°} + \triangle AS'B$, $U_1 = \dfrac{\pi r^2 \cdot 144°}{360°} - \triangle ASB$.

Ježto $\triangle AS'B \cong \triangle ASB$, jest po dosazení $P = \dfrac{\pi r^2}{5} + \dfrac{\overline{SS'} \cdot \overline{AB}}{2}$.

Danou podmínkou (dělením zlatým řezem) je podán známý vztah $\overline{SS'} = \dfrac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ a podle Pythagorovy věty je $\dfrac{\overline{AB}}{2} = \sqrt{r^2 - \left[\dfrac{r}{4}(\sqrt{5} - 1)\right]^2}$;

i jest po krátké úpravě hledaný obsah měsíčku $P = \dfrac{\pi r^2}{5} + \dfrac{r^2}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ neboli $P = \dfrac{r^2}{20}\left(4\pi + 5\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)$.

Kapitola Planimetrie, úloha 54 na straně 49:

Eliptické okno má býti 5,4 m^2 veliké. Jest vypočítati délku poloos, je-li vedlejší osa větším úsekem hlavní osy rozdělené zlatým řezem.

Řešení: Pro vedlejší poloosu platí z dané podmínky známý vztah pro zlatý řez $b = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$, který řešíme s rovnicí pro obsah elipsy $\pi ab = 5,4$.

Řešením této soustavy obdržíme $a = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 7(\sqrt{5}+1)}{\pi}}$, $b = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 7(\sqrt{5}-1)}{\pi}}$.

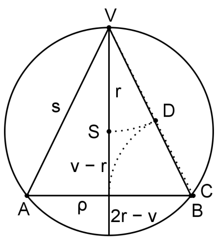
Pomocí pětimístných tabulek logaritmických dospějeme k výsledkům $a = 1,6676 \ldots$, $b = 1,0306 \ldots$

Hledané poloosy elipsy jsou $a = 1,668\,m$, $b = 1,031\,m$.

Komentář: Dnešní student by pravděpodobně místo pětimístných logaritmických tabulek použil kalkulačku.

Kapitola Stereometrie, úloha 16 na straně 74:

Jest vypočítati plášť přímého rotačního kužele, jehož výška je středem opsané koule o poloměru r rozdělena zlatým řezem.



Obrázek 6.9: Příklad

Řešení (obr. 6.9): Plášť přímého rotačního kužele je podán vzorcem

$$p = \pi \varrho s,$$

v němž je ϱ poloměr podstavy a s strana kužele.

Podle 2. Euklidovy věty je

$$\varrho^2 = v(2r - v), \tag{6.1}$$

podle 1. Euklidovy věty

$$s^2 = 2rv, \tag{6.2}$$

kde je v výška kužele.

Ježto má býti výška v rozdělena středem koule zlatým řezem, platí úměra

$$(v - r) : r = r : v$$

totožná s rovnicí

$$v^2 - rv - r^2 = 0,$$

z jejíchž kořenů $v_{1,2}$ má smysl jen kladná hodnota

$$v = \frac{r}{2}\left(1+\sqrt{5}\right). \tag{6.3}$$

Dosadíme-li hodnotu (6.3) do rovnic (6.1) a (6.2), obdržíme po úpravě součin $\varrho^2 s^2 = 2r^4$ neboli $\varrho s = r^2\sqrt{2}$, z čehož hledaný plášť $p = \pi r^2\sqrt{2}$.

Komentář: Zadáním „jest vypočítati plášť ..." se myslí obsah pláště. První Euklidovou větou je zde míněna věta o odvěsně, druhou věta o výšce. Další výpočet je zřejmý z obrázku.

Maška O.: Přehled matematiky, II. díl, 1936 [18]

Kapitola A. Planimetrie, § 4. Úměrnost úseček, odstavec 8. a 9.
Výklad na straně 11:

> Úsečka a je rozdělena dle zlatého řezu, když její větší úsek x je střední úměrnou úseku menšího $(a - x)$ a celé úsečky a...
>
> Strana pravidelného desetiúhelníka do kružnice vepsaného rovná se většímu dílu poloměru rozděleného zlatým řezem.
>
> Strana pravidelného pětiúhelníka je větším úsekem úhlopříčky téhož pětiúhelníka rozdělené zlatým řezem.

Komentář: První definice je uvedena také na začátku této kapitoly. Autor definici zapisuje i matematicky a slovně popisuje Herónovu konstrukci (bez obrázku). Věty o pravidelném pětiúhelníku a desetiúhelníku jsou uvedeny znovu a včetně důkazů ještě v paragrafu 8. Mnohoúhelník a mnohostran.

6.1.2 Učebnice vydané po 2. světové válce

Situace gymnázií po 2. světové válce nebyla jednoduchá. Stručně (ale přehledně) je shrnut vývoj v přednášce RNDr. Daga Hrubého proslovené na konferenci Matematika – základ evropské vzdělanosti, která se konala ve dnech 20. a 21. září 2007 v Hradci Králové. Tato přednáška je uvedena ve sborníku [12]. V roce 1953 byla gymnázia zrušena. Ke studiu na vysoké škole připravovala Jedenáctiletá střední škola. V roce 1960 vznikly tříleté Střední všeobecně vzdělávací školy (SVVŠ) a byly pro ně vytvořeny i učebnice matematiky. Planimetrie je v učebnici pro první ročník, ovšem o zlatém řezu jsem nenašla ani zmínku. Pouze je zde vysvětlen pojem střední geometrická úměrná, ale v kapitole, která je celá psaná menším písmem jako rozšiřující učivo. V roce 1964 byly SVVŠ rozšířeny na školy čtyřleté a opět se jim vrátil název gymnázium. Nové učebnice vycházely v letech 1977–1980, další v letech 1984–1987. V prvním případě šlo o osm takzvaných sešitů, v druhém o čtyřdílnou řadu, kde každá kniha odpovídala jednomu ročníku studia. Ani v těchto knihách jsem zlatý řez nenašla (hledala jsem v kapitolách o geometrii v rovině).

Jedinou učebnicí (z těch, do kterých jsem měla možnost nahlédnout) vydanou po roce 1945 zmiňující se o zlatém řezu je *Geometrie pro V.třídu středních škol* z roku 1947 [11]. Tato učebnice je psána ještě ve stylu prvorepublikové literatury. Zlatému řezu je věnována celá podkapitola v kapitole páté: Stejnolehlost a podobnost. Je zde vyložena konstrukce zlatého řezu úsečky pomocí mocnosti bodu ke kružnici (v podstatě se jedná o Herónovu konstrukci). Dále se autoři zmiňují, že se úsečky rozdělené zlatým řezem vyskytují v pravidelném pětiúhelníku a desetiúhelníku. Uvádějí následující dvě věty, z nichž první i odvozují.

> Strana pravidelného desetiúhelníka je rovna většímu dílu poloměru kružnice desetiúhelníku opsané, rozděleného zlatým řezem.
>
> Strana pravidelného pětiúhelníka se rovná většímu dílu jeho úhlopříčky, rozdělené zlatým řezem.

Na konci podkapitoly následuje cvičení obsahující sedm neřešených úloh souvisejících se zlatým řezem (číslovaných 178–184). Doslovně zde jako ukázku uvádím tři z nich:

> 179. Sestrojte pravidelný 10tiúhelník a pak 5tiúhelník, dána-li strana a_{10}, resp. a_5.
>
> 183. Vyjádřete stranu pravidelného 10tiúhelníka a_{10} a stranu pravidelného 5tiúhelníka a_5 poloměrem opsané kružnice, a to vzorcem: $a_{10} = \frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$, $a_5 = \frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.
>
> 184. Sestrojte euklidovsky úhly a) 36°, 54°, b) 12°, 42°, 78°.

6.1.3 Současné učebnice

Za současné učebnice považuji ty, podle kterých se nyní na gymnáziích vyučuje. Je to zejména řada tematicky zaměřených učebnic matematiky pro gymnázia vydaná v nakladatelství Prometheus (učebnice vycházejí opakovaně od roku 1992, některé díly byly postupně upraveny a rozšířeny, zde je čerpáno ze 4. vydání učebnice Planimetrie). Dále se jako doplněk využívají různé sbírky úloh a přehledy matematiky. Nemálo učitelů sáhne i po starších učebnicích.

Pomykalová E.: Planimetrie [23]

Kniha je členěna na tři kapitoly (geometrické útvary v rovině, konstrukční úlohy, zobrazení v rovině), každá kapitola má několik podkapitol. V kapitole 2. Konstrukční úlohy je podkapitola 2.6 Konstrukce na základě výpočtu, ve které je sedm řešených úloh a 11 neřešených příkladů. Řešená úloha číslo 6 na straně 119 je následující:

Úsečku AB rozdělte na dvě části tak, aby poměr menší části k větší byl stejný jako poměr větší části k celé úsečce.

Řešení:

Předpokládejme, že bod X dělí úsečku AB podle podmínek úlohy. Označme $|AB| = a$, $|AX| = x$; potom $|BX| = a - x$. Nechť $|AX| > |BX|$ (obr. 6.10 a). Má platit

$$(a - x) : x = x : a$$

a po úpravách

$$x^2 = a \cdot (a - x), \text{ neboli } x^2 + a \cdot x - a^2 = 0.$$

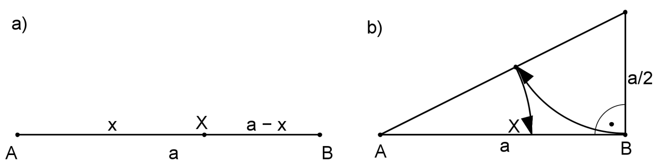
Řešením této rovnice je

$$x_1 = \frac{1}{2}a \cdot (\sqrt{5} - 1), \ \ x_2 = \frac{1}{2}a \cdot (-\sqrt{5} - 1),$$

$x_2 < 0$, proto nevyhovuje úloze; x_1 pro konstrukci upravíme na tvar

$$x_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} - \frac{1}{2}a.$$

Úsečku $\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2}$ sestrojíme užitím Pythagorovy věty (obr. 6.10 b) Úloha má vždy jediné řešení.



Obrázek 6.10: Dělení úsečky zlatým řezem

O úsečce AB říkáme, že je rozdělena podle zlatého řezu. Konstrukce pochází od Herona.

Žádný další příklad o zlatém řezu jsem v knize neobjevila, stejně jako věty o zlatém řezu a pravidelném pětiúhelníku (desetiúhelníku).

Polák J.: Přehled středoškolské matematiky [22]

Tato kniha není učebnicí v pravém slova smyslu, ale uceleným přehledem středoškolského učiva matematiky. Stručně shrnuje látku, často ji i doplňuje, jsou připojeny řešené příklady. Obsah je členěn do deseti kapitol. Uvádím ukázky z 9. kapitoly: Geometrie, podkapitola 9.9 Konstrukční planimetrické úlohy, úloha číslo 3 na stranách 447–448:

> Zlatým řezem dané úsečky AB se rozumí takové rozdělení bodem Z na dvě části (úsečky) AZ, BZ, že platí
>
> $$|AZ| : |BZ| = |AB| : |AZ|; \ (|AZ| > |BZ|),$$
>
> tj. poměr délky větší části a menší části úsečky je roven poměru délky celé úsečky a její větší části. Odvoďte konstrukci zlatého řezu úsečky AB na základě algebraické metody.

Následuje řešení, kde je proveden obdobný výpočet jako v učebnici [23] a popsána konstrukce. Dále je v knize uvedena úloha 4 (strany 448–451):

> Do kružnice o daném poloměru r vepište: a) pravidelný šestiúhelník, b) pravidelný desetiúhelník, c) pravidelný pětiúhelník.

Při řešení úlohy b) je odvozeno (s využitím výsledku předchozí úlohy 3) pravidlo $a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$, kde a_{10} je délka strany pravidelného desetiúhelníku a r poloměr kružnice opsané. Podobně při řešení úlohy c) vychází $a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, kde a_5 je délka strany pravidelného pětiúhelníku a r poloměr kružnice opsané.

6.2 Kdy, jak a proč zlatý řez učit

Začnu od konce – proč? Vynecháme-li historické důvody (neříkám tím ovšem, že nejsou významné) a diskuze o obsahu (a rozsahu) středoškolského vzdělání, zůstává tu ještě minimálně jeden, a to využitelnost zlatého řezu v některých současných oborech (viz 10. kapitola) a také usnadnění řešení dalších geometrických úloh, což je jistě vidět na příkladech uvedených v této práci. Samozřejmě, že pokud není zájem poznat vlastnosti pravidelného pětiúhelníku nebo pravidelného dvacetistěnu, nebude pravděpodobně ani zájem a důvod pochopit dělení úsečky v poměru zlatého řezu. Ale pokud alespoň jednoho studenta z celé třídy zlatý řez (nebo cokoliv jiného) zaujme, pak věřím, že to mělo význam.

Populární jsou v současnosti hojně diskutované mezipředmětové vztahy. Zlatý řez není pouze záležitostí matematiky, ale objevuje se ve výtvarné výchově (kompozice výtvarného díla), biologii či chemii (krystaly minerálů, ulity měkkýšů, uspořádání listů na stonku aj.).

Otázky kdy a jak spolu velmi úzce souvisí. Slovem „kdy“ mám na mysli návaznost na ostatní učivo (co je třeba, aby žák již znal, a co se má dozvědět později, aby přitom mohl zlatý řez aplikovat), slovem „jak“ je myšleno jakým způsobem zlatý řez vysvětlit, protože (jak je vidět v podkapitole 6.1) způsobů je více.

Určitě bych jádro výkladu zlatého řezu ponechala matematice, konkrétně planimetrii. Vzhledem k současnému trendu zpřístupnit učivo širšímu spektru populace bych netrvala na podrobných důkazech, snad vyjma matematicky zaměřených tříd. Myslím, že nejvhodnější je ukázat studentům zlatý řez v souvislostech tak, jak je uvedeno například v učebnici [23], t. j. v souvislostech s konstrukcemi na základě výpočtu, redukčním úhlem a pod. K tomu je nezbytné znát Pythagorovu větu a je vhodné znát věty Eukleidovy. Konstrukci zlatého řezu je také možné ukázat jako příklad na využití Pythagorovy věty. Zlatý řez samotný by pak měl být aplikován při řešení úloh o pravidelném pětiúhelníku (desetiúhelníku). Tyto mnohoúhelníky jsou ovšem v učebnici [23] vyloženy mnohem dříve (a učivo nejde do takové hloubky, aby bylo zlatého řezu potřeba). Při řešení stereometrických úloh se ke zlatému řezu můžeme vrátit (například u Platónových těles), stejně tak jako při probírání mocnosti bodu ke kružnici, díky níž lze pěkně zdůvodnit Herónovu konstrukci (viz důkaz konstrukce 1 v kapitole 2).

Téma zlatý řez se dokonce objevilo i ve školním vzdělávacím programu jedné z pilotních škol RVP G[4], na Gymnáziu Brno, třída Kapitána Jaroše 14. V učebních osnovách matematiky pro osmileté studium (s matematickou profilací i všeobecné) jsou v učivu pro třetí ročník napsány (mimo jiné) následující body:

- poměr, úměra, postupný poměr
- přímá a nepřímá úměrnost, trojčlenka
- měřítko
- diagramy

V kolonce pro mezipředmětové vztahy je uvedena souvislost se zeměpisem a s výtvarnou výchovou: *„Vv – zlatý řez a jiná kompoziční pravidla“*. Dále v učebních osnovách výtvarné výchovy (rovněž pro osmileté studium) je v prvním ročníku v seznamu učiva (mimo jiné) bod:

- zlatý řez, vertikála, horizontála

[4]Kurikulární dokument vymezující závazné rámce vzdělávání pro gymnázia, dle něj vypracovává každá škola svůj školní vzdělávací program (ŠVP) platný od školního roku 2009/2010 (u pilotních škol dříve).

U tohoto tématu je (bez bližšího vysvětlení) uveden mezipředmětový vztah s matematikou. V osnovách pro čtyřleté všeobecné studium na této škole se zlatý řez nikde nevyskytuje.

S výukou nejen zlatého řezu, ale geometrie a celé matematiky vůbec vyvstává i mnoho problémů, kterých jsem si vědoma. Jmenuji zde ty, které vnímám jako nejpalčivější, ale jistě by se našly i další. V posledních letech dochází ke značným škrtům v povinném učivu na středních školách, důvodů je mnoho. Klesá počet hodin matematiky na úkor jiných předmětů (netvrdím, že je to vždy špatně, záleží na konkrétní situaci), snižují se nároky na znalosti maturantů (ale zvyšuje se procento maturantů v populačním ročníku) atd. Nemají-li učitelé prostor probrat skutečně základní učivo, nikdo po nich nemůže chtít učit něco navíc (zlatý řez či cokoliv jiného). Výjimku by snad mohli tvořit studenti výtvarně zaměřených škol. Další problém, o kterém bohužel stále častěji slýchávám, je neobliba geometrie u některých učitelů, kteří ji pak, nevědomky, ale přesto, přenášejí na své studenty. Mnohem raději učí rovnice, funkce, úpravy algebraických výrazů a podobně, než planimetrii a stereometrii. Žáci pak nenávidí rýsovací potřeby, neumí s nimi pracovat, náčrtky kreslí propiskou a skutečně snadné planimetrické úlohy řeší raději pomocí analytických výpočtů či jinými metodami (pokud vůbec). Tyto učitele asi o kráse geometrie a užitečnosti zlatého řezu nepřesvědčím…

6.3 Pracovní listy

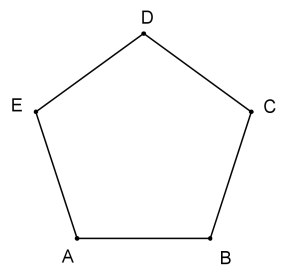
Pracovní listy jsou dnes nepostradatelnou součástí výuky, zejména v nižších ročnících. Na dalších stránkách je pět připravených pracovních listů (z toho první tři jsou dvoustránkové, zbylé dva jednostránkové) souvisejících nějakým způsobem se zlatým řezem (některé více, některé méně).

Úkoly jsou většinou snadné, vyžadují přesné rýsování nebo stříhání podle návodu, z početních operací se používá sčítání a dělení přirozených čísel. Tyto listy lze ale použít i ve vyšších ročnících. Návrhy, jak úlohy zkomplikovat, najdete spolu s řešením úkolů na konci této podkapitoly.

K řešení pracovních listů není zapotřebí znalost zlatého řezu, pouze se tento poměr v úlohách objevuje nebo jsou jeho vlastnosti použity při tvorbě zadání. Je jen na učiteli, zda žáka s pojmem zlatý řez seznámí.

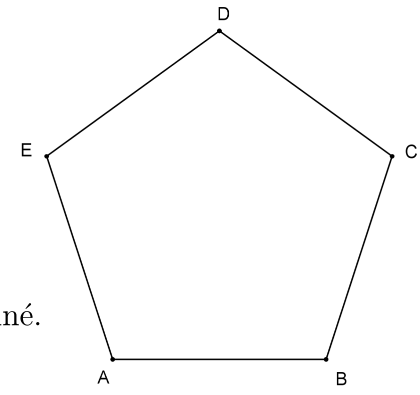
PRACOVNÍ LIST I – PRAVIDELNÝ PĚTIÚHELNÍK

1. (a) Prodluž strany pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$. Průsečík AB s CD označ P, BC s DE označ Q, CD s AE označ R, DE s AB označ S a průsečík AE s BC označ T.
   (b) Barevně obtáhni pěticípou hvězdu $PQRST$.
   (c) Najdi střed O pětiúhelníku $ABCDE$ (pomocí os stran) a sestroj kružnici k se středem O a poloměrem $|OP|$. Leží body Q, R, S, T na kružnici k?
   (d) Změř velikosti úhlů AOB a ADB. Jaký je mezi nimi vztah?
   (e) Změř velikosti úhlů ACB, ADB a AEB. Jaký je mezi nimi vztah?



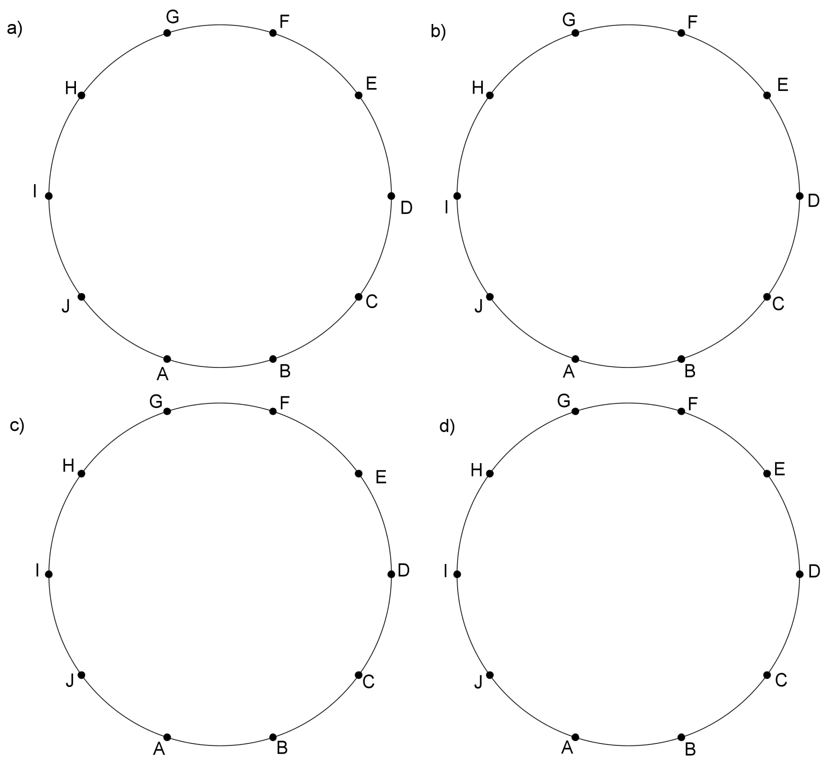
Obrázek 6.11: Úloha 1

2. (a) Sestroj všechny úhlopříčky pětiúhelníku $ABCDE$ (je jich celkem pět).
   (b) Červeně vybarvi všechny tupoúhlé trojúhelníky.
   (c) Žlutě vybarvi všechny ostroúhlé trojúhelníky.
   (d) Přeměřením stran a úhlů ověř, že trojúhelníky stejné barvy jsou navzájem shodné.



Obrázek 6.12: Úloha 2

3. (a) Spoj vrcholy v pořadí A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, A.
   (b) Spoj vrcholy v pořadí A, C, E, G, I, A.
   (c) Spoj vrcholy v pořadí A, D, G, J, C, F, I, B, E, H, A.
   (d) Spoj vrcholy v pořadí A, E, I, C, G, A.
   (e) Dokážeš narýsované útvary správně pojmenovat?

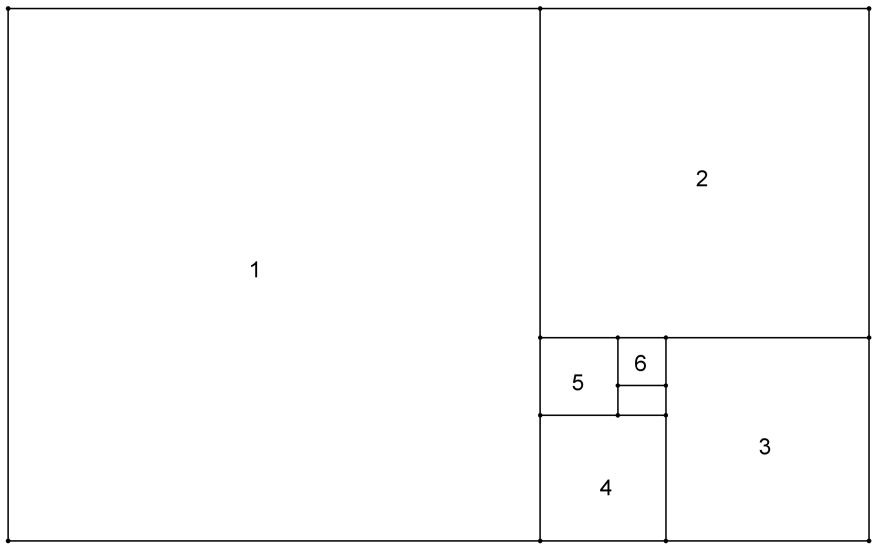


Obrázek 6.13: Úloha 3

4. Kolik pětiúhelníků je na fotbalovém míči?

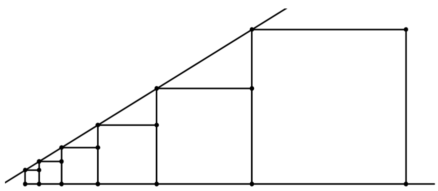
PRACOVNÍ LIST II – ZLATÝ OBDÉLNÍK

1. (a) Vystřihni obdélník na obrázku 6.14 a postupně od něj odstřihni čtverce 1 až 6.



Obrázek 6.14: Úloha 1

(b) Tyto čtverce poskládej za sebe od nejmenšího k největšímu jako schody a přesvědč se, že na spojnici levých horních vrcholů prvního a posledního čtverce leží i levé horní vrcholy ostatních čtverců (jako na obrázku 6.15).



Obrázek 6.15: Seřazené čtverce

(c) Zkus totéž provést s jiným obdélníkem. Proč to nefunguje?

2. (a) Do obdélníku $ABCD$ vrýsuj postupně čtverce $ADFE$, $FCHG$, $HBJI$, $JELK$, $LGMN$, $MIQO$ (tak jako u předchozí úlohy).
   (b) Nakresli úhlopříčku AF největšího čtverce, na ní napoj úhlopříčku FH druhého čtverce atd., až vznikne lomená čára $AFHJLMQ$.
   (c) Sestroj úsečky BD, CE a jejich průsečík označ P.

Obrázek 6.16: Úloha 2

   (d) Ověř přesnost rýsování:
      i. Přibližuje se lomená čára k bodu P?
      ii. Které další vrcholy menších čtverců leží na úsečkách BD a CE?
      iii. Spoj vrcholy lomené čáry s bodem P. Dostaneš tak úsečky AP, FP, CP, ... Jaký úhel svírají vždy dvě takové po sobě jdoucí úsečky? Je tento úhel pro každou dvojici sousedních úseček stejný?

PRACOVNÍ LIST III – ZLATÉ CIHLY

Královně se narodila dvojčata Artuš (**A**) a Bořivoj (**B**). Brzy po nich další syn Ctirad (**C**). Po delší době syn Daniel (**D**) a dále, po stále delších obdobích, synové Evžen (**E**), Felix (**F**), Gabriel (**G**), Hynek (**H**) a Jindřich (**J**).

Když král zestárl, rozhodl se předat jim svůj poklad – 88 cihel zlata. Přál si, aby synové tento majetek použili na své vzdělání. Dvojčata **A**, **B** už prošla mnohými školami, a tak každý dostal jen jednu cihlu. Syn **C** byl o něco mladší, proto dostal dvě cihly, syn **D** tři cihly a každý další syn dostal tolik zlatých cihel, kolik dva předcházející dohromady.

(a) Doplň do tabulky, kolik cihel dostali další synové a zkontroluj, že král rozdal všechny své cihly.

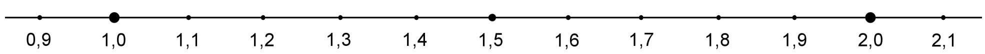
A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**J**
1	1	2	3					

(b) Do tabulky na druhé straně vyznač barevně sloupečky vyrovnaných cihel jednotlivých synů. Pozorně si prohlédni, jak se sloupce zvyšují. Myslíš, že byl král spravedlivý?

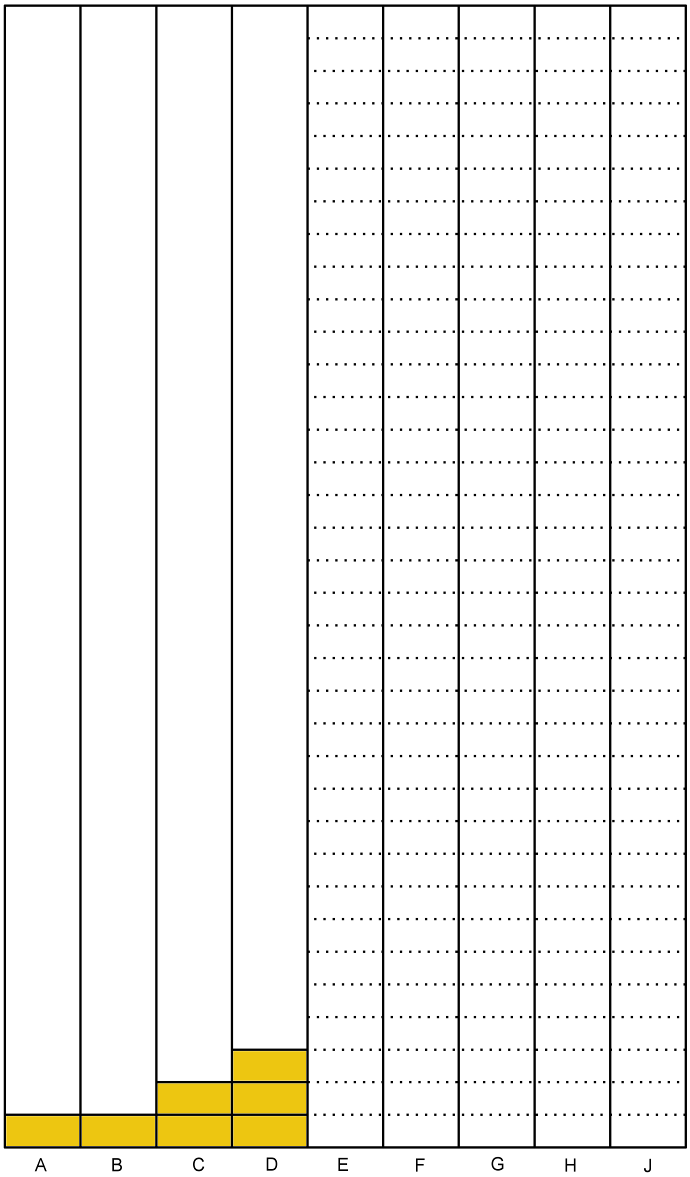
(c) Doplň tabulku podílů počtu cihel dvojic po sobě narozených synů (při dělení zaokrouhluj na tři desetinná místa).

$\frac{B}{A}$	$\frac{C}{B}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{E}{D}$	$\frac{F}{E}$	$\frac{G}{F}$	$\frac{H}{G}$	$\frac{J}{H}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$					
1	2	$1,5$					

(d) Na číselné ose vyznač prvních šest vypočtených podílů. Co pozoruješ?



Obrázek 6.17: Číselná osa



Obrázek 6.18: Sloupečky zlatých cihel

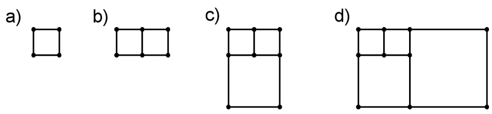
PRACOVNÍ LIST IV – FIBONACCIHO ČTVERCE

(a) Vezmi si prázdný papír (formát A_4 na výšku) a do levého horního rohu narýsuj čtverec se stranou 1 cm (obr. 6.19 a).

(b) Těsně vedle tohoto čtverce směrem doprava přikresli ještě jeden stejný čtverec, získáš tak obdélník s rozměry 2×1 cm (obr. 6.19 b).

(c) K spodní straně obdélníku přikresli čtverec se stranou 2 cm, získáš tak obdélník s rozměry 2×3 cm (obr. 6.19 c).

(d) Z pravé strany opět přidej čtverec se stranou dlouhou 3 cm (obr. 6.19 d).



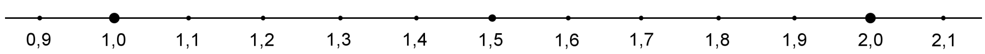
Obrázek 6.19: Přidávání čtverců

(e) Postupuj dále stejným způsobem. V každém kroku přikresli dolů nebo vpravo čtverec, jehož strana je shodná s delší stranou obdélníku. Opakuj tento postup, dokud se obrázek vejde na papír. Jaký největší obdélník se ti povedlo narýsovat?

(f) Do tabulky zapiš rozměry postupně vznikajících obdélníků a dopočítej podíly délek stran těchto obdélníků (při dělení zaokrouhluj na dvě desetinná místa).

obdélník	1	2	3	4	5	6	7	...
delší strana (a)	2	3	5					
kratší strana (b)	1	2	3					
a:b	2,00	1,50	1,67					

(g) Výsledky z posledního řádku tabulky nanes co nejpřesněji na číselnou osu. Co pozoruješ?

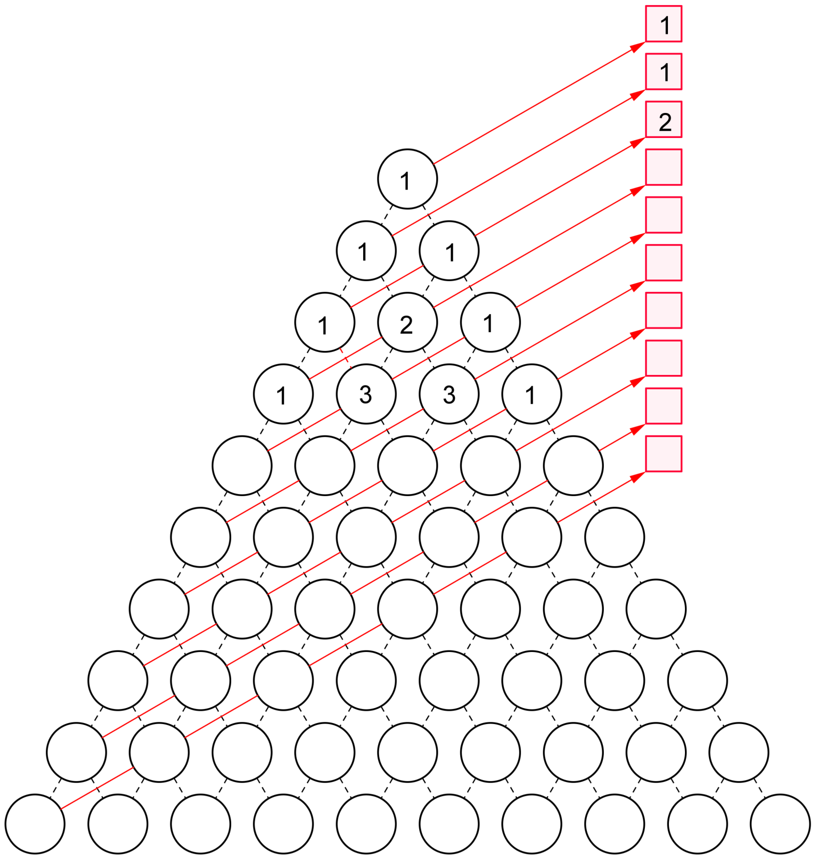


Obrázek 6.20: Číselná osa

PRACOVNÍ LIST V – FIBONACCIHO ČÍSLA

(a) Vyplň prázdné bubliny v pyramidě čísel. Na krajích každého řádku jsou vždy jedničky, ostatní čísla získáš tak, že sečteš čísla ve dvou bublinách umístěných těsně nad bublinou, kterou zrovna počítáš.

(b) Do prázdných čtverečků doplň součty čísel v bublinách spojených červenou šipkou, která ke čtverečku vede.



Obrázek 6.21: Pyramida

(c) Ověř správnost svého počítání. Sečti čísla ve druhém a třetím čtverečku od konce. Součet musí vyjít stejný jako číslo ve čtverečku posledním.

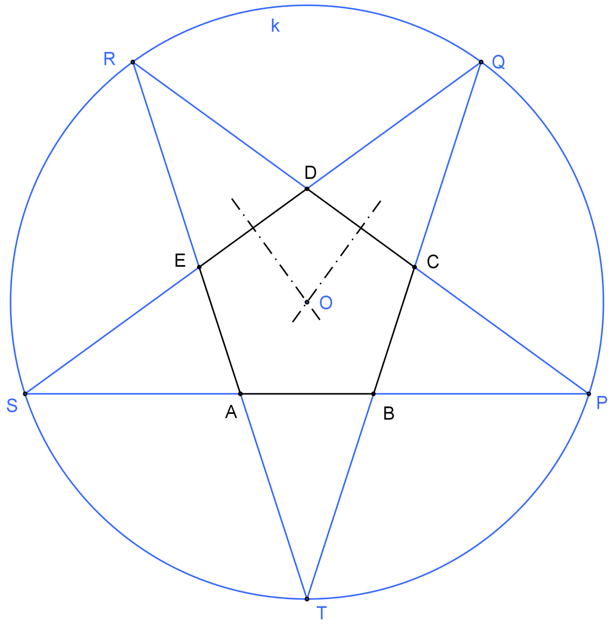
(d) Pokud by pyramida pokračovala dál, která z čísel 144, 146, 230, 233, 987 by se někdy objevila v červeném čtverečku?

ŘEŠENÍ A KOMENTÁŘE K PRACOVNÍM LISTŮM

Pracovní list I

Úloha 1:

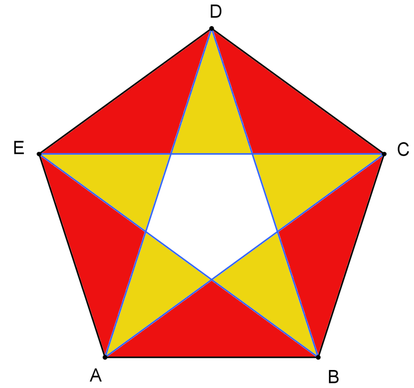
Vrcholy P, Q, R, S, T jsou vrcholy pravidelného pětiúhelníku, proto musí ležet na kružnici k (obr. 6.22). Velikost úhlu AOB je 72°, velikost úhlu ADB je 36°. Jedná se o středový a obvodový úhel příslušný oblouku AB kružnice opsané pětiúhelníku $ABCDE$. Všechny úhly v zadání (e) jsou shodné a měří 36°. Jedná se o obvodové úhly příslušné opět oblouku AB kružnice opsané pětiúhelníku $ABCDE$.



Obrázek 6.22: Úloha 1 – řešení

Úloha 2:

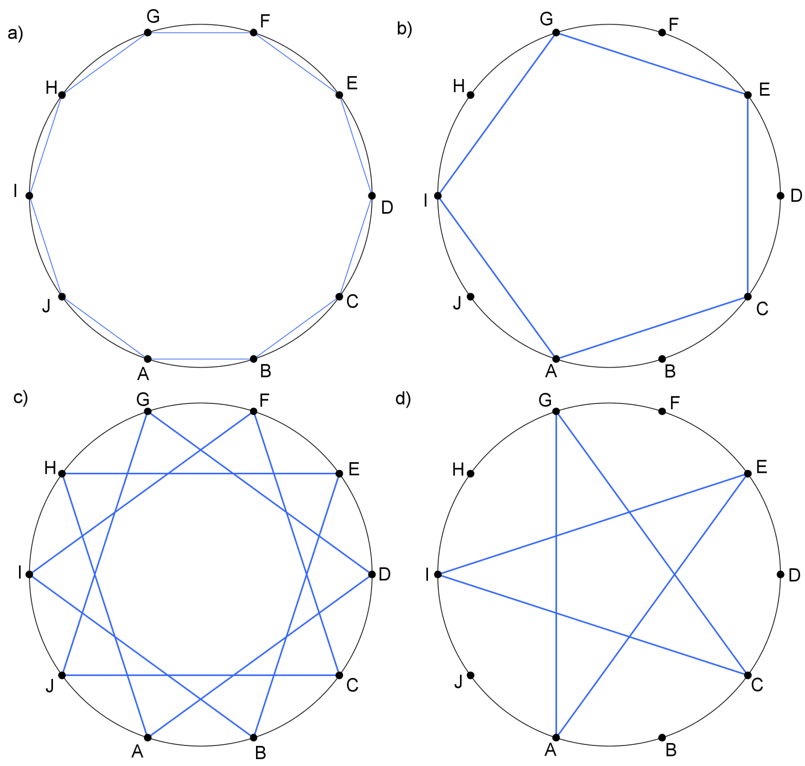
Řešení je patrné z obrázku.



Obrázek 6.23: Úloha 2 – řešení

Úloha 3:

V obrázku a) vznikne pravidelný desetiúhelník, v obrázku b) pravidelný pětiúhelník, v obrázku c) hvězdovitý desetiúhelník a v obrázku d) hvězdovitý pětiúhelník (pentagram). Úlohu lze starším studentům zkomplikovat úkolem: „Vypočítejte délky stran vzniklých útvarů v závislosti na poloměru kružnice opsané.“



Obrázek 6.24: Úloha 3 – řešení

Úloha 4:

Fotbalový míč je příkladem využití Archimédova tělesa zvaného *truncated icosahedron* v praxi. Na jeho povrchu je dvanáct pětiúhelníků a dvacet šestiúhelníků.

Pracovní list II

Úloha 1:

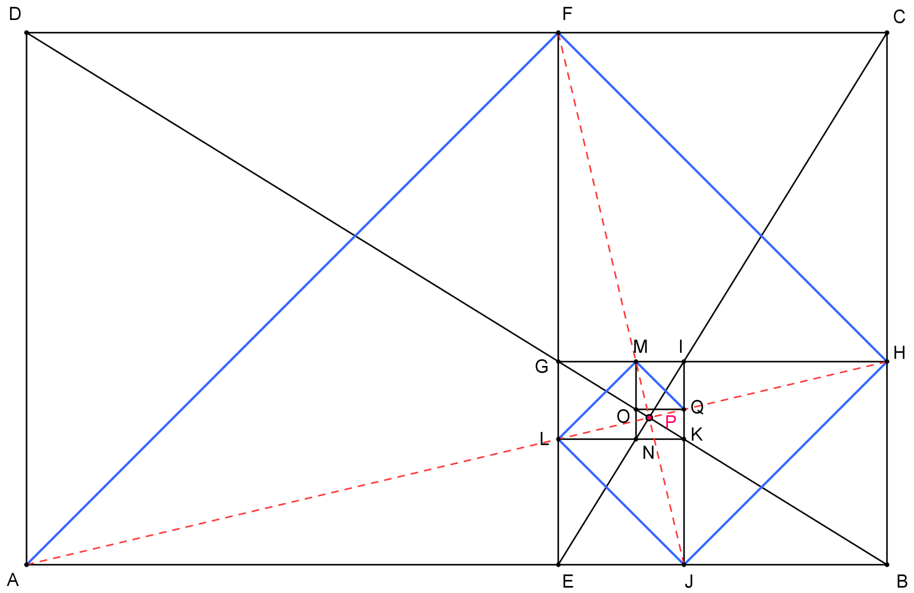
S jiným obdélníkem (respektive se čtverci odstřiženými od tohoto obdélníku) úloha nefunguje, protože poměry stran dvou po sobě jdoucích čtverců musí být stále stejné. To platí jen v případě, že původní obdélník je zlatý. V našem příkladu platí:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_4}{a_5} = \frac{a_5}{a_6} = \varphi,$$

kde a_1 je strana prvního (největšího) čtverce, a_2 je strana druhého čtverce atd.

Úloha 2:

Obrázek popsaný v bodech (a), (b), (c) by měl vypadat jako obr. 6.25.



Obrázek 6.25: Úloha 2 – řešení

Lomená čára se přibližuje k bodu P (analogie s logaritmickou spirálou vepsanou do zlatého obdélníku, viz podkapitola 3.3). Na úsečce BD leží body G, K, O, na úsečce CE body I, N. Po sobě jdoucí dvojice úseček spojujících vrchol lomené čáry s bodem P (na obrázku čárkovaně) svírají vždy pravý úhel.

Pracovní list III

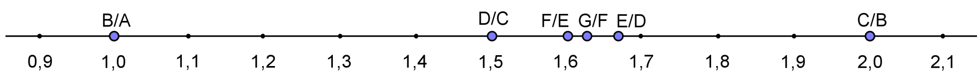
Vyplněná tabulka z bodu (a) vypadá následovně:

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**J**
1	1	2	3	5	8	13	21	34

Součet čísel v posledním řádku je 88, král tedy skutečně rozdal všechny své zlaté cihly. Zaokrouhlování na tři desetinná místa v bodě (c) není bezpodmínečně nutné, je v zadání jen proto, aby bylo vidět, že je každý podíl jiný (při zaokrouhlení na dvě desetinná místa budou poslední dva podíly shodné). Další tabulka má vypadat takto:

$\frac{B}{A}$	$\frac{C}{B}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{E}{D}$	$\frac{F}{E}$	$\frac{G}{F}$	$\frac{H}{G}$	$\frac{J}{H}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$
1	2	$1,5$	$1,667$	$1,6$	$1,625$	$1,615$	$1,619$

Vynesené podíly na číselné ose (obr. 6.26):



Obrázek 6.26: Číselná osa

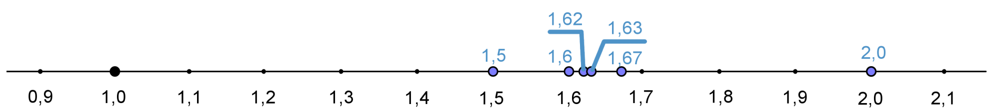
Podíly se postupně blíží zlatému číslu, což žáci (pokud neznají zlatý řez) těžko objeví. Mohou si ale všimnout, že se přibližují k hodnotě přibližně 1,62.

Obrázek s vybarvenými cihlami zlata je na další straně (obr. 6.28). Jestli byl král spravedlivý nebo ne, je věcí názoru.

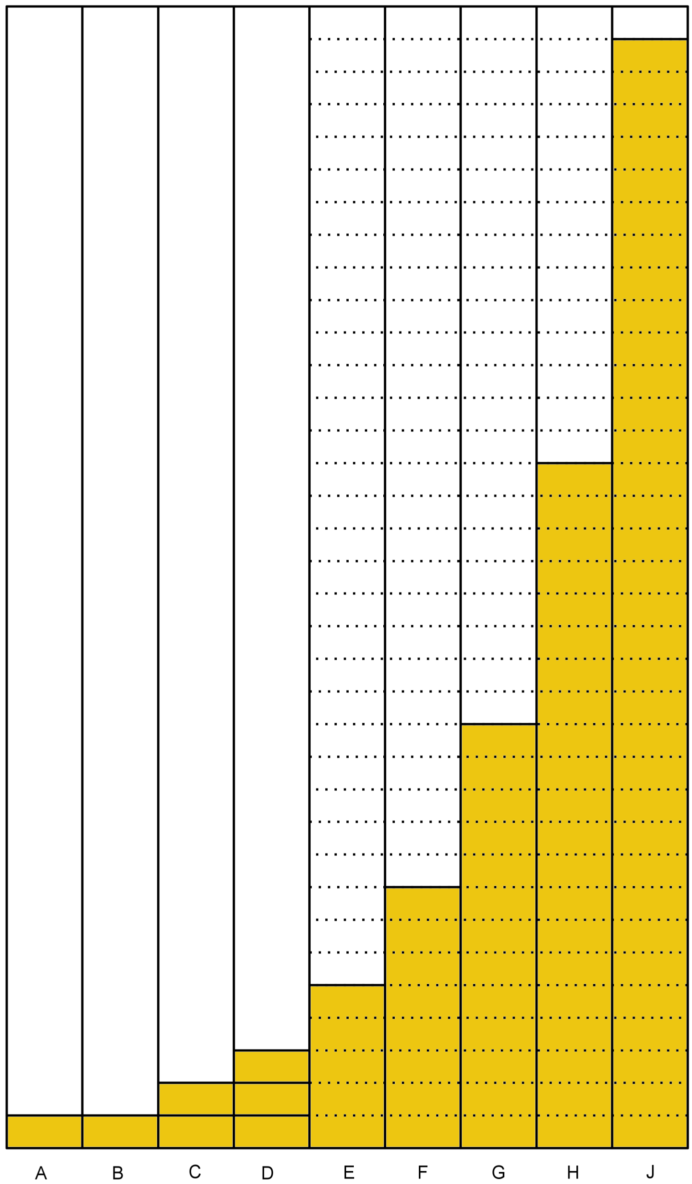
Pracovní list IV

Největší obdélník, který se vejde na papír formátu A_4, má rozměry 13×21 cm. Zde je vyplněná tabulka z bodu (f) a zanesené body na číselnou osu (obr. 6.27):

obdélník	1	2	3	4	5	6	7	...
delší strana (a)	2	3	5	8	13	21		
kratší strana (b)	1	2	3	5	8	13		
a:b	2,00	1,50	1,67	1,6	1,63	1,62		



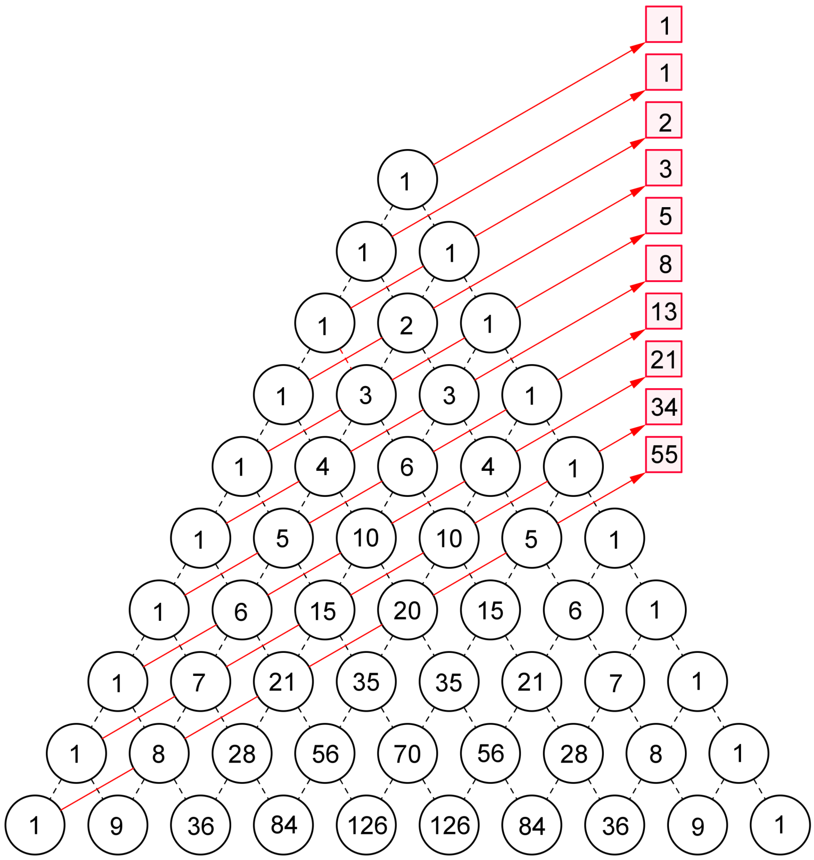
Obrázek 6.27: Číselná osa



Obrázek 6.28: Zlaté cihly

Pracovní list V

Středoškoláci by měli poznat, že jde o Pascalův trojúhelník. Úloha je ale určena spíše mladším žákům, kteří si na ní procvičí sčítání přirozených čísel. Součty ve směru šipek jsou prvky Fibonacciho posloupnosti. Díky tomu dává součet dvou po sobě jdoucích čísel hodnotu čísla následujícího. Toto ověření platí pro libovolnou dvojici, ne jen pro dvojici popsanou v bodě (c). Z čísel uvedených v bodě (d) se v červeném čtverečku objeví po čase čísla 144, 233 a 987 (jsou to členy Fibonacciho posloupnosti). Vyplněná pyramida vypadá takto:



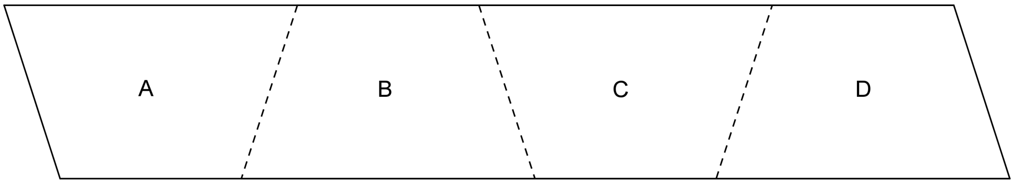
Obrázek 6.29: Pyramida

6.4 Skládanky z papíru

Postup, jak pomocí čtverce papíru složit zlatý řez úsečky je na straně 37. Zde popíšu návody na složení pravidelného pětiúhelníku a zlatého obdélníku. Obě skládanky jsou samozřejmě (stejně jako zmíněná konstrukce ze strany 37) přesné jen teoreticky. Záleží na síle papíru, ze kterého skládáme, naší pečlivosti a dalších okolnostech.

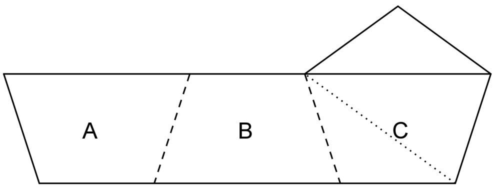
Pravidelný pětiúhelník

Vystřihněte proužek složený z lichoběžníků A, B, C, D na obrázku 6.30 a napřehýbejte jej podle přerušovaných čar.



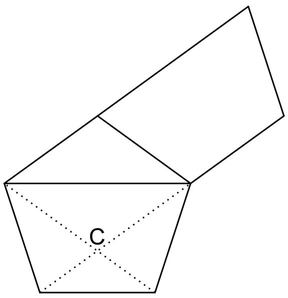
Obrázek 6.30: Pětiúhelník z papíru

Lichoběžník D přehněte dospodu (obr. 6.31).

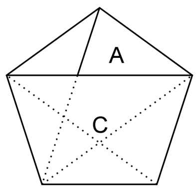


Obrázek 6.31: Krok 1

Dospodu přeložte také část s lichoběžníky A, B (obr. 6.32).



Obrázek 6.32: Krok 2



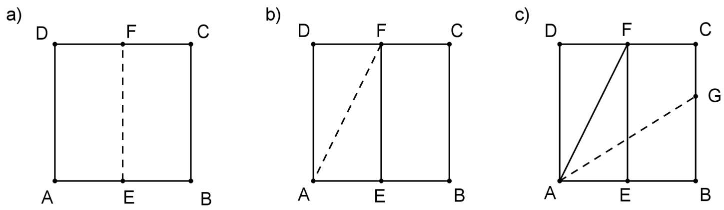
Obrázek 6.33: Krok 3

Nakonec přeložte lichoběžník A zpět dopředu a zasuňte jej pod lichoběžník C.

Pokud byste chtěli obrázek 6.30 přerýsovat, je třeba dodržet dvě pravidla. Lichoběžníky A, B, C, D jsou rovnoramenné, přičemž poměr délek delší základny a ramena je zlaté číslo, a vnitřní úhly každého lichoběžníku měří 72° a 108° stupňů.

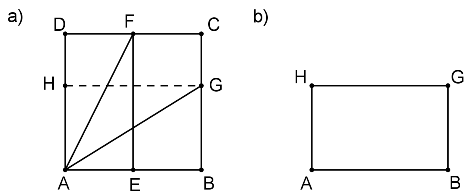
Zlatý obdélník

Vyjdeme od čtverce $ABCD$, který přeložíme napůl podle přerušované úsečky EF (obr. 6.34 a). Dále přeložíme papír podle přerušované úsečky AF (obr.6.34 b). Nyní můžeme rozpůlit úhel BAF, získáme tak bod G (obr. 6.34 c).



Obrázek 6.34: Skládání zlatého obdélníku I

Horní část papíru nad bodem G přehneme dozadu rovnoběžně se stranou AB (obr. 6.35 a). Zbylý obdélník $ABGH$ (obr. 6.35 b) je zlatý.



Obrázek 6.35: Skládání zlatého obdélníku II

Tato skládanka je převzata z knihy [37].

Kapitola 7

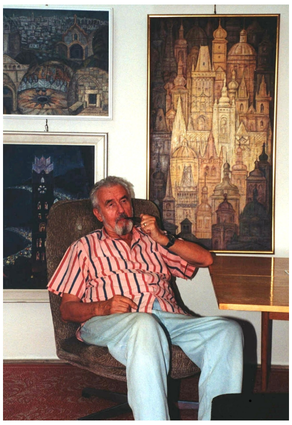
Zlatý řez v umění a architektuře

Otázka použití zlatého řezu v umění je obtížná. Mnoho nadšenců hledá a úspěšně nachází poměry zlatého řezu i tam, kde nejsou. O obrazech významných malířů vzniklých zaručeně na základě proporcí zlatého řezu vzniklo již nemálo prací. Problém je v tom, že ve většině případů neexistuje jediný důkaz, který by přítomnost zlatého řezu potvrzoval (nebo vyvracel).

V první podkapitole se seznámíme s akademickým malířem Karlem Březinou, který zlatý řez ve své tvorbě zaručeně používal. Ve druhé kapitole upozorním na několik uměleckých děl, ve kterých je zlatý řez použit nebo se to o nich alespoň tvrdí. Ve třetí podkapitole ukazuji některé souvislosti zlatého řezu s architekturou a konečně v podkapitole čtvrté jsou popsány konstrukce gotických lomených oblouků založené na zlatém řezu.

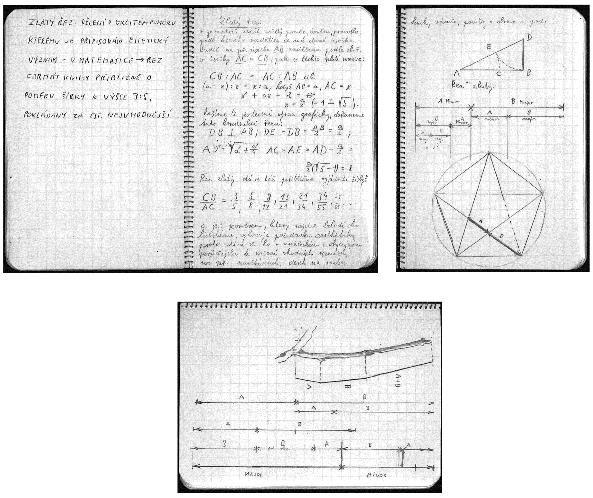
7.1 Karel Březina

Plzeňský akademický malíř Karel Březina ($*$ 27. 12. 1922, † 14. 3. 2004) byl mimořádným studentem Vysoké školy uměleckoprůmyslové v Praze (VŠUMPRUM) a členem Unie výtvarných umělců České republiky (obr. 7.1). V oblasti užité tvorby se nejvíce věnoval práci se sklem, ale také kamenné a skleněné mozaice. Začínal kresbou (uhlem, tužkou, rudkou, perem, ale i barvami). Měl celkem 34 samostatných výstav, navíc se od roku 1952 účastnil všech členských výstav krajské organizace výtvarných umělců v Plzni.



Obrázek 7.1: Karel Březina

Tento malíř a grafik bezpochyby zlatý řez znal. Informace o zlatém řezu a pravidelném pětiúhelníku se vyskytují v jeho zápisníku, do kterého si psal poznámky ze studií na VŠUMPRUM (obr. 7.2).



Obrázek 7.2: Notýsek Karla Březiny

V roce 2001 se v (dnes už neexistující) plzeňské Galerii 21 konala přednáška o zlatém řezu v obrazech Karla Březiny, přednášejícími byli Karel Březina a jeho žákyně Mgr. Zuzana Štauberová[1] (obr. 7.3).

Obrázek 7.3: Přednáška

Obrázek 7.4: Z Kypru

Malíř Karel Březina používal zlatý řez prakticky všude, většinou ale dost nepřesně, pouhým odhadem (ovšem šlo úmyslně o zlatý řez). Na obraze „Kypr“ (obr. 7.4) je znatelné přibližné členění plochy plátna výraznými motivy podle zlatého řezu.

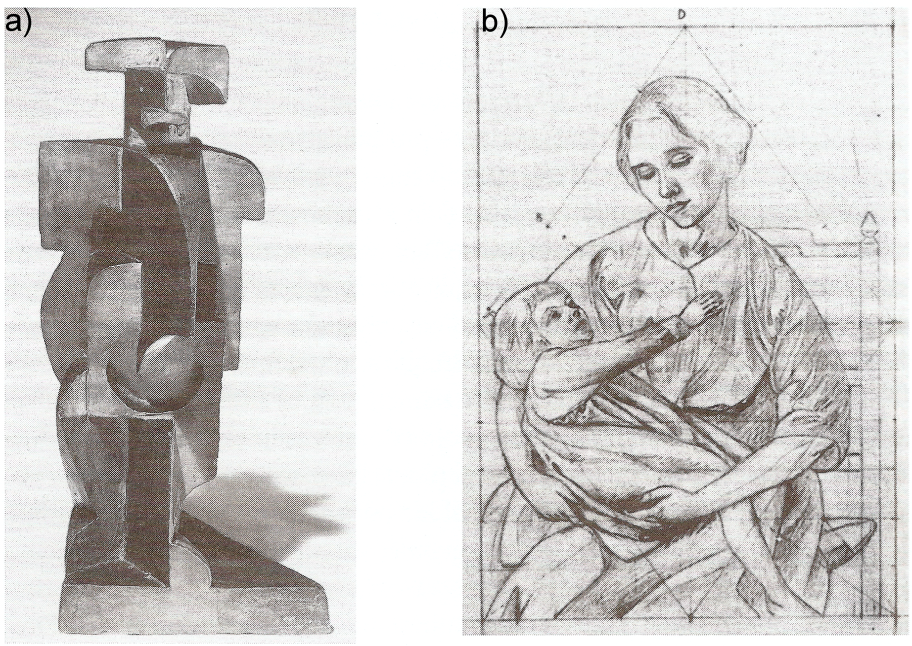
[1] Mgr. Zuzana Štauberová působí na Katedře matematiky Fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Na jeho nedokončených obrazech je vidět tužkou připravená síť dělící strany plátna přibližně zlatým řezem.

7.2 Zlatý řez v umění

Zlatý řez ve výtvarných dílech pravděpodobně použilo mnoho umělců (záměrně či nezáměrně, odhadem nebo přesně), ale pokud jako důkaz existují jen přibližná a zaokrouhlená přeměřování uměleckých děl, nemůžeme je brát příliš vážně. Několik umělců však použití zlatého řezu ve svých pracích potvrdilo (patří mezi ně například český malíř Karel Březina – viz předchozí podkapitola).

Mezi malíře, kteří podle všeho zlatý řez znali a alespoň v některých svých dílech použili, patří Francouz **Paul Sérusier** (1864–1927), představitel postimpresionismu a spoluzakladatel skupiny Nabis, která sdružovala několik umělců.



Obrázek 7.5: a) Harlekýn, b) Přípravná kresba k obrazu Mateřství

Litevský kubistický sochař **Jasques Lipchitz** (1891–1973) napsal:

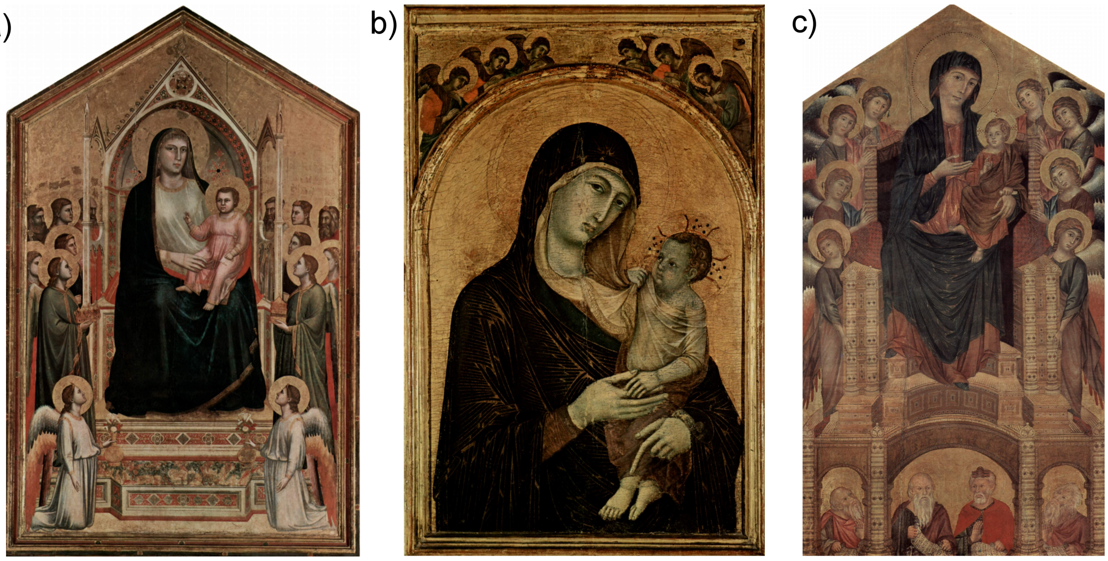
> *Tehdy jsem se, podobně jako jiní kubisté, velice zabýval teoriemi matematických proporcí, které jsem se snažil upotřebit v plastice. Všichni jsme se zajímali především o ideu zlatého pravidla čili zlatého řezu, systému, o němž se říkalo, že je základem výtvarného umění a architektury starověkého Řecka.*

Lipchitz pomohl Juanu Grisovi (španělský malíř, 1887–1927) se zhotovením sochy „Harlekýna“ (obr. 7.5 a), u níž oba umělci vytvořili požadované proporce pomocí Keplerova trojúhelníku (založeného na zlatém řezu – viz str. 89) [16].

Dalším výtvarníkem, který počátkem 20. století aplikoval zlatý řez, byl italský malíř **Gino Severini** (1883–1966). Úsilí o geometrickou dokonalost vedlo Severiniho k aplikaci zlatého řezu v přípravných kresbách k několika obrazům – například „Mateřství“ (obr. 7.5 b) [16].

Do stručného výčtu umělců užívajících zlatý řez můžeme zařadit i plzeňského malíře a fotografa **Pavla Mutinského** (∗ 1957), který sám o sobě prohlásil, že zlatý řez ve své práci používá. Vystudoval Střední uměleckoprůmyslovou školu v Praze a Západočeskou univerzitu v Plzni, před rokem 1990 byl členem Svazu českých výtvarných umělců a po roce 1990 členem Unie výtvarných umělců plzeňské oblasti. Věnuje se malbě, grafice, výtvarné realizaci v architektuře, grafickému designu, fotografii a videu[2].

a) b) c)



Obrázek 7.6: a) Ognissanti Madonna, b) Madonna Rucellai, c) Santa Trinita Madonna

Výskyt zlatého řezu ve světoznámých dílech *Ognissanti Madonna* (autor Giotto di Bondone, obr. 7.6 a), *Madonna Rucellai* (autor Duccio di Buoninsegna, obr. 7.6 b) a *Santa Trinita Madonna* (autor Cenni di Pepo, obr. 7.6 c) nebyl nikdy potvrzen, stejně jako nebyl nalezen důkaz, že zlatý řez použil Leonardo da Vinci při malování slavného obrazu *Mona Lisa*, ačkoliv se to často tvrdí. Pokud by zlatý řez použil, musel by jej znát dříve, než se seznámil s dílem Luca Pacioliho, což je nepravděpodobné.

[2]Čerpáno z `http://www.abadan.cz/autor.html`

Většina badatelů se přiklání k vysvětlení, že Leonardo (stejně jako výše jmenovaní malíři) použil obdélníky racionálních poměrů, které se zlatému řezu shodou okolností blíží.

7.3 Zlatý řez a architektura

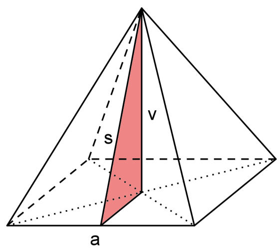
Stejně jako ve výtvarném umění se i v oblasti architektury (zejména starověké) objevuje mnoho nepodložených zpráv o užití zlatého řezu na některých významných stavbách. Mezi fenomény patří Cheopsova pyramida v Gíze (obr. 7.7) a Parthenon na Akropoli (obr. 7.10).

Obrázek 7.7: Cheopsova pyramida

Egyptské pyramidy byly postaveny v období 2700–1700 př. n. l. **Cheopsova pyramida** (též Velká pyramida) měřila původně 147 m. Spisovatel Martin Gardner ve své knize *Fads and Fallacies in the Name of Science (Dobové předsudky a omyly ve jménu vědy)* zmiňuje sdělení řeckého filosofa Hérodota (asi 485–425 př. n. l.) [16]:

> *Hérodotos uvádí, že pyramida byla vybudována tak, že obsah každé stěny se rovná obsahu čtverce, jehož strana má délku rovnající se výšce pyramidy.*

Pokud by výše uvedené tvrzení bylo pravdivé, znamenalo by to, že poměr dvojnásobku výšky stěny ku délce podstavné hrany je roven (přesně) zlatému číslu. Matematicky můžeme zapsat situaci takto:



Obrázek 7.8: Náčrt pyramidy

Podle Hérodotova výroku platí

$$\frac{as}{2} = v^2,$$

kde a je délka podstavné hrany, s je výška stěny a v je výška pyramidy (obr. 7.8). Podle Pythagorovy věty můžeme za v^2 dosadit $s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Řešíme tedy rovnici

$$\frac{as}{2} = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \tag{7.1}$$

Rovnici (7.1) vyřešíme jako kvadratickou rovnici s neznámou s. Výsledky jsou:

$$s_1 = \frac{a}{4}(1 + \sqrt{5}), \quad s_2 = \frac{a}{4}(1 - \sqrt{5}).$$

Jelikož je druhý výsledek záporný, nemusíme jej dále uvažovat. První výsledek dosadíme za s do výrazu $\frac{2s}{a}$ a výraz upravíme:

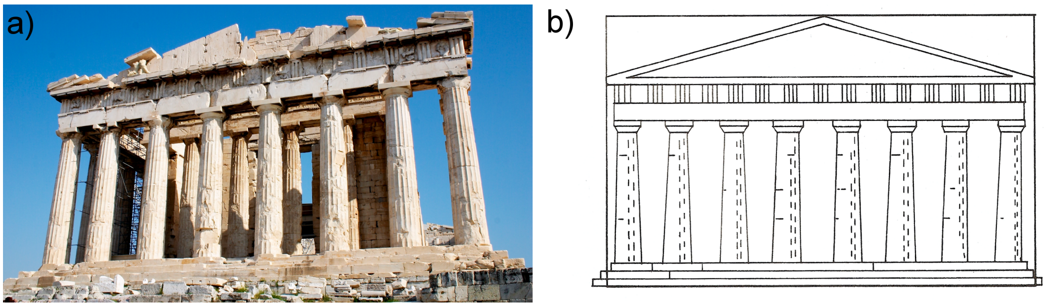
$$\frac{2s}{a} = \frac{2 \cdot \frac{a}{4}(1 + \sqrt{5})}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi,$$

což jsme chtěli ukázat. Otázkou ovšem je, zda se jednalo o úmysl, nebo jde o pouhou náhodu. Měřením pyramidy bylo zjištěno, že uvedená teorie odpovídá praxi s odchylkou menší než 0.1 procenta.

Rozměry v téměř shodných poměrech s Cheopsovou pyramidou má v moderní architektuře skleněná **pyramida** na nádvoří muzea **v Louvru** v Paříži. Tuto stavbu navrhl americký architekt Ieoh Ming Pei (∗ 26. 4. 1917). Její povrch tvoří 603 skleněných kosočtverců a 70 (rovněž skleněných) trojúhelníků (obr. 7.9).

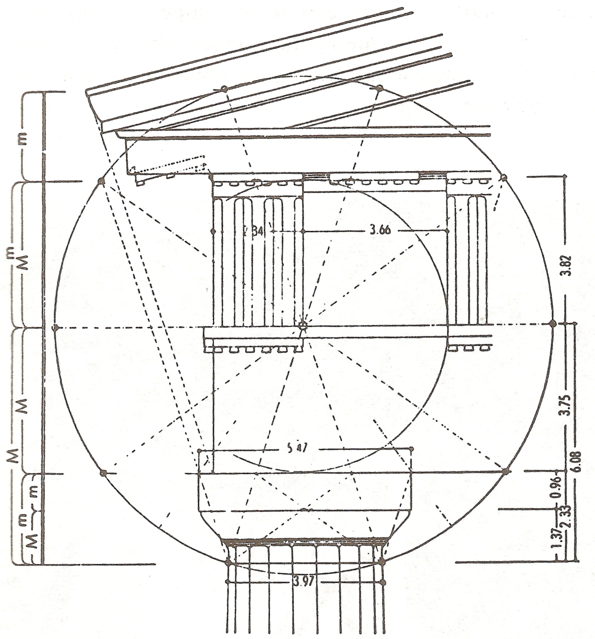
Obrázek 7.9: Pyramida v Louvru

Parthenon byl postaven architekty Iktinem a Kallikratem na athénské Akropoli jako chrám zasvěcený kultu bohyně Athény. Dohledem nad sochařskou výzdobou byl pověřen jeden z nejvýznamnějších světových sochařů Feidiás (asi 490 – 430 př. n. l.). Většina prací o zlatém řezu uvádí, že rozměry Parthenonu v době, kdy byl jeho trojúhelníkový štít ještě neporušen, přesně odpovídají zlatému obdélníku (obr. 7.10). Také se udává, že zlatý poměr figuruje i v jiných rozměrech Parthenonu (obr. 7.11). Jiní autoři jako Miloutine Borissavlievitch v knize *The Golden Number and the Scientific Aesthetics of Architecture (Zlaté číslo a vědecká estetika architektury)* z roku 1958



Obrázek 7.10: Parthenon na Akropoli

sice přítomnost φ v projektu Parthenonu nepopírají, říkají však, že chrám vděčí za svou harmonii a krásu spíše pravidelnému rytmu, vnesenému opakovaným kladením stejného sloupu [16].



Obrázek 7.11: Zlatý řez na Parthenonu (převzato z [4])

V první polovině 20. století působil ve Francii architekt Charles-Édouard Jeanneret (1887–1965), který používal pseudonym Le Corbusier. Proporce svých staveb navrhoval na základě proporčního systému Modulor (tento systém je založen na zlatém řezu), který sám vytvořil. Modulor údajně aplikoval i v projektu stavby **„Unité d'Habitation“** v Marseille (obr. 7.12) [4]. Více o tomto architektovi uvádím v podkapitole 8.2.

Obrázek 7.12: Unité d'Habitation

Zlatý řez se také objevuje na některých stavbách zcela náhodně - jako součást pravidelného pětiúhelníku. Příkladem je budova panoramatického kina **„La Géode“** v Paříži (obr. 7.13). Její tvar získáme, odřízneme-li vrcholy pravidelného dvacetistěnu (tím dostaneme na povrchu tělesa pravidelné pětiúhelníky) a celé těleso promítneme z jeho středu na opsanou kulovou plochu. Větší šestiúhelníkové stěny se dále dělí na malé sférické trojúhelníky (Takových trojúhelníků je na povrchu celkem 1670). Budova byla otevřena v květnu 1985.

Obrázek 7.13: La Géode

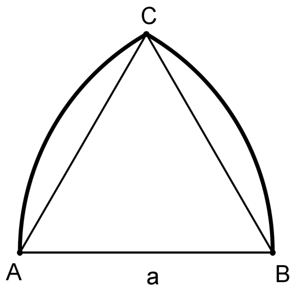
Za pravidelným pětiúhelníkem nemusíme jezdit do Paříže. Fotografie na obrázku 7.14 jsem pořídila ve stanici pražského metra linky B – Lužiny. V této stanici se nalézají tři „skleníky“ s palmami, všechny ve tvaru polopravidelného mnohostěnu, který získáme odříznutím dvanácti vrcholů pravidelného dvacetistěnu. Na povrchu tělesa tak vznikne dvanáct pětiúhelníkových stěn (více o tomto polopravidelném mnohostěnu v podkapitole 4.2). Skleník stojí na pravidelném pětibokém sloupu, který je napojen na jednu z pětiúhelníkových stěn. Okolo sloupu je dřevěná lavice, opět ve tvaru pravidelného pětiúhelníku.

Obrázek 7.14: Stanice metra Lužiny v Praze

7.4 Gotické lomené oblouky

Lomený oblouk se stal typickým znakem gotické architektury. Útvarem složeným ze dvou kruhových oblouků uzavírali stavitelé okna i dveře.

Nejjednodušší oblouk nad úsečkou AB sestrojíme tak, že opíšeme kružnici k se středem A a s poloměrem $|AB|$ a kružnici h se středem B a s poloměrem $|AB|$. Tyto kružnice se protnou v bodě C (pohybujeme se jen v jedné polorovině určené přímkou AB), který je mimochodem vrcholem rovnostranného trojúhelníku ABC. Lomený oblouk je tvořen obloukem $\widehat{AC}$ kružnice h a obloukem $\widehat{BC}$ kružnice k (obr. 7.15).

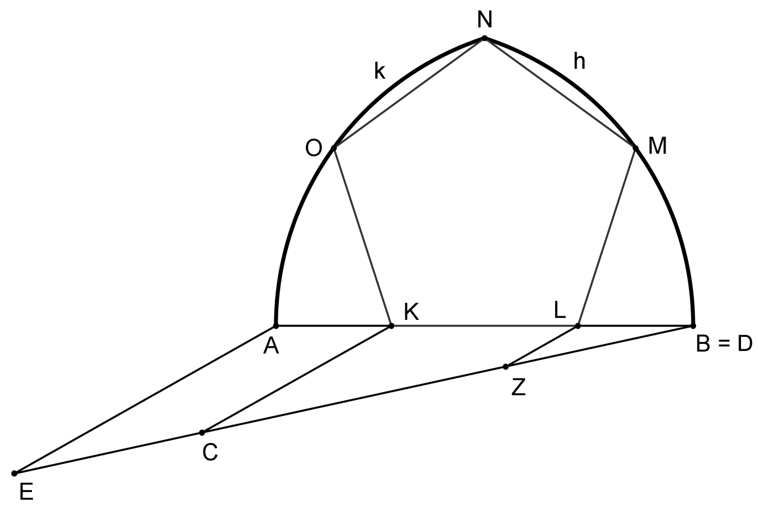


Obrázek 7.15: Lomený oblouk

Dále popíšu konstrukce dvou lomených oblouků, ve kterých se užívá zlatý řez (konstrukcí různých jiných lomených oblouků existuje samozřejmě mnoho, zde uvádím jen ty, při jejichž rýsování je třeba použít zlatý řez) a konstrukci útvaru zvaného „gotická vejcovka“, který se často vyskytuje v ornamentech gotických kružeb[3].

Lomený oblouk nad pravidelným pětiúhelníkem I

Je dána úsečka AB. Sestrojte nad touto úsečkou lomený oblouk tak, aby procházel třemi vrcholy pravidelného pětiúhelníku, jehož strana leží na úsečce AB.



Obrázek 7.16: Lomený oblouk nad pravidelným pětiúhelníkem I

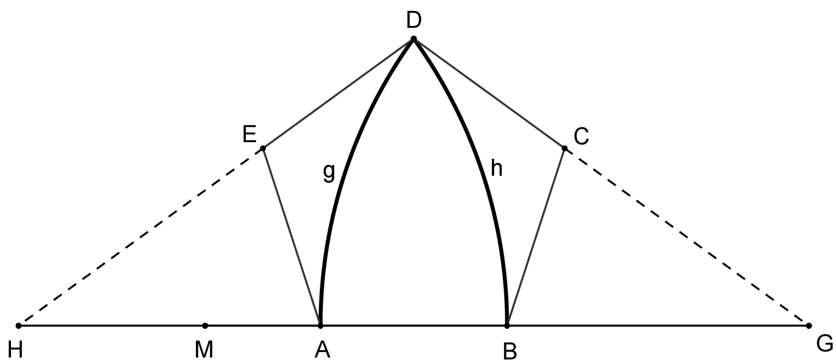
[3]Gotická kružba je charakteristický souměrný architektonický prvek vyplňující oblouky oken, arkád, zábradlí a tympanonů. Tento geometrický prvek byl konstruován kružidlem a vyžadoval vždy velkou přesnost rýsování. Často je gotická kružba nazývána „zkamenělou geometrií“.

Postup konstrukce (obr. 7.16):

1. libovolná úsečka CD (pomocná konstrukce)
2. $Z; Z \in CD, \dfrac{|CD|}{|CZ|} = \dfrac{|CZ|}{|DZ|}$ (Z dělí CD zlatým řezem)
3. $E; E \in\mapsto DC, |CE| = |DZ|$
4. $K, L; K \in AB, L \in AB, \dfrac{|DE|}{|AB|} = \dfrac{|EC|}{|AK|} = \dfrac{|DZ|}{|BL|} = \dfrac{|CZ|}{|KL|}$
5. pětiúhelník $KLMNO$
6. $k; k(L, |AL|)$
7. $h; h(K, |BK|)$
8. lomený oblouk ANB

Lomený oblouk nad pravidelným pětiúhelníkem II

Sestrojte lomený oblouk nad stranou AB pětiúhelníku $ABCDE$ tak, aby vrcholem oblouku byl bod D.



Obrázek 7.17: Lomený oblouk nad pravidelným pětiúhelníkem II

Postup konstrukce (obr. 7.17):

1. $M; M \in\mapsto BA, \dfrac{|BM|}{|AB|} = \dfrac{|AB|}{|AM|}$ (A dělí BM zlatým řezem)
2. $G; G \in\mapsto AB, |BG| = |BM|$
3. $H; H \in\mapsto BA, |AH| = |BM|$

4. $g; g(G, |AG|)$
5. $h; h(H, |BH|)$
6. lomený oblouk ADB

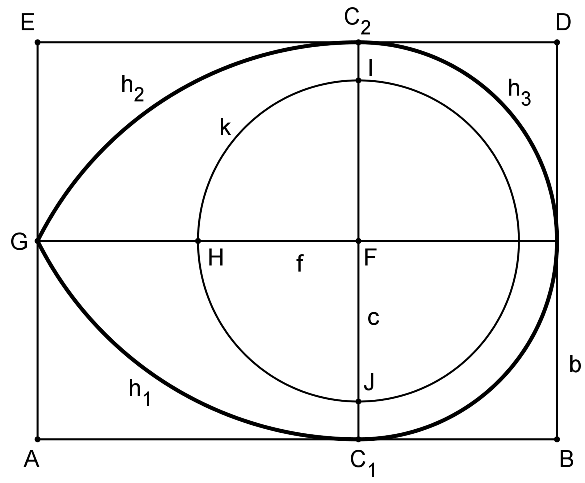
Body G, H lze najít také jako průsečíky prodloužených stran pětiúhelníku $ABCDE$.

Gotická vejcovka

Nad úsečkou AB sestrojte gotickou vejcovku.

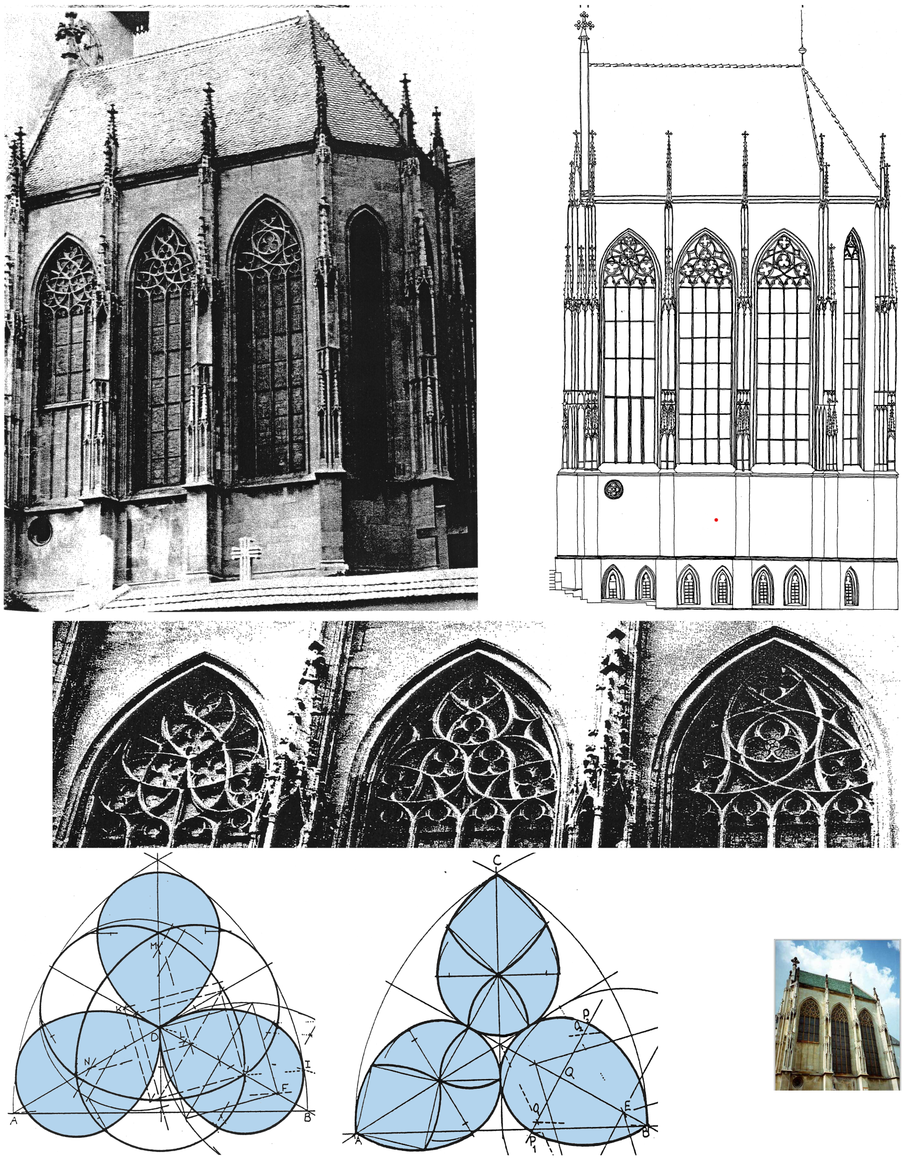
Postup konstrukce (obr. 7.18):

1. $C_1; C_1 \in AB, \dfrac{|AB|}{|AC_1|} = \dfrac{|AC_1|}{|BC_1|}$ (C_1 dělí AB zlatým řezem)
2. $\leftrightarrow b; b \perp AB, B \in b$
3. $D; D \in b, |BD| = 2|BC_1|$
4. obdélník $ABDE$
5. $\leftrightarrow c; c \perp AB, C_1 \in c$
6. $C_2; C_2 \in (c \cap DE)$
7. $F; F \in \dfrac{1}{2}|C_1C_2|$
8. $\leftrightarrow f; f \parallel AB, F \in f$
9. $G; G \in (f \cap AE)$
10. $H; H \in \dfrac{1}{2}|GF|$
11. $k; k(F, |FH|)$
12. $I, J; I, J \in (k \cap c)$
13. $h_1; h_1(I, |GI|)$
14. $h_2; h_2(J, |GJ|)$
15. $h_3; h_3(F, |FC_1|)$
16. vejcovka složená z oblouků $\widehat{C_1G},\ \widehat{GC_2},\ \widehat{C_2C_1}$



Obrázek 7.18: Gotická vejcovka

Podle brožury „Kružby gotických oken“[4] (autor I. Trojan), ze které jsem čerpala výše popsané konstrukce, se lomené oblouky nad pětiúhelníkem vyskytují například na Svatovítské katedrále v Praze. Gotickou vejcovku můžeme vidět v kružbě oken kaple Zápolských (obr. 7.19) ve Spišském Štvrtku (Slovensko).



Obrázek 7.19: Kaple Zápolských

[4] Jedná se o učební text určený jako příprava k rysu pro studenty Fakulty architektury ČVUT Praha. Autor částečně čerpal z knihy [32].

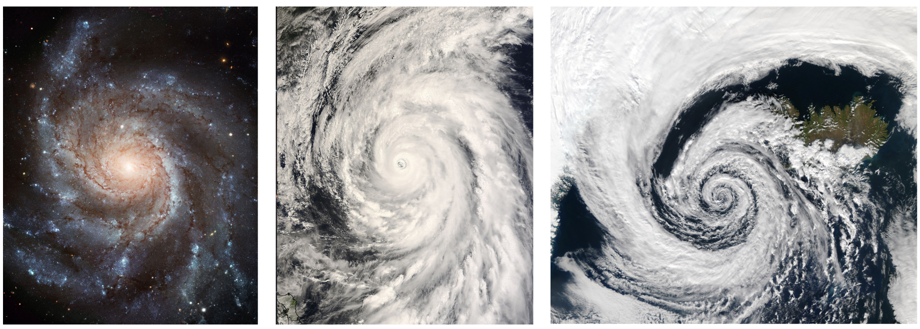
Kapitola 8

Zlatý řez v přírodě

Obrázek 8.1: Krystaly pyritu

Zlaté číslo a čísla Fibonacciho posloupnosti (která, jak víme, se zlatým řezem úzce souvisí) se objevují nezřídka v přírodě. V neživé přírodě mají například krystaly některých minerálů tvary pravidelných mnohostěnů i dalších těles, na kterých můžeme poměr zlatého řezu nalézt (obr. 8.1).

V mnoha přírodních útvarech můžeme pozorovat logaritmickou spirálu. Do této spirály se seskupují oblaka, hvězdy některých galaxií, semínka v květu slunečnice aj (obr. 8.2).



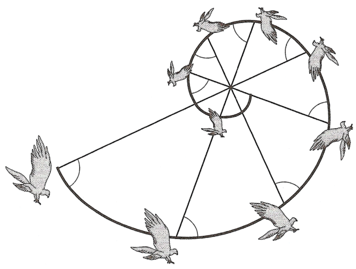
Obrázek 8.2: Zleva: Galaxie M101, oko hurikánu, tlaková níže nad Islandem

Tvar logaritmické spirály mají i schránky některých měkkýšů. V této souvislosti je pravděpodobně nejznámější hlavonožec loděnka hlubinná (nautilus pompilius). Tento živočich pocházející z druhohor žije v západní části Tichého oceánu. Díky svému speciálnímu tvaru schránky nemusí během růstu měnit tvar těla (obr. 8.3).

Výsledky výzkumů biologa Vance A. Tuckera publikované v listopadu 2000 v *Journal of Experimental Biology* ukazují, že sokoli drží při útoku na kořist hlavu zpříma a sledují přitom logaritmickou spirálu (obr. 8.4). Díky tomu, že odchylka tečny a průvodiče je v každém bodě spirály stejná, umožňuje jim tato dráha neustále sledovat

Obrázek 8.3: Nautilus pompilius

cíl při maximální možné rychlosti. Při přímé trase letu by vzhledem k postavení očí museli mít hlavu otočenou o 40°, což by je značně zpomalovalo [16].



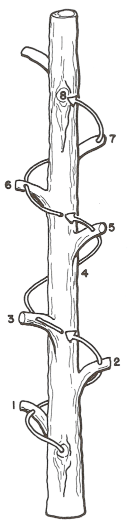
Obrázek 8.4: Útok sokola

8.1 Rostliny

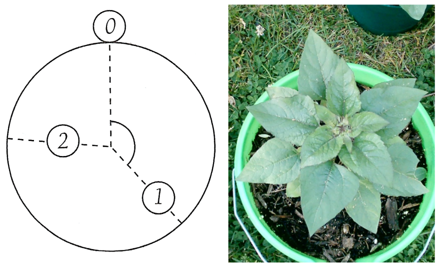
Fibonacciho čísla se objevují ve fylotaxi rostlin. Fylotaxe je obor zabývající se uspořádáním listů na stonku. Tento termín zavedl švýcarský přírodovědec Charles Bonnet (1720–1793). V první polovině 19. století vznikla matematická fylotaxe. U jejího zrodu stáli německý botanik Karl Friedrich Schimper (1803–1867), rovněž německý botanik Alexander Braun (1805–1877), francouzský krystalograf August Bravais (1811–1863) a jeho starší bratr botanik Louis Bravais (1801–1843).

Tito badatelé dospěli k závěru, že růst listů na stonku lze ve většině případů popsat pomocí zlomků, jejichž čitatel i jmenovatel je Fibonacciho číslo, přičemž člen Fibonacciho posloupnosti ve jmenovateli je vždy ob jeden člen větší, než v čitateli. Jedná se tedy o zlomky ve tvaru $\frac{F_n}{F_{n+2}}$, kde F_n jsou prvky Fibonacciho posloupnosti. Představme si, že místy, kde vyrůstá list ze stonku, proložíme spirálu (tato spirála se nazývá genetická spirála). Číslo v čitateli zlomku udává počet otáček spirály mezi dvěma listy, které rostou přesně nad sebou, číslo ve jmenovateli zlomku odpovídá počtu listů, které se nalézají na úseku spirály mezi dvěma nad sebou umístěnými listy. V praxi má fylotaktický poměr $\frac{1}{3}$ například ostružina nebo buk, poměr $\frac{2}{5}$ jabloň nebo meruňka, poměr $\frac{3}{8}$ hrušeň, vrba nebo topol atd (obr. 8.5).

Rozmístění listů na stonku má vliv na přísun světla, vláhy a vzduchu k jednotlivým listům. Při pohledu na stonek rostliny shora si můžeme všimnout, že nové listy vyrůstají vždy pootočené o určitý (takzvaný divergenční) úhel od listu předchozího. Tento úhel bývá takový, aby horní listy minimálně stínily spodním (obr. 8.6). Přeměřením velkého počtu rostlin došli vědci k závěru, že nejčastěji je velikost tohoto úhlu 137,5°. Úhel 137,5° je často nazýván úhlem zlatým. Platí totiž, že $137,5^\circ \doteq \frac{360^\circ}{\varphi^2}$ nebo též $137,5^\circ \doteq 360^\circ - \frac{360^\circ}{\varphi}$.



Obrázek 8.5: Listy na stonku



Obrázek 8.6: Divergenční úhel

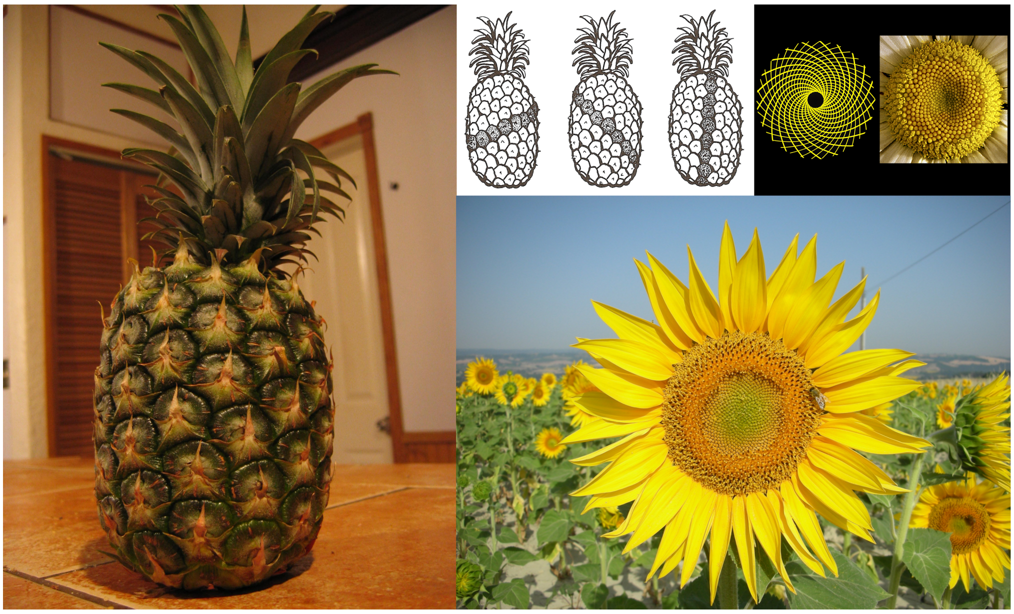
Fibonacciho čísla figurují také ve spirálovitých strukturách na povrchu šišek jehličnanů či ananasu, v terči slunečnice, sedmikrásky i jiných květů. Na těchto rostlinách můžeme pozorovat dva (v některých případech i více) systémy spirál (nazývané parastichy), a to spirály levotočivé a pravotočivé (obr. 8.7). Počty spirál v obou směrech vždy odpovídají velikosti rostliny, ale většinou je lze vyjádřit sousedními členy Fibonacciho posloupnosti. Například u slunečnice je nejčastěji jedním směrem 34 spirál a druhým směrem 55 spirál, ale existují i květy s počty $55 + 89$, $89 + 144$ nebo dokonce $144 + 233$ spirál. Současní francouzští matematici Yves Couder[1] a Stéphan Douady[2] takové uspořádání semen slunečnice označili za nejefektivnější, protože se tímto způsobem do terče vejde semen nejvíce.

Zajímavé je sledovat počet okvětních lístků květů různých rostlin. Velmi časté jsou opět květy, jejichž počet okvětních plátků je nějakým Fibonacciho číslem. Například:

1 plátek: kala, anturie, ...

2 plátky: euforbia, ...

[1]Homepage: `http://www.lps.ens.fr/~couder/`.
[2]Homepage: `http://www.lps.ens.fr/~douady/`.



Obrázek 8.7: Parastichy (ananas, sedmikráska, slunečnice)

3 plátky: kosatec, ...

5 plátků: pomněnka, ...

8 plátků: celandine, ...

13 plátků: třapatka, ...

21 plátků: čekanka, ...

34 plátků: kopretina, ...

Samozřejmě často záleží na konkrétním poddruhu. Také je třeba brát v úvahu, že některé květiny nemají stále stejný počet okvětních lístků.

Obrázek 8.8: Zleva: Hrušeň, jabloň, kakost luční, planá růže, jablko

Skutečně velké množství květin má pět okvětních plátků pravidelně rozmístěných okolo středu. Květ tedy připomíná pravidelný pětiúhelník nebo též pěticípou hvězdu (pentagram). Takto vypadají květy ovocných stromů, plané růže, blatouchu, pomněnky atd. Útvar připomínající pěticípou hvězdu uvidíme i v rozkrojeném jablku (obr. 8.8).

Většina informací a některé obrázky uvedené v této podkapitole jsou čerpány z knihy [16] a z Internetu[3].

8.2 Proporce lidského těla

Proporcemi lidského těla se zabývali zejména architekti a malíři, kteří v nich hledali kánon krásy a harmonie, ze kterého by bylo možné vycházet při navrhování staveb nebo malování obrazů.

Úvahy o ideální postavě se objevují již v antickém řecku. Na tyto myšlenky navázal římský architekt a stavitel Vitruvius (viz podkapitola 5.4). Ten propagoval jednoduché racionální poměry. Jeho myšlenky graficky zpracoval Leonardo da Vinci, který vytvořil obraz takzvaného Vitruviánského člověka (obr. 5.13).

Zlatý řez v proporcích lidského těla popsal německý matematik a filosof **Adolf Zeising** (1810–1876) ve svém díle *Neue Lehra von den Proportionen des menschlichen Körpers* (1854). Zlatý řez považoval za univerzální pravidlo, ve kterém je obsažen základní princip všech forem krásy v rostlinné říši a v umění. Jeho názory pravděpodobně ovlivnily další autory druhé poloviny devatenáctého a dvacátého století.

V souvislosti s proporcemi lidského těla a zlatým řezem je znám švýcarsko-francouzský architekt a výtvarník **Charles Édouard Jeanneret** (1887–1965). Narodil se ve Švýcarsku, avšak většinu života strávil ve Francii, kde používal pseudonym Le Corbusier. Byl velkým zastáncem užití zlatého řezu v umění. V roce 1941 začal vytvářet svůj vlastní proporční kánon, takzvaný „Modulor“, založený na poměrech zlatého řezu. Modulor měl být systémem ideálních proporcí vycházejících z lidské postavy. Tyto proporce pak měly být aplikovatelné v architektuře i mechanice. Podkladem k vytvoření Moduloru bylo typické lidské tělo průměrného Evropana. Výšku postavy zvolil původně 175 cm, později ji upravil na 183 cm. Tato výška je dále členěna na menší části. Vzdálenost od země k pupku je 113 cm, vzdálenost od země ke špičkám prstů zvednuté ruky je 226 cm. Dělením délek 183 cm a 226 cm ve zlatém řezu obdržel Le Corbusier čísla takzvané červené a modré řady (obr. 8.9).

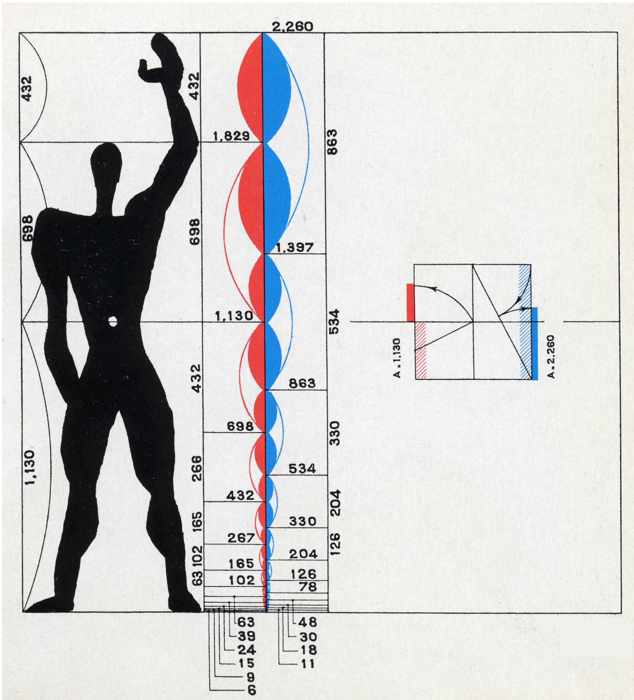
$$\begin{aligned} 183 : \varphi &\doteq 113 \\ 113 : \varphi &\doteq 70 \\ 70 : \varphi &\doteq 43 \\ 43 : \varphi &\doteq 27 \\ &\dots \end{aligned}$$

[3]Internetový zdroj: `http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html#petals`.

Červená řada obsahuje čísla 4, 6, 10, 16, 27, 43, 70, 113, 183.

$$\begin{aligned} 226 : \varphi &\doteq 140 \\ 140 : \varphi &\doteq 86 \\ 86 : \varphi &\doteq 53 \\ 53 : \varphi &\doteq 33 \\ &\dots \end{aligned}$$

Modrá řada obsahuje čísla 3, 5, 8, 13, 20, 33, 53, 86, 140, 226.



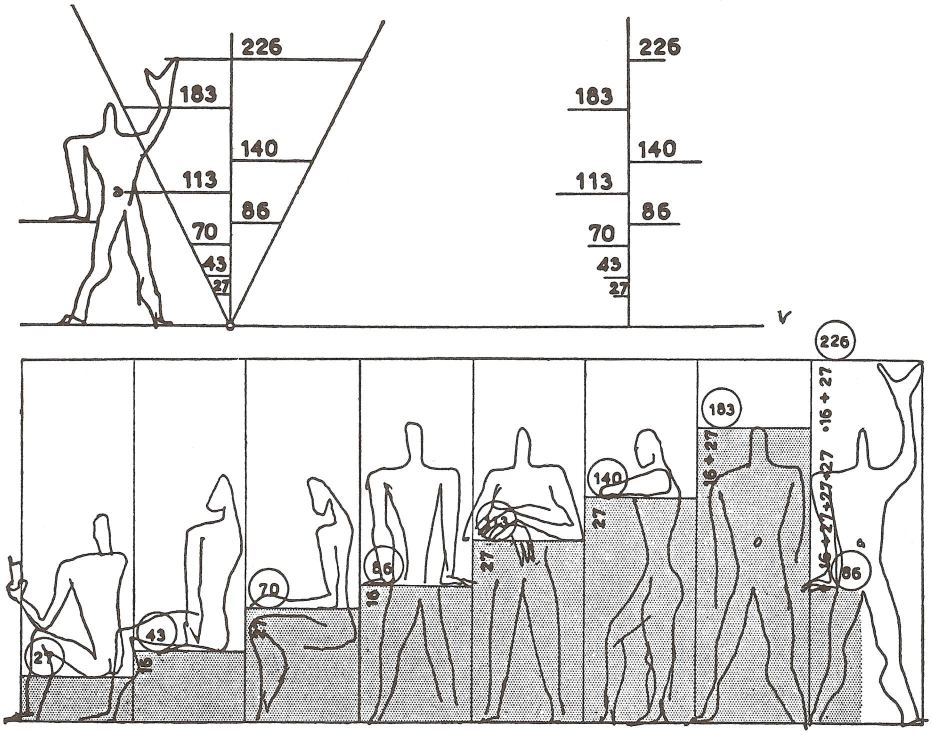
Obrázek 8.9: Modulor – červená a modrá řada

Hodnoty jsou samozřejmě zaokrouhlené, dokonce ne vždy podle matematických pravidel. Poměry sousedních čísel obou řad se však od zlatého řezu moc neliší, maximálně v desítkách milimetrů. Většina číselných hodnot obsažených v těchto řadách souvisí podle Le Corbusiera s proporcemi lidského těla v různých polohách (obr. 8.10) [27].

V jednom dopise píše Einstein Corbusierovi o Moduloru toto [16]:

> *Je to škála proporcí, díky níž je těžké udělat něco špatně, a naopak je snadné udělat to dobře.*

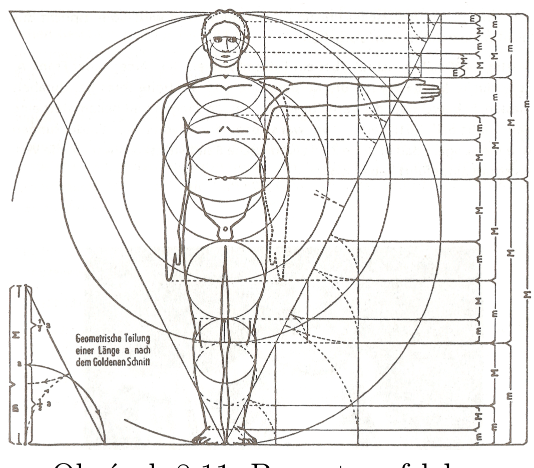
Le Corbusier nezůstal pouze u teorie, ale snažil se uplatnit svůj rozměrový model také v praxi, například při tvorbě urbanistického plánu indického Čandigarhu,



Obrázek 8.10: Modulo – různé polohy lidského těla

který zahrnoval i čtyři veřejné budovy (parlament, nejvyšší soud a dvě muzea) řekl Corbusier toto: *„Ve chvíli rozdělení plochy okna přichází samozřejmě na řadu Modulor“* ... [16].

Dalším, kdo propagoval zlatý řez jako základní princip proporcí, byl německý architekt **Ernst Neufert** (1900–1986). V roce 1936 vytvořil skicu mužského těla („Bauentwurfslehre“) založenou na zlatém řezu (obr. 8.11). M značí vždy větší část (Major) a m menší část (minor) úsečky rozdělené zlatým řezem.



Obrázek 8.11: Bauentwurfslehre

Kapitola 9

Experimentální estetika

Experimentální estetika je psychologická disciplína (součást experimentální psychologie), která vznikla v 50. letech 19. století. Snaží se zjistit a popsat objektivní podmínky doprovázející estetický zážitek a stanovit obecné zákony tohoto estetického působení. První experimenty se zabývaly působením jednoduchých obrazců, předmětů a barev na lidskou psychiku. Experimentálně bylo zjišťováno, které tvary nebo barvy lidé preferují před jinými. Výklady takto získaných výsledků se však lišily, a tak se tato psychologická disciplína dostala na okraj zájmu.

9.1 Gustav Theodor Fechner

Německý fyziolog a psycholog Gustav Theodor Fechner (∗ 19. 4. 1801, † 18. 11. 1887), který mimo jiné působil jako profesor na univerzitě v Lipsku, bývá považován za zakladatele experimentální estetiky. Zabýval se zejména užitím matematických metod v psychologii. Jeho jméno je populární v souvislosti s Fechner-Weberovým[1] psychofyzikálním zákonem (Weber tento zákon zformuloval, zatímco Fechner jej ověřoval v praxi):

Intenzita počitku je logaritmicky úměrná intenzitě podnětu.

Gustav Theodor Fechner se pomocí experimentální estetiky pokusil zjistit, zda je zlatý řez skutečně nejlíbivější proporcí. Metodou volby (posuzování vzorku lidí, kteří vybírají, co z předloženého se jim nejvíce líbí) zkoumal, zda má zlatý řez nějakou zvláštní estetickou hodnotu. Pokusným osobám dal vybrat z deseti obdélníků různých rozměrů, který se jim líbí nejvíce a který nejméně. Výsledky tohoto zkoumání zveřejnil roku 1876 v knize *Vorschule der Ästhetik* (*Úvod do estetiky*) [7]. Popisuje zde nejen jak vypadalo jeho testování, ale i jak se pokusné osoby chovaly, jak uvažovaly a podle čeho se rozhodovaly. Při vybírání nejlíbivějšího obdélníku lidé často

[1] Ernst Heinrich Weber (∗ 24. 6. 1795, † 26. 1. 1878), německý lékař.

uvažovali nad užitím tohoto obdélníku. Většina osob se chovala nerozhodně, při opakování pokusu u téže osoby se stávalo, že dotyčný vybral napodruhé jiný obdélník. Někteří odsuzovali čtverec jako nejjednodušší a nudný obrazec, jiní ho naopak označili za nejestetičtější, protože je „nejpravidelnější“. Přes veškerou nejistotu ve výběru považuje Fechner celkový výsledek za podstatný. Poměr zlatého řezu a poměry blízké získali nejvíce kladných hlasů a minimum osob je označilo za nelíbivé (poměr zlatého řezu dokonce nevyřadil nikdo). Údajně zlatý obdélník vybírali jako nejhezčí zejména ti, kdo si svým výběrem byli jisti a příliš neváhali.

Následující tabulka je přehledem Fechnerových výsledků. Poměry stran zkoumaných obdélníků byly $\frac{1}{1}$ (čtverec), $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{29}{20}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{34}{21}$ (přibližně zlatý obdélník), $\frac{23}{13}$, $\frac{2}{1}$ a $\frac{5}{2}$. Dotázaní mohli vybrat více obdélníků, v tom případě byl každému z vybraných obdélníků připsán jen zlomek jednoho hlasu (například vybral-li někdo tři obdélníky, které se mu líbí, každý obdélník dostal třetinu hlasu, aby vždy součet na jednu osobu dal číslo jedna). Proto jsou v tabulce u počtů hlasujících pro daný obdélník desetinná čísla. Pokud někdo nezvolil žádný obdélník, jeho hlas není započítán. Z toho důvodu se celkový počet hlasů pro nejlíbivější obdélník neshoduje s počtem hlasů pro nejméně líbivý obdélník.

Poměr stran	Kladné hlasy		Záporné hlasy		Procenta	
obdélníku	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
1/1	6,25	4,0	36,67	31,5	3,74	3,36
6/5	0,5	0,33	28,8	19,5	0,22	0,27
5/4	7,0	0,0	14,5	8,5	3,07	0,00
4/3	4,5	4,0	5,0	1,0	1,97	3,36
29/20	13,33	13,5	2,0	1,0	5,85	11,35
3/2	50,91	20,5	1,0	0,0	22,33	17,22
34/21	78,66	42,65	0,0	0,0	34,50	35,83
23/13	49,33	20,21	1,0	1,0	21,64	16,99
2/1	14,25	11,83	3,83	2,25	6,25	9,94
5/2	3,25	2,0	57,21	30,25	1,43	1,68
Celkem	228,00	119,00	150,00	95,00	100,00	100,00

Po Fechnerovi se objevily další pokusy zkoumat oblíbenost zlatého řezu, většinou však s podobnými závěry. Tato zkoumání provedl například americký pedagog a psycholog **Edvard Lee Thorndike** (1874-1949) nebo francouzský estetik **Charles Lalo** (1877-1953). Zde je srovnání Fechnerových a Lalových výsledků podle [20]. (Výsledky Fechnerova výzkumu nejsou na první pohled totožné s údaji v předchozí tabulce, protože zde jsou smíchány dohromady výběry mužů i žen. Pokud bychom na základě hodnot uvedených v tabulce z knihy [7] vypočítali, kolik procent ze všech kladných odpovědí připadá na jednotlivé obdélníky, hodnoty by odpovídaly údajům v následující tabulce.):

Poměr šířky k výšce	Nejvíce líbivý pravoúhelník		Nejméně líbivý pravoúhelník	
	Fechner	Lalo	Fechner	Lalo
1,00	3,0 %	11,7 %	27,8 %	22,5 %
0,83	0,2 %	1,0 %	19,7 %	16,6 %
0,80	2,0 %	1,3 %	9,4 %	9,1 %
0,75	2,5 %	9,5 %	2,5 %	9,1 %
0,69	7,7 %	5,6 %	1,2 %	2,5 %
0,67	20,6 %	11,0 %	0,4 %	0,6 %
0,62	35,0 %	30,3 %	0,0 %	0,0 %
0,57	20,0 %	6,3 %	0,8 %	0,6 %
0,50	7,5 %	8,0 %	2,5 %	12,5 %
0,40	1,5 %	15,3 %	35,7 %	26,6 %

V tabulce je vidět, že výsledky obou badatelů jsou podobné. V obou případech byl zlatý obdélník (poměr délek stran přibližně 0,62) vybrán jako nejlíbivější a nikdo tento poměr neoznačil za nejméně líbivý. Nejvýrazněji se Lalo a Fechner liší výsledky u poměrů 1,00 a 0,40 (což jsou krajní hodnoty – čtverec a nejprotáhlejší obdélník) a u poměrů 0,67 a 0,57, které jsou blízké zlatému číslu.

9.2 Vlastní test a jeho výsledky

Fechnerovy pokusy experimentálně prokázat, že zlatý obdélník vyniká svou krásou nad ostatní obdélníky, mě inspirovaly k provedení vlastního testu. Sestavila jsem dotazník, ve kterém jsou čtyři skupiny obrazců, přičemž v každé skupině je jeden, jehož proporce souvisí se zlatým řezem (obr. 9.1, 9.2 na konci podkapitoly). Úkolem dotázaných bylo vybrat z každé skupiny dva obrazce. Jeden, který považují za nejhezčí, a druhý, který se jim líbí nejméně.

První skupinu obrazců tvoří 10 protáhlých obdélníků stejných rozměrů, rozdělených vždy na dvě části (černou a bílou), každý v jiném poměru. Poměry délek černé a bílé části u jednotlivých obrázků jsou:

a) $2,5 : 2,5 = 1,00$

b) $2,3 : 2,7 \doteq 1,17$

c) $2,1 : 2,9 \doteq 1,38$

d) $1,9 : 3,1 \doteq 1,63$

e) $1,7 : 3,3 \doteq 1,94$

f) $1,5 : 3,5 \doteq 2,33$

g) $1,3 : 3,7 \doteq 2,85$

h) $1,1 : 3,9 \doteq 3,55$

i) $0,9 : 4,1 \doteq 4,56$

j) $0,7 : 4,3 \doteq 6,14$

Nejblíže zlatému číslu je varianta d). Obrázky mají simulovat rozdělení úsečky v nějakém poměru, v případě d) jde přibližně o rozdělení zlatým řezem.

Druhou skupinou je deset různých obdélníků, které mají přibližně stejné obsahy, ale liší se poměry délek stran. Tyto poměry v jednotlivých případech jsou (výška ku šířce):

a) $4,2 : 1,5 = 2,80$

b) $2,7 : 2,3 \doteq 1,17$

c) $5,3 : 1,2 \doteq 4,42$

d) $3,4 : 1,8 \doteq 1,89$

e) $2,5 : 2,5 = 1,00$

f) $3,2 : 1,9 \doteq 1,68$

g) $6,2 : 1,0 = 6,20$

h) $4,7 : 1,3 \doteq 3,62$

i) $2,9 : 2,1 \doteq 1,38$

j) $3,8 : 1,6 \doteq 2,38$

Obdélník, jehož proporce jsou téměř proporcemi zlatého obdélníku, je pod písmenem f). V případě e) se jedná o čtverec.

Třetí skupinu tvoří šest dvojic soustředných kružnic. Poloměr vnější kružnice je ve všech případech stejný, poloměr vnitřní kružnice se postupně zmenšuje. Poměry poloměrů jsou:

a) $2,5 : 2,2 \doteq 1,14$

b) $2,5 : 1,9 \doteq 1,32$

c) $2,5 : 1,5 \doteq 1,67$

d) $2,5 : 1,2 \doteq 2,08$

e) $2,5 : 0,8 \doteq 3,13$

f) $2,5 : 0,5 = 5,00$

V případě c) je poměr poloměrů blízký zlatému číslu.

Konečně poslední skupinou je deset různých rovnoramenných trojúhelníků. Poměry délek ramene a základny těchto trojúhelníků jsou:

a) $5,1 : 1,5 = 3,40$

b) $4,1 : 2,5 = 1,64$

c) $4,6 : 2,0 = 2,30$

d) $5,7 : 1,0 = 5,70$

e) $3,3 : 3,3 = 1,00$

f) $4,4 : 2,3 \doteq 1,91$

g) $3,6 : 3,1 \doteq 1,16$

h) $5,5 : 1,2 \doteq 4,58$

i) $3,8 : 2,8 \doteq 1,36$

j) $4,9 : 1,8 \doteq 2,72$

Pod písmenem b) se skrývá (téměř) zlatý trojúhelník. V případě e) jde o rovnostranný trojúhelník.

Test vyplnilo celkem 137 osob, z toho 55 mužů a 82 žen, ve věkovém rozmezí 11–89 let (věk a pohlaví byly jediné osobní informace, na které jsem se ptala, jinak byl test zcela anonymní). Poměrně velká část dotázaných projevila při vyplňování nejistotu, někteří se mi svěřili, že obrazce vybírali zcela náhodně, protože se nemohli rozhodnout. Našlo se ale i dost osob, které přesvědčivě a bez váhání označili jak nejlíbivější, tak nejméně líbivý obrazec. Účastníky tohoto pokusu byli zejména (ale nejenom) studenti a učitelé pražského víceletého gymnázia.

V následujících čtyřech tabulkách jsou výsledky provedeného testu, tabulky jsou psány stejně jako Fechnerova tabulka, jen v prvním sloupci je vždy místo poměrů stran uvedeno písmeno, pod kterým byl patřičný obrazec v testu zařazen. Procenta vyjadřují množství kladných odpovědí (kolik osob označilo daný obrazec za nejlíbivější).

U první skupiny obrazců zabodovaly (pozitivně i negativně) dva případy – obdélník a) a j), čili nejmenší a největší poměr délek černé a bílé části. Tyto dvě krajní hodnoty evidentně zaujaly na první pohled. Variantu a) vybralo nejvíc osob jako nejhezčí obrazec, pravděpodobně díky souměrnosti. Z ostatních možností bylo vybíráno převážně náhodně, přesto u mužské populace obsadil (téměř) zlatý řez třetí místo v oblíbenosti. Naopak poměrně dost žen tuto variantu zavrhlo.

Černo–bílý obdélník	Kladné hlasy		Záporné hlasy		Procenta	
	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
a)	25	39	13	15	45,45	47,56
b)	5	7	2	7	9,09	8,54
c)	2	5	2	2	3,64	6,10
d)	6	5	2	8	10,91	6,10
e)	3	5	1	3	5,45	6,10
f)	2	4	3	1	3,64	4,88
g)	1	2	2	6	1,82	2,44
h)	3	5	2	9	5,45	6,10
i)	0	0	3	3	0,00	0,00
j)	8	10	25	28	14,55	12,20
Celkem	55	82	55	82	100,0	100,0

Ani ve druhé skupině obrazců není postavení zlatého obdélníku optimální. Opět nejvíce zaujaly obě krajní hodnoty – čtverec a nejprotáhlejší obdélník. Na třetím místě v oblíbenosti je obdélník, který se svými rozměry čtverci blíží. Většina ostatních hlasů vypadá na náhodnou volbu.

Obdélník	Kladné hlasy		Záporné hlasy		Procenta	
	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
a)	3	1	4	1	5,45	1,22
b)	7	11	6	13	12,73	13,41
c)	4	3	5	6	7,27	3,66
d)	2	6	2	5	3,64	7,32
e)	18	29	10	8	32,73	35,37
f)	4	7	2	5	7,27	8,54
g)	9	12	20	30	16,36	14,63
h)	2	2	2	4	3,64	2,44
i)	3	10	4	6	5,45	12,20
j)	3	1	0	4	5,45	1,22
Celkem	55	82	55	82	100,0	100,0

V případě soustředných kružnic mohu konečně prohlásit, že zlatý řez uspěl. Varianta c) získala celkově největší počet kladných hlasů a nejméně osob tuto možnost označilo za „nehezkou“. Na druhou stranu nelze říct, že by ostatní obrazce z této skupiny nijak nezaujaly. Nejparadoxnější je situace prvního obrázku, který nejvíc osob vybralo jako nejméně líbivý, přesto je celkově druhým nejlíbivějším v této skupině.

Soustředné	Kladné hlasy		Záporné hlasy		Procenta	
kružnice	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
a)	11	16	20	40	20,00	19,51
b)	9	5	3	7	16,36	6,10
c)	9	22	2	2	16,36	26,83
d)	7	19	2	8	12,73	23,17
e)	11	10	7	10	20,00	12,20
f)	8	10	21	15	14,55	12,20
Celkem	55	82	55	82	100,0	100,0

V poslední skupině rozhodně trojúhelník nejbližší zlatému nepatří mezi outsidery, přesto ho nelze zdaleka označit za nejlíbivější. Za nejhezčí trojúhelníky byly vybrány ty pod písmeny e) (mimochodem opět zvítězila symetrie – tento trojúhelník je rovnostranný), g) a d). Přitom trojúhelník d) byl současně největším počtem osob označen jako nejméně líbivý.

	Kladné hlasy		Záporné hlasy		Procenta	
Trojúhelník	muži	ženy	muži	ženy	muži	ženy
a)	2	1	2	3	3,64	1,22
b)	9	5	2	3	16,36	6,10
c)	1	4	0	1	1,82	4,88
d)	13	12	26	42	23,64	14,63
e)	11	21	8	9	20,00	25,61
f)	2	7	0	3	3,64	8,54
g)	10	22	4	4	18,18	26,83
h)	1	3	10	12	1,82	3,66
i)	6	5	1	3	10,91	6,10
j)	0	2	2	2	0,00	2,44
Celkem	55	82	55	82	100,0	100,0

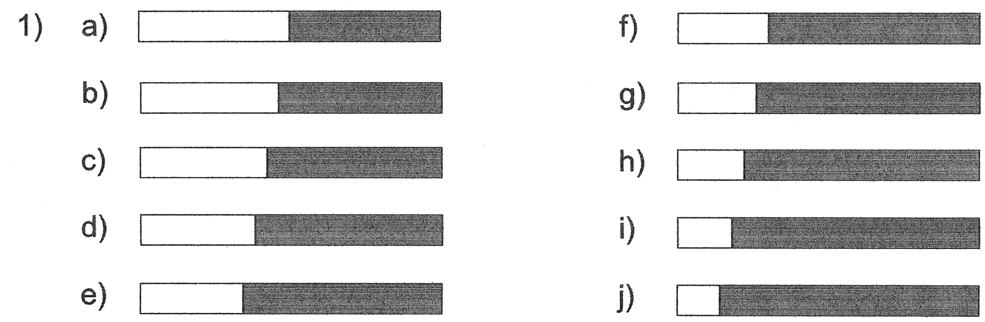
Na základě výsledků nelze prohlásit, že je zlatý poměr nějak výrazně preferován. Vybírány byly většinou útvary symetrické (poměr délek 1) nebo naopak ty, kde byl sledovaný poměr délek největší. Zlatý řez nebo poměry blízké vybírali častěji lidé starší třiceti let, ti však tvořili menšinu všech dotázaných.

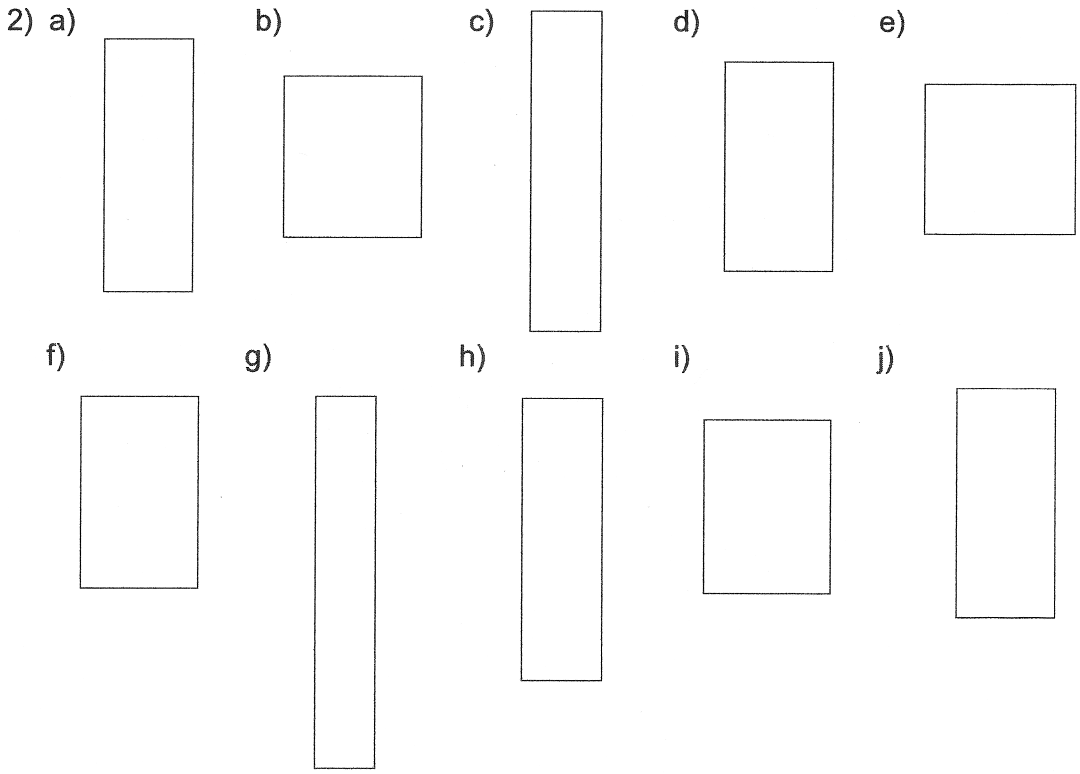
Experimentální estetika

Věk: ....

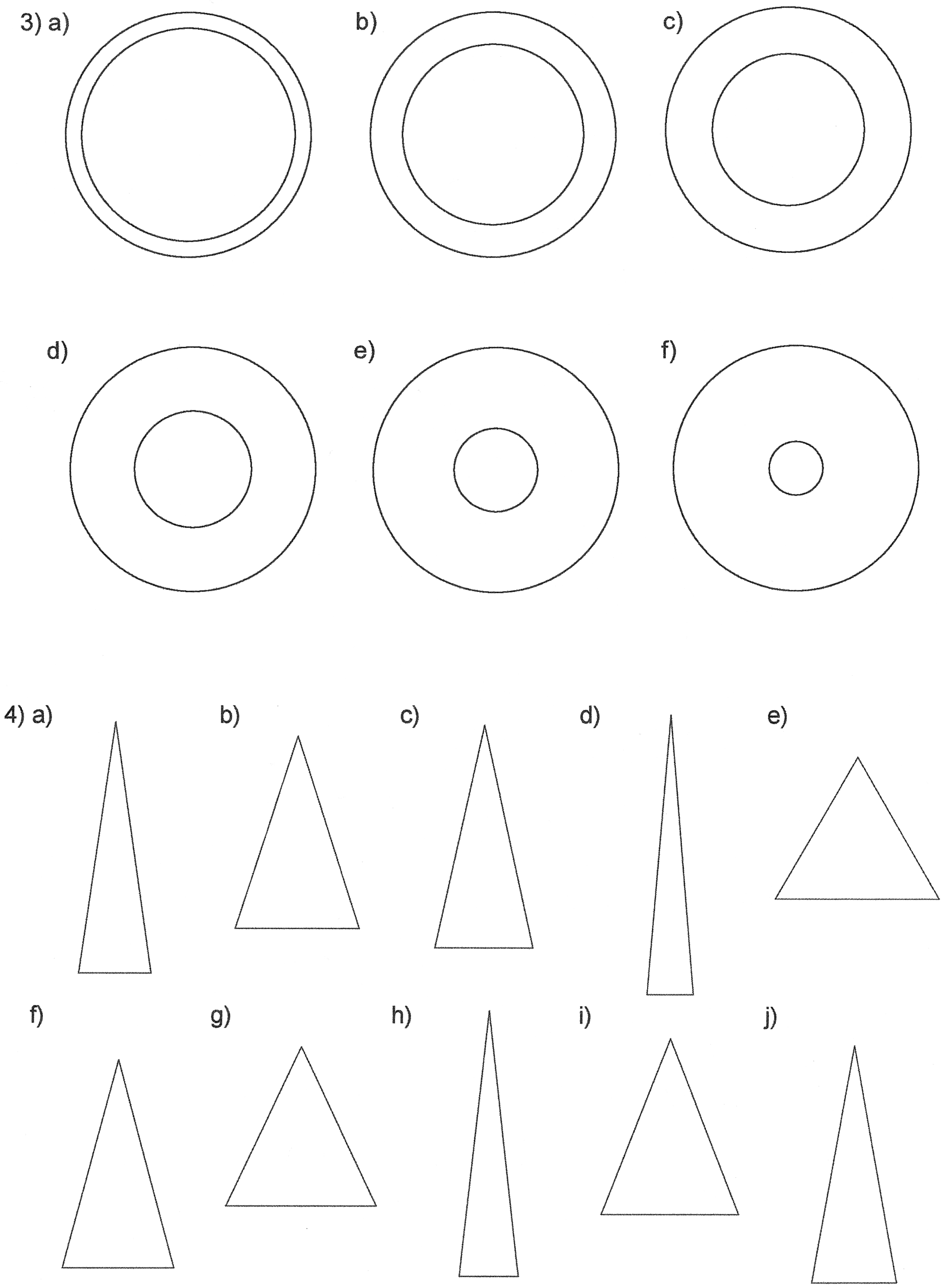
Pohlaví: žena muž

V každé skupině obrazců zakroužkujte ten, který se vám nejvíce líbí, a přeškrt- něte ten, který se vám líbí nejméně.





Obrázek 9.1: Dotazník – strana1



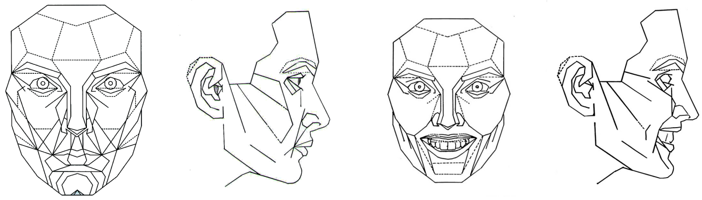
Obrázek 9.2: Dotazník – strana2

Kapitola 10

Užití zlatého řezu v 21. století

Existuje mnoho oblastí, kde zlatý řez nalézá uplatnění. Jednou z nich je plastická chirurgie. Ideálním vzhledem lidské tváře se zabývá Američan Dr. Stephen R. Marquardt. Tento plastický chirurg působil 27 let v oblasti ústní a maxilofaciální[1] chirurgie. Nyní vede výzkum lidské atraktivity v Orange Couty v Kalifornii. Jeho výzkum vzhledu lidské tváře je uznáván profesionály celého světa a bývá také často publikován mnoha médii.

Marquardt spolu se svými spolupracovníky vytvořil velkou databázi atraktivních obličejů. Na jejich základě potom za pomoci počítače sestavil „masku“ určující ideální tvar lidského obličeje. Tato maska je založena na proporcích zlatého řezu, který považuje za „klíč ke kráse“. Masky jsou ve skutečnosti čtyři, klidná tvář zepředu a z profilu a usmívající se tvář zepředu a z profilu (obr. 10.1). Navíc se jejich rozměry a základní rysy odlišují podle tří kritérií – věk, pohlaví a etnická skupina. Čím více lidská tvář zapadá do masky, tím je krásnější.



Obrázek 10.1: Masky představující ideální kontury obličeje

Tuto masku lze aplikovat v kosmetice (pomocí make-upu lze docílit přiblížení rysů obličeje k ideálním tvarům) nebo v plastické chirurgii obličeje a zubů[2].

Poměry blízké zlatému číslu se objevují také v typografii. Tento obor se v posledních letech rychle rozvíjí díky rozmachu a zvyšující se dostupnosti počítačů. Zatímco

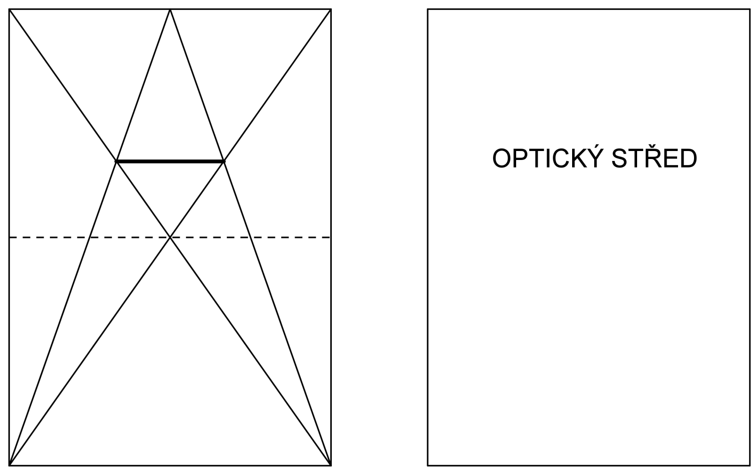
[1]Maxilofaciální chirurgie je chirurgie zabývající se plastikou zubů.

[2]Čerpáno z `http://www.beautyanalysis.com`.

dříve potřebovali typografii pouze profesionální sazeči, dnes tvoří tištěné texty už malí školáci. Pravidla, jak mají být tyto texty správně upraveny, popisuje právě typografie.

Některé knihy a akcidenční tiskoviny[3] bývají tištěny na papír, jehož strany jsou v poměru takzvaného „dvojitého zlatého řezu“, to znamená přibližně v poměru $2 : 1,618$. U nás se nejčastěji používají formáty A a B. Například formát A4 má rozměry 210×297 mm, formát B5 176×250 mm. Poměr délek stran u formátů řady A je přibližně $\sqrt{2}$ (asi 1,41), u formátů řady B je poměr délek stran asi 1,42. V jiných zemích se však můžeme setkat běžně s odlišnými formáty papíru. Například v Severní Americe se užívá mimo jiné formát Legal (216×356 mm). U tohoto formátu se poměr délek stran (asi 1,65) velmi blíží zlatému číslu.

V literatuře o typografii se často dočteme o takzvaném „optickém středu stránky“. Jedná se o místo na stránce, na které je soustředěna největší pozornost. Nalézá se v horní třetině stránky, tedy výš, než je geometrický střed stránky (obr. 10.2). Poměr, ve kterém optický střed dělí výšku stránky, se udává většinou $\frac{5}{3}$ nebo $\frac{8}{5}$, což jsou opět přibližné hodnoty zlatého čísla (jedná se o podíly sousedních členů Fibonacciho posloupnosti).



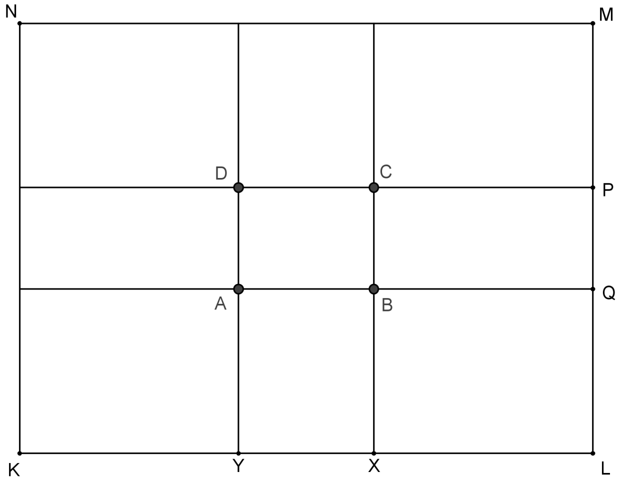
Obrázek 10.2: Optický střed stránky

Obdobný význam jako v typografii má zlatý řez ve fotografii. Chcete-li, aby vaše fotografie působila zajímavěji, snažte se umístit fotografovaný objekt přibližně do jednoho ze čtyř zlatých bodů. Zlaté body v obdélníku $KLMN$ sestrojíme takto (obr. 10.3):

> Úsečku KL rozdělíme bodem X a bodem Y ve zlatém řezu tak, že $|KX| > |LX|$ a $|LY| > |KY|$. Obdobně úsečku LM rozdělíme bodem P a bodem Q ve zlatém řezu tak, že $|LP| > |MP|$ a $|MQ| > |LQ|$. Body

[3] Akcidenčními tiskovinami jsou například pozvánky, vizitky svatební oznámení aj.

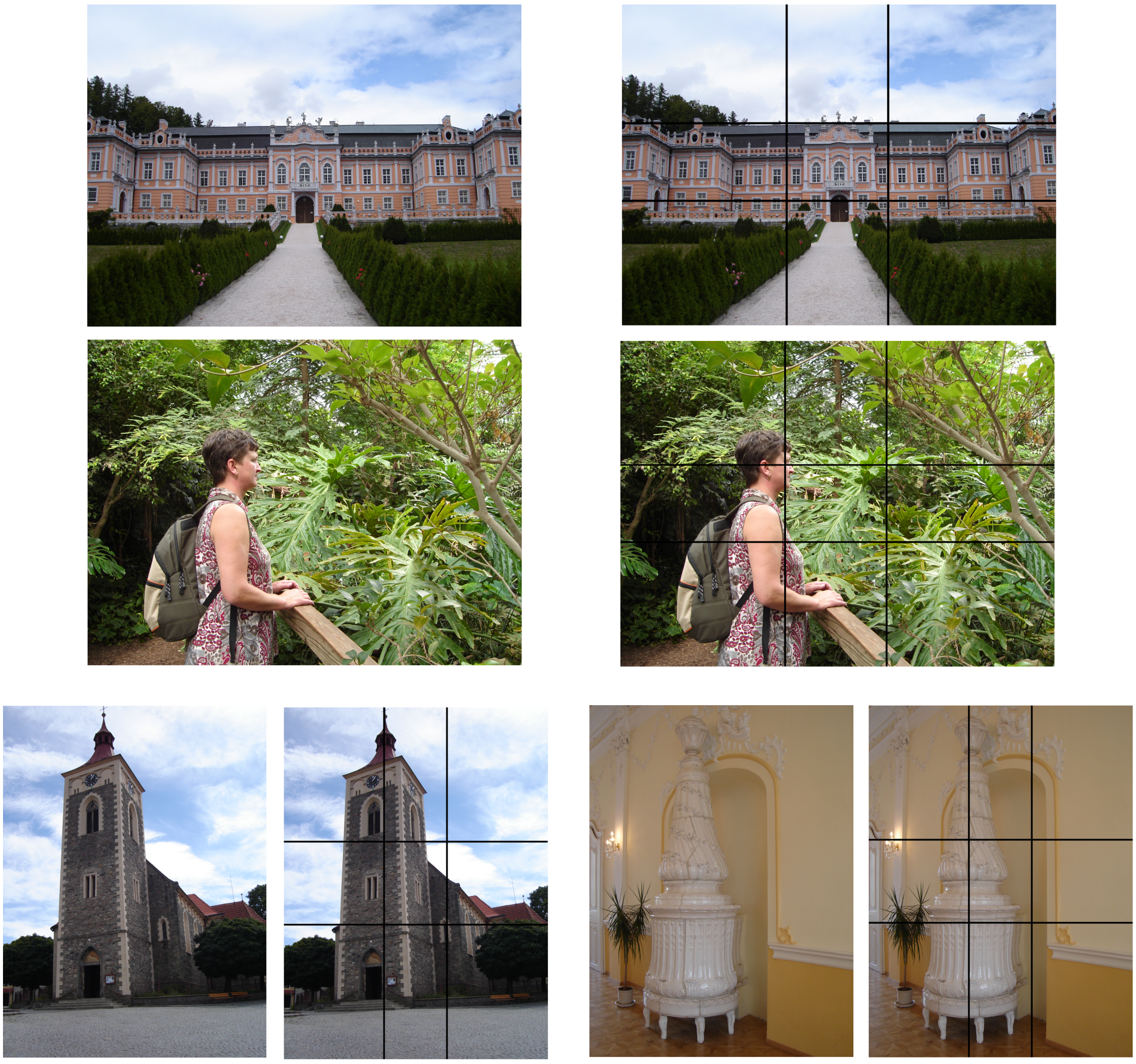
X, Y, P, Q vedeme rovnoběžky se stranami KL, MN. Tyto rovnoběžky se po dvou protínají v bodech A, B, C, D. Body A, B, C, D jsou zlaté body obdélníku $KLMN$.



Obrázek 10.3: Zlaté body v obdélníku

Podle zlatých bodů lze umístit například i horizont. Samozřejmě v praxi vzdálenosti pouze odhadujeme, co se nepovede odhadem, můžeme u digitální fotografie doladit pomocí počítače. Na obrázku 10.4 je vidět rozdíl mezi standardním umístěním fotografovaného objektu na střed a umístěním přibližně do jednoho ze zlatých bodů. Na obrázku 10.5 je různé využití sítě zlatých bodů.

Obrázek 10.4: Zleva: Umístění motivu na střed, umístění motivu do zlatého bodu



Obrázek 10.5: Napravo od původní fotografie je vždy tatáž fotografie s přikreslenou sítí přibližně podle zlatého řezu, významné objekty na fotografiích korespondují s některou přikreslenou úsečkou nebo zlatým bodem

Závěr

Tato diplomová práce téma zlatý řez zdaleka nevyčerpala. Zlaté číslo se objevuje v mnoha dalších odvětvích. Například konstanty φ^{-1} a $(1 - \varphi^{-1})$ vycházejí jako ideální hodnoty parametru jedné z hešovacích funkcí[4] [38]. V knize [19] je uvedena následující úloha:

> *Představme si číselnou osu nakreslenou v rovině, na níž jsou celá čísla vyznačena kroužky. Po těchto kroužcích se bude pohybovat figurka podle následujících pravidel:*
>
> - *Na začátku (před prvním tahem) stojí figurka v čísle 1.*
> - *V každém tahu se pohne z čísla, kde právě stojí, buď o 2 čísla doprava nebo o 1 číslo doleva. Jedna z těchto možností se vždy zvolí náhodně, a obě možnosti mají stejnou pravděpodobnost.*
>
> *Jaká je pravděpodobnost, že figurka vůbec někdy dospěje do čísla 0?*

Snad již nikoho nepřekvapí, že výsledek opět souvisí se zlatým číslem, pravděpodobnost vychází φ^{-1}.

V roce 1984 izraelský inženýr Dany Schectman objevil, že krystaly hliníko–manganové slitiny vykazují velkoplošné uspořádání s pětinásobnou symetrií. Tyto nové druhy krystalů nalezené později i u jiných hliníkových slitin dnes nazýváme kvazikrystaly. Jejich uspořádání má vlastnosti Penroseových dláždění, která se opět skládají z geometrických tvarů založených na poměrech zlatého řezu. A takto bychom mohli pokračovat.

Zlatý řez je zejména v zahraničí poměrně podrobně zpracován, přesto se stále objevuje na místech, kde by jej nikdo nečekal. Poměry jemu blízké jsou všude okolo nás, je tedy přirozenou součástí našeho života, aniž bychom si to uvědomovali.

Johannes Kepler o zlatém řezu pronesl následující slova:

> *Geometrie má dva velké poklady; jedním je věta Pythagorova; druhým rozdělení úsečky v krajním a středním poměru. První lze přirovnat k žíle zlata; druhý lze označit za drahokam.*

[4]Hešování je způsob uložení dat velkého rozsahu s malými paměťovými nároky, využívá se například v databázích. Data jsou ukládána pomocí tzv. hešovací funkce.

Použité značení

$\boxtimes$	konec důkazu
L	levá strana rovnice
P	pravá strana rovnice
$\leftrightarrow$	přímka
$\mapsto AB$	polopřímka AB
$\hookrightarrow AB$	polopřímka opačná k polopřímce AB
$\perp$	kolmost, kolmice
$\in$	náleží, je prvkem
$\vert AB\vert$	délka (velikost) úsečky AB
$S \in \frac{1}{2}\vert AB\vert$	bod S je středem úsečky AB
$k(S, r)$	kružnice k se středem S a poloměrem r
$\cap$	průnik, průsečík
$\triangle$	trojúhelník
$\sphericalangle$	úhel
S_{ABC}	obsah trojúhelníku ABC
$\widehat{AB}$	oblouk AB

V kapitole 6 se díky citacím ze starších učebnic vyskytuje specifické značení.

Literatura

[1] Bečvář J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě.* Edice Dějiny matematiky, svazek 19., Prometheus, Praha, 2001.

[2] Bečvářová M.: *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady.* Edice Dějiny matematiky, svazek 20., Prometheus, Praha, 2002.

[3] Bečvářová M.: *Josef Smolík.* Nakladatelství ČVUT, Praha, 2007.

[4] Beutelspacher A., Petri B.: *Der Goldene Schnitt.* Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, Oxford, 1996.

[5] Dvořák J.: *Maturitní otázky z matematiky, díl II.* Lexikografie, Praha, 1934.

[6] Fabián J.: *Pětiúhelník.* Nakladatelství Radimír Vyčítal – LUPUS Trutnov, 2005.

[7] Fechner G. T.: *Vorschule der Ästhetik.* Breitkopf und Härtel, Leipzig, 1876. `http://gutenberg.spiegel.de/?id=12\&xid=3747\&kapitel=1\&cHash=57cd47bf8e2`

[8] Herz-Fischler R.: *A Mathematical History of the Golden Number.* Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1998.

[9] Havelka J.: *Geometrie pro ústavy učitelské, díl I. (pro I.–II. ročník).* Československá grafická unie a. s., Praha, 1922.

[10] Havelka J.: *Geometrie pro ústavy učitelské, díl II. (pro III.–IV. ročník).* Československá grafická unie a. s., Praha, 1923.

[11] Holubář J., Vojtěch J.: *Geometrie pro V. třídu středních škol.* JČMF, Praha, 1947.

[12] Hrubý D.: *Postavení matematiky na gymnáziích.* V *O škole a vzdělávání.* Sborník z konference Matematika – základ evropské vzdělanosti, Matfyzpress, Praha, 2007.

[13] Chmelíková V.: *Zlatý řez.* Bakalářská práce, MFF-UK, Katedra didaktiky matematiky, Praha, 2006.

http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/chmelikovabp/Zlaty_rez.pdf

[14] Chmelíková V., Moravec L.: *Pravidelné mnohostěny.* Seminární práce, MFF-UK, Katedra didaktiky matematiky, Praha, 2007. http://www.karlin.mff.cuni.cz/~robova/Pravidelne_mnohosteny/Pravidelne_mnohosteny_text.pdf

[15] Jára V.: *Zlatý řez ve starověké matematice.* Diplomová práce, MFF-UK, Katedra didaktiky matematiky, Praha, 2006.

[16] Livio M.: *Zlatý řez.* Nakladatelství Dokořán a nakladatelství Argo, Praha, 2006.

[17] Maška O.: *Matematika v úlohách, III. díl.* Dědictví Havlíčkovo, Brno, 1930.

[18] Maška O.: *Přehled matematiky II. díl.* Edice Školní příručky Dědictví Havlíčkova, Barvič & Novotný, Brno, 1936.

[19] Matoušek J., Nešetřil J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky.* Karolinum, Praha, 2002.

[20] Meili R., Rohracher H.: *Učebnice experimentální psychologie.* (Z německého originálu *Lehrbuch der experimentellen Psychologie* přeložil V. Chmelař a kol.) Státní pedagogické nakladatelství Praha, 1969.

[21] Otoupalík A.: *Deset knih o architektuře.* (Přeloženo z originálu Vitruvius M. P.: *De architectura libri decem*, vydal F. Krohn v Lipsku, 1912.) Nakladatelství Arista a nakladatelaství Baset, Praha, 2001.

[22] Polák J.: *Přehled středoškolské matematiky.* Prometheus, Praha, 2005.

[23] Pomykalová E.: *Matematika pro gymnázia. Planimetrie.* Prometheus, Praha, 2001.

[24] Pomykalová E.: *Matematika pro gymnázia. Stereometrie.* Prometheus, Praha, 1995.

[25] Rektorys K. a kol.: *Přehled užité matematiky.* SNTL, Praha, 1981.

[26] Rybička J.: *LaTeXpro začátečníky.* Konvoj, Brno, 2003.

[27] Řezáč D.: *Le Corbusier – Modulor.* Seminární práce, FA ČVUT, Praha, 2007. http://www.archiweb.cz/news.php?action=show&type=17&id=4108

[28] Servít F.: *Eukleidovy Základy (Elementa).* JČM, Praha, 1907.

[29] Soldát H.: *Algebra pro vyšší třídy SŠ českých.* JČM, 1901.

[30] Strnad A.: *Geometrie pro vyšší školy reálné, díl II.* Nakladatel F. Kytka, knihkupec, Praha, 1903.

[31] Strnad A., Rašín K.: *Geometrie pro vyšší reálky, díl II. Pro V. třídu.* Praha, 1912.

[32] Struhár A.: *Geometrická harmónia historickej architektúry na Slovensku.* Pallas, Bratislava, 1977.

[33] Štefl V.: *Klaudios Ptolemaios, tvůrce geocentrické soustavy.* Edice Velké postavy vědeckého nebe, svazek 15, Prometheus, Praha, 2005.

[34] Vincent R.: *Geometry of the golden section.* (Z francouzského originálu *Géométrie du nombre d'or* přeložil A. Mequin.) Chalagam Publishing, Marseille, 2007.

[35] Vinš J.: *Geometrie pro 6. třídu reálek.* Praha, 1938.

[36] Vojtěch J.: *Geometrie pro IV. a V. třídu SŠ.* JČMF, Praha, 1924.

[37] Walser H.: *The Golden Section.* (Z německého originálu *Der Goldene Schnitt* přeložil B. G. Teubner.) The Mathematical Association of America, USA, 2001.

[38] Wróblewski P.: *Algoritmy, datové struktury a programovací techniky.* (Z polského originálu *Algorytmy, strukturytechniki programowania* přeložili M. Michalek a B. Kiszka.) Computer Press, Brno, 2004.

Převzaté obrázky:

- Z internetu: (4.2), (4.15), (5.13), (7.7), (7.9), (7.10 a), (7.12), (7.13), (7.19), (8.1), (8.2), (8.3), (8.6), (8.7), (8.9), (10.1)
- Z knihy [37]: (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.16)
- Z knihy [16]: (5.14), (7.5), (7.6), (7.10 b), (8.4), (8.5), (8.6), (8.7), (8.10)
- Z knihy [4]: (7.11), (8.11)
- Z knihy [32]: (7.19)
- Další zdroje: (5.15), (5.16), (7.1), (7.2), (7.3), (7.4)