Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Petr Sotona

Rizikové přirážky v testu postačitelnosti rezerv životního pojištění

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Tomáš Senft
Studijní program: Matematika, Finanční a pojistná matematika

2009

Děkuji vedoucímu své diplomové práce za odborné vedení a obětavou pomoc při tvorbě této diplomové práce a své rodině za podporu při studiu.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 17. 4. 2009 Petr Sotona

Obsah

Název práce: Rizikové přirážky v testu postačitelnosti rezerv životního pojištění
Autor: Petr Sotona
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Tomáš Senft
e-mail vedoucího: tsenft@koop.cz

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme rizikovými přirážkami v testu postačitelnosti rezerv životního pojištění. Nejprve se seznámíme s teorií rizikových přirážek a testu postačitelnosti rezerv. Pojednáme o žádoucích vlastnostech rizikových přirážek a metod používaných k jejich ocenění. Rovněž ukážeme rizikové přirážky z různých pohledů a rovin. Ve druhé části práce zavedeme model produktu smíšeného pojištění a popíšeme peněžní toky spojené s pojistnými smlouvami. Kromě toho sestavíme generační úmrtnostní tabulky pro použití v zavedeném modelu. Poté oceníme rizikovou přirážku na riziko úmrtnosti za použití stochastického modelování. Nakonec porovnáme vypočtenou rizikovou přirážku s hodnotou přirážky vypočtenou podle současného doporučeného přístupu k výpočtu LAT v České republice a analyzujeme výsledky.

Klíčová slova: Riziková přirážka, Riziko úmrtnosti, Test postačitelnosti rezerv životního pojištění

Title: Risk Margins in the Liability Adequacy Test for Life Insurance
Author: Petr Sotona
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Tomáš Senft
Supervisor's e-mail address: tsenft@koop.cz

Abstract: In the present thesis we study risk margins in the liability adequacy test for life insurance. First we look at the theory of risk margins and liability adequacy test. We discuss desirable characteristics of the risk margins and the methods used to their evaluation. We show risk margins from different aspects and views as well. In second part of the thesis we introduce the model of product for endowment and we describe contractual cash flows. We also construct generation mortality tables for use in described model. Afterwards we evaluate risk margin for mortality risk using stochastic modelling. Finally we compare calculated risk margin with value of the margin calculated by current approach recommended to calculation of LAT in the Czech Republic and analyse results.

Keywords: Risk margin, Mortality risk, Liability adequacy test for life insurance

Úvod

V této práci se budu zabývat testem postačitelnosti rezerv v životním pojištění a zejména se zaměřím na stanovení a analýzu rizikových přirážek v souvislosti s tímto testem. Stanovení přirážek za riziko je obecně jedním z nedůležitějších témat v pojišťovnictví a vyvolává mnoho diskusí. Odhad přirážek samozřejmě není záležitostí jen testu postačitelnosti rezerv životního pojištění, ale je potřeba napříč celým životním i neživotním pojištěním při odhadu hodnoty pojistných závazků.

Přirážky za riziko tedy zasahují do všech částí pojištění a jejich pochopení je nezbytné pro práci pojistného matematika. Problematika rizikových přirážek má mnoho oblastí, které je možné zkoumat. Začíná to u stanovení jednotlivých druhů přirážek dle rizik, pokračuje přes způsoby vnímání a interpretaci přirážek a končí metodami jejich odhadu a výpočtu.

V první části práce se budu nejprve věnovat testu postačitelnosti rezerv v rámci mezinárodních standardů a v rámci České republiky. Poté přiblížím oblast přirážek z teoretické stránky. Zmíním různé pohledy na přirážky z jednotlivých aspektů a rovin. Vyjmenuji různé typy rizikových přirážek a nakonec popíši některé metody vedoucí ke stanovení jejich výše.

V další části sestrojím a popíši model pojistného produktu, který následně použiji ke stanovení rizikových přirážek.

Poslední část diplomové práce věnuji prozkoumání praktického rámce týkajícího se stanovení přirážek v testu postačitelnosti rezerv životního pojištění. Jelikož existuje mnoho typů přirážek dle jejich účelu, zaměřím se na konkrétní typ rizika, a to riziko úmrtnosti. Následně provedu analýzu této přirážky.

Součástí mé analýzy přirážek bude jednak spočtení minimální hodnoty závazků v deterministickém modelu s použitím přirážek na nepříznivý vývoj doporučených ve směrnici [**7**] a také použití stochastického modelu a následné porovnání výsledků.

K vytvoření potřebného modelu použiji specializovaný software Prophet, který v mnoha pojišťovnách po celém světě slouží k modelování budoucích peněžních toků a dalším pojistně-matematickým výpočtům.

Využití systému Prophet, stejně jako poskytnutí ekonomických scénářů a dalších potřebných výpočetních podkladů, mi umožnila Kooperativa pojišťovna, a.s., Vienna Insurance Group. V rámci zachování obchodního tajemství byly veškeré použité údaje vhodně upraveny. Za použití všech materiálů tímto děkuji.

KAPITOLA 1

Test postačitelnosti rezerv

1.1. LAT z pohledu mezinárodních standardů

Hned na začátku bych rád zmínil anglický ekvivalent testu postačitelnosti rezerv Liability Adequacy Test. Jak již napovídá nadpis podkapitoly, budu v této práci zkratku tohoto anglického názvu LAT používat.

Mezinárodní standard finančního vykazování IFRS 4 [**13**] týkající se pojišťoven říká, že pojistitel by měl ke každému dni závěrky odhadnout, zda jsou jím vytvořené pojistné rezervy dostatečné ve smyslu pokrytí odhadu budoucích peněžních toků. IFRS 4 stanovuje dva minimální požadavky na test postačitelnosti.

- Prvním požadavkem je použití současných odhadů[1] (current estimates) všech peněžních toků souvisejících s pojistnými kontrakty, jakožto i toků plynoucích z implicitních opcí a garancí.
- Druhý požadavek říká, že pokud se prokáže nepostačitelnost rezerv, má být celý nedostatek vykázán v zisku nebo ztrátě.

Test by se měl provádět na určité hladině seskupení, které je popsáno v testu. Jde o rozdělení portfolia do skupin produktů podle určitých znaků.

Jestliže pojistitelovy pojistné smlouvy nevyžadují LAT splňující předchozí požadavky, pak by pojistitel měl učinit dva kroky.

- Jednak určit množství příslušných[2] pojistných rezerv bez příslušných časově rozlišitelných nákladů (deferred acquisition costs, DAC) a příslušných nehmotných aktiv. Nicméně se neuvažují zajistná aktiva, jelikož je pojistitel zohledňuje zvlášť.
- Ve druhém kroku by měl pojistitel určit, zda množství vypočtené v prvním kroku je menší než celkový obnos jaký by byl požadován, kdyby příslušné pojistné rezervy spadaly do rámce standardu IAS 37.

V tomto případě má být porovnání provedeno zvlášť pro skupiny smluv, které jsou vystavené podobným rizikům a řízené jako jednotlivá portfolia. Jestliže výsledek prokáže, že množství stanovené v prvním kroku je menší, měl by pojistitel celý rozdíl vykázat v zisku, resp. ztrátě a snížit množství příslušných DAC, nebo nehmotných aktiv, nebo zvýšit množství příslušných pojistných rezerv.

1.2. LAT v České republice

Výpočet testu postačitelnosti rezerv v České republice se zpravidla řídí odbornou směrnicí č. 3 České společnosti aktuárů (ČSpA) [**7**], která dává doporučení týkající se výpočtu LAT. Předlohou pro ni byl standard Jihoafrické republiky

[1]To odpovídá pojmu „nejlepší odhady“ používanému v České republice.

[2]Význam slova "příslušných" znamená ty rezervy, resp. DAC, resp. nehmotná aktiva, které nevyžadují LAT splňující minimální požadavky stanovené IFRS 4.

PGN104 [**1**] popisující oceňování dlouhodobých pojistných aktiv, závazků a požadavků na kapitálovou přiměřenost. Jedním z důvodů vydání této směrnice byl i fakt poklesu tržních úrokových měr, což mělo ve většině případů za následek nepostačitelnost rezervy pojistného počítané podle původních statistických podkladů. Vznikala tak potřeba navýšení technických rezerv tak, aby pojišťovna mohla dostát svým závazkům vyplývajícím z pojistných smluv.

Směrnice popisuje obecné zásady, které má test splňovat. Jednou z nich je výpočet rezervy pojistného životních pojištění, za použití stejných statistických podkladů a úrokové míry, jako při stanovení sazeb pojistného. Materiál definuje pojem **rezerva životních pojištění**. Jde o součet rezervy pojistného životních pojištění, rezervy na nezasloužené pojistné, rezervy na životní pojištění, je-li nositelem investičního rizika pojistník, rezervy na pojistná plnění z pojistných událostí v běžném účetním období vzniklých, nahlášených, ale v tomto období nezlikvidovaných (RBNS) a rezervy na prémie a slevy. LAT pak spočívá v porovnání minimální hodnoty pojistných závazků a rezervy životních pojištění snížené o příslušné časově rozlišitelné náklady a příslušná nehmotná aktiva zaúčtovaná při obchodní kombinaci, nebo transferu portfolia.

Jestliže je minimální hodnota pojistných závazků vyšší, nastává nepostačitelnost rezerv a odpovědný pojistný matematik doporučí společnosti podat žádost o souhlas s tvorbou rezervy na vývoj početních podkladů ve výši rovnající se nepostačitelnosti rezerv. Pokud test prokáže postačitelnost rezerv, zůstane rezerva na vývoj početních podkladů nulová a zároveň nedochází ke změně rezervy pojistného životních pojištění. Test se má podle směrnice provádět vždy k datu účetní závěrky a případně v dalších termínech podle potřeb pojišťovny. Součástí obecných zásad je i obecný požadavek na zprávu odpovědného pojistného matematika ohledně provedeného testu.

Třetí část směrnice popisuje konkrétněji metodiku LAT. V testu se počítají diskontované hodnoty finančních toků vyplývajících z pojistných smluv, přičemž finanční toky jsou diskontovány bezrizikovou úrokovou mírou (risk free interest rate, RFR) platnou ke dni ohodnocení. Do výpočtu nevstupují výnosy z aktiv a změna stavu rezerv. Pojistný kmen se rozdělí na skupiny a pro každou skupinu se zjišťuje postačitelnost samostatně. Při výpočtu minimální hodnoty pojistných závazků se ve výpočtu pojistného plnění zahrnou již připsané i očekávané budoucí podíly na zisku, dále se zohlední cena opcí a garancí vložených do pojistných smluv. Při kalkulaci správních nákladů se zohlední navyšování nákladů vlivem nákladové inflace. Ke stanovení minimální hodnoty pojistných závazků se použijí nejlepší odhady předpokladů upravené o přirážky na nepříznivý vývoj.

Předpoklady jsou ekonomické a specifické, neboli pojistné. Příkladem ekonomického předpokladu je bezriziková úroková míra, naopak příkladem pojistného předpokladu jsou pravděpodobnosti storna. Použití ekonomických předpokladů má být konzistentní s tržním oceněním, pokud je k dispozici. Použité pojistné předpoklady mají být určeny ze zkušenosti pojišťovny včetně úpravy podle očekávané budoucí změny. Tyto podklady se mohou lišit pro jednotlivé skupiny pojistného kmene. V případě nedostatku dat může pojišťovna použít převzaté a dostatečně konzervativní předpoklady.

Pro moji práci je nejdůležitější část směrnice zabývající se přirážkami na nepříznivý vývoj. Praktická aplikace přirážek v testu znamená posun vstupních parametrů takovým směrem, že se zvýší minimální hodnota pojistných závazků.

Význam těchto přirážek je vyjádření tržního ocenění rizika spojeného s budoucím vývojem, kdy pojišťovna během trvání pojistných smluv garantuje pojistníkům dodržení podmínek pojistných smluv. Doporučené minimální přirážky předepsané směrnicí ukazuje následující tabulka.

Riziko	**Minimální přirážka jako % základního předpokladu**
Úmrtnost	10 %
Invalidizace, nemocnost	10 %
Rušení pojistných smluv bez výplaty odbytného	25 %
Rušení pojistných smluv s výplatou odbytného	10 %
Náklady	10 %
Nákladová inflace	10 %
Úrokový výnos[3]	Snížení o 0,25 procentního bodu

Ještě poznamenám, že hodnoty přirážek jsou jen doporučené a je možné je upravit v závislosti na vlastnostech pojistného produktu. Například přirážka k RFR může být nižší, jestliže pojistný produkt neobsahuje žádné implicitní deriváty. Pokud jsou naopak implicitní opce a garance plně oceněny použitím kompletního stochastického modelu, není nutné aplikovat na bezrizikovou úrokovou míru přirážku úplně.

Obecným záměrem je lepší zachycení rizikových přirážek nahrazením deterministických výpočtů s pevně nastavenými přirážkami stochastickými modely zohledňujícími možné scénáře a modelujícími vložené opce a garance.

[3]Použije se pro diskontování peněžních toků a pro projekci budoucích plnění, zejména podílů na zisku.

KAPITOLA 2

Teorie a rizikové přirážky

2.1. Obecný rámec a typy rizik

Rizikové i ostatní přirážky patří k nejdiskutovanějším tématům v pojišťovnictví. Existuje souhrný princip definující, co by riziková přirážka měla splňovat. Dle tohoto principu by přirážka měla být jednoznačný (explicitní) a nestranný odhad hodnoty, kterou by účastníci trhu požadovali za převzetí rizika. Zmínil bych z definice důležitost slova "explicitní", jelikož to zdůrazňuje i IASB[1] ve svém diskusním materiálu [**13**]. Je tedy vidět snaha IASB o přechod od používání implicitních přirážek, jako například určité pevně zvolené procento z hodnoty, k explicitně stanoveným přirážkám.

Dle zmíněného materiálu IASB, vydaného pod názvem *Předběžný pohled na pojistné smlouvy*, jsou přirážky jedním ze tří stavebních kamenů při měření pojistných závazků. Celkový koncept vypadá takto:

(1) **Odhad peněžních toků:** jednoznačný, nestranný, tržně konzistentní, pravděpodobnostně vážený a nejlepší současný odhad budoucích smluvních peněžních toků.
(2) **Časová hodnota peněz:** současné tržní diskontní míry, které upravují odhadnuté budoucí peněžní toky o časovou hodnotu peněz.
(3) **Stanovení přirážek:** jednoznačný a nestranný odhad přirážky, kterou účastníci trhu požadují za převzetí rizika (riziková přirážka) a případně za poskytování dalších služeb (servisní přirážka).

Stručný název pro tento koncept je **současná výstupní hodnota** (current exit value). Ta je definována jako množství, jaké by pojistitel k datu závěrky očekával, že zaplatí jiné entitě za okamžitý přesun jeho práv a obligací, plynoucích z pojistných smluv.

Zmínil jsem, že přirážka je cena za převzetí rizika. Rizik existuje celá řada, proto nyní vyjmenuji a krátce popíši druhy rizik, která působí na účastníky trhu.

Dělení rizik je možné z mnoha různých pohledů. Tím nejzákladnějším je dělení na:

(1) **Tržní rizika:** jde o rizika spojená se stavem trhu a tržním vývojem. Součástí je například riziko splatnostního, časového a objemového nesouladu aktiv a pasiv (riziko ALM), dále pak nejistota spojená s vývojem kursů, cen, nebo úrokových měr. Tržní rizika lze dále dělit na konkrétní rizika. Například riziko úrokové, akciové, měnové, riziko inflace, nemovitostní, kreditního spreadu, ALM.
(2) **Kreditní rizika:** někdy uváděna jako úvěrová rizika, obecně se jedná o rizika spojená s možností selhání protistrany. Patří sem riziko selhání dlužníka, resp. emitenta cenného papíru, nebo pokles jeho ratingu. Často

[1]International Accounting Standardisation Board

tedy nejistota spojená s úpadkem dlužníka, snížením ratingu, či rozšířením úvěrového spreadu. Konkrétněji lze úvěrová rizika dělit na riziko zajistitele, riziko obligací, hypoték, riziko koncentrace a další.

(3) **Operační rizika:** jde o chyby procesů, lidí, informačních technologií, nebo externí vlivy. Patří sem nejistota spojená s pracovními procesy, chováním lidí a jejich chybovostí, či nejistota technologií. Může také jít o změnu v legislativě.

(4) **Rizika likvidity:** jsou rizika vysokých nákladů v daném čase, tedy neschopnosti dostát svým závazkům v daném časovém období. Jedná se tedy o rizika spojená s nedostatkem likvidity společnosti.

(5) **Pojistná rizika:** někdy též nazývána jako upisovací rizika. Jsou to rizika spojená s jevy náhodného charakteru, při kterých existuje možnost vzniku škody. Patří sem katastrofy, stárnutí populace, epidemie, opční faktory v závazcích, růst nákladů pojišťovny, riziko storen apod. Často se projevuje jako nejistota spojená s budoucím objemem pojistného plnění a nedostatečnou výší rezerv. Dále se pojistná rizika dají dělit na:
   (a) **Upisovací riziko:** je riziko ztráty, nebo nepříznivé změny hodnot pojistných závazků, vzhledem k nepřiměřeným předpokladům při stanovení cen a rezerv.
   (b) **Biometrické riziko:** je zejména riziko úmrtnosti a dlouhověkosti. Dále sem patří různá zdravotní rizika, včetně rizika úrazovosti, invalidizace, vážných onemocnění apod.
   (c) **Riziko storen:** jedná se o riziko spojené s pravděpodobností chyby vzniklé při odhadu pravděpodobností storen, vzhledem ke skutečnému stornování smluv.
   (d) **Nákladové riziko:** je riziko spojené s odhadem budoucích nákladů a jejich skutečnou realizací.

Je zřejmé, že v souvislosti se zaměřením této práce mě zajímají především pojistná rizika. Tato rizika lze mimo výše uvedeného dělení dále rozlišit na **absolutní** (např. úraz), kdy daný jev nemusí v budoucnu nastat, a rizika **relativní** (např. smrt), kde je jisté, že jev nastane, ale není jisté kdy.

Z uvedných výčtů je vidět, že druhů rizik a možností, jak rizika dělit, je skutečně mnoho. Ve své práci se budu věnovat hlavně pojistným rizikům pro životní pojištění a podrobně budu zkoumat riziko, resp. rizikovou přirážku spojenou s úmrtností.

2.2. Vlastnosti přirážek

V této části se zaměřím na vlastnosti, které by riziková přirážka, nebo metoda stanovení této přirážky, měla splňovat. Existují různé skupiny požadovaných vlastností, které se liší podle svých tvůrců, kteří zkoumali přirážky z různých důvodů.

U rizikové přirážky je požadováno splnění pěti základních vlastností, na kterých se shodli IASB, IAA[2] a IAIS[3]:

[2] International Actuarial Association.

[3] International Association of Insurance Supervisors.

(1) Čím méně je známo o nejlepším odhadu a jeho trendu, tím vyšší by měla být riziková přirážka.
(2) Rizika s nízkou četností a vysokou vážností budou mít vyšší rizikové přirážky než rizika s vysokou četností a malou vážností.
(3) Pro podobná rizika budou mít smlouvy s delším časovým rámcem vyšší přirážky než kratší smlouvy.
(4) Rizika s širokým pravděpodobnostním rozložením budou mít vyšší přirážky než rizika s užším rozložením.
(5) Do té míry, že získání zkušenosti snižuje nejistotu, rizikové přirážky budou klesat a naopak.

IAA doplňuje tyto vlastnosti a navrhuje další čtyři vlastnosti beroucí v úvahu metody vedoucí ke snižování rizika:

(1) Do té míry, že pozorovaná zkušenost portfolia je nejistá v důsledku ztráty věrohodnosti zkušenosti, riziková přirážka by měla být vyšší. Jak roste historická zkušenost, vzniká klesající, méně významný dopad na rizikovou přirážku.
(2) Jak se zvyšuje diverzifikace, riziková přirážka by se měla snižovat.
(3) Se zvýšením počtu kompenzujících se rizik by se riziková přirážka měla snížit.
(4) Portfolio se smlouvami, mající adaptabilní rysy[4], by mělo mít nižší rizikovou přirážku než portfolio smluv bez těchto prvků.

Jelikož rizikové přirážky ovlivňují jak výkaz zisků a ztrát, tak rozvahu, měly by v rozvaze přispívat k měření příjmů. Proto jsou v materiálu [**11**] RMWG[5] doporučeny následující čtyři vlastnosti rizikové přirážky:

(1) Poskytuje aktuální a relevantní informaci o příjmu ze současného obchodu a rozdíl mezi očekávanými výsledky na počátku období a odpovídajícími aktuálními výsledky během daného období.
(2) Uvnitř každé jednotky je určena konzistentně mezi jednotlivými obdobími.
(3) Ke každému dni závěrky je určena konzistentně mezi jednotlivými jednotkami.
(4) Ukazuje příjmy, které uživatelům finančních výkazů poskytují užitečnou radu pro další rozhodnutí.

RMWG přidává také pět žádoucích vlastností, které by měla splňovat metoda výpočtu rizikové přirážky:

(1) Aplikuje konzistentní metody během celé doby trvání pojistné smlouvy.
(2) Používá podklady konzistentní s těmi, které byly použity při určení příslušných nejlepších odhadů.
(3) Je konzistentní s ostatními finančními kontrakty.
(4) Kde je to možné, určí přirážku dle konzistentního stylu s akceptovanými ekonomickými a aktuárskými oceňovacími metodami.
(5) Usnadňuje odkrytí užitečných informací pro investory.

RMWG navíc zařadila tržní konzistentnost mezi kritéria pro posuzování metody výpočtu. Souhlasí s tím, že riziková přirážka by měla být citlivá ke změnám

[4]Více o těchto rysech je uvedeno v [**11**], str. 92.
[5]Risk Margin Working Group, skupina uvnitř IAA zaměřená na rizikové přirážky.

na trhu. Na druhou stranu podotýká, že být tržně konzistentní neznamená totéž, co být založená na datech z trhu, nebo citlivá k tržním změnám.

Groupe Consultatif v rámci projektu Solvency II stanovil v materiálu [**9**] další vlastnosti, které jsou žádoucí pro metodu výpočtu rizikové přirážky a samotnou rizikovou přirážku. Protože v této práci zkoumám rizikové přirážky z hlediska testu postačitelnosti rezerv, nebudu se dále zabývat přístupem z pohledu Solvency II.

Jak je vidět, na přirážky a metody jejich výpočtu je kladeno skutečně mnoho různých požadavků, či žádoucích vlastností.

Rovněž je zřejmé, že současná metoda výpočtu, resp. rizikové přirážky stanovené podle doporučení ČSpA ve směrnici [**7**] nesplňují všechny požadované vlastnosti. Hned první požadovaná vlastnost podle IASB, IAA i IAIS není splněna. Výše rizikové přirážky totiž nezávisí na znalostech nejlepšího odhadu, resp. trendu. Výše rizikové přirážky se nezmění, jestliže se nejlepší odhad stanoví například na základě dat z deseti smluv, nebo z miliónu smluv. Je však potřeba připomenout, že výše přirážek na nepříznivý vývoj jsou pouze doporučené a je zejména na aktuárském úsudku stanovit konkrétní výši této přirážky. Lze tak u portfolia s krátkou minulostí zohlednit malou zkušenost vyšší přirážkou na nepříznivý vývoj.

Od rizikové přirážky se navrhuje např. v [**12**] odlišovat **servisní přirážku**. Ta je chápána jako přirážka za poskytování dalších služeb. V současné době existují různé názory na tuto přirážku a také na to, zda je tuto přirážku potřeba odlišovat.

Česká společnost aktuárů se ve své odpovědi [**6**] na diskusní materiál IASB [**12**] vyjádřila ve smyslu, že není potřeba od rizikové přirážky odlišovat tuto „speciální“ přirážku.

Zdůvodnění zmiňovaného názoru ČSpA v [**6**] lze shrnout následovně. Servisní přirážka má představovat přiměřenou kompenzaci za služby spojené s pojistnou smlouvou. Pokud je ale poskytování služeb součástí pojistné smlouvy, pak by celkové tržní náklady za služby, poskytnuté v budoucnu, měly být zahrnuty v prvním stavebním pilíři, jenž obsahuje odhad peněžních toků souvisejících s pojistnou smlouvou. Na druhou stranu je zřejmé, že existuje riziko podhodnocení nákladů z poskytovaných služeb. Tato část by měla být zahrnuta do kategorie nejistoty rizika a měla by být součástí rizikové přirážky, tedy třetího stavebního pilíře.

2.3. Interpretace rizikové přirážky

Nyní zmíním různé interpretace a způsoby chápání přirážek. Existuje několik rovin, jak se dívat na tyto přirážky. Uvažujme pojistnou smlouvu. To je v podstatě převod rizika z pojistníka na pojistitele za úplatu. Rozeznáváme dva pohledy na tento převod:

- **Pohled pojistníka:** pojistník je vystaven rizikům, která nechce nebo nemůže nést sám, vhledem k vlastnímu rozhodnutí pro převod těchto rizik. Pojistník je tak ochoten zaplatit za ochranu před danými riziky.
- **Pohled pojistitele:** pojistitel má možnost spravovat tato rizika pomocí různých metod řízení rizik, jako seskupování rizik, diverzifikace rizik, zajištění nebo zabezpečení proti rizikům. Za převzetí rizik inkasuje od pojistníka odměnu.

Je obecnou dohodou, že hodnota závazku převzatého pojistitelem má zahrnovat odhad očekávané hodnoty budoucích peněžních toků a rizikovou přirážku. Jinou otázkou je správné stanovení této přirážky a s tím souvisí i to, jaký účel má splňovat. Přirážka může být chápána jako:

- **Prvek obezřetnosti na ochranu pojistníka**, kdy splnění slibů, daných pojistitely pojistníkům, je pro pojistné regulátory primární cíl. Regulatorní finanční vykazovací systémy oceňují každé aktivum a závazek na konzervativní bázi. V tomto smyslu každé aktivum a pasivum obsahuje určitou hodnotu (přirážku) k pokrytí nepříznivé odchylky očekávané za normálních okolností. Kapitál je pak v tomto smyslu chápán jako dodatečná rezerva na pokrytí horších nepříznivých výdajů. Rizikové přirážky tedy poskytují z tohoto pohledu první úroveň ochrany a kapitál úroveň druhou.
- **Rezerva na náklady za převzetí rizika**, označováno též jako přístup výstupní hodnoty. IASB navrhl, že by se součet nejlepšího odhadu a rizikové přirážky měl rovnat současné výstupní hodnotě. Současnou výstupní hodnotou se rozumí množství, jaké by pojistitel očekával, že zaplatí ke dni závěrky za převod zbývajících práv a závazků, plynoucích z pojistných smluv jiné jednotce. Pokud je trh dostatečně velký a likvidní, je možné výstupní hodnotu pojistných závazků pozorovat z trhu. Jinde lze zase pojistné závazky zajistit, nebo nahradit finančními instrumenty dostupnými na trhu. Pro pojistná rizika takový trh zatím neexistuje a nazýváme tedy tato rizika nezajistitelná. Tento přístup souvisí s trojpilířovým systémem navrženým IASB.

Nutno podotknout, že oba přístupy, jakožto prvek obezřetnosti na ochranu pojistníka, tak i rezerva na náklady za převzetí rizika, jsou vzájemně propojené.

Pokud se podíváme na věc z pohledu ochrany pojistníků, cílem rizikové přirážky, vzhledem k regulátorům, je schopnost pojistitele pokrýt dostatečný stupeň nejistoty v budoucnu. Pokud je během doby trvání pojistné smlouvy realita lepší než při stanovení nejlepšího odhadu a rizikové přirážky, pak slouží riziková přirážka jako odměna pro pojistitele, který převzal rizikový závazek. Uvolňování rizika ze závazku pak produkuje zisk pro pojistitele. V případě, že je realita horší oproti předpokladu, pak se riziková přirážka použije ke krytí očekávaných ztrát. Tato nejistota tedy určuje odměnu poskytnutou na očekávané ztráty, tj. lze chápat přirážku jako rezervu na budoucí náklady očekávané z převzetí rizika.

Na druhou stranu, pokud se dívám na přirážku jako na rezervu na náklady za převzetí rizika, pak musím vzít v úvahu, že v rámci každého převodu může dojít k nutnosti vypořádání mezi pojistitelem a pojistníkem. Může totiž dojít na plnění pojistitele, který se tak zavázal při převzetí rizika. Z pohledu regulátora je nutné poskytnout v rámci každého takového převodu pojistníkovi ochranu. Při přebírání rizika tak musí pojistitel vykázat dostatek kapitálu, nebo alespoň prokázat schopnost pokrýt ztráty ze svých prostředků. Riziková přirážka je pak náklad na poskytnutí daného kapitálu, nebo příslušné garance v rámci ochrany pojistníka.

Další rovinou, ze které lze pohlížet na přirážky, je vlastní interpretace rizikové přirážky. Zmíním dva pohledy blíže rozebrané v [**12**].

První pohled vidí rizikové přirážky jako určitý **tlumič šoků** omezující vznik nákladů v budoucnosti, jestliže platby pojistníkům překročí množství dříve stanovené jako závazek pojistníkům.

Druhý pohled vidí rizikové přirážky jako explicitní a jednostrannou **kompenzaci** za převzetí rizika. Při této interpretaci rizikové přirážky může pojistitel ke každému dni závěrky ohodnotit, kolik rizika přetrvává v pojistných závazcích, a podle toho upravit přirážku.

Srovnání obou pohledů podrobněji ukazuje následující tabulka.

Účel přirážky	**Tlumič šoků**	**Kompenzace**
Snižuje se přirážka s uvolňováním od rizika?	Ano	Ano
Mají nepříznivé změny v odhadech peněžních toků, pokud nastanou, vliv na zisk?	Ne[6]	Ano
Mají příznivé změny v odhadech peněžních toků, pokud nastanou, vliv na zisk?	Ne	Ano
Odráží přirážka na konci období:		
- nárůst rizika?	Ne	Ano
- snížení (uvolnění) rizika?	Ano	Ano
- přetrvávající množství rizika?	Ne	Ano
- cenu rizika?	Ne	Někdy
Způsobuje nárůst množství rizika nebo nárůst jeho ceny pojistiteli dodatečné náklady v daném čase a příjmy s dalším období?	Ne	Ano

Odpověď na otázku, zda přirážka na konci období odráží cenu rizika v případě druhého přístupu, není jednoznačná. Pomůže nám k tomu další podkapitola.

2.4. Odhad rizikové přirážky

Ať už je náš pohled na rizikovou přirážku jakýkoliv, je potřeba odhadnout její výši. Protože velikost přirážky není obecně pozorovatelná, je podle [**12**] potřeba k jejímu odhadu provést následující kroky:

(1) Odhadnout, jak by účastníci trhu měřili množství rizika a určit jednotky, jaké by použili k vyjádření jeho množství.
(2) Použít scénáře peněžních toků pro odhad počtu jednotek rizika obsaženého v závazku. Příkladem takové jednotky může být množství požadovaného kapitálu, nebo kvantil odhadnutého pravděpodobnostního rozložení rizika.
(3) Odhadnout přirážku za jednotku rizika použitím přiměřené kombinace pozorovaných tržních cen za podobné produkty, oceňovacích modelů a dalších vstupů, jsou-li k dispozici.
(4) Vynásobit odhadnutou přirážku za jednotku rizika odhadnutým počtem jednotek rizika, tím získáme celkovou rizikovou přirážku. Změna v celkové přirážce je příjem nebo náklad.
(5) Otestovat na možné chyby a opomenutí sladěním změny v rizikové přirážce ke změně počtu jednotek rizika a jednotkové přirážky. Obecně platí,

[6]Dokud není riziková přirážka vyčerpána.

že se počet jednotek rizika v závazku s časem snižuje. To však nemusí platit, mohou to způsobit například vložené opce a garance.

Obecně je cena za pojistný závazek pozorovatelná pouze na počátku pojistné smlouvy, když se pojistník a pojistitel vzájemně dohodnou na ceně. Tato cena je jedním zdrojem informací, který by na počátku pojistitel mohl použít ke kalibraci rizikové přirážky za jednotku rizika.

Výbor IASB vzal v úvahu dva vzájemně podobné přístupy, využívající tento zdroj. Obě provedení odhadují peněžní toky stejným způsobem, používají stejné diskontní míry a potřebují rizikovou a popřípadě servisní přirážku. Oba přístupy však dávají různou důležitost pojistnému, jako zdroji informací, při kalibrování přirážky za jednotku rizika na počátku smlouvy.

Přístup A kalibruje přirážku za jednotku rizika na počátku přímo na aktuální účtované pojistné (snížené o příslušné počáteční náklady). Kalibrace trvá, dokud test postačitelnosti rezerv nevykáže ztrátu na počátku smlouvy. Následkem toho pojistitel nevykáže zisk na počátku smlouvy.

Přístup B nakládá s pozorovanou cenou za transakci s pojistníkem jako důležitou a smysluplnou kontrolu počáteční míry pojistného závazku, ale nepoužívá ji k potlačení nestranného odhadu přirážky, kterou požadují účastníci trhu.

Pokud neexistuje důkaz, že by se pojistitelovo ocenění lišilo od ocenění ostatních účastníků trhu, pak postupy A i B vedou ke stejnému výsledku k počátku kontraktu. Následující tabulka uvádí srovnání přístupu A a B.

Přístupy ke kalibraci	**Přístup A**	**Přístup B**
Kalibruje se přirážka na pojistné? (snížené o pořizovací náklady)	Ano	Ne[7]
Je potřeba definovat pořizovací náklady?	Ano	Ne[8]
Je nutný test postačitelnosti na počátku smlouvy?	Ano	Ne
Je nutný test postačitelnosti později?	Ne	Ne
Dochází k rozpoznání zisku na počátku smlouvy, pokud by účastník trhu účtoval nižší pojistné?	Ne	Ano
Rozpoznává pojistitel příjem, jak se uvolňuje riziko?	Ano	Ano
Rozpoznává pojistitel náklady, pokud jednotky rizika přibývají?	Ano	Ano
Musí pojistitel odhadnout cenu za jednotku rizika, kterou požaduje účastník trhu na počátku smlouvy?	Ano[9]	Ano
Musí později pojistitel odhadnout cenu za jednotku rizika, kterou požaduje účastník trhu?	Ne	Ano
Zohledňuje přirážka v průběhu trvání smlouvy změny v odhadované ceně za jednotku rizika, kterou požaduje účastník trhu?	Ne	Ano
Rozpoznává pojistitel příjem, pokud poskytuje i jiné služby než přenos rizika? (pokud je to relevantní)	Ano	Ano

[7]Pojistné ale slouží jako kontrola rozumnosti.

[8]Až na testování smysluplnosti.

[9]Pro účel LAT.

K odhadu rizikové přirážky je potřeba nějaké pravděpodobnostní rozložení rizika. Otázkou je, která všechna rizika mají být v tomto rozložení zohledněna. Dle současných diskusí ohledně rizikových přirážek, má rozložení rizika zahrnovat všechna nezajistitelná rizika spojená s pojistnými závazky zahrnující riziko změny v množství vypořádání závazků, zajistné kreditní riziko a operační riziko, ale nezahrnující tržní a kreditní riziko aktiv, jelikož jde o zajistitelná rizika. Následující tabulka shrnuje zahrnutí, či nezahrnutí jednotlivých typicky pozorovaných rizik.

Typ pojištění	**Typ rizika**	**Zahrnutí**
Životní pojištění	**Úmrtnost**	
Životní pojištění	- Nejistota trendu	Ano
Životní pojištění	- Nejistota hladiny	Ano
Životní pojištění	- Volatilita	Ano
Životní pojištění	- Katastrofa	Ano
Životní pojištění	- Kreditní riziko zajištění	Ano
Neživotní pojištění	**Majetek a úraz**	
Neživotní pojištění	- Současná nekatastrofická nejistota	Ano
Neživotní pojištění	- Současná nekatastrofická volatilita	Ano
Neživotní pojištění	- Současná katastrofa	Ano
Neživotní pojištění	- Katastrofické kreditní riziko zajištění	Ano
Neživotní pojištění	- Vývoj škod - volatilita a nejistota	Ano
Zdravotní, invalidita	**Nemocnost**	
Zdravotní, invalidita	- Současná nejistota	Ano
Zdravotní, invalidita	- Současná volatilita	Ano
Zdravotní, invalidita	- Vývoj škod	Ano
Zdravotní, invalidita	- Katastrofa	Ano
Všechny	**Náklady**	Ano
Všechny	**Setrvání**	
Všechny	- Volatilita	Ano
Všechny	- Katastrofa	Ano
Všechny	- Nejistota	Ano
Všechny	- Přetarifování pojistného	Ano
Všechny	- Účinnost převodu zajištění	Ano
Všechny	**Operační riziko kapitálu**	Ano
Všechny	**Kreditní riziko**	Ne
Všechny	**Tržní riziko**	
Všechny	- Úroková míra	Ne
Všechny	- Měna	Ne
Všechny	- Skutečný stav	Ne
Všechny	- Majetek, akcie	Ne

Vyplývá tedy, že tržní a kreditní rizika mají být zohledněna podle konceptu současné výstupní hodnoty již v odhadu peněžních toků. Zahrnutí kreditního rizika již do ocenění nejlepšího odhadu závazků bývá formou použití bezrizikových úrokových měr.

V současné době je podle směrnice ČSpA [**7**] zahrnutí tržních rizik odlišné od současných mezinárodních názorů popsaných výše. Zatímco podle uvedených názorů se má tržní riziko zohlednit již v nejlepším odhadu pojistných závazků, z doporučení ČSpA vyplývá, že na tržní rizika se má k nejlepšímu odhadu pojistných závazků použít přirážka na nepříznivý vývoj ve formě snížení úrokového výnosu.

2.5. Metody výpočtu přírážek

Obecný postup při stanovení přirážky jsem popsal v minulé podkapitole, v této části uvedu konkrétní přístupy pro stanovení přirážky. Postupů, jak stanovit rizikovou přirážku, existuje mnoho. RMWG v [**11**] sestavila čtyři skupiny postupů, do kterých rozdělila metody výpočtu přirážek, které splňují požadavky IASB na explicitní rizikovou přirážku. Skupiny jsou následující:

(1) **Kvantilové metody** - používají hladiny spolehlivosti, nebo podobné kalkulace, jako podmíněnou hodnotu v riziku (Tail Value at Risk, TVaR), nebo násobky druhých a vyšších momentů pravděpodobnostního rozložení rizika.
(2) **Metody nákladů na kapitál** - jsou založeny na velikosti výnosu, který není realizován z důvodu nutnosti držení požadovaného množství kapitálu. Ušlý výnos se započítá jako náklad na držení kapitálu.
(3) **Metody spojené s diskontováním** - diskontují budoucí očekávané peněžní toky bezrizikovou úrokovou mírou, upravenou o konkrétní rizikové vyrovnání.
(4) **Explicitní předpoklady** - používají požadované vstupy nebo zjednodušené metody, jako použití specifických dat (např. úmrtnostní tabulky), nebo pevné procento rizikové přirážky.

Uvedené čtyři skupiny metod, použitelných k odhadu explicitní rizikové přirážky, lze dále dělit přímo na konkrétní postupy. IASB ve svém dokumentu [**12**] stanovilo osm metod spadajících do některé ze jmenovaných skupin:

(1) Hladiny spolehlivosti (confidence levels) - Kvantilové metody
(2) Podmíněná hodnota v riziku (TVaR), někdy také označováno jako CTE (Conditional Tail Expectations) - Kvantilové metody
(3) Explicitní přirážka uvnitř dané meze - Explicitní předpoklady
(4) Metoda nákladů na kapitál (Cost of Capital) - Metody nákladů na kapitál
(5) Kapitálový oceňovací model aktiv (Capital Asset Pricing Model, CAPM)[10] - je používán spíše k určení parametrů pro ostatní metody - Metody nákladů na kapitál
(6) Deflátorem upravené peněžní toky - Metody spojené s diskontováním
(7) Násobení směrodatné odchylky, rozptylu, semi-variance, nebo vyšších momentů - Kvantilové metody
(8) Rizikově upravená diskontní míra - Metody spojené s diskontováním

RMWG otestovala všechny čtyři skupiny metod a závěr je, že pro produkty s užším pravděpodobnostním rozložením rizika, tj. bez málo četných škod velkého dopadu, jsou získány podobné rizikové přirážky pomocí všech metod. Čím více je ale produkt rizikovější, tím více je výše rizikové přirážky závislá na zvolené metodě výpočtu. Požadovaným vlastnostem rizikové přirážky, předepsaných IASB, týkajících se tržní konzistence, se nejvíce přibližují metody nákladů na kapitál

[10] Více o modelu CAPM lze nalézt v [**8**].

a kvantilové metody. Zbylé dvě skupiny jsou vhodné zejména jako aproximace pro implementování přístupů z prvních dvou skupin.

Mimo těchto čtyř skupin metod existují další možné přístupy, jak rizikovou přirážku počítat. Ty však buď nesplňují základní požadavky na explicitní rizikovou přirážku, nebo nejsou dostatečně prozkoumané, jak by se v tomto kontextu daly aplikovat. Mezi tyto další metody patří konzervativní předpoklady v nejlepších odhadech vytvářející implicitní přirážky, metody používající teorii užitku a transformaci hazardu.

Nyní se budu blíže věnovat každé ze čtyř skupin metod možných pro výpočet rizikové přirážky.

Kvantilové metody:

Mezi tyto metody se řadí zejména použití hladin spolehlivosti. Metody založené na hladině spolehlivosti vyjadřují nejistotu v dodatečném množství, které musí být přidáno k očekávané hodnotě tak, že pravděpodobnost toho, že aktuální výdaje za sledované období budou menší než velikost hodnoty závazku včetně rizikové přirážky, je na dané hladině spolehlivosti. Tato hladina se někdy také nazývá hodnota v riziku VaR (value at risk).

U této metody může nastat problém, jestliže měříme přirážku pro „šikmé“ rozdělení na „nízké“ hladině spolehlivosti. Přirážka totiž může vyjít záporná, což je určitě nežádoucí vlastnost. Tedy minimálně pro extrémní rozložení není metoda hladiny spolehlivosti bez dalších vyrovnání vhodnou metodou výpočtu.

Rozšíření této metody se nazývá podmíněná hodnota v riziku TVaR (Tail Value at Risk), někdy také nazývaná jako metoda CTE (conditional tail expectations). Používá kombinaci kvantilů a střední hodnoty všech případů, které překračují daný kvantil. Touto kombinací překonává nevýhodu předchozí metody, týkající se záporných rizikových přirážek ve výsledcích, eliminuje totiž vznik záporné přirážky i u velmi šikmých extrémních rozložení. Zároveň pro rozložení s nízkou šikmostí dává metoda podmíněných konců podobné výsledky jako metoda hladiny spolehlivosti. Všeobecně se očekává, že 99% hladina CTE by odpovídala 99,5% hladině spolehlivosti. Pro účely rizikové přirážky se ovšem tato závislost mění i v závislosti na použitém pravděpodobnostním rozložení.

TVar je podmíněná střední hodnota daného pravděpodobnostního rozložení za podmínky, že ztráta překročí určitý kvantil. Matematické vyjádření má tvar

$$CTE(p) = \mathrm{E}(X|X > z(p)) = \frac{\int_{z(p)}^{\infty} xf(x)dx}{\int_{z(p)}^{\infty} f(x)dx}, \quad \text{je-li výraz konečný,}$$

kde $f(x)$ je hustota pravděpodobnostního rozložení, p je vybraný kvantil a $z(p)$ je hodnota kvantilu p vypočtená podle vzorce

$$\int_{z(p)}^{\infty} f(x)dx = 1 - p.$$

Metoda nákladů na kapitál:

Tento přístup je všeobecně uznávanou metodou při nastavování ziskových přirážek v pojistných sazbách a ve zjednodušené formě i používána při vykazování implicitní hodnoty. Při aplikaci je potřeba znát příslušný kapitál a náklady na kapitál ke dni výkazu a v každém období vývoje toků ze závazků. Může jít o vázaný kapitál, ekonomický kapitál, případně jinou formu kapitálu, vhodnou k danému výpočtu. Navíc je třeba znát očekávané peněžní toky, měřené v každém budoucím vykazovacím období, dokud nejsou pojistné závazky a škody vypořádány. Tyto peněžní toky je třeba znát, jelikož kapitál obecně závisí na nejlepších odhadech závazků.

V současnosti neexistuje schválená metoda pro určení nákladů na kapitál v rámci určení rizikové přirážky. Například v rámci Swiss Solvency Test (SST) [**18**] byla použita hodnota 6% pro úroveň kapitálu na hladině spolehlivosti 99,5% a byla popsána jako přiblížení finančnímu ratingu BBB. Při jiných příležitostech byla použita hodnota 4% v rámci přiblížení k finančnímu ratingu AA.

V rámci modelování kapitálu jsou v současnosti používané dva různé testy:

(1) Kapitál je určen tak, že po celou dobu trvání jsou aktiva s určitou pravděpodobností (např. 99,5%) dostatečná k pokrytí nejlepších odhadů a rizikových přirážek.
(2) Celková aktiva jsou určena tak, že pravděpodobnost toho, že škodní plnění nepřesáhnou hodnotu aktiv, je dostatečná (např. 99,5%).

Druhá metoda dává nižší rizikovou přirážku, protože poskytuje kapitál na ochranu hodnot z očekávaných plnění. Naproti tomu první metoda kryje očekávané hodnoty plnění plus rizikové přirážky.

Metody spojené s diskontováním:

Jednou možností je použití rizikově upravených výnosů. Jde o metodu, která diskontuje očekávané peněžní toky pomocí bezrizikové úrokové míry, snížené o zvolenou rizikovou úpravu. Toto rizikové vyrovnání se může lišit napříč jednotkami obchodu, dobou toků, nebo jiným faktorem, který ovlivňuje rizikové rozložení.

Nejjednodušším použitím je stanovení rizikové úpravy rovné bezrizikové úrokové křivce, případně jiné neupravené výchozí diskontní míře. V tomto případě se vyruší diskontování z měření závazku. Tento způsob je efektivně využíván v rámci standardů U.S. GAAP a regulatorního vykazování v neživotním pojištění ve Spojených státech amerických a některých dalších jurisdikcích.

Složitější metoda používá rizikovou úpravu závislou na obchodních jednotkách, případně na stáří pojistných a škodních závazků. Je dokázáno, že pokud je kapitál roven konstantnímu procentu diskontovaného nejlepšího odhadu, pak pro každou obchodní jednotku existuje riziková úprava, pro kterou metoda nákladů na kapitál produkuje stejný výsledek jako metoda upraveného diskontu.

Další metodou je použití deflátorů. Deflátory se obvykle aplikují na hodnoty aktiv. Bohužel v současnosti neexistuje praktická aplikace na nezajistitelná rizika v pojistných závazcích.

Výsledky rizikových přirážek, stanovené pomocí těchto metod, mohou být rozporuplné. Například v materiálu [**11**] vychází přirážka pro standardní produkt životního pojištění daleko vyšší, než pro vysoce rizikový produkt s kratší maturitou. To je zapříčiněno právě délkou doby do vypořádání. Naproti tomu produkt s kratší maturitou může obsahovat daleko více rizika. Je proto zřejmé, že tyto metody mají nežádoucí vlastnosti, a je potřeba být dostatečně obezřetný při jejich aplikaci. Jak jsem již zmínil dříve, tento druh metod se hodí spíše pro pomocné výpočty k jiným metodám stanovení rizikové přirážky.

Explicitní předpoklady:

Co vlastně chápat pod pojmem explicitní, či implicitní? IASB ve své práci [**12**] uvádí příklady metod dávajících explicitní přirážku a také příklady metod dávající implicitní přirážku. Nestanovuje ale přesně, co myslí pod pojmem **explicitní přirážka**, a neurčuje jednoznačně rozdíl mezi implicitní a explicitní rizikovou přirážkou. Na druhou stranu IASB požaduje v rámci požadavku explicitnosti, aby byla přirážka vypočtena explicitně pro každé individuální riziko, než aby byla zahrnuta implicitně v diskontních mírách nebo nejlepších odhadech bez konkrétního zachycení individuálního rizika. Dle [**11**] se předpokládá, že takovou rizikovou přirážku IASB vnímá jako implicitní.

RMWG ve svém draftu [**11**] uvádí příklady explicitních přirážek dle IASB, které jsou sice určeny separátně, ale bez konkrétního vyjádření individuálního rizika, což se úplně neshoduje s požadavkem IASB na explicitní přirážku. RMWG tedy upravila pro účely porovnání přirážek založených na explicitních předpokladech požadavek IASB a definuje rizikovou přirážku takto:

Riziková přirážka se považuje za explicitní, jestliže je velikost přirážky nad nejlepší odhad specificky vypočtena a odhalena.

Mezi příklady přirážek založených na explicitních předpokladech patří:

- Použití konkrétních úmrtností, nemocností, nebo jiných tabulek. Použití nejlepšího odhadu úmrtnostní tabulky, upraveného o x% příslušným směrem, odrážející dané riziko.
- Použití explicitní diskontní míry, která je nižší než bezriziková diskontní míra.
- Použití pevného procenta rizikové přirážky stanovené podle obchodní jednotky.
- Použití přístupu nákladů na kapitál za použití pevného procenta nákladů na regulatorní kapitál, který není konkrétní pro individuální riziko (např. pevné procento zákonných rezerv nebo pojistného).

Naopak příkladem implicitních předpokladů může být použití historických úmrtnostních měr pro pojištění smrti bez určení implicitní rizikové přirážky.

Do teď jsem hovořil o stanovení rizikové přirážky zvlášť pro každé riziko. Obecně však ke snížení rizika slouží slučování (pooling) a diverzifikace různých portfolií, která jsou dostatečně nekorelovaná. Snížením rizika se dosáhne i snížení koeficientu odchylky CV[11] a šikmosti pravděpodobnostního rozložení rizika. Tedy po stanovení rizikové přirážky některou z metod popsaných výše lze přirážku redukovat použitím poolingu a/nebo diverzifikace.

[11]Koeficient odchylky CV je definován jako podíl směrodatné odchylky a střední hodnoty pravděpodobnostního rozložení rizika.

KAPITOLA 3

Aplikace v praxi

Do této chvíle jsem se věnoval pouze teorii týkající se rizikových přirážek. Popsal jsem několik pohledů na přirážky, a jak mohou být přirážky chápány. Uvedl jsem určité vlastnosti, které jsou požadovány na rizikové přirážky, resp. na metody jejich stanovení. Následně jsem ukázal metody, které lze ke stanovení výše těchto přirážek použít.

Ve zbylé části práce se zaměřím na výpočet a analýzu konkrétní přirážky v praxi. Toho docílím za pomocí sestrojení modelu pojistného produktu životního pojištění, který mi pomůže stanovit současnou hodnotu pojistných závazků. Následně pomocí tohoto modelu vypočtu velikost rizikové přirážky a analyzuji ji, mimo jiné, i vzhledem k doporučené rizikové přirážce ve směrnici č.3 ČSpA [**7**].

Rizik existuje celá řada, jak je popsáno v předchozí části práce. Já se zaměřím na stanovení jedné konkrétní přirážky, a to rizikové přirážky na riziko úmrtnosti. V rámci stanovení přirážky sestrojím generační úmrtnostní tabulky a model běžného produktu životního pojištění.

Budu uvažovat typický produkt pro životní pojištění, takovým příkladem mi bude smíšené pojištění na smrt a dožití. K modelování finančních toků použiji software Prophet.

V dalších podkapitolách podrobně popíši použitý produkt smíšeného pojištění a model sloužící k modelování finančních toků. Dále se budu věnovat vysvětlení použitých početních podkladů v modelu a zejména konstrukci generačních úmrtnostních tabulek.

3.1. Popis produktu

Jak jsem již zmínil, použiji k modelování jeden z typických produktů životního pojištění, totiž pojištění pro případ smrti nebo dožití za běžně placené pojistné. Cílem této práce není popsat produkt do všech detailů, ale popsat základní vlastnosti produktu, které jsou potřeba pro jeho pochopení a následné modelování.

Předpokládám, že pojistník musí být zároveň pojištěný. V případě dožití obdrží pojištěný sjednanou pojistnou částku pro případ dožití, zvýšenou o podíl na zisku. V případě smrti pojištěného v době trvání pojištění, vyplatí pojistitel oprávněné osobě sjednanou pojistnou částku pro případ smrti, zvýšenou o podíl na zisku. Předpokládám, že pojistná částka pro případ dožití je rovna pojistné částce pro případ smrti.

Minimální věk pojištěného nechť je 15 let a maximální věk je 60 let. Pojištění je sjednáváno na pojistnou dobu do věku pojištěného 65 let. Z toho vyplývá, že minimální pojistná doba je alespoň 5 let a maximální pojistná doba je 50 let.

Nechť lze pojistné platit v měsíční, čtvrtletní, pololetní, nebo roční frekvenci a za frekvenci placení se nepočítají žádné slevy, či přirážky. Pojistné se platí po celou dobu trvání pojištění.

V úvahu připadá zproštění od placení pojistného, jestliže se pojištěný stane během trvání pojištění plně invalidním podle zákona o důchodovém pojištění [**22**].

Produkt obsahuje následující opce a garance. Je garantována technická úroková míra, garantované úmrtnostní tabulky prvního řádu a jsou garantovány kalkulované náklady. Dále má pojistník při zániku pojištění nárok na odbytné, jestliže pojištění trvalo nejméně jeden rok, bylo zaplacené pojistné alespoň za první rok a je vytvořena kladná rezerva pojistného životních pojištění. Výjimkou zániku je zánik pojištění v důsledku pojistné události, nebo zánik z důvodu zamlčení důležitých informací.[1] Výše odbytného není garantovaná.

Výše podílu na zisku není garantovaná, podíl na zisku se přiznává po celou dobu trvání pojištění a připsané podíly na zisku se vyplácí při zániku pojištění. V případě výpovědi pojistníka se pojistitelem nepřizná podíl na zisku za poslední tři měsíce před zánikem pojištění.

K základnímu pojištění nelze sjednat žádné doplňkové pojištění. Dynamizaci pojištění neuvažuji.

3.2. Značení, časová struktura

V dalších částech budu používat některé dobře známé funkce, pro jistotu je zde uvedu, včetně použitého značení.

- $[x]$: vrátí zaokrouhlenou hodnotu argumentu x na celé číslo,
- $\lfloor x \rfloor$: vrátí dolní celou část z argumentu x,
- $\mathrm{mult}(x; y)$: je podmínka, že x je násobek y, resp. že x po dělení y dá zbytek 0.
- $\max(x; y)$: funkce vrátí maximum z hodnot x a y.

V této práci zavedu řadu proměnných, chci upozornit, že pokud neuvedu hodnoty proměnných pro všechny možné hodnoty parametrů, je proměnná pro takové hodnoty parametrů rovna 0. Zejména se může jednat o proměnné, závislé na době trvání pojištění t.

Dále je potřeba v modelu zavést časovou strukturu. Nechť $t = 0$ je začátek měsíce, ve kterém je smlouva založena. Pak např. $t = 4$ znamená 4 měsíce od počátku pojištění, tj. konec 4. měsíce pojištění. Tedy v časové struktuře bude $t = 0$ odpovídat měsíci před uzavřením smlouvy a $t = 1$ měsíci uzavření smlouvy. V důsledku toho $t = n$ znamená dobu konce pojištění.

Zavedu ještě funkci T, určující rok trvání pojištění. Tedy pro T platí následující vztah

$$T = \left\lfloor \frac{t + 11}{12} \right\rfloor, \qquad t = 0, \ldots, n.$$

Další velmi důležitý časový okamžik je datum, ke kterému provedu výpočet, resp. ke kterému datu budu současnou hodnotu pojistných závazků počítat. Je totiž velký rozdíl, zda počítám současnou hodnotu závazku k datu, kdy je pojistná smlouva již nějakou dobu v platnosti, nebo když počítám hodnotu takového závazku na počátku pojištění, kdy musím ještě vyplatit všechny provize a vynaložit počáteční náklady na smlouvu.

[1] Přesné podmínky jsou pro smlouvy uzavřené od 1.1.2005 popsány v §23 a §24 zákona č.37/2004 Sb., o pojistné smlouvě).

Ve svém modelu budu hodnotu závazků stanovovat k 31. 12. 2007, tedy ke konci roku 2007. Hodnotu závazků budu počítat pro smlouvy, které jsou již v platnosti, konkrétně budu uvažovat smlouvy uzavřené v roce 2006. V modelu pak vyjádřím okamžik, ke kterému provádím výpočet pomocí proměnné $Start_M$, která bude vyjadřovat měsíc trvání pojistné smlouvy v době výpočtu hodnoty daného závazku. Hodnotu $Start_M$ vyjádřím z následujícího vztahu

$$Start_M = (2007 - Year)12 + (12 - Month + 1),$$

kde $Year$, resp. $Month$ znamená rok, resp. měsíc založení pojistné smlouvy.

Poslední velmi užitečnou časovou proměnnou je Mth_t, ukazující, který kalendářní měsíc odpovídá měsíci pojištění t.

3.3. Výpočetní podklady

V této podkapitole se budu věnovat výpočetním podkladům, jež použiji v modelu. Aby nedošlo k nejasnostem, hned na začátku bych rád zopakoval rozdělení těchto podkladů. Rozlišujeme tyto tři skupiny výpočetních podkladů:

- Výpočetní podklady prvního řádu: jde o teoretické výpočetní podklady sloužící k výpočtu pojistného, pojistné částky a rezerv. Nejběžnějšími příklady jsou technická úroková míra, pravděpodobnosti úmrtí sloužící ke kalkulaci rezerv, provize a kalkulované pořizovací, správní a inkasní náklady.
- Výpočetní podklady druhého řádu: představují nejlepší odhady předpokladů ve skutečnosti. Mezi tyto podklady patří parametry odhadované na základě zkušenosti pojišťovny a statistických odhadů. Patří sem odhady skutečných pravděpodobností úmrtí, pravděpodobností invalidizace a reaktivace, pravděpodobnosti storna, dále např. odhadované škodní poměry, nebo vývojové koeficienty.
- Výpočetní podklady třetího řádu: jsou realizace předpokladů, tedy skutečný stav, který je známý v okamžiku výpočtu. Může jít o reálnou stornovost, skutečné škodní poměry, výše již připsaných podílů na zisku, apod.

Nyní uvedu jednotlivé výpočetní podklady potřebné v mém modelu a objasním jejich původ, resp. odvození.

Storna, odbytné

Pravděpodobnosti storna s_t, jako podklady druhého řádu, vyjadřují pravděpodobnost storna v t. měsíci trvání pojištění. V modelu použiji pravděpodobnosti storna uvedené v [**14**], jenž byly odhadnuty na základě dat pojišťovny o počtech smluv a jejich stornovosti. Předpokládám tedy rovněž jako v [**14**], že pravděpodobnost storna nezávisí na vstupním věku pojištěného, pohlaví pojištěného, ani na výši pojistné částky. Konkrétní hodnoty měsíčních pravděpodobností storna s_t jsou uvedeny v příloze.

Nákladové koeficienty

Tyto výpočetní podklady prvního řádu vstupují do modelu pro výpočet pojistného, pojistné částky a rezerv. Pro můj produkt životního pojištění použiji následující náklady:

- α počáteční jednorázové náklady z pojistné částky sloužící pro zillmerizaci, získatelskou provizi a náklady pojišťovny, jako například lékařská prohlídka, zaslání pojistky, administrace.
- α_1 správní náklady z ročního pojistného určené na zillmerizaci a následné provize.
- β_1 správní náklady z pojistné částky vznikající po celou dobu trvání pojištění.
- β_2 správní náklady z pojistné částky vznikající po dobu placení pojistného. V mém případě tedy po celou dobu trvání pojištění.
- γ inkasní náklady z ročního pojistného vznikající po celou dobu placení pojistného, tj. v mém případě opět po celou dobu trvání pojištění.

Konkrétní hodnoty nákladových koeficientů jsou k nalezení v příloze této práce. Hodnoty jsou uvedeny vždy jako % z pojistného, resp. pojistné částky.

Invalidita, úmrtnost invalidních

Jelikož v produktu existuje možnost zproštění od placení pojistného v důsledku plné invalidity pojištěného, je potřeba v modelu uvažovat invaliditu. Konkrétně potřebuji pravděpodobnosti invalidizace i_x^{Inv}, reaktivace r_x^{Inv} a úmrtí invalidní osoby q_x^{Inv} jako podklady druhého řádu. Poněvadž provádění analýzy a konstrukce vlastních pravděpodobností není cílem této práce, použiji pravděpodobnosti invalidizace, reaktivace a pravděpodobnosti úmrtí invalidních osob uvedené v [**3**].

Převzatá data jsou nezávislá na pohlaví pojištěného a jsou určena pro pětileté věkové intervaly. Ve zdrojových tabulkách nejsou uvedeny pravděpodobnosti pro věky 15-19 let, položil jsem je rovné hodnotám pravděpodobností pro věkovou skupinu 20-24. Přesné hodnoty těchto pravděpodobností jsou uvedeny v příloze.

Na pravděpodobnosti invalidizace aplikuji ještě počáteční lineární lomenou selekci na prvních 5 let pojištění z hladiny 60% na hladinu 100% populační invalidizace. Na pravděpodobnosti nepoužiji věkovou selekci vyjadřující rozdíl v pravděpodobnostech celé populace a populace pojištěných osob.

Na pravděpodobnosti úmrtí invalidních neaplikuji žádnou selekci, jelikož předpokládám, že úmrtnost invalidních je v populaci stejná, jako v pojistném kmeni. Stejně tak předpokládám i u pravděpodobností reaktivace. Podrobněji se těmto pravděpodobnostem budu věnovat v části týkající se úpravy podkladů pro výpočty (3.5).

Úmrtnost, selekce úmrtnosti

Jednou z nejdůležitějších částí modelu jsou úmrtnostní tabulky. Na základě pravděpodobností úmrtí se totiž modelují počty, resp. úbytky smluv v portfoliu, které jsou potřebné pro výpočty budoucích pojistných plnění. Na druhou stranu se z pravděpodobností úmrtí odvozují výše rezerv, pojistného, nebo pojistné částky.

Jak jsem již zmínil, produkt má ve svém seznamu opcí a garancí garantované úmrtnostní tabulky. Tím se myslí garantované úmrtnostní tabulky prvního řádu pro výpočet rezerv, pojistného a pojistné částky. V mém případě použiji garantované úmrtnostní tabulky používané v Kooperativě v rámci některých produktů životního pojištění. Tyto tabulky jsem dále vhodně upravil v rámci zachování obchodního tajemství. Pro pravděpodobnosti úmrtí žen se použijí tabulky pro muže, kde pravděpodobnost úmrtí ženy odpovídá pravděpodobnosti úmrtí muže ve věku o pět let nižším. Tabulky pravděpodobností úmrtí pro muže q_x^{val} s konkrétními hodnotami jsou k dispozici v příloze na konci této práce.

Potřebuji ještě pravděpodobnosti úmrtí jako podklady druhého řádu, které použiji pro modelování vývoje pojistného kmene. Za tímto účelem použiji mnou vytvořené generační úmrtnostní tabulky. Vyložení konstrukce generačních úmrtnostních tabulek bude obsahem podkapitoly (3.4). Výsledné generační úmrtnostní tabulky, použité v modelu, jsou uloženy na CD příloze.

Jelikož vytvořené tabulky vznikly na základě pravděpodobností úmrtí pro celou populaci, je potřeba výsledné pravděpodobnosti upravit o selekci.

V modelu neuvažuji **věkovou selekci**, předpokládám totiž, že úmrtnost v pojistném kmeni je stejná jako úmrtnost v populaci, pokud neuvažuji počáteční selekci, zohledňující odlišnou úmrtnost v prvních letech pojištění. V praxi toto nebývá zvykem, bývá totiž aplikována věková selekce založená na analýzách z historických dat pojišťoven, týkajících se pojistného kmene.

Na výsledné generační úmrtnostní tabulky však aplikuji **počáteční selekci** způsobenou lékařskými dotazníky, resp. prohlídkami na počátku pojištění. Úmrtnost v prvních letech smíšeného životního pojištění je totiž díky tomuto lékařskému underwrittingu obecně výrazně nižší, než úmrtnost v rámci celé populace. Podobně jako u pravděpodobností invalidizace použiji lineární selekci po prvních 5 let pojištění z hladiny 60% na hladinu 100% populační úmrtnosti.

Úrok, diskont, výnos

V této části popíši použité úrokové míry. V modelu budu používat deterministické i stochastické výpočty[2], v rámci těchto výpočtů budu potřebovat různé druhy úrokových měr.

Prvním typem je technická úroková míra (TÚM) i^{TUM} jako podklad prvního řádu, tato míra je garantovaná a zaručuje pojištěnému minimální úročení rezervy pojistného životních pojištění. Vzhledem k vyhlášce č. 303/2004 Sb. k zákonu o pojišťovnictví, kde je mimo jiné stanovena maximální hladina TÚM pro kapitálové životní pojištění za běžně placené pojistné, položím hodnotu i^{TUM} rovnou této maximální hodnotě, tj. rovnu 2,4%.

Další potřebnou úrokovou mírou je i_k^{RFR} míra výnosu z investic technických rezerv v roce k, jako podklad druhého řádu. Jelikož v rámci výpočtu LAT má být podle směrnice ČSpA [**7**] použita bezriziková úroková míra, použiji za výnos z investic bezrizikovou úrokovou křivku stanovenou k datu výpočtu. V mém případě budu počítat hodnotu pojistných závazků k 31. 12. 2007. Křivka byla stanovena metodou Nelson-Siegel z tržních dat úrokových swapů. Výsledné hodnoty i_k^{RFR} jsou uvedeny v příloze.

V rámci splnění doporučení pro výpočet LAT v ČR použiji stejnou bezrizikovou úrokovou míru i pro účely diskontování.

[2]Pojmy deterministický a stochastický výpočet budou popsány v části (3.7).

Pro stochastické výpočty použiji ekonomické scénáře The Smith model, založené na skutečném pravděpodobnostním rozložení. Součástí ekonomických scénářů jsou deflátory[3].

V modelu použiji i další hodnoty z ekonomických scénářů, konkrétně výnos z akcií i_k^{Equity} v roce k, jednoletou sazbu bezkupónového dluhopisu ${}^1i_k^{ZCB}$ v roce k. Podrobněji se těmto hodnotám budu věnovat na konci podkapitoly (3.7) při popisu stochastického modelu. Jelikož tvorba vlastních ekonomických scénářů by svým obsahem a komplexností stačila na samostatnou diplomovou práci a cílem této práce není se touto problematikou zabývat, použiji data z již zhotovených ekonomických scénářů.

Podíly na zisku

Pro účely připisování podílů na zisku potřebuji znát podíl připisovaných podílů na zisku. Nechť Δ značí procento výnosu z finančního umístění[4], které se společností zadrží a není určeno pro podíly na zisku pojistníkům. Toto procento stanovuje obvykle management společnosti, nechť je tedy $\Delta = 25\%$. Další veličinou v rámci podílů na zisku je i_k^{Real}, vyjadřující známou výši procenta připsaných podílů na zisku, včetně TÚM v roce k. Výši těchto připsaných podílů na zisku předpokládám rovnu 4%.

Skutečné náklady, nákladová inflace

Již jsem popisoval kalkulované náklady sloužící při výpočtu rezerv, nyní se zaměřím na odhady skutečných nákladů pojišťovny, tedy jako podkladů druhého řádu. Do těchto nákladů se však neřadí provize, které jsou kalkulovány zvlášť.

V modelu uvažuji následující typy nákladů:

(1) ${}^{InitPP}Exp$ počáteční náklady související s počátkem pojistné smlouvy. Tyto náklady předpokládám nezávislé na nákladové inflaci.

(2) ${}^{RenPP}Exp$ správní náklady související s následným spravováním pojistné smlouvy.
   (a) ${}^{RenPP}Exp_{ind}^{Fix}$ fixní správní náklady nezávislé na nákladové inflaci. Jsou náklady, které jsou pevně stanovené a nezávisí na počtu smluv v portfoliu.
   (b) ${}^{RenPP}Exp_{dep}^{Fix}$ fixní správní náklady závislé na nákladové inflaci.
   (c) ${}^{RenPP}Exp_{ind}^{Var}$ proměnné správní náklady nezávislé na nákladové inflaci. Jde o náklady, jejichž celková výše se liší podle počtu smluv v portfoliu.
   (d) ${}^{RenPP}Exp_{dep}^{Var}$ proměnné správní náklady závislé na nákladové inflaci. Tyto náklady jsou závislé na počtu smluv a zároveň se meziročně navyšují.

Konkrétní nejlepší odhady budoucích nákladů na jednu pojistnou smlouvu jsou uvedeny opět v příloze.

Některé druhy nákladů tedy závisí na budoucí inflaci, tj. v čase dochází k navyšování těchto nákladů. V souvislosti s náklady se tak často hovoří o tzv. nákladové inflaci. V modelu použiji nákladovou inflaci rovnou cílové inflaci podle

[3] Více o deflátorech např. v [**15**].

[4] Podrobněji bude popsáno při popisu systému podílů na zisku v části (3.7).

ČNB[5]. Inflační cíl podle [**21**] stanovila ČNB od roku 2010 na 2%. Tuto hodnotu použiji v rámci modelu pro všechny roky.

Provize

Další formou nákladů pro pojišťovnu jsou provize. Provize slouží jako odměna pro zprostředkovatele (získatele) za sjednávání pojistných smluv. Za sjednání každé pojistné smlouvy přísluší získateli příslušná **získatelská provize** $Comm^{Init}$ a v případě trvání smlouvy **následné provize** $Comm^{Ren}$, případně další typy provizí. V případě stornování smlouvy je získatel povinen vrátit určitou část provizí $Comm_t^{Claw}$, která závisí na době, ve které ke stornu došlo. Výše provize je zpravidla určena jako dané procento z pojistné částky, resp. z pojistného.

Protože mým cílem není zkoumat provizní systém, budu pro jednoduchost uvažovat, že pojištění sjednává jen jedna získatelská síť, nebo že je sazba provizí stejná pro všechny získatelské sítě. Výše získatelské provize je v mém případě rovna 3% z pojistné částky a výše následné provize je rovna 3,5% ročního pojistného. Následná provize se vyplácí jednoročně k datu výročí smlouvy po dobu pěti let. V případě pojistné smlouvy na dobu pět let je počet následných provizí roven třem. Nechť p značí počet těchto následných provizí.

V případě stornování během prvních třech let trvání smlouvy se získateli odúčtuje příslušná část provizí ${}^{Claw}Comm_t^{Perc}$, uvedená v následující tabulce.

Storno v roce trvání smlouvy	Procento vrácených provizí
1. rok	100%
2. rok	50%
3. rok	25%
další roky	0%

Výši vrácených provizí může ovlivnit i procento $Comm^{ClawPC}$ úspěšnosti vymáhání těchto storno provizí. V modelu předpokládám 90% úspěšnost při vymáhání storno provizí.

Blíže určím provize ještě při popisu modelu, kde se vrátím k provizím při popisu způsobu jejich modelování.

Vývojové koeficienty

Posledním nepopsaným výpočetním podkladem jsou vývojové koeficienty jako podklady druhého řádu, vyjadřující zpoždění ve vyplacení plnění od nahlášení pojistné události.

V modelu použiji vývojové koeficienty uvedené v [**14**]. Tabulka s konkrétními hodnotami je uvedena v příloze.

[5] Česká národní banka.

3.4. Konstrukce generačních úmrtnostních tabulek

V této části vyložím postup, jakým jsem konstruoval generační úmrtnostní tabulky pro použití v modelu. Znalosti jsem čerpal zejména z [**3**] a [**4**] a následně aplikoval na dostupná data.

Základním zdrojem dat pro konstrukci jsou úmrtnostní tabulky ČR z let 1920 až 2006, zveřejněné Českým statistickým úřadem (ČSÚ). Pravděpodobnosti úmrtí v populaci $q^{zdroj}(x,k)$ jsou pro všechny věky od 0 do 103 let a zvlášť pro muže a ženy. Pravděpodobnosti $q^{zdroj}(x,k)$ tedy mimo pohlaví závisí na věku x a kalendářním roce k, pro který pravděpodobnost platí.

Index určující pohlaví jsem nezahrnul do značení záměrně, jelikož konstrukci generačních úmrtnostních tabulek jsem prováděl zvlášť pro muže a ženy, až na konečné úpravy (viz. úpravy koeficientů $G(x)$ popsány dále).

Z množiny dat jsem vyřadil data z let 1940 až 1945, jelikož jsou v těchto letech pravděpodobnosti úmrtí výrazně odlišné, vzhledem ke světové válce.

Použité hodnoty jsem zlogaritmoval pomocí přirozeného logaritmu, výsledné hodnoty vykazovaly přibližný lineární trend. Na tyto hodnoty jsem tedy aplikoval lineární regresi. Proložil jsem logaritmy pravděpodobností úmrtí přímky, a to zvlášť pro data ze tří období i. Nechť Q_i je množina kalendářních let, použitých v lineární regresi aplikované na data z období i, pak pro Q_i platí následující vztahy

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{1920,\dots,1939,1946,\dots,2006\}, \\ Q_2 &= \{1950,\dots,2006\}, \\ Q_3 &= \{1990,\dots,2006\}. \end{aligned}$$

Při regresi jsem použil obecný vzorec vyjádřený v následující rovnici

$$\ln(q_i^{zdroj}(x,k)) = A_i(x) - F_i(x)k, \quad x = 0,\dots,103,\ k \in Q_i,\ i = 1,2,3.$$

Pro obě pohlaví jsem tak získal vektory funkce $F_i(x)$, příslušející třem obdobím, na která jsem regresi aplikoval. Je zřejmé, že pro různá období vyšly hodnoty koeficientů rozdílné.

Oproti minulosti se pravděpodobnosti úmrtí výrazně změnily, zejména díky vývoji v lékařství a zvyšování sociální úrovně obyvatelstva. Otázkou zůstává, které koeficienty použít pro projekci generačních úmrtnostních tabulek. Provedl jsem tedy vážený průměr funkcí $F_i(x)$ podle příslušných období i s větším důrazem na hodnoty koeficientů z delších období. Hodnoty koeficientů z nejkratšího období totiž vykazovaly výrazné kolísání v závislosti na věku x. Konkrétní použité váhy na koeficienty $F_i(x)$ ukazuje následující tabulka.

i	Použité roky	Váha
1	1920-2006	2
2	1950-2006	1,5
3	1990-2006	1

Výslednou funkci

$$F(x) = \frac{2F_1(x) + 1,5F_2(x) + F_3(x)}{4,5},\ x = 0,\dots,103$$

jsem dále vyhladil a upravil tak, aby výsledná funkce $G(x)$ splňovala některé žádoucí vlastnosti, které mají vliv na použitý model

$$\ln(q^{zdroj}(x,k)) = A(x) - G(x)k. \tag{1}$$

Vyhlazení jsem provedl pomocí klouzavých průměrů 11. řádu se středem ve vyrovnávané hodnotě a v krajích klouzavé průměry nižších řádů. Takto jsem získal funkci $F^{avrg}(x)$.

Dále jsem záporné hodnoty položil rovné 0, aby funkce $G(x)$ byla nezáporná, a následně jsem funkci upravil tak, aby byla nerostoucí s rostoucím věkem x. Tato úprava se dělá za účelem, aby v modelu (1) s rostoucím věkem x byly rostoucí pravděpodobnosti úmrtí. Tuto úpravu jsem provedl „odpředu“, abych výsledné pravděpodobnosti úmrtí případně zvýšil, než snížil, jelikož by mohlo dojít k podhodnocení pravděpodobností úmrtí. Tento způsob úpravy jsem použil, protože výsledné pravděpodobnosti mají sloužit pro produkt s převažujícím rizikem smrti. Úpravou „odpředu“ myslím úpravu $F(x)$ směrem od věku 0 k vyšším věkům. Jde tedy o obrácený postup použitý v [**4**], kde se pravděpodobnosti tvoří naopak pro důchodové pojištění a penzijní připojištění s převažujícím rizikem dožití.

Výsledkem této úpravy je, že funkce $G(x)$ je nerostoucí s rostoucím věkem. Tento postup lze sepsat pomocí následujícího algoritmu

$$\begin{aligned} G(0) &= F^{avrg}(0), \\ G(x) &= G(x-1), \quad \text{když } F^{avrg}(x) > G(x-1), \\ &= F^{avrg}(x), \quad \text{když } F^{avrg}(x) \geq 0, \\ &= 0, \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

Poslední úpravou koeficientů bylo splnění podmínky, že pro každý věk x je $G(x)$ pro muže menší nebo rovno $G(x)$ pro ženy. Splněním této podmínky se v modelu (1) dosáhne nižších pravděpodobností úmrtí u žen než u mužů. Konkrétní úpravu jsem provedl případným snížením mužských koeficientů $G(x)$ na hodnotu ženských koeficientů $G(x)$.

Výsledné koeficienty $G(x)$ jsem konečně použil pro projekci budoucích pravděpodobností úmrtí. Projekci jsem provedl podle následujícího vztahu

$$q^{gen}(x,k) = q^{zdroj}(x,2006)e^{-G(x)(k-2006)}, \; k = 2006, \ldots, 2110.$$

Vygenerované pravděpodobnosti úmrtí $q^{gen}(x,k)$ jsem nakonec ještě vyhladil pomocí klouzavých průměrů 3. řádu se středem ve vyrovnávané hodnotě a s dvojnásobnou váhou u vyrovnávané hodnoty. Pro věk 0 jsem neaplikoval žádné úpravy a pro věk 103 jsem položil pravděpodobnost úmrtí rovnou 1 (pokud tak již nebylo). Popsané vyhlazení pravděpodobností znázorňují tyto rovnice

$$\begin{aligned} q^{pop}(x,k) &= \frac{q^{gen}(x-1,k) + 2q^{gen}(x,k) + q^{gen}(x+1,k)}{4}, \\ q^{pop}(0,k) &= q^{gen}(0,k), \\ q^{pop}(103,k) &= 1, \quad \text{pro } x = 1, \ldots, 102, \; k = 2006, \ldots, 2110. \end{aligned}$$

Jak jsem již zmínil, výsledné generační úmrtnostní tabulky, stejně jako celá konstrukce těchto tabulek, jsou uloženy včetně výsledných grafů na CD příloze. V příloze na konci této práce pro ilustraci uvádím grafy pro muže a ženy zobrazující $F_i(x)$, zprůměrované $F(x)$ a výsledné vyhlazené $G(x)$, použité pro generování budoucích pravděpodobností úmrtí. Dále pak graf srovnání koeficientů pro muže a ženy.

3.5. Úprava podkladů pro výpočty

Sice jsem se již předpokladům věnoval, ještě ale popíši jejich konečné úpravy před použitím v modelu. Zejména půjde o úpravy z ročních na měsíční hodnoty, protože můj model je založený na měsíční bázi, zatímco většina podkladů na roční.

Pravděpodobnosti úmrtí zdravé osoby

V předchozí části (3.4) jsem sestrojil generační úmrtnostní tabulky pro obě pohlaví a pro věky od 0 do 103 let v letech 2006 až 2110. Jde o roční pravděpodobnosti úmrtí v populaci. Pro výpočty potřebuji měsíční hodnoty, navíc upravené o počáteční selekci.

První předúpravou je vztažení pravděpodobností ke smlouvě. Vezmu získané populační pravděpodobnosti úmrtí $q^{pop}(x,k)$, kde x je věk a k je kalendářní rok, ke kterému se pravděpodobnost vztahuje. Předpokládám, že pojištěný je narozený v měsíci počátku smlouvy, tj. v $t = 1$ je přesně ve věku x. Jde o běžný předpoklad používaný v praxi.

Pak vztáhnu pravděpodobnosti od kalendářních let k roku trvání pojištění T. Nahradím tedy pravděpodobnosti úmrtí $q^{pop}(x,k)$ odpovídajícími pravděpodobnostmi q_T^{pop}. To mohu interpretovat tak, že pro každou smlouvu vygeneruji nové úmrtnostní tabulky s pravděpodobnostmi úmrtí q_T^{pop} odpovídajícími věku pojištěné osoby, kde věk roste stejně s rokem trvání pojistné smlouvy.

Dále potřebuji tyto pravděpodobnosti vyjádřit pro každý měsíc t. Použiji následující vztahy

$$\begin{aligned} q_t^{pop} &= 1, \quad t = n+1 \\ &= q_T^{pop}, \quad \text{mult}\,(t-1;12) \\ &= 0, \quad t \leq 0, \text{ nebo } t > n+1 \\ &= q_{t-1}^{pop}, \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

Na tyto roční pravděpodobnosti úmrtí z populace, vztažené ke smlouvě, aplikuji počáteční selekci sel_t, popsanou dříve. Pomocí rovnic vyjádřím selekční koeficient takto

$$\begin{aligned} sel_t &= 60 + \frac{2}{3}t, \quad 0 \leq t \leq 60, \\ &= 100, \quad 60 < t \leq n+1, \\ &= 0, \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

Aplikací selekce na populační pravděpodobnosti

$$q_t^{kmen} = q_t^{pop} \frac{sel_t}{100},$$

získám hodnoty ročních pravděpodobností úmrtí q_t^{kmen} v pojistném kmeni.

Předposledním krokem je lineární interpolace. Interpolovat budu hodnoty v časech různých od výročí počátku smlouvy, tj. budu interpolovat vždy mezi hodnotami, pro které $t = 12m$, kde m je přirozené číslo. Výstupem jsou pravděpodobnosti q_t^{interp}.

Nakonec převedu tyto interpolované roční pravděpodobnosti úmrtí q_t^{interp} na měsíční hodnoty q_t, a to podle známého vztahu

$$1 - q_t = \sqrt[12]{1 - q_t^{interp}}.$$

Výsledkem jsou měsíční pravděpodobnosti úmrtí pro zdravého pojištěného q_t během t. měsíce pojištění. Tyto pravděpodobnosti jsou již připravené pro použití v modelu.

Pravděpodobnosti úmrtí invalidní osoby

Jak jsem již uvedl dříve, zdrojem pro pravděpodobnosti úmrtí invalidních osob q_x^{Inv} je [**3**]. Pravděpodobnosti jsou v tomto zdroji jen v rámci věkových skupin a navíc bez rozlišení pohlaví, nebo závislosti na kalendářním roce.

V modelu tedy nepoužiji přímo tyto pravděpodobnosti, ale vypočítám s jejich pomocí koeficienty c_x^{Inv}, které použiji k úpravě pravděpodobností úmrtí pro celou populaci $q^{pop}(x,k)$. Tyto koeficienty vypočítám pro každý věk x jako podíl pravděpodobností úmrtí invalidní osoby q_x^{Inv} a pravděpodobností úmrtí v celé populaci $q^{zdroj}(x, 1996)$, které navíc upravím na pravděpodobnosti úmrtí $q_{skup}^{zdroj}(x, 1996)$ pro věkové intervaly podobně, jako u pravděpodobností q_x^{Inv}, abych zajistil konzistenci dat pro výpočet koeficientů c_x^{Inv}. Koeficienty c_x^{Inv} určím zvlášť pro muže a pro ženy. Koeficienty navíc omezím zdola hodnotou 1, aby výsledné pravděpodobnosti úmrtí invalidní osoby byly pro každý věk větší, nebo rovny pravděpodobnostem úmrtí zdravého jedince. Konstrukci ukazuje následující rovnice

$$c_x^{Inv} = \max\left(1; \frac{q_x^{Inv}}{q_{skup}^{zdroj}(x, 1996)}\right).$$

V modelu pak použiji přímo pravděpodobnosti úmrtí q_t^{pop}, které upravím o vypočtené koeficienty c_x^{Inv} jejich vynásobením. Výsledné pravděpodobnosti interpoluji a převedu na měsíční hodnoty zcela analogicky, jako v případě pravděpodobností úmrtí zdravé osoby. Konečným výstupem pro použití v modelu jsou pak pravděpodobnosti úmrtí invalidní osoby q_t^i během t. měsíce trvání pojištění.

V případě těchto pravděpodobností nepoužiji na zdrojová data žádnou selekci. Důvodem je předpoklad, že pravděpodobnost úmrtí invalidního jedince je stejná v rámci celé populace i v rámci pojistného kmene, a to i v prvních letech pojištění.

Pravděpodobnosti invalidizace

Podobně jako u pravděpodobností úmrtí invalidních, je i zde mým zdrojem [**3**]. Opět jsou zde pravděpodobnosti pouze pro věkové skupiny, nezávislé na pohlaví i na kalendářním roce.

Zdrojem tedy jsou pravděpodobnosti i_x^{Inv}. Z těchto hodnot se, podobně jako v případě pravděpodobností úmrtí, stanoví hodnoty v každém měsíci pojištění t a poté se pravděpodobnosti interpolují a převádí na měsíční hodnoty opět analogicky, jako v případě pravděpodobností úmrtí.

Výsledkem jsou i_t^i měsíční pravděpodobnosti invalidizace zdravé osoby během měsíce t.

Pravděpodobnosti reaktivace

V případě pravděpodobností reaktivace, tedy pravděpodobností uzdravení invalidní osoby, je situace velice podobná. Zdrojem jsou pravděpodobnosti reaktivace r_x^{Inv} z [**3**], které jsou taktéž pouze pro věkové skupiny a jsou nezávislé na pohlaví, či kalendářním roku.

Pravděpodobnosti se opět analogicky stanoví pro každý časový okamžik t, následně interpolují a převedou na měsíční pravděpodobnosti.

Výsledkem jsou měsíční pravděpodobnosti reaktivace r_t^i během měsíce t, které použiji pro další výpočty.

Pravděpodobnosti storna

Jelikož mám jako zdrojová data z [**14**] již měsíční hodnoty pravděpodobností storna s_t v měsíci t, nepotřebuji provádět žádné další úpravy.

Úrokové míry

Jako zdrojová data mám roční úrokové míry i_k^{RFR}. Protože model je založený na měsíční bázi, potřebuji také měsíční hodnoty úrokových měr.

Nejprve potřebuji mít roční hodnoty vyjádřené pomocí času trvání pojištění t. Toho dosáhnu jednoduše načtením roční hodnoty úrokové míry vždy v lednu podle kalendářního roku a v ostatních měsících použitím předcházející hodnoty. Výsledkem jsou veličiny i_t^{RFR}.

Dalším krokem je přechod k měsíčním úrokovým mírám i_t^{mRFR}. K tomu použiji dobře známý vztah

$$1 + i_t^{mRFR} = \sqrt[12]{1 + i_t^{RFR}}.$$

3.6. Vstupní data

Pro výpočet potřebuji mimo výše popsaných výpočetních podkladů také informace o smlouvě, tedy vstupní data. V Prophetu jsou tyto informace ve formě tabulky, kde každý řádek přísluší jedné pojistné smlouvě a ve sloupcích jsou uloženy jednotlivé informace sloužící k výpočtu. Řádky těchto tabulek se nazývají modelpointy.

Ve sloupcích se mohou nacházet různé údaje, lišící se podle typu produktu a dat potřebných k modelování.

Protože pro velká portfolia by bylo obtížné, ne-li nemožné, počítat stochastické výpočty pro každou pojistnou smlouvu zvlášť, seskupují se za tímto účelem do jednoho řádku data z více pojistných smluv. Takto se seskupují smlouvy se stejnými, nebo podobnými vlastnostmi, například stejné pohlaví a věk. Některé údaje se zprůměrují, např. pojistné, jiné se například sečtou apod.

V mém modelu potřebuji v modelpointech tyto údaje:

x**:** vstupní věk pojištěného,
Sex**:** pohlaví pojištěného,
n**:** doba trvání pojištění v měsících,
NP**:** počet pojistných smluv v jednom modelpointu k datu výpočtu,

$Freq$: frekvence placení pojistného (1 - roční, 2 - pololetní, 4 - čtvrtletní, 12 - měsíční),
$Prem^{Annual}$: roční pojistné,
Bon^{Init}: počáteční stav podílů na zisku k datu výpočtu,
Day: den počátku pojistné smlouvy,
$Month$: měsíc počátku pojistné smlouvy,
$Year$: rok počátku pojistné smlouvy,
$Status$: stav pojištěného k datu výpočtu (1 - zdravý, 2 - invalidní).

Dále v modelu použiji proměnnou N, určující dobu trvání pojištění v letech. Platí

$$N = \frac{n}{12}.$$

3.7. Popis modelu

Už jsem popsal zdroje informací potřebných pro modelování a připravil výpočetní podklady pro výpočty, nyní se zaměřím na popsání modelu. Je potřeba rozlišit různé typy modelů, které v práci používám. Konkrétně jde o:

- Deterministický model: jde o model založený na pevných výpočetních podkladech a zpravidla použití nejlepších odhadů při výpočtu budoucích finančních toků.
- Stochastický model: je model, ve kterém je výpočet založen na velkém počtu stochasticky vytvořených scénářů budoucího vývoje. Obvykle se jedná o stochastický model úrokové míry v budoucnosti. Následně se vypočtou hodnoty pro jednotlivé scénáře a výsledek se vypočte jako střední hodnota z hodnot jednotlivých ekonomických scénářů.

Stochastický model v mém případě odpovídá deterministickému modelu aplikovanému na 1000 ekonomických scénářů.

Při stanovení a analýze přirážky za úmrtnost budu používat deterministický model a stochastický model. Následně popsané části modelu jsou společné pro oba použité modely, pokud nebude uvedeno jinak.

Ještě poznamenám, že pokud nebude uvedeno jinak, popisuji model pro výpočet jedné smlouvy, tj pro $NP = 1$.

Začnu u základních prvků produktu, tedy u dekrementů.

Dekrementy

Dekrementy se rozumí např. počet smluv v platnosti, počet stornovaných smluv, dožitých smluv a další stavové přechody v modelu. V modelu zavedu tyto stavy:

- L_t^S: počet živých smluv, tj. v platnosti (in force), na počátku měsíce t,
- L_t^K: počet živých smluv, tj. v platnosti (in force), na konci měsíce t,
- A_t^S: počet aktivních (neinvalidních) smluv na počátku měsíce t,
- A_t^K: počet aktivních (neinvalidních) smluv na konci měsíce t,
- I_t^S: počet invalidních smluv na počátku měsíce t,
- I_t^K: počet invalidních smluv na konci měsíce t,
- S_t: počet stornovaných smluv během měsíce t,

- M_t: počet dožitých smluv v měsíci t,
- D_t: počet ukončených smluv v důsledku smrti pojištěného během měsíce t,
- IN_t: počet zinvalidněných smluv během měsíce t,
- RE_t: počet reaktivovaných smluv během měsíce t.

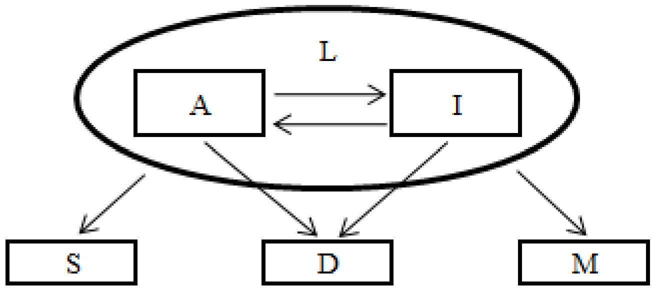
Mezi stavy může dojít k určitým přechodům, pro jistotu uvádím značení jednotlivých pravděpodobností přechodů:

- q_t^a: pravděpodobnost úmrtí aktivní osoby[6] během měsíce t,
- q_t^i: pravděpodobnost úmrtí invalidní osoby během měsíce t,
- i_t^i: pravděpodobnost invalidizace aktivní osoby v měsíci t,
- r_t^i: pravděpodobnost reaktivace invalidní osoby v měsíci t,
- s_t: pravděpodobnost storna během měsíce t.

Ještě pro úplnost zavedu „pravděpodobnost“ dožití m_t, nejde však o pravděpodobnost, ale představuje pouze indikátor pro dožití. Pro m_t platí

$$\begin{aligned} m_t &= 1, \quad t = n+1, \\ &= 0, \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

Obrázek níže ukazuje vztah jednotlivých stavů a možnosti přechodů mezi těmito stavy.



Nyní pomocí rovnic popíši pohyb smluv v modelu a jejich výpočet.

$$\begin{aligned} L_t^K &= L_t^S - S_t - D_t, \quad Start_M < t \leq n, \\ L_t^S &= L_{t-1}^K - M_t, \quad Start_M < t \leq n+1, \\ A_t^K &= A_t^S - D_t^a - S_t^a - IN_t + RE_t, \quad Start_M < t \leq n, \\ A_t^S &= A_{t-1}^K(1-m_t), \quad Start_M < t \leq n+1, \\ I_t^K &= I_t^S - D_t^i - S_t^i + IN_t - RE_t, \quad Start_M < t \leq n, \\ I_t^S &= I_{t-1}^K(1-m_t), \quad Start_M < t \leq n+1, \\ S_t &= S_t^a + S_t^i, \quad Start_M < t \leq n \end{aligned} \tag{2}$$

[6]Odpovídá pravděpodobnostem úmrtí q_t.

$$\begin{aligned}
S_t^a &= (A_t^S s_t(1-0,5q_t^a)), \quad Start_M < t \leq n\\
S_t^i &= (I_t^S s_t(1-0,5q_t^i)), \quad Start_M < t \leq n\\
D_t &= D_t^a + D_t^i, \quad Start_M < t \leq n\\
D_t^a &= (A_t^S q_t^a(1-0,5s_t)), \quad Start_M < t \leq n\\
D_t^i &= (I_t^S q_t^i(1-0,5s_t)), \quad Start_M < t \leq n\\
IN_t &= A_t^S i_t, \quad Start_M < t \leq n\\
RE_t &= I_t^S r_t, \quad Start_M < t \leq n\\
M_t &= L_{t-1}^K m_t, \quad Start_M < t \leq n+1,\\
L_{Start_M}^K &= NP,\\
A_{Start_M}^K &= NP, \quad \text{je-li } Status = 1,\\
A_{Start_M}^K &= 0, \quad \text{je-li } Status = 2,\\
I_{Start_M}^K &= NP, \quad \text{je-li } Status = 2,\\
I_{Start_M}^K &= 0, \quad \text{je-li } Status = 1.
\end{aligned}$$

Nyní můžu modelovat vývoj počtu smluv ve stávajícím portfoliu. Zaměřím se proto na popis stanovení pojistného, pojistné částky a rezervy. K tomu nejdřív potřebuji vypočítat určitá komutační čísla a aktuárské funkce.

Aktuárské funkce a komutační čísla

Už jsem uvedl, že při těchto výpočtech se používají garantované pravděpodobnosti úmrtí 1. řádu q_x^{val}. Rovněž jsem uváděl, že pro ženy se použijí pravděpodobnosti úmrtí pro věk o 5 let nižší, při následujícím popisu uvažuji q_x^{val} již jako pravděpodobnost případně o 5 let posunutou.

I zde použiji předpoklad o shodnosti data narozenin pojištěného a počátku pojištění podobně jako u pravděpodobností 2. řádu v kapitole (3.5). Mohu tedy pravděpodobnosti úmrtí vyjádřit také v závislosti na roku trvání pojištění T, tj jako q_T^{val}.

Tyto pravděpodobnosti potřebuji pro každý měsíc t a použiji k tomu analogický vztah jako v případě pravděpodobností úmrtí 2. řádu:

$$\begin{aligned}
q_t^{val} &= q_T^{val}, \quad \text{mult}\,(t-1;12)\,,\\
&= 0, \quad t \leq 0, \text{ nebo } t > n+12,\\
&= q_{t-1}^{val}, \quad \text{jinak.}
\end{aligned}$$

Nyní mohu stanovit tabulkový počet žijících l_t^{val}. Pro $t=0$ položím $l_0^{val}=1$ a dále počítám

$$\begin{aligned}
l_t^{val} &= l_{t-12}^{val}(1-q_{t-11}^{val}), \quad \text{mult}\,(t;12)\,,\\
&= 0, \quad \text{jinak.}
\end{aligned}$$

Za použití diskontního faktoru $v^{val} = 1/(1+i^{TUM})$ mohu dál počítat dobře známá komutační čísla a aktuárské funkce tak, jak jsou uvedeny například v [**3**].

Pojistné

V modelu potřebuji toky spojené s placením pojistného. Např. budoucí platby pojistného a další toky spojené s pojistným. V této části zavedu funkce týkající se pojistného.

První takovou funkcí je indikátor platby pojistného Ind_t^{Prem}, který v každém měsíci pojištění určí, zda je v daném měsíci předpokládáno zaplacení pojistného. Funkci definuji takto

$$\begin{aligned} IND_t^{Prem} &= 1, \quad 0 < t \leq n \text{ a mult}\left((t+11)Freq; 12\right), \\ &= 0, \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

Díky této proměnné můžu jednoduše definovat další funkci $Prem_t^{IncPP}$, ukazující v každém měsíci výši přijatého pojistného na pojistné smlouvě. Výpočet ukazuje následující vztah

$$Prem_t^{IncPP} = Prem^{Annual}\frac{1}{Freq}IND_t^{Prem}, \quad 0 < t \leq n.$$

Konečně můžu vypočítat i výši celkového přijatého pojistného v čase t. K tomu mi bude sloužit proměnná $Prem_t^{Inc}$, kterou stanovím dle vyjádření

$$Prem_t^{Inc} = Prem_t^{IncPP}L_t^S, \quad 0 < t \leq n.$$

Další potřebnou funkcí pro výpočty je budoucí přijaté pojistné $Prem_t^{Fut}$, které určuje hodnotu, jakou zbývá ještě zaplatit do konce placení pojistného, resp. do konce pojištění. Výpočet této proměnné je založen na rekurzivním vzorci, počítaném od konce pojištění zpět. Vše ukazují následující vztahy

$$\begin{aligned} Prem_t^{Fut} &= 0, \quad t = n, \\ &= Prem_{t+1}^{Fut} + Prem_{t+1}^{IncPP}, \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

V další části budu potřebovat ještě jednu proměnnou. Nechť P^L je netto pojistné a zároveň brutto pojistné za zproštění od placení pojistného na jednotkovou pojistnou částku. Položím $P^L = 0,002$.

Výpočet pojistné částky, brutto/netto pojistného

Protože mám spočítaná komutační čísla a stanovené kalkulované náklady i ostatní potřebné vstupy, můžu provést výpočet pojistné částky a dalších základních veličin v modelu.

Nejprve se zaměřím na výpočet pojistného a pojistné částky. V uvažovaném produktu si pojistník stanoví výši lhůtního pojistného a frekvenci placení pojistného a na základě těchto informací se vypočte pojistná částka.

V modelpointech jsou tyto informace zachyceny v proměnné $Prem^{Annual}$, představující roční pojistné, které je vypočtené jako součin lhůtního pojistného a frekvence placení pojistného $Freq$, která je rovněž v modelpointech.

Výpočet pojistné částky je proveden v několika krocích. Nejprve se vypočítá měsíční pojistné pro pojistnou částku 10 000 Kč, kde se zvlášť počítá pojistné spojené s rizikem smrti ${}^{Death}B_{x,N\rceil}^{(12)}$ a pojistné na dožití ${}^{Mat}B_{x,N\rceil}^{(12)}$. Výpočet se provádí podle vzorců

$$
{}^{Death}B^{(12)}_{x,N\rceil} = \left[10000 \frac{1,07}{12} \frac{A^{10}_{x,N\rceil} + \alpha + (\beta_1 + \beta_2 + P^L)\ddot{a}_{x,N\rceil}}{(1-\gamma)\ddot{a}_{x,N\rceil} - {}_{1|}\ddot{a}_{x,p\rceil}\alpha_1} \right],
$$

$$
{}^{Mat}B^{(12)}_{x,N\rceil} = \left[10000 \frac{1,07}{12} \frac{A^{01}_{x,N\rceil}}{(1-\gamma)\ddot{a}_{x,N\rceil} - {}_{1|}\ddot{a}_{x,p\rceil}\alpha_1} \right].
$$

V dalším kroku se pro měsíční pojistné 100 Kč vypočítá pojistná částka

$$
SA^{(12)}_{x,N\rceil} = \left[\frac{100}{\frac{{}^{Death}B^{(12)}_{x,N\rceil} + {}^{Mat}B^{(12)}_{x,N\rceil}}{10000}} \right].
$$

Nakonec se za použití měsíčního pojistného $B^{(12)}$, které je rovno jedné dvanáctině ročního pojistného $Prem^{annual}$, vypočítá výsledná pojistná částka

$$
SA = \left[\frac{B^{(12)}}{100} SA^{(12)}_{x,N\rceil} \right].
$$

Mám již stanovenou pojistnou částku SA, mohu tedy stanovit vzorec pro výpočet ryzího pojistného (netto pojistné) a tarifního pojistného (brutto pojistné). Ryzí pojistné se určí ze vztahu

$$
P^{Netto} = \left[SA \left(\frac{A_{x,N\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}} + P^L \right) \right].
$$

Pro výpočet brutto pojistného platí následující vyjádření

$$
\begin{aligned}
B^{Brutto} = \Bigg[& SA \frac{A^{10}_{x,N\rceil} + \alpha + \beta_1 \ddot{a}_{x,N\rceil} + \beta_2 \ddot{a}_{x,N\rceil} + P^L \ddot{a}_{x,N\rceil}}{(1-\gamma)\ddot{a}_{x,N\rceil} - {}_{1|}\ddot{a}_{x,p\rceil}\alpha_1} \\
& + SA \frac{A^{01}_{x,N\rceil}}{(1-\gamma)\ddot{a}_{x,N\rceil} - {}_{1|}\ddot{a}_{x,p\rceil}\alpha_1} \Bigg].
\end{aligned}
$$

V další části se zaměřím na kalkulace rezerv.

Rezerva na nezasloužené pojistné

Rezerva se vypočítá jako část předepsaného pojistného vztahující se k budoucím účetním obdobím. Tato část se vypočte jednoduše pomocí metody pro rata temporis. Výše této rezervy V_t^{UepPP} v čase t se ještě vynásobí počtem smluv v platnosti L_t^K a určí se tak celková rezerva na nezasloužené pojistné V_t^{Uep} v čase t.

Rezerva pojistného životních pojištění

Nyní uvedu vzorce pro výpočet netto rezervy v závislosti na roce pojištění r

$$
\begin{aligned}
{}_rV^{Netto}_{x,N\rceil} &= SA\left(A_{x+r,N-r\rceil} - \frac{A_{x,N\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}}\ddot{a}_{x+r,N-r\rceil}\right) \\
&\quad + B^{Brutto}\alpha_1\left({}_{1|}\ddot{a}_{x+r,p-r\rceil} - \frac{{}_{1|}\ddot{a}_{x,p\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}}\ddot{a}_{x+r,N-r\rceil}\right), \qquad r = 0, \\
{}_rV^{Netto}_{x,N\rceil} &= SA\left(A_{x+r,N-r\rceil} - \frac{A_{x,N\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}}\ddot{a}_{x+r,N-r\rceil}\right) \\
&\quad + B^{Brutto}\alpha_1\left({}_{1|}\ddot{a}_{x+r,p+1-r\rceil} - \frac{{}_{1|}\ddot{a}_{x,p\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}}\ddot{a}_{x+r,N-r\rceil}\right), \qquad 1 \le r \le p, \\
{}_rV^{Netto}_{x,N\rceil} &= SA\left(A_{x+r,N-r\rceil} - \frac{A_{x,N\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}}\ddot{a}_{x+r,N-r\rceil}\right) \\
&\quad - B^{Brutto}\alpha_1\frac{{}_{1|}\ddot{a}_{x,p\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}}\ddot{a}_{x+r,N-r\rceil}, \qquad p < r < N, \\
{}_rV^{Netto}_{x,N\rceil} &= SA, \qquad r = N.
\end{aligned}
$$

Z první rovnice je vidět, že pro $r = 0$ je netto rezerva nulová.

V dalších rovnicích uvedu vyjádření pro brutto rezervu

$$
\begin{aligned}
{}_rV^{Brutto}_{x,N\rceil} &= SA\left(A_{x+r,N-r\rceil} - \frac{A_{x,N\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}}\ddot{a}_{x+r,N-r\rceil}\right) - SA\alpha\frac{\ddot{a}_{x+r,N-r\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}} \\
&\quad + B^{Brutto}\alpha_1\left({}_{1|}\ddot{a}_{x+r,p-r\rceil} - \frac{{}_{1|}\ddot{a}_{x,p\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}}\ddot{a}_{x+r,N-r\rceil}\right), \qquad r = 0, \\
{}_rV^{Brutto}_{x,N\rceil} &= SA\left(A_{x+r,N-r\rceil} - \frac{A_{x,N\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}}\ddot{a}_{x+r,N-r\rceil}\right) - SA\alpha\frac{\ddot{a}_{x+r,N-r\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}} \\
&\quad + B^{Brutto}\alpha_1\left({}_{1|}\ddot{a}_{x+r,p+1-r\rceil} - \frac{{}_{1|}\ddot{a}_{x,p\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}}\ddot{a}_{x+r,N-r\rceil}\right), \qquad 1 \le r \le p, \\
{}_rV^{Brutto}_{x,N\rceil} &= SA\left(A_{x+r,N-r\rceil} - \frac{A_{x,N\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}}\ddot{a}_{x+r,N-r\rceil}\right) - SA\alpha\frac{\ddot{a}_{x+r,N-r\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}} \\
&\quad - B^{Brutto}\alpha_1\frac{{}_{1|}\ddot{a}_{x,p\rceil}}{\ddot{a}_{x,N\rceil}}\ddot{a}_{x+r,N-r\rceil}, \qquad p < r \le N, \\
{}_rV^{Brutto}_{x,N\rceil} &= SA, \qquad r = N.
\end{aligned}
$$

Z výše uvedených rovnic mám vyjádření pro rezervu pojistného životních pojištění v jednotlivých letech trvání pojištění, resp. v datech výročí pojistné smlouvy. V modelu potřebuji tyto hodnoty v každém měsíci trvání pojištění, toho docílím lineární interpolací. Interpolací dostávám hodnoty rezerv V_t^{Netto} a V_t^{Brutto} v každém čase t.

V modelu budu využívat také výši celkové nulované brutto rezervy $V_t^{B,zero}$. Pro její vyjádření slouží následující vztah

$$V_t^{B,zero} = \max(V_t^{Brutto}; 0)L_t^K, \quad t > 0.$$

Rezerva na zproštění od placení pojistného

Jde o rezervu na pojistné plnění v případě zproštění pojistníka od placení pojistného. Nejedná se o plnění v pravém slova smyslu, ale jde o placení pojistného za pojistníka v důsledku plné invalidity pojištěného.

Rezerva na zproštění od placení pojistného V_t^{Inv} se vypočítá jednoduše jako výše budoucího předepsaného pojistného $Prem_t^{Fut}$, které se předpokládá, že bude pojišťovna muset zaplatit. Konkrétní vyjádření pro výpočet této rezervy je

$$V_t^{Inv} = Prem_t^{Fut} I_t^K, \quad t > 0.$$

Rezerva na pojistná plnění (RBNS)

Tento typ rezervy se tvoří na škody vzniklé, nahlášené, ale dosud nezlikvidované. V mém modelu může jít o pojistné plnění v případě smrti pojištěného během trvání pojištění.

V pojištění se mimo RBNS často tvoří i rezerva IBNR na škody vzniklé, ale dosud nenahlášené. Jelikož v mém případě, tj v produktu smíšeného pojištění životního pojištění, je zpoždění v hlášení pojistných událostí zanedbatelné, v modelu tuto rezervu neuvažuji a ani nemodeluji.

Dříve, než začnu počítat výši RBNS rezervy na pojistná plnění v důsledku úmrtí pojištěného V_t^{Death}, je potřeba znát parametr určující periodu tvorby této rezervy. V praxi se běžně používá čtvrtletní perioda $per = 4$, proto ji použiji i zde, ve svém modelu. Rezervu tedy budu tvořit v březnu, červnu, září a prosinci. Pro další výpočty zavedu indikátor těchto měsíců ${}^{Claim}IND_t^{Death}$.

Dalším parametrem je maximální doba zpoždění ve vypořádání škody, tedy v mém případě vyplacení pojstného plnění v důsledku smrti. V modelu uvažuji maximální dobu zpoždění $maxper = 6$, která vyjadřuje 6 období zpátky, tj. 18 měsíců do minulosti.

Základem pro výpočet rezervy je výše pojistného plnění v případě smrti za jednu pojistnou smlouvu $E_t^{DeathPP}$. Tato výše je rovna součtu pojistné částky a připsaných podílů na zisku, tedy

$$\begin{aligned} E_t^{DeathPP} &= SA + Bon_t^{Total}, \quad t = Start_M, \\ &= SA + \frac{Bon_{t-1}^{Total} + Bon_t^{Total}}{2}, \quad Start_M < t \leq n. \end{aligned}$$

Poté se určí celková výše plnění ze vztahu

$$E_t^{Death} = E_t^{DeathPP} D_t.$$

Vždy v časech tvoření rezervy RBNS potřebuji hodnoty škod ${}^{Claim}E_t^{Death}$, jakožto součty celkových plnění za celou periodu per, tj. kumulované škody za celou periodu per. Konkrétně lze použít vyjádření

$${}^{Claim}E_t^{Death} = {}^{Claim}IND_t^{Death} \sum_{j=0}^{2} E_{t-j}^{Death}, \; Start_M \leq t \leq n + 2.$$

Posledním krokem ke stanovení celkové RBNS rezervy je určení celkového odhadu plnění pomocí kumulovaných vývojových koeficientů ${}^{Claim}Coef_j^{Sum}$. Následující vztah určuje konečnou výši rezervy

$$V_t^{Death} = {}^{Claim}IND_t^{Death} \sum_{j=0}^{5} {}^{Claim}E_{t-3j}^{Death} \cdot {}^{Claim}Coef_{j+1}^{Sum}, \; Start_M < t \leq n + 21.$$

V časových okamžicích, kdy se rezerva netvoří, položím V_t^{Death} rovnu hodnotě z předcházejícího měsíce, tj. platí

$$V_t^{Death} = V_{t-1}^{Death}, \quad \text{pro } {}^{Claim}IND_t^{Death} = 0 \text{ a } Start_M < t \leq n + 21.$$

Pojistné plnění - smrt, dožití

Další velmi důležité finanční toky souvisí s pojistným plněním pojistníkovi v důsledku smrti pojištěného, nebo jeho dožití.

Začnu u pojistného **plnění v případě smrti**. Základem pojistného plnění v případě smrti je výše pojistného plnění za jednu smlouvu $E_t^{DeathPP}$ v čase t. Dále je postup podobný jako při tvorbě rezervy V_t^{Death} RBNS na pojistná plnění z úmrtí pojištěného. Postup je stejný až k proměnné ${}^{Claim}E_t^{Death}$, určující kumulovaná pojistná plnění za celou periodu per.

Odlišný je pouze poslední krok výpočtu konečné celkové výše pojistného plnění E_t^{Death} v čase t. V tomto výpočtu se totiž použijí nekumulativní vývojové koeficienty ${}^{Claim}Coef_j$, vyjadřující zpoždění ve vypořádání pojistných událostí. Velikost výsledného plnění v čase t je tedy dána následujícím vztahem

$$E_t^{Death} = {}^{Claim}IND_t^{Death} \sum_{j=0}^{6} {}^{Claim}E_{t-3j}^{Death} \cdot {}^{Claim}Coef_j, \; Start_M < t \leq n + 21.$$

V případě pojistného **plnění při dožití** pojištěného konce pojistné doby je kalkulace ještě jednodušší. Základem je tentokrát výše pojistného plnění při dožití na jedné pojistné smlouvě E_t^{MatPP}. To je rovno sjednané pojistné částce SA a připsaným podílům na zisku Bon_t^{Total} v čase t. Matematické vyjádření ukazuje následující rovnice

$$E_t^{MatPP} = SA + Bon_t^{Total}.$$

Celková výše pojistného plnění E_t^{Mat} se snadno dopočte vynásobením počtem dožitých smluv v čase t, tj. platí vtah

$$E_t^{Mat} = E_t^{Mat} M_t, \quad Start_M < t \leq n + 1.$$

Ještě si definuji předpis pro výši rizikového kapitálu v čase t. Tuto veličinu později využiji při stanovení rizikové přirážky. Pro rizikový kapitál Cap_t^{Risk} v čase t platí

$$Cap_t^{Risk} = \max(E_t^{DeathPP} - \max(V_t^{Brutto}; 0); 0) L_t^K, \quad Start_M \leq t \leq n.$$

Pojistné plnění - zproštění od placení pojistného

Jak jsem zmiňoval již při popisu rezervy na pojistné plnění za zproštění od placení pojistného, nejde přímo o pojistné plnění. Jde totiž o zproštění pojistníka od placení pojistného v důsledku plné invalidity pojištěného. Výše tohoto výdaje E_t^{Inv} v čase t se určí pomocí následujícího vyjádření

$$E_t^{Inv} = Prem_t^{IncPP} I_t^S, \quad Start_M < t \leq n.$$

Odbytné

Další druh pojistného plnění je výplata odbytného v případě stornování smlouvy pojistníkem. Již jsem zmínil odbytné při popisu produktu. Uvedl jsem, že nárok na odbytné vzniká až po jednom roce trvání smlouvy, navíc při splnění určitých podmínek pro vyplacení odbytného. Nyní soustředím svou pozornost na konkrétní stanovení výše odbytného v čase.

Výše odbytného v čase t se stanoví jako výše rezervy pojistného životních pojištění V_t^{Brutto} a připsaných podílů na zisku Bon_t^{Total}, nepřiznají se však podíly na zisku za poslední tři měsíce. Od této částky se odečte poplatek $Surr^{Fee}$ spojený s náklady vzniklými při stornování smlouvy. Velikost tohoto poplatku je rovna 100 Kč.

Podmínky výplaty odbytného jsem zmiňoval v části (3.1), proto je zde nebudu opakovat. Výši odbytného v čase t určím z následující rovnice

$$\begin{aligned} Surr_t^{Val} = & \frac{V_{t-1}^{Brutto} + V_t^{Brutto}}{2} - Surr^{Fee} \\ & + \frac{Bon_{t-3}^{Total} + Bon_{t-4}^{Total}}{2}, \quad \max(Start_M; 13) \leq t \leq n. \end{aligned}$$

Celkové odbytné se stanoví podle následujícího vztahu

$$Surr_t^{Out} = S_t \max(Surr_t^{Val}; 0).$$

Podíly na zisku - stanovení

Systém připisování podílů na zisku je jednou z nejdůležitějších částí modelu. V následujících odstavcích popíši obecný princip podílů na zisku v produktu a konkrétně jejich modelování.

Celý proces lze rozdělit na dvě části. První část je stanovení výše procenta podílů na zisku pro připsání. Druhou částí je samotné připisování podílů na zisku. V této části se zaměřím na první část tohoto procesu.

Procento podílu na zisku se stanovuje vždy k 31. 12. každého roku. Pro stanovení připisované výše podílu na zisku za rok k potřebuji tyto hodnoty:

- Z_k: dosažený výnos z finančního umístění technických rezerv za rok k,
- Z_k^{TUM}: technický úrokový výnos vypočtený ze stavů rezervy pojistného životních pojištění,
- $V_k^{B,zero}$, $V_{k-1}^{B,zero}$: hodnota nulované brutto rezervy na konci roku k, resp. $k-1$,
- Bon_k^{BDIF2}: podíl na zisku připsaný na počátku roku k.

Hodnoty všech použitých veličin s indexem k odpovídají příslušným hodnotám daných veličin v čase t, odpovídajícímu prosinci daného roku k.

Nejprve se stanoví celková část zisku určená k rozdělení pojistníkům $Nadvynos$. Tu lze zjistit z následujícího vztahu

$$Nadvynos = (Z_k - Z_k^{TUM})(1 - \Delta).$$

Výsledné procento $i_k^{nadvynos}$ podílů na zisku připisované pojistníkům nad technickou úrokovou míru[7] i^{TUM} se zjistí z rovnosti

$$Nadvynos = \max(i_k^{nadvynos}; 0)(V_k^{B,zero} + Bon_k^{BDIF2}).$$

V ostatních měsících mimo prosince se hodnota $i_t^{nadvynos}$ položí rovna $i_{t-1}^{nadvynos}$.

Nyní popíši jednotlivé položky podrobněji. Začnu u dosaženého výnosu Z_k. Vše začíná u jednotlivých rezerv, resp. u prostředků určených k investování. Na počátku každého měsíce t mám celkový objem určený k investování, tento objem si označím jako Res_t^{inv}. Hodnota se v každém čase určí jako

$$\begin{aligned} Res_t^{inv} &= V_{t-1}^{Uep} + V_{t-1}^{B,zero} + V_{t-1}^{Inv} + V_{t-1}^{Death} \\ &\quad + Bon_t^{BDIF} - R_t^{Mat}, \quad Start_M < t \le n + 21, \end{aligned}$$

kde R_t^{Mat} znamená rozpuštění části rezervy pojistného životních pojištění na počátku měsíce t, v souvislosti s plněním za dožití smluv a Bon_t^{BDIF} je naopak přidaná hodnota podílů na zisku na počátku měsíce t. Ostatní sčítance odpovídají hodnotám daných rezerv na konci měsíce $t - 1$.

Hodnota R_t^{Mat} se stanoví z následujícího vztahu

$$R_t^{Mat} = V_{t-1}^{Brutto} M_t, \quad Start_M < t \le n + 1.$$

Hodnotu podílů na zisku Bon_t^{BDIF} určím takto

$$Bon_t^{BDIF} = {}^{Decl}Bon_t^{BD} L_{t-1}^{K}.$$

K proměnné ${}^{Decl}Bon_t^{BD}$ se vrátím později při popisu druhé části procesu podílů na zisku.

Na počátku každého měsíce t mám množství určené k investování Res_t^{inv}. Toto množství měsíčně úročím měsíční mírou výnosu z finančního umístění i_t^{mRFR}. Získávám tak výnos z finančního umístění za měsíc t

$$Z_t^{Month} = Res_t^{inv} i_t^{mRFR}.$$

Nakonec se vždy na konci roku určí výnos z finančního umístění za celý rok Z_t

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\min(t;11)} Z_{t-j}^{Month}, \quad t > 0.$$

Další proměnnou je technický úrokový výnos Z_t^{TUM}. Ten se vypočítá zjednodušeně pomocí zúročeného průměrného stavu z nulované brutto rezervy na konci roku $k - 1$ a roku k. Výjimkou je samozřejmě první rok trvání pojištění, kde se bere stav rezervy z měsíce počátku pojištění a neúročí se tedy ani přes celý rok. Vždy v prosinci se tedy určí technický úrokový výnos dle následujícího vtahu

$$Z_t^{TUM} = i^{TUM} \frac{V_{t-\min(t-1;12)}^{B,zero} + V_t^{B,zero}}{2} \frac{\min(t; 12)}{12}, \quad t > 0.$$

[7]Tj. platí $i_k^{nadvynos} = i_k^{Total} - i^{TUM}$.

Poslední proměnnou pro stanovení výše podílu na zisku je Bon_k^{BDIF}, podíl na zisku připsaný na počátku roku k. Tuto hodnotu v každém měsíci t určím z rovnice

$$Bon_t^{BDIF2} = {}^{Decl}Bon_t^{BD} L_t^K.$$

Tím je popsán celý proces stanovení procenta připisovaných podílů na zisku. V další části popíšu způsob připisování podílů na zisku.

Podíly na zisku - připisování

Připisování podílů na zisku probíhá jednak v měsíční frekvenci během roku, ale hlavně jednoročně na konci roku při připisování stanoveného procenta podílů na zisku.

Začnu u popisu ročního připisování. První proměnnou je ${}^{Decl}Bon_t^{BD}$, výše podílů na zisku v čase t před připsáním. Pro tuto veličinu platí vyjádření

$$\begin{aligned} {}^{Decl}Bon_t^{BD} &= Bon^{Init}, \quad t = Start_M, \\ &= {}^{Decl}Bon_{t-1}^{AD}, \quad Start_M < t \leq n. \end{aligned}$$

Další proměnnou je ${}^{Decl}Bon_t^{AD}$, výše podílu na zisku v čase t po připsání. Pro tuto proměnnou platí vztahy

$${}^{Decl}Bon_t^{AD} = Bon^{Init} + (\max(V_t^{Brutto}; 0) + Bon^{Init}) \max(i_t^{Real} - i^{TUM}; 0)$$

pro $t = Start_M$, dále pak pro $Mth_t = 12$ platí

$${}^{Decl}Bon_t^{AD} = {}^{Decl}Bon_t^{BD} + i_t^{nadvynos} V_t^{Bon}, \quad Start_M < t \leq n.$$

Pro ostatní měsíce v roce platí

$${}^{Decl}Bon_t^{AD} = {}^{Decl}Bon_t^{BD}, \quad Start_M < t \leq n.$$

Proměnná V_t^{Bon} představuje rezervu pro připsání podílů na zisku, její výpočet se řídí těmito předpisy

$$\begin{aligned} V_t^{Bon} &= \max(V_t^{Brutto}; 0) + {}^{Decl}Bon_{t-1}^{AD}, \qquad Mth_t = 12, \\ &= \max(V_{t-1}^{Brutto}; 0) + {}^{Decl}Bon_{t-1}^{AD}, \qquad Mth_t = 1. \end{aligned}$$

Pro ostatní měsíce je rezerva V_t^{Bon} rovna V_{t-1}^{Bon} pro $0 < t \leq n$.

Připisování podílů na zisku probíhá také měsíčně během roku. Připisování je podobné jako v případě ročního připisování. Výsledek tohoto připisování se projeví v pojistných plněních, zahrnujících připsané podíly na zisku, pokud je konec pojištění v jiném okamžiku, než je konec kalendářního roku.

První proměnnou je ${}^{Intr}Bon_t^{BD}$

$$\begin{aligned} {}^{Intr}Bon_t^{BD} = &(\max(V_t^{Brutto}; 0) + {}^{Decl}Bon_{\max(t-Mth_t;Start_M)}^{AD}) \\ &\cdot i_t^{nadvynos} \frac{Mth_t}{12} \frac{\min(t;12)}{12}, \quad Start_M \leq t \leq n. \end{aligned}$$

Druhá proměnná ${}^{Intr}Bon_t^{AD}$ jen technicky upravuje výpočet. Konkrétně jde o vynulování hodnoty v každém prosinci kvůli následnému zjednodušení výpočtu. Úprava je následující

$$\begin{aligned} {}^{Intr}Bon_t^{AD} &= 0, \quad Mth_t = 12, \\ &= {}^{Intr}Bon_t^{BD}, \quad \text{jinak}. \end{aligned}$$

Nakonec se obě části sečtou do celkové hodnoty připsaných podílů na zisku Bon_t^{Total} v čase t. Konkrétně tedy

$$Bon_t^{Total} = {}^{Decl}Bon_t^{AD} + {}^{Intr}Bon_t^{AD}.$$

Skutečné náklady

Skutečné náklady pojišťovny a jejich typy jsem přiblížil v části (3.3) zabývající se výpočetními podklady. Nyní popíši jejich modelování v produktu.

Důležitou částí modelování nákladů je již zmiňovaná nákladová inflace. Uvedl jsem, že roční výši této inflace u^Y předpokládám rovnu 2%. Roční inflační navýšení nákladů znamená vynásobení nákladů hodnotou $(1 + u^Y)$. Model pracuje na měsíční bázi, proto potřebuji navyšování provádět měsíčně. Zavedu si tak měsíční inflační navýšení u_t^M podle vztahu

$$u_t^M = \sqrt[12]{1 + u^Y}, \quad t > Start_M.$$

Mám vyjádřené měsíční navyšování nákladů, pro model potřebuji tuto hodnotu kumulativní, abych mohl výši nákladů určit v každém měsíci t. Tuto kumulativní nákladovou inflaci označím u_t^{Cum}.

Pak jednoduše počítám zvlášť počáteční ${}^{InitPP}Exp_t$ a správní ${}^{RenPP}Exp_t$ náklady na pojistnou smlouvu

$$\begin{aligned}
{}^{InitPP}Exp_1 &= {}^{InitPP}Exp, \\
{}^{RenPP}Exp_t &= \frac{{}^{RenPP}Exp_{ind}^{Fix} + {}^{RenPP}Exp_{ind}^{Var}}{12} \\
&\quad + \left(\frac{{}^{RenPP}Exp_{dep}^{Fix} + {}^{RenPP}Exp_{dep}^{Var}}{12} \right) u_t^{Cum}, \quad 1 \le t \le n.
\end{aligned}$$

Mám běžné správní náklady na jednu pojistnou smlouvu, ještě je třeba vzít v úvahu dodatečné náklady na smlouvu při ukončení pojistné smlouvy, tj. při smrti pojištěného, stornu, nebo dožití konce pojistné doby. Na všechny případy ukončení pojistné smlouvy uvažuji konstantní náklad ve výši 100 Kč, tento náklad označím Exp^{End}.

Zbývá jediné, vyjádřit celkové počáteční a správní náklady. Výpočet vyjadřují následující rovnice

$$\begin{aligned}
{}^{Init}Exp_1 &= {}^{InitPP}Exp_1 L_1^S, \\
{}^{Ren}Exp_t &= {}^{RenPP}Exp_t L_t^S + Exp^{End}(D_t + S_t + M_t), \quad 1 \le t \le n.
\end{aligned}$$

Celkové náklady ${}^{Tot}Exp_t$ v čase t jsou určeny prostým součtem počátečních nákladů ${}^{Init}Exp_t$ a správních nákladů ${}^{Ren}Exp_t$.

Provize

Další náklady pojišťovny jsou bezesporu provize. V následujících odstavcích ukáži způsob jejich modelování v modelu.

Nejprve je potřeba určit výši vyplácených provizí. Výše získatelské provize, resp. následných provizí, lze na základě popisu v části (3.1) stanovit takto

$$\begin{aligned}
Comm^{Init} &= 0,03\ SA, \\
Comm^{Ren} &= 0,035\ Prem^{Annual}.
\end{aligned}$$

Zavedu si indikátor platby následné provize IND_t^{Comm} v čase. Z dříve popsaného systému vyplácení provizí je zřejmé, že indikátor nabývá hodnoty 1 pouze v časech $t = 13, 25, 37$, pokud je pojistná smlouva uzavřena na 5 let a je stále v platnosti, nebo v časech $t = 13, 25, 37, 49, 61$ u smlouvy na delší časové období za předpokladu, že smlouva je stále v platnosti.

Celkem vyplacené provize v čase ukazují tyto proměnné

$$\begin{aligned} {}^{Paid}Comm_1^{Init} &= Comm^{Init}\ L_1^S, \\ {}^{Paid}Comm_t^{Ren} &= Comm^{Ren}\ L_t^S\ IND_t^{Comm}, \quad 1 \le t \le n+1. \end{aligned}$$

Mám tedy vyplácené provize v čase, potřebuji ještě zpět vrácené provize z důvodu storna pojištění během prvních 3 let. Výše těchto vrácených provizí $Comm_t^{Claw}$ se počítá zvlášť pro počáteční a následné provize.

Začnu u vrácených počátečních provizí ${}^{Init}Comm_t^{Claw}$, jejich výše je určena z následující rovnice

$${}^{Init}Comm_t^{Claw} = Comm^{Init}\ S_t\ Comm^{ClawPC}\ {}^{Claw}Comm_t^{Perc}.$$

U následných provizí je výpočet podobný. Potřebuji znát ještě veličinu ${}^{Total}Comm_t^{Ren}$, určující všechny následné provize do času t. Výše těchto celkových provizí je určena dle vztahu

$${}^{Total}Comm_t^{Ren} = \sum_{j=1}^{t} Comm^{Ren}\ IND_t^{Comm}, \quad t \ge 1.$$

Z následující rovnice

$${}^{Ren}Comm_t^{Claw} = {}^{Total}Comm_t^{Ren}\ S_t\ Comm^{ClawPC}\ {}^{Claw}Comm_t^{Perc}$$

pak vypočtu celkovou výši ${}^{Ren}Comm_t^{Claw}$ vrácených následných provizí v čase t.

Celková výše počátečních, resp. následných provizí v čase t se určí odečtením vrácených provizí od zaplacených provizí. Tedy

$$Comm_t^X = {}^{Paid}Comm_t^X - {}^{X}Comm_t^{Claw},$$

kde X znamená $Init$, resp. Ren.

Celkové provize $Comm_t^{Total}$ v čase t jsou určeny jako součet počátečních $Comm_t^{Init}$ a následných $Comm_t^{Ren}$ provizí.

Minimální hodnota pojistných závazků

Popsal jsem již všechny potřebné finanční toky spojené s pojistnou smlouvou, potřebné k určení minimální hodnoty závazků. V každém čase t teď stanovím hodnotu závazku $Liab_t$ vzhledem k finančním tokům pro daný měsíc. Platí

$$\begin{aligned} Liab_t = {}& {}^{Tot}Exp_t + Comm_t^{Total} + E_t^{Death} + E_t^{Mat} + E_t^{Inv} \\ & + Surr_t^{Out} - Prem_t^{Inc}, \quad Start_M < t. \end{aligned}$$

Celkovou současnou hodnotu pojistného závazku určím pomocí diskontování jednotlivých hodnot $Liab_t$ k datu výpočtu $Start_M$. Výpočet se provede rekurzivně od konce pojistné doby

$$\begin{aligned} Liab_t^{Disc} &= 0, \quad t = Start_M + 960, \\ &= Liab_{t+1}^{Disc} + \frac{Liab_{t+1}}{1 + i_{t+1}^{mRFR}}, \quad Start_M \le t < Start_M + 960, \end{aligned}$$

kde 960 znamená dobu projekce v měsících do budoucnosti.

Stochastické výpočty a hodnota pojistných závazků

V popsání modelu mi zbývá poslední věc, a to objasnění průběhu výpočtu ve stochastickém modelu.

Největším rozdílem je způsob stanovení současné hodnoty. Zatímco v deterministickém modelu se finanční toky z každého měsíce postupně diskontují k datu výpočtu, ve stochastickém modelu se využijí deflátory.

Dalším rozdílem je způsob zahrnutí některých rizik. Zatímco v deterministickém modelu budu počítat minimální hodnotu pojistných závazků a výši rizikových přirážek pomocí stávajícího doporučení ČSpA, tedy pomocí doporučených přirážek na nepříznivý vývoj, ve stochastickém modelu se pokusím stanovit výši rizikových přirážek pomocí jiných metod.

Konkrétně je odlišné zahrnutí tržních rizik. V současnosti se podle směrnice [**7**] tato rizika zohledňují ve formě snížení úrokového výnosu o 0,25 procentního bodu. Zahrnutí zmíněných rizik ve stochastickém modelu zohledním již při výpočtu nejlepšího odhadu pojistných závazků, aby zahrnutí rizik odpovídalo současným názorům, jak je popsáno na konci (2.4). Zohlednění tržních rizik dosáhnu pomocí ekonomických scénářů, které jsou kalibrovány na tržní data a zohledňují tržní rizika, a pomocí investiční strategie, kterou v modelu použiji.

Ve stochastickém modelu použiji následující strategii finančního umístění prostředků určených k investování. Investuji 95% do jednoletých bezkupónových dluhopisů a zbylých 5% investuji do akcií.

KAPITOLA 4

Výpočet rizikových přirážek

Jak již vyplynulo z předcházejících kapitol, zaměřím se na stanovení rizikové přirážky na riziko úmrtnosti.

Mimo přirážky na úmrtnost porovnám i výši zahrnutí tržních rizik dle směrnice [**7**] a pomocí stochastického modelu na ocenění hodnoty pojistných závazků. Způsob zohlednění těchto rizik jsem popsal již v (2.4), proto se dále nebudu teorií spojenou s tržními riziky zabývat.

4.1. Riziková přirážka na úmrtnost - teorie

Vyložil jsem obecnou teorii týkající se rizikových přirážek, popsal jsem strukturu modelu závazků z životního pojištění, který používám, a nyní se můžu pustit do kalkulace rizikové přirážky na úmrtnost, resp. na riziko úmrtnosti.

Při stanovení přirážky z úmrtnosti budu čerpat převážně z materiálu nizozemského aktuára Henk Van Broekhovena [**2**] na téma *Tržní hodnota úmrtnostního rizika závazků.*

Riziko úmrtnosti se skládá ze čtyř komponent. Každá komponenta se počítá zvlášť a má za výsledek určitou přirážku. Výsledná riziková přirážka na úmrtnost je součet přirážek stanovených z jednotlivých komponent rizika, jelikož předpokládám, že dané komponenty jsou vzájemně nezávislé. V následujících odstavcích se zaměřím zvlášť na každou komponentu rizika úmrtnosti a každou z nich stručně popíši.

Volatilita

První složkou rizika úmrtnosti je riziko volatility. Jde o riziko, že aktuální výše úmrtnosti se liší od očekávané výše za předpokladu, že odhadnuté parametry v nejlepším odhadu jsou správné. Volatilita je způsobená náhodností jednotlivých škod.

V praxi se obvykle předpokládá, že škody (v mém případě úmrtí) jsou vzájemně nezávislé. To umožňuje předpokládat, že počet úmrtí má binomické rozložení, což zjednodušuje následné modelování. Ve skutečnosti není předpoklad nezávislosti úmrtí úplně pravdivý, jelikož jsou lidé vystaveni stejným rizikům. Příkladem mohou být různé dopravní nehody, živelné události, teroristické útoky, nebo epidemie.

Je velmi obtížné modelovat tyto vzájemné korelace, je proto vhodné použít jako rozložení počtů úmrtí nějaké pravděpodobnostní rozložení, které je na dlouhém konci širší. Takovým rozložením může být Poissonovo rozložení.

Katastrofa

Toto riziko představuje zvýšení hladiny úmrtnosti v určitém okamžiku, vlivem nějaké katastrofické události. Nejedná se o změnu parametrů, jako je změna trendu úmrtnosti, ale může jít o jednoletý šok v hladině úmrtnosti. Protože katastrofické události nejsou časté a neexistuje tak dostatek pozorování, je obtížné k odhadování potřebné přirážky použít pravděpodobnostní rozložení. Přirážka se v tomto případě většinou stanoví pomocí expertních odhadů.

Příklady katastrofických událostí mohou být různé přírodní katastrofy velkých rozsahů, jako např. tsunami, zemětřesení, pád meteoritu. Dále to mohou být katastrofy jako teroristické útoky, nebo rozsáhlé epidemie.

Nejistota hladiny

Nejistota hladiny v rámci rizika úmrtnosti znamená, že nejlepší odhad úmrtnosti, stanovený na základě historických dat, nemusí být správný. Je možné, že skutečná hladina pravděpodobností úmrtí je odlišná od nejlepšího odhadu, a proto je potřeba stanovit přirážku na toto riziko. Historická pozorování, na základě kterých se odhadovala hladina úmrtnosti, obsahují vliv náhody a jsou volatilní. Důsledkem této volatility v minulosti je nejistota odhadnuté hladiny úmrtnosti.

Obecně platí, že čím více je dostupných pozorování, tím menší je nejistota špatného odhadu. Protože je nejistota hladiny výsledkem zmíněné volatility v minulosti, je modelování podobné, jako při stanovení přirážky na volatilitu.

Nejistota trendu

Při odhadu trendu pravděpodobností úmrtí vzniká taktéž nejistota. Jelikož se trend odhaduje na základě historických dat, může být odhadnutý trend odlišný od skutečného trendu. Trend může být výrazně ovlivněn lékařským vývojem, např. novým lékem na smrtelnou chorobu. Takový objev může způsobit výrazný pokles úmrtnosti a může výrazně ovlivnit trend.

Jednou cestou, jak modelovat nejistotu trendu, je použití více různých trendů pozorovaných v minulosti. Problémem při modelování zůstává fakt, že trendy v rámci různých věků jsou složitě propojeny a korelovány. Tento problém lze vyřešit modelováním hodnoty celých závazků, místo samotných pravděpodobností úmrtí. Modelováním kompletních závazků se korelace mezi věky automaticky zahrne do modelu.

4.2. Použité portfolio

Abych se mohl pustit do stanovení výše rizikové přirážky z úmrtnosti, potřebuji portfolio pojistných smluv, jejichž hodnotu závazků budu určovat, a na jejichž nejlepší odhad budu počítat rizikovou přirážku.

Uvažuji portfolio obsahující 500 000 pojistných smluv uzavřených na dříve popsaný pojistný produkt. Všechny pojistné smlouvy mají roční pojistné 12 000 Kč s měsíční frekvencí placení a všechny smlouvy jsou uzavřené 1. 2. 2006. Věkové rozložení je založené na jednoduché věkové analýze v rámci podobného produktu v pojišťovně Kooperativa. Konkrétně je v pojistném kmeni 75% zastoupeno jedinci ve věku 20 až 40 let, 15% jedinci ve věku 15 až 19 a 41 až 53 let a zbylých

10% je zastoupeno jedinci ve věku 54 až 60 let. Předpokládám, že věkové rozložení uvnitř jednotlivých skupin je rovnoměrné. Složení pojistného kmene je z hlediska pohlaví rovnoměrné, tj. polovina mužů a polovina žen.

4.3. Riziková přirážka na úmrtnost - praxe

V této části popíši výpočet výše rizikových přirážek jednotlivých subrizik celkového rizika úmrtnosti.

Volatilita

Podle různých zdrojů[1] by se riziková přirážka měla aplikovat k nejlepšímu odhadu pouze v případě, že příslušné riziko není plně diverzifikovatelné. V opačném případě totiž nechť je $\sigma(n;\ldots)$ směrodatná odchylka vyjadřující n různých rizik. Pak s pomocí zákona velkých čísel plyne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(n;\ldots)}{n} = 0.$$

Není tedy potřeba tvořit přirážku. V případě volatility se nejedná o nediverzifikovatelné riziko. Pokud se neberou v úvahu extrémní výkyvy jako katastrofy apod., není potřeba tvořit přirážku z rizika volatility, protože solventnostní požadavky a ekonomický kapitál pokryjí volatilitu.

Katastrofa

Protože četnost katastrofických událostí je velmi nízká, je velmi obtížné najít známé pravděpodobnostní rozložení pro riziko katastrof. Poslední velkou katastrofou byla španělská chřipka v roce 1918, která zdvojnásobila očekávaný počet úmrtí v populaci. Lékařští a pojistní experti se domnívají, že taková katastrofa se může stát pouze jednou za 100 let. Navíc je zřejmé, že skutečné riziko katastrofy je závislé i na zeměpisné oblasti.

Přirážka za toto riziko může být založena na mírách poskytnutých zajistiteli, nebo jako průměrná tržní cena za držení kapitálu na riziko katastrofy, případně pomocí jiného expertního odhadu.

Já použiji simulaci katastrofické události pomocí navýšení pravděpodobností úmrtí o 100% v roce 2008 a v dalších letech pravděpodobnosti úmrtí opět na standardní hladině. Výši rizikové přirážky $MVM^{Stoch}_{Mort,Cat}$ na riziko katastrofy pak určím jako rozdíl hodnoty $Liab^{Stoch}_{Mort,Cat}$ pojistných závazků v případě katastrofy a nejlepšího odhadu hodnoty $Liab^{Stoch}_{BE}$ pojistných závazků.

Nejistota hladiny

K modelování přirážky za nejistotu hladiny použiji pravděpodobnostní rozložení počtu úmrtí. Konkrétně použiji složené Poissonovo rozložení celkové ztráty, založené na určité hladině spolehlivosti. Hladina spolehlivosti závisí na averzi protistrany vzhledem k riziku a současně na aktuální situaci na trhu. Pro své výpočty zvolím 90% hladinu spolehlivosti. Složené Poissonovo rozložení pro celkovou

[1] Čerpáno z [**2**].

ztrátu získám předpokladem, že počet úmrtí má Poissonovo rozložení. Ke konstrukci 90% intervalu spolehlivosti složeného Poissonova rozložení použiji metodu NP aproximace[2].

Nejistota hladiny je, jak jsem už zmínil, způsobená volatilitou historických dat, na jejichž základě jsem hladinu odhadoval. Předpokládám tedy, že historické úmrtnosti neodpovídají skutečné současné úmrtnosti, a že skutečné pravděpodobnosti q_x^{Real} jsou konstantním násobkem f pozorovaných úmrtností q_x^{Obs}.

Nechť X_i je rizikový kapitál na i-té pojistné smlouvě a I_i je indikátor toho, zda pojištěný na i-té smlouvě zemře. Celková ztráta je pak určena jako

$$Loss_{Total} = \sum_{i=1}^{500000} I_i X_i.$$

Očekávaná ztráta je rovna

$$Loss_{Expect} = \sum_{i=1}^{500000} q_i X_i,$$

kde q_i je pravděpodobnost úmrtí na i-té smlouvě.

Nyní použiji NP2 aproximaci. Porovnám tedy první tři centrální momenty rozložení se standardním normálním rozložením $N(0,1)$. Nechť $Loss_{Expect}^{Obs}$ je očekávaná ztráta na základě pozorovaných pravděpodobností úmrtí q_x^{Obs}. Dostávám pomocí Gram-Charlierova rozvoje[3]

$$P\left(\frac{Loss_{Expect}^{Obs} - Loss_{Expect}^{Real}}{\sigma^{Real}} \leq s + \frac{\gamma^{Real}(s^2-1)}{6}\right) \approx \Phi(s). \tag{3}$$

Protože konstruuji 90% interval spolehlivosti, dostávám $\Phi(s) = 0,9$ a poté $s = 1,28$ a odtud $(s^2-1)/6 = 0,11$.

Z rovnice (3) dostávám vztah mezi skutečnou a pozorovanou úmrtností. Platí tedy

$$Loss_{Expect}^{Obs} = Loss_{Expect}^{Real} + (1,28 + 0,11\gamma^{Real})\sigma^{Real}. \tag{4}$$

Dalším krokem je vyjádření neznámých reálných parametrů pravděpodobností úmrtí z poslední rovnice. K tomu použiji předpoklad o konstantním faktoru f, který upravuje pozorované úmrtnosti na reálné hodnoty. Pro celkovou skutečnou očekávanou ztrátu $Loss_{Expected}^{Real}$ určenou na základě skutečných pravděpodobností úmrtí q_x^{Real} platí

$$Loss_{Expect}^{Real} = \sum_{i=1}^{500000} q_i^{Real} X_i = f \sum_{i=1}^{500000} q_i^{Obs} X_i = f Loss_{Expect}^{Obs}.$$

Pro směrodatnou odchylku složeného Poissonova rozložení platí toto

$$\sigma^{Real} = \sqrt{\sum_{i=1}^{500000} q_i^{Real} X_i^2} = \sqrt{f \sum_{i=1}^{500000} q_i^{Obs} X_i^2} = \sqrt{f}\sigma^{Obs}.$$

Pro koeficient šikmosti dostávám vyjádření

$$\gamma^{Real} = \frac{\sum_{i=1}^{500000} q_i^{Real} X_i^3}{(\sigma^{Real})^3} = \frac{f\sum_{i=1}^{500000} q_i^{Obs} X_i^3}{(\sqrt{f}\sigma^{Obs})^3} = \frac{\gamma^{Obs}}{\sqrt{f}}.$$

[2]Podrobný postup použití metod NP aproximací je např. v [**16**].

[3]Více o tomto rozvoji např. v [**16**].

Celkem po dosazení do (4) a upravení dostávám rovnici

$$Loss_{Expect}^{Obs} f + 1,28\sigma^{Obs}\sqrt{f} + 0,11\sigma^{Obs}\gamma^{Obs} - Loss_{Expect}^{Obs} = 0.$$

Odtud získám řešením kvadratické rovnice vyjádření pro $\sqrt{f}$. Následující rovnice ukazuje vyjádření pro konečné f

$$f = \left(\frac{-1,28\sigma^{Obs} \pm \sqrt{D}}{2Loss_{Expect}^{Obs}}\right)^2,$$

kde $D = (\sigma^{Obs}1,28)^2 - 4Loss_{Expect}^{Obs}(0,11\sigma^{Obs}\gamma^{Obs} - Loss_{Expect}^{Obs})$.

Pomocí získaného faktoru f vypočítám skutečné pravděpodobnosti úmrtí q^{Real} a s jejich použitím vypočtu hodnotu pojistných závazků $Liab_{Mort,Level}^{Stoch}$. Výši rizikové přirážky $MVM_{Mort,Level}^{Stoch}$ na nejistotu hladiny zjistím jako rozdíl mezi vypočtenou hodnotou $Liab_{Mort,Level}^{Stoch}$ a nejlepším odhadem hodnoty $Liab_{BE}^{Stoch}$ pojistných závazků.

Nejistota trendu

Problémem při kalkulaci přirážky na nejistotu trendu je složitá korelace pravděpodobností úmrtí mezi jednotlivými věky. Toto vzájemné propojení lze obejít výpočtem hodnot celých závazků pomocí trendů stanovených z historických dat.

Vezmu historické pravděpodobnosti úmrtí použité k nejlepšímu odhadu a stanovím z těchto dat různé trendy. Trendy stanovím analogicky jako při výpočtu nejlepšího odhadu, akorát pokaždé z různých minulých období. Konkrétně určím osm trendů z osmi různých minulých období. Jde o následující období: 1920-1930, 1930-1939, 1946-1956, 1956-1966, 1966-1976, 1976-1986, 1986-1996, 1996-2006.

Na základě osmi trendů sestrojím osm sad generačních úmrtnostních tabulek, ze kterých vypočtu osm hodnot pojistných závazků $Liab_i^{Trend}$. Vypočítám výběrový rozptyl s^2

$$s^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}\left(Liab_i^{Trend} - \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} Liab_i^{Trend}\right)^2$$

a rizikovou přirážku na nejistotu trendu počítám pomocí Studentova rozložení. Toto rozložení je použito kvůli omezenému počtu pozorování. Navíc má Studentovo rozložení široký dlouhý konec, což bere v úvahu vliv lékařského vývoje na pravděpodobnosti úmrtí.

Velikost přirážky vypočtu opět na 90% hladině spolehlivosti. Příslušný kvantil Studentova rozložení o sedmi stupních volnosti je roven 1,41. Velikost přirážky $MVM_{Mort,Trend}^{Stoch}$ se vypočte podle

$$MVM_{Mort,Trend}^{Stoch} = 1,41\sqrt{s^2}.$$

4.4. Výsledky

Už jsem vysvětlil vše, co bylo potřeba pro provedení výpočtů a v následujících odstavcích ukáži dosažené výsledky. V následujících odstavcích použiji toto značení:

- $Liab_{BE}^{LAT}$ nejlepší odhad hodnoty pojistných závazků vypočtený deterministickým modelem podle současných doporučení ČSpA,
- $Liab_{Market}^{LAT}$ nejlepší odhad hodnoty pojistných závazků včetně přirážky na úrokový výnos vypočtený deterministickým modelem podle současných doporučení ČSpA,
- $Liab_{Mkt,Mort}^{LAT}$ nejlepší odhad hodnoty pojistných závazků včetně přirážky na úrokový výnos a na úmrtnost vypočtený deterministickým modelem podle současných doporučení ČSpA,
- MVM_{Market}^{LAT} hodnota rizikové přirážky na úrokový výnos vypočtená deterministickým modelem podle současných doporučení ČSpA,
- $MVM_{Mortality}^{LAT}$ hodnota rizikové přirážky na úmrtnost[4] vypočtená deterministickým modelem podle současných doporučení ČSpA,
- $Liab_{BE}^{Stoch}$ nejlepší odhad hodnoty pojistných závazků vypočtený stochastickým modelem,
- $Liab_{Mortality}^{Stoch}$ nejlepší odhad hodnoty pojistných závazků ve stochastickém modelu včetně přirážky na úmrtnost,
- $Liab_{Mort,Cat}^{Stoch}$ nejlepší odhad hodnoty pojistných závazků ve stochastickém modelu včetně přirážky na subriziko katastrofy,
- $Liab_{Mort,Level}^{Stoch}$ nejlepší odhad hodnoty pojistných závazků ve stochastickém modelu včetně přirážky na subriziko nejistoty hladiny,
- $Liab_{Mort,Trend}^{Stoch}$ nejlepší odhad hodnoty pojistných závazků ve stochastickém modelu včetně přirážky na subriziko nejistoty trendu,
- MVM_{Market}^{Stoch} hodnota tržních rizik ve stochastickém modelu,
- $MVM_{Mortality}^{Stoch}$ hodnota rizikové přirážky na úmrtnost ve stochastickém modelu,
- $MVM_{Mort,Level}^{Stoch}$ hodnota přirážky na úmrtnost z nejistoty hladiny ve stochastickém modelu,
- $MVM_{Mort,Trend}^{Stoch}$ hodnota přirážky na úmrtnost z nejistoty trendu ve stochastickém modelu,
- $MVM_{Mort,Cat}^{Stoch}$ hodnota přirážky na úmrtnost z rizika katastrof ve stochastickém modelu.

Platí tedy následující vztahy

$$\begin{aligned}
Liab_{Mkt,Mort}^{LAT} &= Liab_{BE}^{LAT} + (Liab_{Market}^{LAT} - Liab_{BE}^{LAT}) + (Liab_{Mkt,Mort}^{LAT} - Liab_{Market}^{LAT}) \\
&= Liab_{BE}^{LAT} + MVM_{Market}^{LAT} + MVM_{Mortality}^{LAT}, \\
Liab_{Mortality}^{Stoch} &= Liab_{BE}^{Stoch} + (Liab_{Mortality}^{Stoch} - Liab_{BE}^{Stoch}) \\
&= Liab_{BE}^{Stoch} + MVM_{Mortality}^{Stoch}, \\
MVM_{Mortality}^{Stoch} &= MVM_{Mort,Level}^{Stoch} + MVM_{Mort,Trend}^{Stoch} + MVM_{Mort,Cat}^{Stoch}, \\
MVM_{Mort,Level}^{Stoch} &= Liab_{Mort,Level}^{Stoch} - Liab_{BE}^{Stoch}, \\
MVM_{Mort,Trend}^{Stoch} &= Liab_{Mort,Trend}^{Stoch} - Liab_{BE}^{Stoch}, \\
MVM_{Mort,Cat}^{Stoch} &= Liab_{Mort,Cat}^{Stoch} - Liab_{BE}^{Stoch}, \\
MVM_{Market}^{Stoch} &= Liab_{BE}^{Stoch} - Liab_{BE}^{LAT}.
\end{aligned}$$

[4] Nejedná se o rizikovou přirážku na úmrtnost vzhledem k nejlepšímu odhadu závazků, ale o změnu $Liab_{Market}^{LAT}$ při aplikaci přirážky na úmrtnost.

Následující tabulka ukazuje výsledky minimální hodnoty pojistných závazků při zahrnutí rizikových přirážek doporučených podle směrnice ČSpA [**7**].

Veličina	**Hodnota**
$Liab_{BE}^{LAT}$	-14 962 649 122
$Liab_{Market}^{LAT}$	-14 917 899 233
$Liab_{Mkt,Mort}^{LAT}$	-14 630 524 420
MVM_{Market}^{LAT}	44 749 889
$MVM_{Mkt,Mort}^{LAT}$	287 374 813

Jak je vidět z výsledů, hodnota pojistných závazků vychází záporná, důvodem je již zmiňované datum výpočtu vzhledem k době trvání pojistných smluv. Již totiž došlo k vynaložení velké části nákladů na počátku pojištění a v budoucnu se očekávají zejména příjmy z pojistného. Tabulka uvedená níže shrnuje výsledky vypočtené pomocí stochastických výpočtů.

Veličina	**Hodnota**
$Liab_{BE}^{Stoch}$	-14 131 420 344
$Liab_{Mortality}^{Stoch}$	-13 221 646 388
$Liab_{Mort,Cat}^{Stoch}$	-13 987 073 855
$Liab_{Mort,Level}^{Stoch}$	-13 948 872 483
$Liab_{Mort,Trend}^{Stoch}$	-13 548 540 738

Důležité jsou procentuální velikosti jednotlivých rizikových přirážek, to ukazuje následující tabulka.

Přirážka	**Procentuální hodnota**
MVM_{Market}^{Stoch}	5,56%
$MVM_{Mort,Cat}^{Stoch}$	1,02%
$MVM_{Mort,Level}^{Stoch}$	1,29%
$MVM_{Mort,Trend}^{Stoch}$	4,12%
$MVM_{Mortality}^{Stoch}$	6,44%

V další tabulce je uvedené srovnání procentuálních hodnot rizikových přirážek vypočtených podle doporučení ČSpA a podle stochastických výpočtů.

Typ přirážky	**LAT**	**Stoch**
MVM_{Market}	0,30%	5,56%
$MVM_{Mortality}$	1,93%	6,44%

Kompletní výsledky provedených výpočtů včetně kalkulací souvisejících s následující analýzou jsou uloženy na CD příloze.

4.5. Analýza přirážky

Z uvedených výsledků je vidět, že přirážky na nepříznivý vývoj stanovené na základě pevného posunu parametrů nejsou v tomto příkladě dostatečné a nevystihují přesně rizika.

Při zohlednění tržních rizik současný LAT nezohledňuje nijak volatilitu na trhu. Celé tržní riziko zohledňuje pouze paralelním posunem hladiny, což zde nevystihuje dostatečně tržní rizika.

Stanovení rizikové přirážky na riziko úmrtnosti podle současného LAT rovněž nezohledňuje dostatečně dané riziko. Z výsledků je vidět, že riziková přirážka na nejistotu trendu tvoří velkou část celkového rizika úmrtnosti. Právě nejistotu trendu však současné stanovení přirážky nezohledňuje dostatečně, jelikož zohlednění spočívá v paralelním posunu hladiny pravděpodobností úmrtí.

V dalších odstavcích provedu výpočet rizikové přirážky na riziko úmrtnosti ještě pomocí **metody nákladů na kapitál**. Nejprve vypočítám výši kapitálu Cap^{CoC}, který musím držet k datu výpočtu. Výši tohoto kapitálu spočítám na hladině spolehlivosti 99,5%, což je běžně používaná hladina spolehlivosti pro tento účel. Provedu tedy v případě nejistoty trendu a nejistoty hladiny analogický výpočet, jen s rozdílnou hladinou spolehlivosti. Subriziko katastrofy pro jednoduchost vypočítám stejně jako při předchozím výpočtu, tj. 100% zvýšení hladiny úmrtnosti v roce 2008. Součtem získaných přirážek za jednotlivá subrizika získám hodnotu potřebného kapitálu Cap^{CoC}.

Dále potřebuji hodnotu tohoto kapitálu po celou dobu trvání pojistných smluv. Tuto projekci provedu zjednodušeně pomocí veličiny (risk driver), která v čase vyjadřuje množství setrvávajícího rizika v pojistných závazcích. Jako risk driver použiji rizikový kapitál Cap_t^{Risk}. Pomocí vztahu

$$Cap_t^{CoC} = \frac{Cap^{CoC}}{Cap_{Start_M}^{Risk}} Cap_t^{Risk}, \quad t > Start_M \tag{5}$$

získám hodnotu Cap_t^{CoC} v každém budoucím čase. Z těchto hodnot vypočítám v každém čase náklady na kapitál CoC_t, které získám jako určité procento z kapitálu Cap_t^{CoC}. Já zde použiji hodnotu 6%, která se použila např. v QIS3.[5] Nyní už jen diskontuji náklady na kapitál CoC_t z jednotlivých let pomocí i_t^{RFR} k datu výpočtu. Celý výpočet této přirážky je uložen na CD příloze.

Hodnota přirážky na riziko úmrtnosti stanovená metodou nákladů na kapitál je 980 414 116, což vyjádřeno v procentech je 6,94%. Výsledná hodnota je tedy přibližně stejná, jako v případě stanovení přirážky pomocí metody 90% hladiny spolehlivosti.

Poznamenám ještě, že v praxi se v metodě nákladů na kapitál počítají náklady z celkového kapitálu potřebného na všechna rizika. V takovém případě by pravděpodobně došlo ke snížení rizikové přirážky na úmrtnost vlivem diverzifikace mezi riziky.

Následující tabulka ukazuje výši rizikové přirážky na nejistotu hladiny a nejistotu trendu rizika úmrtnosti vypočtenou na hladině spolehlivosti 90% a 99,5%.

[5] QIS3 je třetí kvantitativní dopadová studie v rámci projektu Solvency II [**5**].

Typ přirážky	**90%**	**99,5%**
$MVM_{Mort,Level}$	1,29%	2,64%
$MVM_{Mort,Trend}$	4,12%	10,20%

Nyní ještě prozkoumám změnu rizikové přirážky na úmrtnost vzhledem ke změně parametrů, jako je snížení ročního pojistného na 6 000 Kč, změna investiční strategie na investování 10% finančních prostředků do akcií, změna počtu smluv v portfoliu, nebo změna data výpočtu vzhledem k době trvání pojistných smluv.

V další tabulce porovnám změnu rizikové přirážky při dvojnásobném počtu smluv v portfoliu. Nechť mám stejné portfolio, jako na počátku, pouze s rozdílným počtem smluv v portfoliu, tj. místo 500 000 smluv mám nyní 1 000 000 smluv.

Typ přirážky	**500 000 smluv**	**1 000 000 smluv**
$MVM^{LAT}_{Mortality}$	1,93%	1,88%
$MVM^{Stoch}_{Mortality}$	6,44%	5,90%
$MVM^{Stoch,CoC}_{Mortality}$	6,94%	6,38%

U všech použitých metod došlo ke snížení rizikové přirážky. Snížení je způsobeno diverzifikací rizika do více smluv, což odpovídá jedné z požadovaných vlastností na rizikovou přirážku týkající se diverzifikace rizik.

Další srovnání provedu pomocí snížení ročního pojistného v portfoliu z 12 000 Kč na 6 000 Kč. Tímto snížením budoucích příjmů se zvýší hodnota pojistných závazků, jak ukazuje následující tabulka. Zároveň dojde ke zvýšení rizikové přirážky.

Typ přirážky	**Roční pojistné 12 000 Kč**	**Roční pojistné 6 000 Kč**
$MVM^{LAT}_{Mortality}$	1,93%	2,26%
$MVM^{Stoch}_{Mortality}$	6,44%	7,74%
$MVM^{Stoch,CoC}_{Mortality}$	6,94%	8,34%

Dále se zaměřím na vliv různého zohlednění tržního rizika na přirážku rizika úmrtnosti. Provedu výpočet na stejném portfoliu, avšak s jinou investiční strategií. Konkrétně předpokládám investování 90% finančních prostředků do dluhopisů a 10% do akcií. Dostávám následující výsledky.

Typ přirážky	**5% akcií**	**10% akcií**
$Liab^{Stoch}_{BE}$	-14 131 420 344	-13 569 264 867
MVM^{Stoch}_{Market}	5,56%	9,31%
$MVM^{Stoch}_{Mortality}$	6,44%	6,65%

Výše hodnoty pojistných závazků vzroste díky vystavení se většímu riziku v podobě většího množství volatilních akcií v portfoliu. Zároveň se zvýší i riziková přirážka na riziko úmrtnosti. Je tedy potřeba při odhadování výší rizikových přirážek brát v úvahu závislosti a korelace mezi jednotlivými riziky.

V další tabulce ukáži změnu rizikové přirážky, pokud zohledním riziko katastrofy zvýšením pravděpodobností úmrtí v následujícím roce místo o 100% pouze o 50%.

Typ přirážky	**100% nárůst**	**50% nárůst**
$MVM_{Mort,Cat}$	1,02%	0,51%
$MVM_{Mortality}$	6,44%	5,93%

Je vidět, $MVM_{Mort,Cat}$ se úměrně snížila vzhledem k velikosti změny zohlednění rizika katastrofy. Změna celkové přirážky však není výrazná díky malému vlivu subrizika katastrofy na celkovou rizikovou přirážku na riziko úmrtnosti.

Nakonec ještě prozkoumám vliv data výpočtu vůči době trvání pojistných smluv na rizikové přirážky. Provedu to pomocí porovnání změny přirážek jestliže posunu počátek všech pojistných smluv o 10 let do minulosti, tj. předpokládám počátek všech pojistných smluv 1. 2. 1996. Ostatní parametry portfolia ponechám beze změny. Výsledky ukazuje následující tabulka.

Typ přirážky	**Počátek 2006**	**Počátek 1996**
$MVM^{LAT}_{Mortality}$	1,93%	1,48%
$MVM^{Stoch}_{Mortality}$	6,44%	3,63%
$MVM^{Stoch,CoC}_{Mortality}$	6,94%	4,01%

Z výsledků je vidět, že výše rizikové přirážky se podle očekávání snížila. Dokonce v případě kvantilové metody a metody nákladů na kapitál se snížila riziková přirážka přibližně stejně, konkrétně zhruba o 43%.

Závěr

V této práci jsem se seznámil s teorií testu postačitelnosti rezerv životního pojištění a zejména teorií rizikových přirážek. Nejprve jsem přiblížil LAT z pohledu mezinárodních standardů a posléze i z pohledu České republiky. Následně jsem zkoumal teorii rizikových přirážek, ukázal jsem jednotlivé typy rizik, na které se přirážka tvoří, a především jsem uvedl požadované vlastnosti, které by měla riziková přirážka splňovat. Rovněž jsem se zabýval různými pohledy na rizikové přirážky a jejich chápání. Dále jsem popsal různé metody vedoucí ke stanovení rizikové přirážky a zmínil jsem také požadované vlastnosti na tyto metody výpočtu.

Před použitím vyložené teorie v praxi jsem sestrojil a popsal model produktu životního pojištění. Uvedl jsem způsob modelování jednotlivých peněžních toků a vysvětlil použití jednotlivých výpočetních podkladů.

V rámci výpočtu rizikových přirážek jsem se zaměřil na odhad výše rizikové přirážky na riziko úmrtnosti. Za tímto účelem jsem sestrojil vlastní generační úmrtnostní tabulky.

V poslední části jsem podrobněji vyložil model týkající se stanovení rizikové přirážky na riziko úmrtnosti. Riziko úmrtnosti jsem rozdělil na čtyři subrizika, která jsem zohlednil samostatně. K výpočtu jsem použil stochastický model a dvě metody splňující požadované vlastnosti popsané v teoretické části. Jednak jsem použil kvantilovou metodu a také metodu nákladů na kapitál. Zároveň jsem na základě deterministického modelu stanovil výši rizikové přirážky na riziko úmrtnosti pomocí současného doporučení ČSpA.

Nakonec jsem porovnal výsledné hodnoty a provedl jejich krátkou analýzu založenou na změnách vstupních parametrů.

V uvažovaném příkladu se ukázalo nedostatečné zohlednění rizika při použití přirážek na nepříznivý vývoj dle současného doporučení ČSpA [**7**] pro výpočet LAT. Připomínám, že v příkladu byly použity minimální hodnoty doporučených přirážek. V praxi by bylo potřeba výši těchto přirážek upravit na základě aktuárského úsudku zohledňujícího individuální situaci a významnost jednotlivých rizik.

Na základě provedených výpočtů se potvrdily některé z požadovaných vlastností na rizikové přirážky uvedených v první části práce. Dále se ukázalo, že v uvedeném příkladu vychází velikost rizikové přirážky na riziko úmrtnosti přibližně stejná v případě kvantilové metody i v případě metody nákladů na kapitál.

Příloha

Měsíční pravděpodobnosti storna s_t

Měsíc trvání pojištění	**Pravděpodobnost storna**
1	0,0120
2	0,0240
3	0,0120
4	0,0120
5	0,0120
6	0,0120
7	0,0600
8-12	0,0120
13-24	0,0108
25-36	0,0084
37-48	0,0060
49-60	0,0048
61-72	0,0036
73-84	0,0024
85+	0,0012

Nákladové koeficienty

Nákladový koeficient	**Hodnota**
α	3,5%
α_1	4%
β_1	0,05%
β_2	0,2%
γ	2%

Odhad skutečných ročních nákladů na jednu smlouvu

Náklad	**Hodnota**
${}^{InitPP}Exp$	4000
${}^{RenPP}Exp_{ind}^{Fix}$	1000000[4]
${}^{RenPP}Exp_{dep}^{Fix}$	60000000[4]
${}^{RenPP}Exp_{ind}^{Var}$	32
${}^{RenPP}Exp_{dep}^{Var}$	235

[4] Jedná se o roční náklad na celé portfolio, náklad na jednu smlouvu se získá vydělením počtem smluv v platnosti.

Pravděpodobnosti úmrtí invalidních, invalidizace, reaktivace

Věkový interval	i_x^{Inv}	r_x^{Inv}	q_x^{Inv}
15-19	0,001078	0,029889	0,015959
20-24	0,001078	0,029889	0,015959
25-29	0,001231	0,029321	0,013872
30-34	0,001647	0,022467	0,017679
35-39	0,002537	0,018571	0,022325
40-44	0,003862	0,014385	0,028802
45-49	0,006175	0,010048	0,035071
50-54	0,010797	0,006243	0,036562
55-59	0,010235	0,005662	0,044472
60-64	0,001215	0,006648	0,053184
65+	0,000111	0,003187	0,100889

Vývojové koeficienty

Zpoždění	${}^{Claim}Coef_j$	${}^{Claim}Coef_j^{Sum}$
0	0,102409867	1
1	0,491766062	0,897590133
2	0,228375449	0,405824071
3	0,092818761	0,177448622
4	0,036794859	0,084629861
5	0,035578153	0,047835002
6	0,012256849	0,012256849

Pravděpodobnosti úmrtí prvního řádu pro muže q_x^{val}

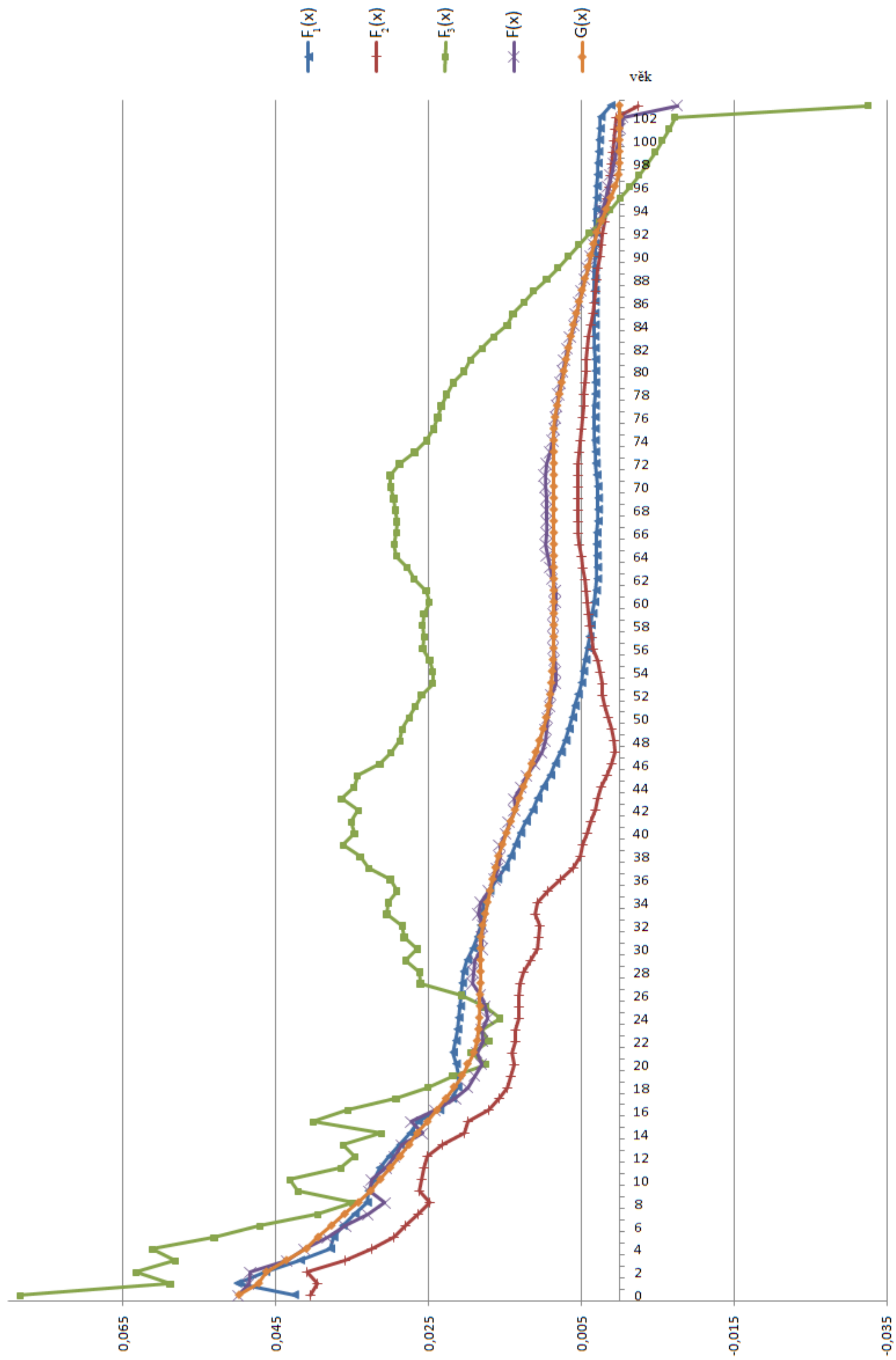
Věk	**Pravděpodobnost úmrtí**	**Věk**	**Pravděpodobnost úmrtí**
0	0,0168630000	19	0,0012719039
1	0,0008643821	20	0,0013597826
2	0,0006835311	21	0,0014155754
3	0,0007267250	22	0,0014499471
4	0,0005026434	23	0,0014519526
5	0,0003958868	24	0,0014214113
6	0,0003639258	25	0,0014016083
7	0,0003640518	26	0,0013817223
8	0,0003641778	27	0,0013944368
9	0,0003643038	28	0,0014508333
10	0,0003644309	29	0,0015511535
11	0,0003860021	30	0,0016847261
12	0,0004183221	31	0,0018298791
13	0,0004721420	32	0,0019867449
14	0,0005689719	33	0,0021554705
15	0,0006874329	34	0,0023692830
16	0,0008383578	35	0,0026176280
17	0,0010003791	36	0,0029009810
18	0,0011520716	37	0,0032088021

Věk	Pravděpodobnost úmrtí	Věk	Pravděpodobnost úmrtí
38	0,0035527527	71	0,0706363210
39	0,0039112385	72	0,0766109528
40	0,0042735819	73	0,0828305006
41	0,0046514496	74	0,0895120584
42	0,0050680917	75	0,0967596567
43	0,0055587431	76	0,1050567299
44	0,0061711598	77	0,1145698097
45	0,0069433644	78	0,1242682054
46	0,0078343524	79	0,1347800124
47	0,0087910011	80	0,1461690234
48	0,0097352861	81	0,1584426334
49	0,0106689954	82	0,1717981403
50	0,0116177765	83	0,1862022593
51	0,0126570297	84	0,2016238012
52	0,0138054557	85	0,2183841381
53	0,0150712349	86	0,2362142371
54	0,0164640084	87	0,2554054054
55	0,0180848861	88	0,2759146341
56	0,0199929198	89	0,2977550217
57	0,0221492061	90	0,3209455745
58	0,0245007242	91	0,3458432304
59	0,0269216504	92	0,3719008265
60	0,0293854995	93	0,3992687386
61	0,0319788011	94	0,4274336283
62	0,0349369010	95	0,4597014926
63	0,0382541628	96	0,4924778761
64	0,0416189267	97	0,5250000000
65	0,0459605654	98	0,5600000000
66	0,0499763954	99	0,6000000000
67	0,0536636100	100	0,7000000000
68	0,0571612472	101	0,5250000000
69	0,0608872793	102	1,0000000000
70	0,0653391002		

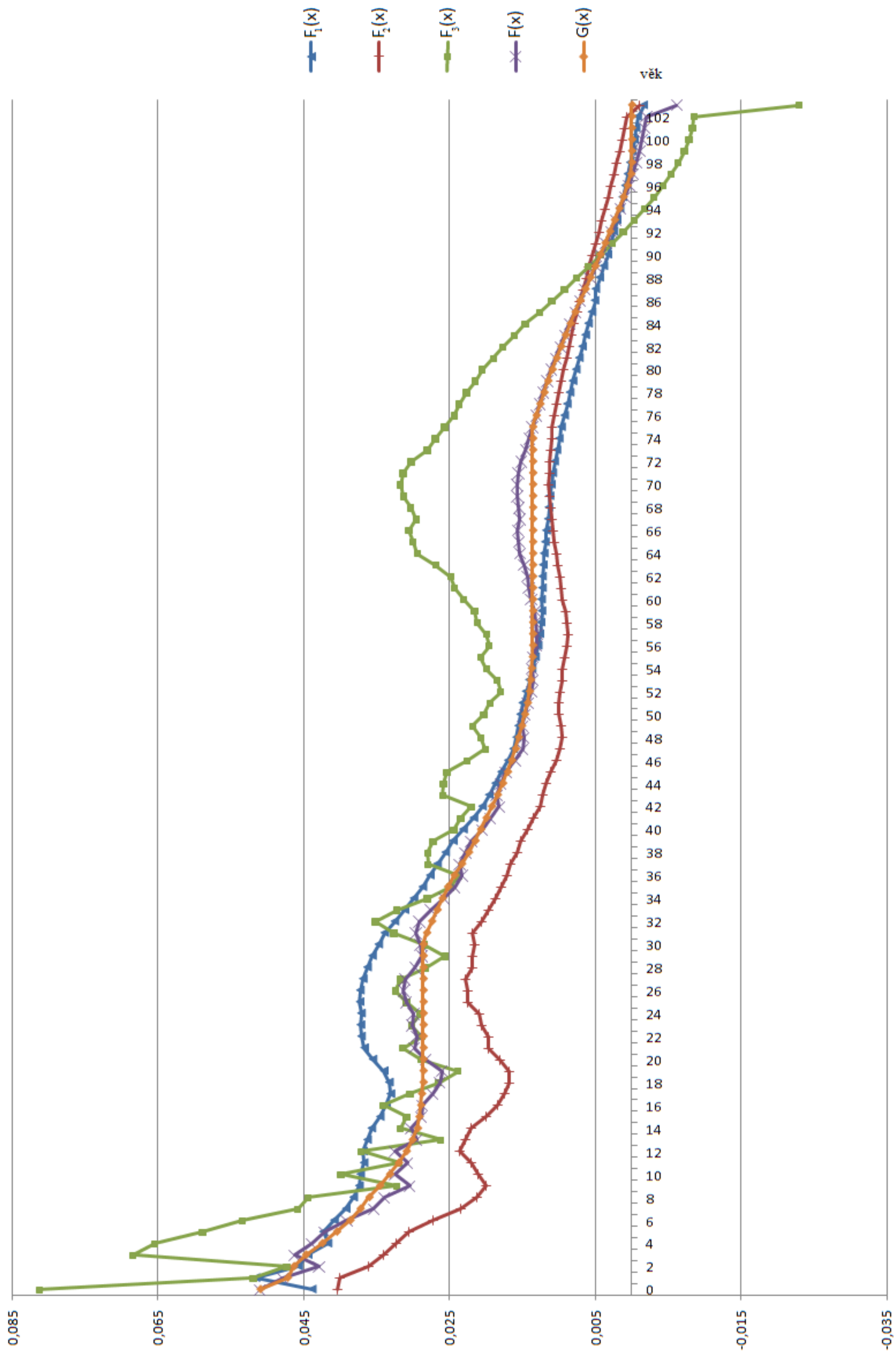
Forwardová bezriziková úroková míra s ročním úročením

Rok k	i_k^{RFR}	**Rok** k	i_k^{RFR}
2008	4,300500000%	2048	5,046329207%
2009	4,288489842%	2049	5,046329989%
2010	4,415666961%	2050	5,046330713%
2011	4,459087951%	2051	5,046331385%
2012	4,669786772%	2052	5,046332009%
2013	4,926051599%	2053	5,046332589%
2014	4,986091336%	2054	5,046333128%
2015	5,016837881%	2055	5,046333630%
2016	5,032103722%	2056	5,046334097%
2017	5,039520874%	2057	5,046334531%
2018	5,043069783%	2058	5,046334531%
2019	5,044750549%	2059	5,046334531%
2020	5,045542476%	2060	5,046334531%
2021	5,045916061%	2061	5,046334531%
2022	5,046094158%	2062	5,046334531%
2023	5,046181196%	2063	5,046334531%
2024	5,046225729%	2064	5,046334531%
2025	5,046250225%	2065	5,046334531%
2026	5,046265065%	2066	5,046334531%
2027	5,046275061%	2067	5,046334531%
2028	5,046282470%	2068	5,046334531%
2029	5,046288371%	2069	5,046334531%
2030	5,046293302%	2070	5,046334531%
2031	5,046297546%	2071	5,046334531%
2032	5,046301267%	2072	5,046334531%
2033	5,046304567%	2073	5,046334531%
2034	5,046307515%	2074	5,046334531%
2035	5,046310164%	2075	5,046334531%
2036	5,046312554%	2076	5,046334531%
2037	5,046314718%	2077	5,046334531%
2038	5,046316684%	2078	5,046334531%
2039	5,046318475%	2079	5,046334531%
2040	5,046320110%	2080	5,046334531%
2041	5,046321606%	2081	5,046334531%
2042	5,046322978%	2082	5,046334531%
2043	5,046324238%	2083	5,046334531%
2044	5,046325397%	2084	5,046334531%
2045	5,046326466%	2085	5,046334531%
2046	5,046327452%	2086	5,046334531%
2047	5,046328364%	2087	5,046334531%

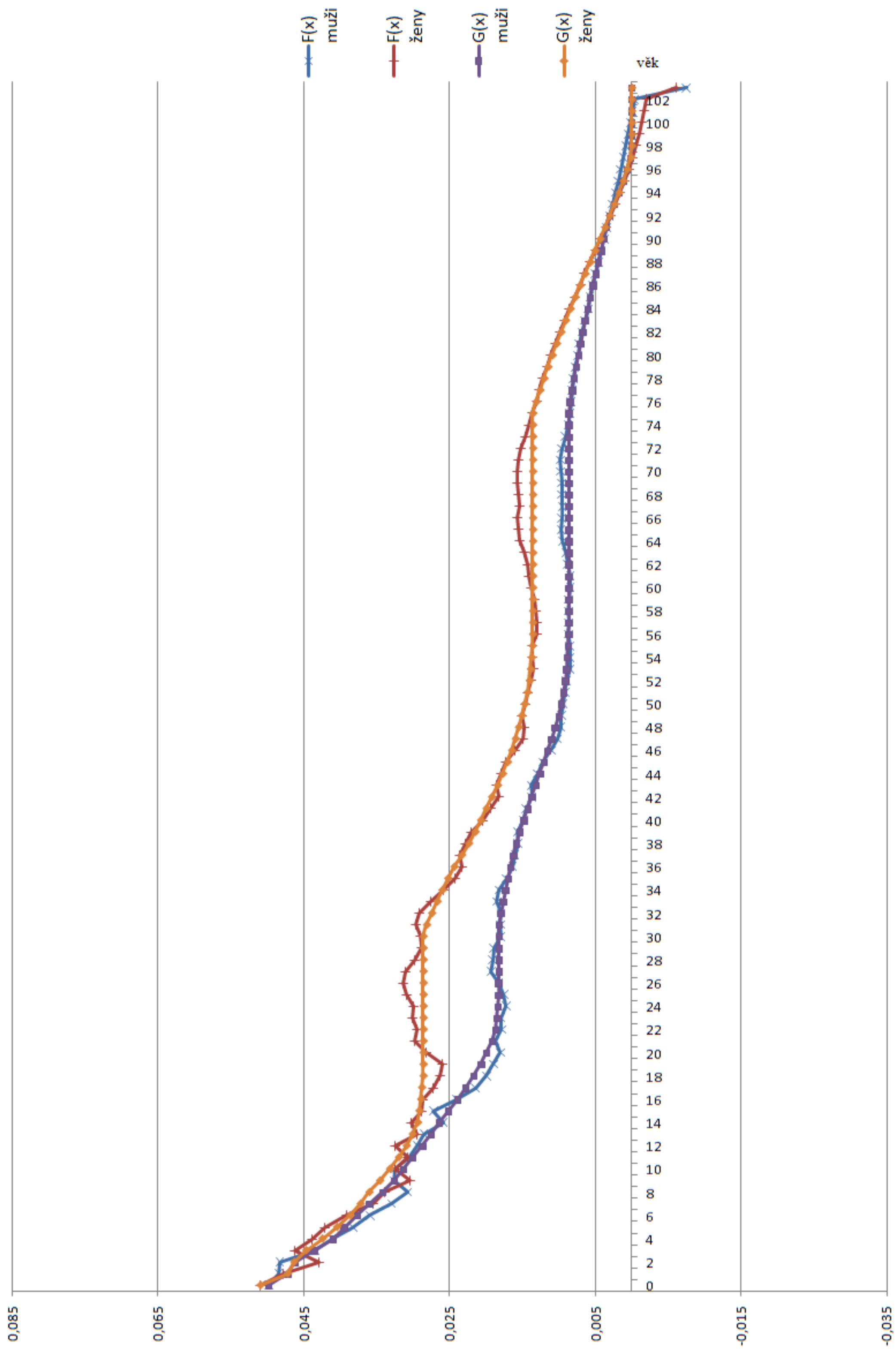
Věkový průběh koeficientů $F_i(x)$, $F(x)$ a $G(x)$ pro muže



Věkový průběh koeficientů $F_i(x)$, $F(x)$ a $G(x)$ pro ženy



Srovnání věkového průběhu koeficientů $F(x)$ a $G(x)$ pro muže a ženy



Literatura

[1] Actuarial Society of South Africa: *PGN 104: Life Offices - Valuation of Long-Term Insurers*, ASSA, Cape Town, 2005.

[2] van Broekhoven, H.: *Market Value of Liabilities Mortality Risk: A Practical Model*, North American Journal, Volume 6, Number 3, str. 95-106, 2002.

[3] Cipra, T.: *Pojistná matematika - Teorie a praxe*, Ekopress, Praha, 1999.

[4] Cipra, T.: *Pojistné rozpravy 3 - Generační úmrtnostní tabulky pro důchodové pojištění a penzijní připojištění v České republice*, Pojistně teoretický bulletin, str. 31-57, 1998.

[5] Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors: *QIS3 Technical Specifications - Part I: Instructions*, CEIOPS, 2007.

[6] Česká společnost aktuárů: *Comments on the Discussion Paper - Preliminary Views on Insurance Contracts prepared by members of Czech Society of Actuaries*, ČSpA, 2007.

[7] Česká společnost aktuárů: *Odborná směrnice č.3 - Test postačitelnosti technických rezerv životního pojištění*, ČSpA, Praha, 2003.

[8] Dupačová, J., Hurt, J., Štěpán, J.: *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2002.

[9] Groupe Consultatif Actuariel Europeen: *Solvency II - Risk Margin Comparison*, London, 2006.

[10] International Actuarial Association (Risk Margin Working Group): *Exposure Draft - Measurement of Liabilities for Insurance Contracts: Current Estimate and Risk Margins*, IAA, 2007.

[11] International Actuarial Association (Risk Margin Working Group): *Re-Exposure Draft - Measurement of Liabilities for Insurance Contracts: Current Estimate and Risk Margins*, IAA, 2008.

[12] International Accounting Standardisation Board: *Discussion Paper Preliminary Views on Insurance Contracts*, IASB, London, 2007.

[13] International Accounting Standardisation Board: *International Financial Reporting Standard 4 - Insurance Contracts*, IASB, London, 2004.

[14] Král, F.: *Provizní systém a profitabilita produktů pojištění osob*, diplomová práce, MFF UK, Praha, 2003.

[15] Mandl, P.: *Pravděpodobnostní dynamické modely*, Academia, Praha, 1985.

[16] Mandl, P., Mazurová, L.: *Matematické základy neživotního pojištění*, Matfyzpress, Praha 1999.

[17] materiály Kooperativy, pojišťovny, a.s.

[18] Swiss Federal Office of Private Insurance: *White Paper of the Swiss Solvency Test*, 2004.

[19] Šrámek, J.: *Implicitní hodnota životní pojišťovny*, diplomová práce, MFF UK, Praha, 1997.

[20] Vyhláška č. 303/2004 Sb., kterou se provádí některá ustanovení zákona o pojišťovnictví.
[21] www.cnb.cz, webová stránka České národní banky.
[22] Zákon č. 155/1995 Sb., o důchodovém pojištění.
[23] Zákon č.37/2004 Sb., o pojistné smlouvě.