Univerzita Karlova v Praze

Filozofická fakulta

Katedra logiky

# Počátky analýzy modalit v moderní logice

# The Beginnings of Analysis of Modalities in Modern Logic

Diplomová práce

Petra Barančíková

Praha, 2012 Vedoucí práce: Doc. PhDr. Vojtěch Kolman, PhD.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně, že jsem řádně citovala všechny použité prameny a literaturu a že práce nebyla využita v rámci jiného vysokoškolského studia či k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 5. 1. 2012 Petra Barančíková

**Abstrakt:** Tato práce sleduje vývoj modalit od modálních postojů zakladatelů analytické filozofie a moderní logiky, přes první axiomatiku modální logiky C. I. Lewise a sémantiku R. Carnapa až po první sémantiky možných světů. Vedle jejich vývoje v pracích S. Kripka obsahuje také další sémantiky, které zhruba ve stejném období vyvíjeli S. Kanger, J. Hintikka a R. Montague a které se k Kripkovým výsledkům přibližovaly.

**Klíčová slova**: historie modální logiky, sémantika možných světů, Carnap, Kripke

**Abstract:** This thesis traces the development of modal logic from modal attitudes of the founders of analytical philosophy and modern logic, through the first axiomatization of C. I. Lewis and the semantics of R. Carnap to the first possible worlds semantics. In addition to its development in the work of S. Kripke, there are also discussed semantics of S. Kanger, J. Hintikka and R. Montague that appear at about the same time and came close to Kripke's results.

**Key words**: history of modal logic, possible worlds semantics, Carnap, Kripke

# Obsah

# Úvod

Výrazy „možnost“, „nutnost“, nebo „možná pravda“ a „nutná pravda“ jsou běžnou součástí každodenní mluvy i odborných jazyků. Ale právě kvůli široké oblasti použití není jejich význam snadno zachytitelný. Snaha o jejich formální definici sahá až k Aristotelovi, který *aletickou modální logiku*, tedy zkoumání možnosti a nutnosti, začal rozvíjet současně s logikou klasickou. Ale zatímco se jeho nauka o kategorických sylogismech stala základem klasického vzdělání, naopak ohledně modální logiky se Aristoteles dostal do sporu už se svým žákem Theofrastem, protože dávala řadu neintuitivních a matoucích výsledků a byla těžko interpretovatelná.

Nápady jak pojmout nutnost a možnost měly i další řecké školy a později učenci jako William Ockham nebo Duns Scotus. Ale od středověku zájem o ně upadal s výjimkou Leibnizova nápadu, že existují i jiné možné světy mimo našeho skutečného a vrátil se až ve století dvacátém s počátkem moderní logiky. První kapitola je proto věnována zakladatelům moderní logiky a analytické filozofie. Ačkoli dost často byli vůči modalitám nepřátelští, byly to právě jejich myšlenky, které pozdější rozvoj umožnily. Druhá kapitola se věnuje počátkům modalit v moderní logice. Jedná se především o první axiomatiku C. I. Lewise a její zjednodušení Kurtem Gödelem, které se stalo standardem pro modální syntaxi a první modální sémantiky, které rozvíjel Rudolf Carnap.

Třetí kapitola je věnována vývoji sémantiky možných světů. Ačkoli je po právu brán jako autor moderní modální sémantiky Saul Kripke, měl řadu předchůdců, kteří se nezávisle na sobě k jeho výsledkům přibližovali a při tom stáli často u zrodu moderních verzí některých druhů modálních logik, jako Jaakko Hintikka u epistemické logiky, nebo Arthur Prior u temporální logiky. A právě různému rozdělení modálních logik podle významu, který přisuzujeme modálním operátorům, je věnována čtvrtá kapitola této práce.

**Poznámka k notaci**: Pro zjednodušení je použitá jednotná notace - negace $\neg$, konjunkce $\wedge$, disjunkce $\vee$, implikace $\rightarrow$, ekvivalence $\equiv$ a ekvivalence na meta-úrovni $\Leftrightarrow$. Proměnné jsou značeny $x$, $y$, $z\ldots$, výrokové formule $p$, $q$, $r\ldots$, libovolné formule $\varphi$, $\psi$, $\chi,\ldots$ případně s indexy. Protože modální systémy se často jmenují po axiomech, které obsahují, jsou značeny tučně a axiomy nezvýrazněně.

# Kapitola 1

# Počátky moderní logiky

Tato kapitola je věnována zakladatelům analytické filozofie - Fregovi, Russellovi a Wittgensteinovi a jejich vztahu k modální logice. Ačkoli žádný z nich explicitně modální logiku neformuloval, měli všichni obrovskou zásluhu na jejím pozdějším formování. To jak nepřímo díky logickému aparátu nebo formálnímu systému zápisu, který Frege s Russellem vyvíjeli, tak přímo díky některým podnětným myšlenkám, které fungovali jako základní kameny, na kterých stavěli další, jako v případě Wittgensteinova chápání nutnosti, které převzal a zformalizoval Rudolf Carnap.

## 1.1 Gottlob Frege

Gottlob Frege se k modálním soudům ve svém obsáhlém díle téměř nevyjadřuje. Zmínku o nich nalezneme v §4 jeho první knihy *Begriffsschrift* (1967, první vydání 1879). Hlavním cílem této knihy je vytvořit jazyk, který by umožňoval formulovat důkazy jasněji než v přirozeném jazyce a tak, aby o jejich platnosti nebylo možné vést spory. Modální rozdělení odmítl jako irelevantní k těmto účelům. Pokud někdo prohlásí nějaký výrok za nutný, pak podle Frega se tím pouze odkazuje ke svým dalším znalostem:

> Apodiktický soud se liší od asertorického v tom, že naznačuje existenci univerzálních soudů, ze kterých daná věta může být odvozena, zatímco v případě asertorického soudu takový náznak chybí. Řeknu-li, že věta je nutná, naznačuji tak důvody mého soudu. *Ale protože toto nemá vliv na pojmový obsah soudu, není pro nás forma apodiktického soudu podstatná.*[1]

[1] [Frege, 1967, §4, s. 13]

Termíny apodiktický a asertorický soud pocházejí od Kanta. Ten ve své *Kritice čistého rozumu* (2001, první vydání 1781) zavádí čtyři kategorie soudu - kvalitu, kvantitu, relaci a modalitu. Podle té poslední se soudy dělí na *apodiktické* (tvrzení nebo popírání jejich obsahů je bráno jako nutné), *asertorické* (jejich obsah je brán jako pravdivý nebo nepravdivý) a *problematické* (jejich tvrzení a popírání je bráno jako možné). O modalitě potom Kant tvrdí, že „je zcela zvláštní funkcí, jež se vyznačuje tím, že ničím nepřispívá k obsahu soudu, ..., nýbrž se týká pouze hodnoty kopuly ve vztahu k myšlení vůbec."[2]

Frege pro své účely zavádí speciální termín *pojmový obsah* [begriffliche Inhalt], který označuje něco, co mají dvě věty se stejným významem společného. To, co je podle něho důležité z hlediska smyslu je právě pojmový obsah. A zatímco zavrhuje tradiční kategorie soudu a nahrazuje je vlastní dvojicí *předmět* [Gegenstand] a *pojem* [Begriff], shoduje se s Kantem na tom, že modalita nemá vliv na pojmový obsah soudu. Pokud je výrok označen jako možný, říká Frege, řečník naznačuje buď to, že v danou chvíli nezná žádné zákony, ze kterých by plynula negace daného výroku - jako v tvrzení

> Je možné, že Země se jednou srazí s jiným nebeským tělesem.[3]

a nebo že negace výroku je obecně neplatná - jako v tvrzení

> Nachlazení může mít za následek smrt.[4]

### 1.1.1 Sémantika významu a smyslu

Frege tedy modality do svého systému nepouští, ale i tak se zasloužil o pozdějšímu vývoj modálních sémantik a to především rozdělením významu na dvě úrovně. Už v *Begriffsschriftu* Frege v úvahách nad identitou pozoruje, že „stejný obsah může být zcela určen různými způsoby."[5] Potom je možné uvažovat identitu obsahů dvou znaků, které odpovídají právě dvěma způsobům určení obsahu. Tuto teorii dále rozvíjí ve svém článku *Über Sinn und Bedeutung* (1960, první vydání 1892). V něm si zpočátku všímá, že identity „$a = a$" a „$a = b$" mají očividně jinou výpovědní hodnotu. Zatímco „$a = a$" platí triviálně, „$a = b$" v sobě nese nějakou informaci. Kdyby to byla informace o objektu, který tyto znaky označují, potom by mezi „$a = a$" a „$a = b$" (je-li to pravda) neměl být rozdíl. Zdá se, že se tedy jedná o vztah mezi dvěma znaky, které něco označují.

[2][Kant, 2001, §9]
[3][Frege, 1967, §4, s. 13]
[4]Ibid.
[5][Frege, 1967, §8, s. 21]

> Pokud se znak „$a$” odlišuje od znaku „$b$” jen jako předmět (svým tvarem), ne jako znak (tj. ne způsobem, kterým něco označuje), kognitivní hodnota $a = a$ se stane v podstatě stejnou jako $a = b$, pokud $a = b$ je pravda. Rozdíl se může objevit jen pokud rozdíl mezi znaky odpovídá rozdílu ve způsoby prezentace toho, co označují.[6]

To ilustruje příkladem trojúhelníka, jehož každý vrchol je spojený přímkou s bodem uprostřed opačné strany. Výsledné přímky se nazývají a, b, c a střetávají se v jednom bodě - těžišti trojúhelníka. „Bod, ve kterém a protíná b” je tedy stejný jako „bod, ve kterém b protíná c” a odpovídá také „bodu, ve kterém se c protíná a”. To v čem se liší je způsob popisu, jak tohoto bodu dosáhnout a všechny tím pádem obsahují i určitou skutečnou znalost. Máme-li tedy gramaticky správně utvořený výraz, můžeme u něj rozlišit *smysl* [Sinn], který v sobě obsahuje *způsob danosti* [die Art des Gegebenseins] a *význam* [Bedeutung], který odpovídá tomu, co označuje - reprezentaci v aktuálním světě. Respektive Frege říká, že výraz „svůj smysl vyjadřuje” a „označuje či jmenuje svůj význam”.[7] Smyslem věty je myšlenka (objektivní obsah), kterou vyjadřuje a jejím významem je pravdivostní hodnota.

Jak z toho i plyne, každý gramaticky správně utvořený výraz má vždy smysl, ale nemusí mít nutně význam - můžeme mluvit o největším prvočísle, jednorožcích, nejvzdálenějším nebeském objektu od země, přestože jim v našem světě nic neodpovídá. V přirozeném jazyce podle Frege mluvíme běžně o významu. Jinak je tomu v nepřímých kontextech, kde se na místo významu posouvá smysl.

## 1.2 Bertrand Russell

Ani další ze zakladatelů moderní logiky Bertrand Russell nebyl modální logice příznivě nakloněn. Ve svých spisech ji obvykle bere jako zmatení v pojmech. Bylo to do jisté míry, stejně jako u Frega, jeho snahou přistupovat k logicko-filozofickým problému z matematického pohledu, ve kterém se zdá nesmyslné rozlišovat pravdivé a nutně pravdivé věty. Už ve svých prvních dílech o matematice[8] kritizuje pojetí modalit Leibnize a Kanta:

> Teorie nutnosti prosazovaná Kantem, ..., se zdá radikálně bludná. Vše je v nějakém smyslu pouhý fakt... neexistuje žádné pravdivé tvrzení, o kterém dává smysl

[6] [Frege, 1960, s. 37]
[7] [Frege, 1960, s. 40]
[8] [Russell, 1900] a [Russell, 1903]

říkat, že by mohlo být nepravdivé. Někdo by stejně dobře mohl říct, že červenost by mohla být chuť a ne barva. Co je pravdivé, je pravdivé; co je nepravdivé, je nepravdivé; a co se týče základů, není už nic co by o nich mohlo být řečeno. Jediný logický význam nutnosti se zdá být odvozen z implikace. Tvrzení je víceméně nutné podle toho, jak je velká či malá třída tvrzení, pro které je premisou. V tomto smyslu mají tvrzení logiky největší nutnost a ty geometrické mají vysoký stupeň nutnosti.[9]

### 1.2.1 Nutnost jako predikát propozice

Jeho nejrozsáhlejší práce věnovaná modalitám byla *Necessity and Possibility* (1994), kterou Russell přednášel roku 1905 Oxfordské filozofické společnosti. V ní se na definicích nutnosti od různých autorů snaží demonstrovat, že nutnost a možnost mezi základní logické pojmy nepatří a „předmět modality by měl být z logiky vyhnán."[10] Uvádí následující čtyři charakteristické druhy definice nutnosti:

1. Nutnost je chápána jako poznání a priori a možnost jako empirické poznání. Zde je problém najít logický pár, který by těmto dvěma kategoriím odpovídal. Russell navrhuje jako jednu z možných definic výrazy „výrok, který nepredikuje existenci v příslušném čase" a „výrok, který predikuje existenci v příslušném čase". Ale existují i věty které platí nezávisle na čase a přitom nejsou apriorní - např. fyzikální zákony. Množina výroků, která nepredikuje existenci v příslušném čase, by potom byla zajímavá pouze způsobem získání znalosti a nutnost definovaná její pomocí by tedy měla čistě epistemologický význam. To podle Russella dobře odpovídá lidskému psychologickému pocitu nutnosti, ale určitě nepatří mezi pojmy, kterými by se měla zabývat logika. Nutnost by neměla být brána jako „věčná pravda"[11], měla by být zcela nezávislá na čase.

2. Nutnost tvrzení je chápána jako jeho dokazatelnost. To demonstruje na intepretaci nutnosti v pracích Bradleyho, Bosanqueta nebo G. E. Moorea. Breadley označuje [12] větu za nutnou, pokud je důsledkem jiné věty. Přitom neklade požadavky na pravdivost ani jedné z těchto vět a tedy je tato definice hodně bizarní a prakticky kterákoli věta je podle ní nutná. Bosanquet zase tvrdí, že všechny hypotetické, nebo disjunktivní

[9] [Russell, 1903, sekce 430]
[10] [Russell, 1994, s. 519]
[11] [Russell, 1994, s. 511]
[12] Získat zmiňované práce Bradleyho, Bosanqueta a G. E. Moorea se bohužel ukázalo jako značně náročný úkol a tak zde budou popsány pouze tak, jak je podává Russell. K ilustraci Russellovy myšlenky by to ale snad mělo být dostačující.

věty jsou nutné a žádné jiné. Ale i pravdivé hypotetické věty jako „Pokud bude pršet, vezmu si deštník." nebo pravdivé disjunktivní věty jako „Caesar zemřel o březnových idách, nebo zemřel na přejedení nakládanými okurkami." budou sotva považovány za nutné věty, na rozdíl třeba od věty "Caesar zemřel o březnových idách, nebo nezemřel o březnových idách."[13] G. E. Moore definuje nutnost věty relativně podle toho, jak velká je množina vět, které ji implikují a současně jí nejsou implikovány. Nicméně podle Russella mají všechny pravdivé věty stejnou nutnost a není je možné na základě nutnosti rozlišovat.

3. Nutnost tvrzení je chápána jako analytičnost - věta je odvoditelná logickými zákony. Ani s tímto pojetím není spokojen, protože nebere v úvahu nutnost mimo logiku.

   > „... množství vět, které nejsou analytické, je chápáno jak nutné. Takové jsou: ‚Pokud je něco dobré, pak to není špatné', ‚Pokud je něco žluté, není to červené', atd. Špatné neznamená to samé jako ne dobré a pouhá logika proto nikdy nedokáže, že dobré a špatné jsou o nic víc nespojitelné než kulaté a modré."[14]

4. Tvrzení je chápáno jako nutné, pokud se jedná o případ určitého druhu tvrzení, které jsou všechny pravdivé, tj. je možné za určitého člena věty substituovat jiný při zachování pravdivosti věty. To je například věta "Pokud Sokrates je člověk, pak Sokrates je smrtelný." která zůstává pravdivá, když nahradíme oba výskyty slova „Sokrates" jiným objektem. Ale tato definice nutnosti je jednak velice vágní a jednak tato věta přestane být nutná, pokud dojde k nahrazení pouze jednoho výskytu slova „Sokrates". Při některých substitucích navíc vede k nesmyslným výsledkům. Kvůli exaktní definici je třeba, aby se v tomto případě nutnost nevztahovala k větě, ale k *výrokové funkci*, kterou Russell charakterizuje jako „větu s neurčitým předmětem."[15] Následující definice převzal z práce Hugha MacColla[16] s tím rozdílem, že MacColl mezi výroky a výrokovými funkcemi nerozlišoval:

   > Výroková funkce „$x$ má vlastnost $\varphi$" je *nutná*, pokud platí pro všechno; je *nutná v třídě $u$* pokud platí pro každý člen $u$.

[13] [Russell, 1994, s. 513]
[14] [Russell, 1994, s. 517]
[15] [Russell, 1994, s. 518]
[16] [MacColl, 1896]

> Výroková funkce „$x$ má vlastnost $\varphi$“ je *možná*, pokud platí pro něco; je *možná v třídě u* pokud platí pro nějaký člen $u$.[17]

> Ale ani tyto definice Russellovi nevyhovují. Vadí mu, že přiřazují nutnost a možnost výrokovým funkcím, zatímco Russell je přesvědčen, že se jedná o predikáty výroků.

Všechny tyto příklady považuje za dostatečné k dosvědčení toho, že nutnost je nejasný a zmatečný pojem. Žádný z předchozích způsobů definice nutnosti není zcela intuitivní a neproblematický a proto Russell dospívá k přesvědčení, že neexistuje žádná logická nutnost.

> Věty jsou jednoduše pravdivé nebo nepravdivé a neexistuje žádný takový komparativ a superlativ pravdivosti jako je neznačeno pojmy kontingence a nutnost.[18]

### 1.2.2 Nutnost jako predikát propoziční funkce

Později Russell svoje nepřátelství k modálním logikám o něco zmírnil a poslední pojetí nutnosti z *Necessity and Possibility* přepracoval ve své práci *Introduction to Mathematical Philosophy* (1967, první vydání 1919) do definice modálních konstant. K tomu musel provést několik změn. Jednak už netvrdí, že je nutnost predikátem výroku, ale právě naopak, že příčina zmatků a nejasností při snaze o zachycení nutnosti je právě připisování nutnosti výrokům. Výrok má jasně danou pravdivostní hodnotu a je nesmyslné tvrdit, že je to tak nutně, nebo že by to mohlo být jinak. Filozofické problémy s modalitami spočívají v záměně výrokových funkcí a výroků. Výroky jsou jen pravdivé, nebo nepravdivé a není příliš jasné, co by nutnost přidávala pravdivé větě navíc.[19] Výrokové funkce naopak mohou platit pro celý svůj definiční obor („$x = x$”), jen pro některé jeho hodnoty („$x$ je člověk”) a nebo neplatit pro žádnou („$x$ je jednorožec”). Předchozí problém s hodnotami, na kterých výrokové funkce

[17] [Russell, 1994, s. 518]

[18] [Russell, 1994, s. 520]

[19] V tomto směru se Russell poněkud popírá v dalších částech *Introduction to Mathematical Philosophy*, ve kterých pravdivé věty umožňuje označit jako logicky nutné. Používá termíny nutný a možný jako predikáty výroků a logickou nutnost ztotožňuje s pravdivostí ve všech možných světech. Říká:

> Čistá logika a čistá matematika (což je totéž), usilují o to být pravdivé, Leibnizovými slovy, ve všech možných světech, ne pouze v tomto náhodném světě bez ladu a skladu, ve kterém nás uvězněnila náhoda. Logik by si měl zachovat určitou důstojnost: nesmí se snižovat k vyvozování závěrů z věcí, které o něm vidí. [Russell, 1967, s. 192]

Tato definice vyvolává řadu dalších otázek, které na Russell už dále nijak neodpovídá, např. jak by to bylo s logicky nutnou výrokovou funkcí, když Russell dovoluje dosazovat do výrokových funkcí pouze aktuální individua.

dávají nesmyslné výsledky, Russell vyřešil ve své slavné *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types* (1908). Už nepovoluje do propozičních funkcí substituovat libovolně přes celé univerzum předmětů, ale pouze přes speciální množinu - *logický typ*. Ten neobsahuje ty hodnoty, které by dávaly nesmyslné výsledky. Věta vzniklá z funkce dosazením prvku jejího logického typu je tedy vždy smysluplná, tj. pravdivá nebo nepravdivá.

Russell výrokovou funkci $\phi(x)$ označuje[20] jako

$$\begin{array}{rcl} \textit{nutnou} & \Leftrightarrow & (\forall x)\,\phi\,(x) \\ \textit{možnou} & \Leftrightarrow & (\exists x)\,\phi\,(x) \\ \textit{nemožnou} & \Leftrightarrow & (\forall x)\,\neg\phi\,(x) \end{array}$$

Toto je příklad takzvaného *statistického pojetí* modalit - modální pojmy jsou nahraditelné kvantifikátory a Russell si tak potvrzuje svoje přesvědčení, že se nejedná o fundamentální logické pojmy. I tak je jeho chápání modalit významný posun od Frega a Kanta, kteří chápali pravdivost jako jednu z modálních kategorií, zatímco Russell ji staví zcela mimo ně. A ačkoli Russell žádnou další teorii modální logiky nerozvíjí, má velkou zásluhu na pozdějším vývoji modálních logik. Byla to právě nesouhlas s jeho a Whiteheadovou interpretací tzv. *materiální implikace* v *Principia Mathematica* (1962, první vydání 1910), který motivoval C. I. Lewise k vytvoření vlastní teorie *striktní implikace*, ze které se později vyvinula standardní syntaxe moderní modální logiky a současně jejich formální systém, který mu vůbec její axiomatizaci umožnil.

### 1.2.3 Implicitní modální logika

Na Russellova chápání modální logiky existuje i opačný názor, že Russell byl modálním logikám nejen příznivě nakloněn, ale dokonce rozvíjel i svoje vlastní modální systémy. To například tvrdí Jan Dejnožka (2010). Podle něj právě díky tomu, že Russell definuje modální spojky pomocí kvantifikátorů na funkcích, je možné chápat Russellovy práce v klasické predikátové logice jako v modální logice s eliminovanými modálními symboly, které jsou nahrazeny kvantifikátory. V tom chápe ono Russellovo „vyhnání modalit z logiky" - v redukci modálních pojmů a entit. Potom je možné chápat celou logiku z *Principia Mathematica* jako modální.

Dejnožka vybírá z mnoha převážně nelogických Russellových textů citáty, které naznačují axiomy modálního systému **S5**[21] a dále na jejich základě tvrdí, že Russell měl dokonce sedm

[20] [Russell, 2004, s. 81] nebo [Russell, 1967, s. 165]

[21] Tento systém je definován v oddílu 2.1.2

různých implicitních modálních logik a to nejen aletické, ale také epistemické a deontické.[22]

Dejnožka také uvádí tři hlavní důvody, proč je stále většina lidí přesvědčena, že Russellův vztah k modalitám byl negativní. První je, že většina čtenářů Russellova rozsáhlého díla, která se zajímá o logiku, nemá obvykle příliš velkou znalost knih, které nejsou věnovány logice a právě v nich se Russell zaobírá modalitami nejčastěji. Druhý důvod je podle Dejnožky právě to, že Russellova práce *Necessity and Possibility* nebyla během jeho života publikována, i když se zdá minimálně podivné, že zrovna z této práce by jakýmkoli způsobem plynul Russellův kladný vztah k modalitám. Jako poslední důvod Dejnožka uvádí to, že „zatímco možná logika bez metafyziky a ontologie je možná, adekvátní bádání o Russellově modální logice bez adekvátního bádání o jeho metafyzice a ontologii možné není."[23]

## 1.3 Ludwig Wittgenstein

Ludwig Wittgenstein se ve své knize *Tractatus logico-philosophicus* (2007, první vydání 1921) pokouší objasnit logiku jazykových vyjádření a současně s tím i pojem nutnosti, možnosti a nemožnosti. Přitom kritizuje Frega a Russella a jejich pojetí logické pravdivosti jako univerzální platnosti výroku. Podle Wittgensteina ale obecná platnost není zárukou nutnosti, může existovat výrok, který je empirický a přitom obecně platný jen v důsledku náhody. Ve své teorii proto stanovuje podmínky, podle kterých se výroky rozdělí na ty, které jsou pravdivé nutně a na ty, které jsou pravdivé pouze kontingentně. Tyto myšlenky se staly inspirací pro mnoho dalších logiků a vycházely z nich i první modální sémantiky. K jejich objasnění je ale nejprve třeba stručně přiblížit Wittgensteinovo pojetí světa a vztahu světa a jazyka.

### 1.3.1 Ontologie a teorie jazyka

Úplný popis světa není dán souhrnem všech jednotlivin, ale souhrnem všech *faktů*, které v něm platí. Fakta existují v *logickém prostoru,* (1.13)[24] který obsahuje vše, co je logicky možné. Základním druhem faktů jsou *stavy věcí*, ty jsou na sobě vzájemně nezávislé. (2.061) „Stav věcí je propojení *předmětů*", (2.01) které jsou natolik jednoduché, (2.02) že není možné je už dále rozložit. (2.021) Povaha předmětů není úplně jasná, vzhledem k tomu, že Wittgenstein nikde nedává příklad toho, co považuje za předmět. Předměty není možné spojovat

[22] Epistemickým a deontickým logikám jsou věnovány oddíly 4.1 a 4.2

[23] [Dejnožka, 2010, s. 1]

[24] V této kapitole jsou v závorkách uváděny čísla komentářů z [Wittgenstein, 2007]. Pokud nejsou v uvozovkách, tak se nejedná se o přímé citace, ale jsou zde uvedeny pro usnadnění orientace ve struktuře *Tractatu*.

svévolně, každý předmět má logickou formu, která určuje jak a v kterých stavech věcí se může vyskytovat. (2.0141) „Ve stavu věci jsou do sebe předměty zaklesnuty jako články řetězu”, (2.03) nejsou tedy třeba navíc žádné relace mezi předměty. Znalostí předmětu je daná i znalost všech možností jeho výskytu ve stavech věcí. (2.0123) Předměty dohromady tvoří *substanci* světa. (2.021) ta „existuje nezávisle na tom, co je zkrátka tak.” (2.024)

Svět si zobrazujeme v izomorfismu s jazykem. Předměty v jazyce zastupují *jména*, stavy věcí *elementární věty* a fakty *pravdivé věty*. Věta a její obraz sdílejí stejnou *formu zobrazování*. Stejně jako nelze spojovat libovolně předměty, také libovolným, i když třeba gramaticky správným, shlukům jmen ve světě nic neodpovídá a jsou tedy nesmyslné. Analogicky jako stavy věcí i jejich obraz - elementární věty jsou vzájemně nezávislé a souhrn všech pravdivých tvoří úplný popis světa. (4.26) Podstatné je, že věty sice mohou popsat veškerou realitu, ale nemohou popsat nic, co by bylo mimo svět jako například formu zobrazení nebo metafyziku.

„Věta je pravdivostní funkcí elementárních vět.” (5) Pravdivostní možnosti elementárních vět Wittgenstein schematizuje pomocí pravdivostní tabulky. Pravdivostní možnosti, při kterých je věta pravdivá, se nazývají *důvody pravdivosti* (5.10) a jsou-li důvody pravdivosti jedné věty také důvody pravdivosti druhé věty, tak z druhé věty ta první vyplývá.

Mezi větami mohou nastat dva extrémní případy a to jsou věty, které jsou pravdivé pro všechny pravdivostní možnosti - *tautologie* a věty, které jsou naopak pro všechny pravdivostní možnosti nepravdivé - *kontradikce*.

### 1.3.2 Možnost a nutnost v Tractatu

Proti Russellovu pojetí nutnosti a možnosti jako obecně, respektive existenčně kvantifikované propoziční funkce se Wittgenstein v Tractatu vymezuje:

> Je nesprávné parafrázovat větu „$(\exists x).f(x)$” pomocí „fx je možné” - jako to dělá Russell.
>
> Jistota, možnost nebo nemožnost nějaké situace se nevyjadřuje větou, nýbrž tím, že je výraz tautologií, smysluplnou větou nebo kontradikcí.
>
> Onen precedens, na který bychom se chtěli odvolávat, musí být už v samotném symbolu.[25]

[25][Wittgenstein, 2007, 5.525]

Podle Wittgensteina tedy tautologie odpovídá *nutné* pravdě, kontradikce *nemožné* pravdě a všechny ostatní smysluplné věty *možné* pravdě. Kontradikce a tautologie nejsou smysluplné věty, protože nic neříkají o světě a jejich pravdivost je nezávislá na elementárních větách, které obsahují. Nutně pravdivé a nutně nepravdivé věty tedy nemohou být elementární, ale musí se jednat o složené logické struktury, ve kterých jsou elementární věty spojeny tak, aby jejich výsledná hodnota v pravdivostní tabulce dávala pouze jednu hodnotu. Ale vzhledem k tomu, že se jedná o správně utvořené věty, nejsou ani nesmyslné.

Wittgenstein tak ostře oddělil logické a empirické. Není žádná empirická nutnost, i obecně platné kontingentní věty jsou obecně platné nahodile v důsledku stavu světa. Nutnost a nemožnost nastávají pouze jako důsledky sémantických pravidel a nemá smysl je hledat mimo jazyk. Existuje pouze logická nutnost a logická nemožnost. (6.37, 6.375) „Věty logiky jsou tautologie." (6.1) To, že nic neříkají o světě, je v pořádku, protože logika musí obsahovat pouze analytické věty.

# Kapitola 2

# První moderní modální logiky

Na rozdíl od hledání základů mnoha jiných oborů lze počátek moderní modální logiky určit poměrně přesně. Všeobecně za něj bývá považována práce C. I. Lewise *A Survey of symbolic logic* (1918), ve které byl publikována první axiomatika modální syntaxe. Samozřejmě i Lewis měl své předchůdce, na přelomu století se modalitám věnovali například C. S. Peirce, který se zabýval grafickým vyjádřením modality ve svých Gamma systémech, nebo Hugh MacColl. Ten se ve svých pracích[1] zabývá významem a zavádí pět pravdivostních hodnot výroků pravda, nepravda, možnost, nemožnost a proměnnost, které široce popisuje. Jinak ale jeho práce svým obsahem nezapadají do „moderní logiky" - neobsahují formální definice formulí, rigorózní odvozování z množiny axiomů, atd. Pro Lewise ale nejspíš nebyl velkou inspirací, v úvodním historického přehledu z *A Survey of symbolic logic* ho vůbec nezmiňuje a jen později dodává, že navrhl něco trochu podobného jako jeho vlastní systém striktní implikace.[2] Daleko větší inspirací pro něj byla *Principia Mathematica*, jen některé operace v jejím systému považoval za nevhodně definované. Lewisovou primární snahou tedy nebylo rozšířit systém klasické logiky, ale zdokonalit logický formalismus Russella a Whiteheada.

Lewisovy systémy byly ale čistě syntaktické a tak bylo nesmírně obtížné je porovnávat nebo určit, zda-li vůbec generují různé množiny formulí. Tarski sice vyvinul sémantiku pro klasickou logiku krátce po vydání Lewis (1932), ale pro modální logiky žádná sémantika dlouho neexistovala. Rozvíjela se ale modální algebra a v jejím rámci bylo dosaženo významných výsledků. W. T. Parry (1934) dokázal, že Lewisovy systémy jsou vzájemně odlišné; McKinsey analyzoval dva z nich **S2** a **S4** a dokázal, že jsou rozhodnutelné; byly tvořeny další nové logiky. Nejpozoruhodnější z algebraických výsledků je společná práce Jónssona a Tarského z roku 1951. V ní ukázali, jak reprezentovat rozšířené Booleovské algebry s operátory jako modelové struktury. Operátor $\Diamond$ definovali pomocí binární relace R a poukázali na to, jak vlastnosti relace ovlivňují vlastnosti operátoru. Jejich práce je v zásadě alge-

[1] [MacColl, 1896], [MacColl, 1906]

[2] [Lewis, 1918, s. 108]

braická analogie pozdějšího Kripkova důkazu úplnosti. Ale ačkoli se Tarski předtím věnoval modálním algebrám ve spolupráci s McKinseyem, nikde ve své práci svoje výsledky nevztáhl k modální logice a dokonce si blízké podobnosti mezi oběma systémy pravděpodobně ani nebyl vědom.[3]

Dalším podstatným datem pro modální logiku byl rok 1946, ve kterém byly publikovány první predikátové modální logiky. Obvykle je jako autorka první kvantifikované modální logiky uváděna Ruth Barcan Marcusová, její příspěvek byl přijat do *Journal of Symbolic Logic* o měsíc dříve než ten od Rudolfa Carnapa. Nicméně jejich práce nejsou dost dobře porovnatelné. Zatímco práce Barcan Marcusové (1946) je zcela syntaktická - jedná se převážně o velké množství důkazů vytažených z její rozpracované doktorské práce, Carnapovi šlo o víc. Snaží se o objasnění modální pojmů a jeho příspěvek „byl založený na *Meaning and Necessity*, knize na které pracoval od roku 1942, první verzi dokončil roku 1943 a, po dlouhé korespondenci s Quinem a Churchem, publikoval roku 1947.“[4] Proti spojení modálních logik a kvantifikátorů se záhy objevilo množství kritiky. Zcela je odmítá W. V. O. Quine a přitom poukazuje na mnohé problémy, které z tohoto spojení plynou jako například ten, že vzhledem k selhávání substituovatelnosti individuí s identickými hodnotami v modálních kontextech, přes ně není smysluplné kvantifikovat jako přes skutečné objekty.

## 2.1 Modální axiomatika

### 2.1.1 Lewisovy systémy

Roku 1910 vydávají Bertrand Russell a Alfred North Whitehead první díl svého třísvazkového monumentálního díla *Principia Mathematica*. V první kapitole jsou zavedeny základní logické spojky - negaci a disjunkci a jejich pomocí je definována další spojka - *materiální implikace*: „$p \to q \equiv_{df} \neg p \vee q$”. Tu potom navrhují číst „z $p$ vyplývá $q$”[5] a vysvětlují to pomocí standardního odvozovacího pravidla - pokud je pravdivé $p$ i $p \to q$, pak musí být pravdivé i $q$. Lewis poukazuje na to, že se nejedná o vhodnou definici, protože vlivem stavu světa ze sebe mohou vyplývat zcela nezávislé věty. Navíc má řadu podivných důsledků, které nijak nepřispívají správnému odvozování. Mezi ně patří i tzv. *paradoxy materiální implikace* - pravdivá věta je implikována libovolnou větou a z nepravdivé věty plyne jakákoli věta. Formálně se zapisují:

$\varphi \to (\psi \to \varphi)$ a $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$

[3] Kripke v rozhovoru s Jackem B. Copelandem uvedl, „že na konferenci ve Finsku v roce 1962 zdůrazňoval důležitost této práce [Jónsson a Tarski, 1951]. Tarski byl přítomen a řekl, že nebyl s to vidět jakékoli spojení s tím, co jsem dělal já!” [Copeland, 2002, s. 105]

[4] [Jacquette, 2002, s. 288]

[5] [Russell a Whitehead, 1962, s. 94]

Lewis namítá, že takto definovaná implikace je „očividně relace mezi pravdivostními hodnotami výroků, ne mezi jakýmkoli předpokládaným obsahem nebo logickým významem výroků,”[6] Nedává tedy dost dobře smysl mluvit o vyplývání, protože běžný význam „z $p$ vyplývá $q$” má podle něj být synonymní s „q je odvoditelné z p”[7]. Chce proto navrhnout novou relaci, která by brala v úvahu i význam výroků a která by lépe reprezentovala vztah mezi premisou a závěrem. A stačí mu k tomu malá změna - nepožadovat pouze, aby v případě $p \to q$ nebylo $p$ pravdivé a $q$ nepravdivé, ale aby vůbec nebylo možné, aby $p$ bylo pravdivé a $q$ nepravdivé.

V [Lewis, 1918] proto zavádí základní modální operaci pro možnost (symbolicky $\Diamond$)[8]. Její pomocí potom definuje *striktní implikaci* $p \prec q \equiv_{df} \neg\Diamond(p \wedge \neg q)$ a *striktní ekvivalenci* $p \asymp q \equiv_{df} p \prec q \wedge q \prec p$. Proti striktní implikaci někteří namítali, že není o nic méně paradoxní než materiální implikace, protože má vlastní *paradoxy striktní implikace* - nemožná věta implikuje jakoukoli větu a nutnou větu implikuje jakákoli věta. Podle Lewis ale tyto důsledky už nejsou nijak paradoxní a striktní implikace intuitivně zachycuje logické odvozování. Lewis potom pouze na jejím základě, bez použití materiální implikace, definuje systém s osmi axiomy. Jak ale brzy poukázal E. L. Post, byl tento systém chybný a kvůli axiomu

$$(p \prec q) \asymp (\neg\Diamond q \prec \neg\Diamond p) \tag{1.8}$$

a jeho dalším alternativním formám v něm bylo dokazatelné $\neg\Diamond p \asymp \neg p$. Lewis v [Lewis, 1920] z (1.8) ponechal jen stranu zleva doprava - axiom

$$(p \prec q) \prec (\neg\Diamond q \prec \neg\Diamond p) \tag{2.2}$$

a odstranil ostatní axiomy, které vedly ke kolapsu modalit. Výsledný systém byl potom ekvivalentní jeho pozdějšímu systému **S3**, zahrnutému do jeho a Langfordovi práce *Symbolic Logic* (1932). V jejím Appendixu bylo uvedeno pět systémů, seřazených podle vyjadřovací síly. Nejslabší z nich **S1** má následující axiomy:

B1. $p \wedge q \prec q \wedge p$,

B2. $p \wedge q \prec p$,

B3. $p \prec p \wedge p$,

B4. $(p \wedge q) \wedge r \prec p \wedge (q \wedge r)$,

[6] [Lewis, 1918, s. 326]

[7] [Lewis a Langford, 1932, s. 122]

[8] Respektive v [Lewis, 1918, s. 292] je jako základní modální operace zavedena nemožnost (symbolicky $\sim$). Ale kvůli lepší přehlednosti a větší jednoduchosti zde bude použitá jeho pozdější notace z [Lewis, 1932], ve které používá jako základní modální operaci možnost (symbolicky $\Diamond$, přičemž platí $\Diamond\varphi \Leftrightarrow_{df} \neg \sim \varphi$).

B5. $p \prec \neg\neg p$,[9]

B6. $[(p \prec q) \wedge (q \prec r)] \prec (p \prec r)$,

B7. $[p \wedge (p \prec q)] \prec q$.

Platí v něm odvozovací pravidla uniformní substituce formulí za proměnné, substituce striktně ekvivalentních výrazů, adjunkce $\frac{P\ Q}{P \wedge Q}$ a verze modu ponens se striktní implikací $\frac{p\ p \prec q}{q}$. V **S1** není dokazatelné ani celkem věrohodně znějící pravidlo - $\Diamond(p \wedge q) \prec \Diamond p$, které přidáním k **S1** vytvoří systém **S2**. Systém **S3** ze *Survey of Symbolic logic* vznikne právě obohacením **S1** o axiom (2.2).

V těchto systémech nebylo možné redukovat iterované modality a bylo tedy nekonečné množství různých modalit. To vedlo Oskara Beckera (1930) k návrhu axiomů, které by umožnily omezit množství různých modalit na konečné číslo. Jedná se o tzv. *princip slabé redukce* $\Diamond\Diamond p \prec \Diamond p$ a *princip silné redukce* $\Diamond\neg\Diamond p \prec \neg\Diamond p$. Těmto principům se říká také axiom 4 a axiom 5 podle názvů modálních systému ze *Symbolic Logic*. Systém **S4** je **S1** plus axiom 4 a obsahuje právě 12 různých modalit, logika **S5** odpovídá **S1** s přidaným axiomem 5 a má pouze 4 různé modality - možnost, nutnost (symbolicky $\Box$, platí $\Box\varphi \Leftrightarrow_{df} \neg\Diamond\neg\varphi$) a jejich negace. Ale i Becker samotný měl o principu silné redukce pochyby, některé jeho důsledky jako $\Diamond\Box\varphi \equiv \Box\varphi$, se mu „zdály lehce paradoxní"[10]. Lewis je nepřijal vůbec, nejvíce se mu zamlouval systém **S1**. Ukázalo se totiž, že v jeho původním systému je dokazatelný teorém $(p \prec q) \prec ((q \prec r) \prec (p \prec r))$, který se mu zdál neintuitivní a obával se, že je dokazatelný už v **S2**. Když roku 1934 W. T. Parry dokázal, že to tak není a systémy **S2** a **S3** jsou rozdílné, Lewis si zvolil **S2** jako ideální systém striktní implikace, tj. ten který nejlépe reprezentuje implikaci tak, jak se běžně používá.

### 2.1.2 Gödelova úprava

Názvy Lewisových modálních systémů se sice používají dodnes, ale jejich standardní podoba je jiná. Místo sady modálních axiomů se definují jako rozšíření klasické logiky o modální axiomy a odvozovací pravidla. První modulární modální systém byla logika **S4**, kterou formuloval roku 1933 Kurt Gödel s použitím opět materiální implikace a s $\Box$ jako primitivním symbolem. Jeho logika obsahuje výrokovou logiku z *Principia Mathematica* (tj. obsahuje všechny tautologie klasické výrokové logiky a pravidla modus ponens a substituce) a následující modální axiomy:

T. $\Box p \to p$,

[9] McKinsey roku 1934 dokázal, že je tento axiom nadbytečný.

[10] [Kneale a Kneale, 1962, s. 551]

K. $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

4. $\Box p \to \Box\Box p,$

a *pravidlo necesitace* - je-li $p$ teorémem systému , tak je jím i $\Box p$. Gödel dokázal, že tato logika je ekvivalentní s Lewisovou **S4**. Logika **S5** vznikne nahrazením axiomu 4 axiomem

5. $\Diamond p \to \Box\Diamond p.$

Gödelův přístup ale otevřel dveře i pro celou řadu nových systémů. Modální logiky **S4** a **S5** a další, které obsahují axiom K, se nazývají *normální*. Základní normální logika **K** obsahuje právě jediný modální axiom K, ale obvykle se jako minimální normální logika bere **T**[11], tj. logika **K** plus axiom T. **T** obsahuje **S2** a je obsažen v **S4** a je přitom nezávislý na **S3**. Logika **S4** a **S5** jsou tedy jednoduše **T** s axiomem 4, respektive 5. Pro málo běžné ne-normální logiky **S1**-**S3** se modulární axiomatiku podařilo najít až v roce 1957 Lemmonem, který také zavedl epistemické protějšky Lewisových systémů **E1**-**E5**.
Mezi axiomy, které tvoří další modální logiky, patří například:

D. $\Box p \to \Diamond p,$

B. $p \to \Box\Diamond p,$

G1. $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p,$

N1. $\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to (\Diamond\Box p \to p)$

D1. $\Box(\Box p \to q) \vee \Box(\Box q \to p)$

R1. $\Diamond\Box p \to (p \to \Box p)$

Jejich pomocí se tvoří například tzv. Brouwerův systém **B** = **T** + B[12], nebo početná množina logik mezi **S4** a **S5**, jako jsou **S4.1** = **S4** + N1, **S4.2** = **S4** + G1, **S4.3** = **S4** + D1, **S4.3** = **S4** + R1. Na řadu Lewisových systémů navázal Alban, který zavedl systém **S6** = **S2** + axiom $\Diamond\Diamond p$ a Halldén, který přidal ten samý axiom k **S3** a výsledný systém nazval **S7**. Jako **S8** potom označil **S3** s axiomem $\Box\Diamond\Diamond p$.

[11] Jako logiku **T** ji inspirován Gödelem zavedl poprvé Feys (1937), nezávisle na něm ji zavedl i Wright (1951) a nazval ji **M.** Že jsou jejich systémy ekvivalentní dokázal Sobociński (1953).

[12] Jména axiomů a systémů se dost často liší autor od autora. Mnoho systémů je možné navíc definovat několika způsoby. Většina zde uvedených systémů a axiomů je převzata z [Hughes a Cresswell, 1996]

### 2.1.3 Predikátová modální logika

Systém Barcan Marcusové (1946) je přímé rozšíření Lewisova systému **S2** o následující axiomy pro kvantifikátory:

B8. $\forall x\varphi \prec \varphi_x(t)$, pokud je term $t$ substituovatelný za proměnnou $x$ ve $\varphi$.

B9. $\forall x(\varphi \to \psi) \prec (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

B10 $\varphi \prec \forall x\varphi$, pokud $x$ není volně ve $\varphi$

a speciální axiom, jediný ve kterém používá materiální implikaci:

B11. $\Diamond\exists x\varphi \to \exists x\Diamond\varphi$.

Ten se dnes standardně označuje *formule Barcanové* a obvykle se uvádí v ekvivalentní verzi $\forall x\Box\varphi(x) \to \Box\forall x\varphi(x)$.

Jak bylo už zmíněno, práce Carnapa (1946) je velice odlišná. Carnapovi jde v první řadě o zachycení významu nutnosti a teprve potom, co ho dosáhne, se snaží formalizovat systém, který by mu odpovídal. Jedná se o rozšíření **S5**, které nazývá **MFC**. Carnap na rozdíl od Barcan Marcusové nepoužívá Lewisovu notaci, ale vychází z klasické predikátové logiky, ke které přidává velké množství axiomů pro nutnost.[13] Také v **MFC** je dokazatelná formule Barcanové a i tzv. *druhá formule Barcanové* - $\Box\forall x\varphi(x) \to \forall x\Box\varphi(x)$.

I další systémy modální predikátové logiky, které zde budou zmíněny, jsou obvykle definovány jako rozšíření predikátové logiky o charakteristické modální axiomy a pravidlo *necesitace*. Například Kripke (1959a) definuje $\mathbf{S5}^{*=}$, tj. kvantifikovanou **S5** s identitou, jako jakoukoli formalizaci klasického prvořádového predikátového kalkulu s identitou s dodatečnými schématy K, T, 5 a odvozovacími pravidly modus ponens (pokud $\vdash \varphi$ a $\vdash \varphi \to \psi$, pak $\vdash \psi$) a necesitací (pokud $\vdash \varphi$, pak $\vdash \Box\varphi$).

## 2.2 Rudolf Carnap

Rudolf Carnap už byl zmíněn jako autor první modální sémantiky. Ale ještě před tím, než zde bude představena, si nejprve stručně přiblížíme jeho vztah k modalitám z dřívější doby. Carnap totiž ve svém myšlení prodělal pozoruhodný obrat, když z počátečního rozhodného odmítání formální sémantiky pod vlivem nově vzniklé sémantiky klasické predikátové logiky zcela změnil názor a rozšířil jí o modální operátory.

[13] [Carnap, 1946, s. 54-55]

### 2.2.1 Syntaktické období

Carnapova nedůvěra k sémantice, která se mu zdála formálně nezachytitelná, byla do velké míry způsobena Gödelovou větou o neúplnosti. Toto jeho období reprezentuje *Logische Syntax der Sprache* (1934). V ní se s Wittgensteinem shoduje v redukci problémů filozofie na logickou syntax jazyka, nesdílí ale názor, že by se logická struktura světa nedala zobrazit, ale pouze vykázat. Říká, že je důležité rozlišovat mezi dvěma jazyky - *objektovým*, kterým můžeme mluvit o skutečnosti a *metajazykem*, kterým je možné hovořit o logickém rozboru a formách objektového jazyka.

Věty se tak v rámci syntaktické analýzy rozdělí na tyto kategorie:

1. *předmětné věty*, které vypovídají o nějakém předmětu určitou vlastnost, např. „Babylón bylo velké město“,
2. *syntaktické věty*, které nevypovídají o objektu, ale o výrazu jazyka, např. „‚$A \vee \neg A$‘ je kontradiktorická věta“.

Potom existuje ještě smíšená kategorie mezi nimi:

3. *pseudopředmětné věty* neboli kvazisyntaktické věty věcného způsobu mluvy, „které jsou formulované jako kdyby hovořili (částečně nebo výhradně) o předmětech, ale ve skutečnosti odkazují na jejich syntaktické formy.”[14] Např. „Včerejší přednáška byla o Babylóně.”

Carnap přebírá Fregův význam a označuje ho *extenze*. *Extenzionální věty* jsou zjednodušeně ty, ve kterých je možné substituovat jejich části (tj. jejich podvěty či vlastnosti/množiny) za takové, které mají ve světě stejnou reprezentaci, beze změny pravdivosti celé věty. Ty věty, které nejsou extenzionální, nazývá *intenzionální*. Ty ale nejsou v logickém systému potřeba podle Carnapovi *teze extenzionality*, která říká, že všechny intenzionální věty jsou kvazisyntaktické a je možné je převést na odpovídající extenzionální věty. Věty modální logiky patří mezi intenzionální věty a proto je převádí následujícím způsobem:

[14] [Carnap, 1934, s. 285]

| intenzionální modální věta | extenzionální syntaktická věta |
|---|---|
| A je možné | „A“ není kontradikce |
| A je nemožné | „A“ je kontradikce |
| A je nutné | „A“ je analytická věta |
| A je kontingentní | „A“ je syntetická věta |

„Jinými slovy: syntax už obsahuje celou logiku modalit a konstrukce speciální intenzionální logiky modalit není třeba.”[15] Obdobně je možné odstranit i další intenzionální věty, jako jsou věty o víře nebo nepřímé kontexty.

> Všechny otázky v poli logiky mohou být formálně vyjádřeny a poté převedeny na syntaktické otázky. Speciální logika smyslu je nadbytečná; „neformální logika“ je contradictio in adjecto. Logika je syntax.[16]

To přitom neznamená, že by Carnap modální konstrukce zcela zavrhoval. Naopak sám říká, že „systémy logiky modalit jsou (obecně) formálně správné.“[17] Proto zavádí *princip tolerance*, podle kterého si každý si může svůj jazyk zvolit arbitrárně podle toho, co v něm chce vyjádřit.

> V logice neexistuje morálka. Každý má svobodu vystavět si vlastní logiku, tj. svojí vlastní formu jazyka, jak si přeje. Všechno co od něj vyžadováno, pokud si přeje o ní diskutovat, je, že musí uvádět své metody jasně a podávat syntaktická pravidla místo filozofických argumentů.[18]

Pro některé účely může být výhodné, aby jazyk obsahoval modální spojení. Ale je přitom třeba mít na mysli, že takovéto intenzionální struktury jsou v jazyce nadbytečné. Protože každou kvazisyntaktickou větu je možné přeložit na větu syntaktickou, je jasné že syntax už obsahuje vše, co je vyjádřitelné modálními i ostatními intenzionálními systémy. Logika modalit tedy nijak nezvyšuje vyjadřovací potenciál systému syntaxe. Rozhodnutí, jestli pro vyjádření modalit zvolit konstrukci kvazisyntaktickou, nebo syntaktickou je zcela pragmatické.

[15] [Carnap, 1934, s. 256]
[16] [Carnap, 1934, s. 259]
[17] [Carnap, 1934, s. 253]
[18] [Carnap, 1934, s. 52]

### 2.2.2 Obrat k sémantice

Carnap svůj názor na sémantiku se změnil vlivem Tarského. V předmluvě k *Introduction to Semantics* (1959, první vydání 1942), Carnap uvádí: „[Tarski] poprvé obrátil moji pozornost k faktu, že formální metoda syntaxe musí být doplněna sémantickými pojmy, když najednou ukázal, že tyto pojmy mohou být definovány pomocí něčeho o nic méně exaktního než ty syntaktické. Tedy tato kniha dluží velmi mnoho Tarskému, více než kterémukoli jinému jednotlivci."[19] [Tarski, 1936] také využívá metodu dvou jazyků - předmětového jazyk a metajazyka a je velice blízká té z *Logische Syntax der Sprache*.[20] Zásadní rozdíl mezi nimi je, že Carnapova evaluace je nahrazování jazykových výrazů jinými výrazy, zatímco Tarského relace splnitelnosti platí mezi výrazy a mimojazykovými entitami.

Jak tedy vypadá Carnapův obrat? Velkou část systému nechává nezměněnou, princip tolerance přejmenovává na *princip konvenčnosti* a dostává nové znění: „Konstrukce kalkulu a výběr jeho případných vlastností je záležitostí konvence."[21] Důležitá změna je rozdělení pravdy na logickou a faktickou. Analýza jazyka se už neskládá z pouhé syntaktické analýzy, ale přidává ještě analýzu sémantickou a pragmatickou. *Pragmatiku* definuje jako zkoumání jazyka, které obsahuje explicitní odkaz k mluvčímu; *sémantiku* jako takové, kde je odkazováno k označovanému, ale ne k řečníkovi a konečně *syntax* jako takové, ve kterém není odkazováno k řečníkovi ani označovanému, ale zabýváme se pouze výrazem samotným. „... už si nemyslím, že logika významu je nadbytečná; nyní považuji sémantiku za splnění starého pátrání po logice významu, která předtím nebyla naplněna žádným přesným a uspokojivým způsobem."[22]. Dochází proto k závěru, že účelem filozofie je *sémiotická analýza* - tedy analýza všech tří vrstev jazyka.

Ve svých dalších pracích *Modalities and Quantification* (1946) a *Meaning and Necessity* (1956, první vydání 1947) Carnap podává první formální sémantiku pro modální logiky. Jeho snaha byla nejen vybudovat sémantiku pro modální logiku, ale především vyjasnit povahu modálních operátorů. Domníval se, že velký počet různých modálních systémů plyne právě z nejasné interpretace modalit.

> Byly navrženy různé systémy modální logiky různými autory. Zdá se mi, že není možné zkonstruovat uspokojivý systém, dokud nebudou dostatečně objasněny významy modalit. Dále věřím, že objasnění je možné nejlépe dosáhnout korelací každého modálního pojmu s odpovídajícím sémantickým pojmem (např. nutnost

[19] [Carnap, 1959, s. x]
[20] Podrobný výčet podobností jejich systémů je uveden v [Coffa, 1991, s. 300]
[21] [Carnap, 1959, s. 247]
[22] [Carnap, 1959, s. 249]

s L-pravdou). [23]

Hlavní inspirací pro Carnapovu práci v tomto období byli Frege, Leibniz a Wittgenstein. Od Frega převzal především rozdělení sémantiky na dvě úrovně, které v *Meaning and Necessity* rozpracoval do větší hloubky než ve svých předchozích knihách. Od Leibnize si vzal myšlenku chápat nutnost jako pravdu ve všech možných světech[24] a od Wittgensteina, kterého Carnap sám ve svém intelektuálním životopise[25] označil jako filozofa, který kromě Frega a Russella nejvíce ovlivnil jeho chápání, si vzal myšlenku o popisech stavů, jeho pojetí logicky pravdivých vět a nezávislosti logické pravdy na kontingentních faktech. Carnapova snaha zkonstruovat definici logické pravdy proto balancovala mezi „na jedné straně Leibnizovým pohledem, že nutné pravdy jsou ty, které platí ve všech možných světech, a na druhé straně Wittgensteinovým pohledem, že logické pravdy neboli tautologie jsou charakterizovány tím, že platí pro všechny možné distribuce pravdivostních hodnot."[26] Hledá proto takovou exaktní definici, která by splňovala oboje. Před tím než se k ní dostaneme, je třeba vysvětlit Carnapovu metodu extenze a intenze, která je právě úzce spojena s jeho snahou nalézt přesné rozdělení pravdivosti na faktickou a logickou.

### 2.2.3 Extenze a intenze

*Popis stavu* [state description] Carnap nejprve neformálně popisuje jako třídu vět, která pro každou uzavřenou atomickou formuli obsahuje buď jí a nebo její negaci a žádnou jinou větu. Je to analogie Wittgensteinových stavů věcí a Leibnizových možných světů, protože tato definice dává úplný popis nějakého možného stavu světa na základě individuí, vlastností a relací. *Platnost* formulí v popisu stavu S je definována:

- atomická věta $\varphi$ *platí v popisu stavu S* právě tehdy, když $\varphi \in S$.
- $\neg\varphi$ platí v S právě tehdy, když v S neplatí $\varphi$,
- $\varphi \vee \psi$ platí v S právě tehdy, když v S platí $\varphi$ nebo když v S platí $\psi$ a obdobně pro ostatní Booleovské spojky.

[23] [Carnap, 1956, s. iii]

[24] Leibniz nebyl první, koho napadlo chápat nutnost jako pravdivost ve všech možných světech. Ještě před ním byla tato myšlenka zmíněná při vysvětlování modalit např. v dílech Dunse Scota nebo Luise de Moliny. Žádný z nich ji ale neformuloval tak jasně a systematicky jako Leibniz.

[25] [Schilpp, 1963, s. 25]

[26] [Schillp, 1963, s. 63]

– $\forall x \varphi x$ platí v S právě tehdy, když v něm platí všechny substituční instance $\varphi(a)$, $\varphi(b)$,...

*Obor* [range] dané věty je třída všech popisů stavu, ve kterých věta platí. Věta je *pravdivá*, pokud platí v právě tom jednom popisu světa, který je pravdivý, tj. obsahuje všechny atomické formule, které platí v aktuálním světě a negace těch, které zde neplatí. Logickou pravdivost zavádí Carnap nejprve neformálně: Věta $\varphi$ je *L-pravdivá* v sémantickém systému S tehdy a jen tedy, pokud je $\varphi$ pravdivá pouze na základě sémantických pravidel systému S, bez odkazování k mimojazykovým faktům. Této konvenci potom vyhovuje i vlastní definice: Věta $\varphi$ je *L-pravdivá* právě tehdy, když $\varphi$ platí v každém popisu stavu. Podstatné je, že L-pravdivost je definována bez použití slova „pravdivý", se kterou nemá co společného, protože pravdivost se vztahuje k našemu světu, zatímco L-pravdivost je na něm nezávislá.

Symbol ekvivalence „$\equiv$" Carnap rozšiřuje i na ostatní designátory - dva individuové výrazy jsou *ekvivalentní*, jestliže označují stejné individuum; dva n-ární predikáty jsou *ekvivalentní*, pokud platí pro stejné n-tice individuí. Designátory jsou *L-ekvivalentní*, pokud jejich ekvivalence je L-pravdivá věta. Individuum „Walter Scott" je ekvivalentní s individuem „autor Waverley", predikát „člověk" je ekvivalentní s predikátem „rozumné zvíře". „Walter Scott" nicméně není L-ekvivalentní s „autorem Waverley", není těžké si představit, že Walter Scott vůbec nebyl spisovatelem nebo, že román s názvem Waverley napsal někdo úplně jiný - tato skutečnost zcela závisí na faktech našeho světa. Ale predikáty „člověk" a „rozumné zvíře" L-ekvivalentní jsou, protože se jedná o klasickou definici člověka[27] a člověk je tedy rozumným zvířetem jen na základě sémantických pravidel a tím pádem i ve všech možných popisech stavu.

Pokud dva designátory jsou ekvivalentní, můžeme také říct, že mají stejnou *extenzi*. Pokud jsou navíc i L-ekvivalentní, řekneme že mají také stejnou *intenzi*. Extenzi je tedy možné chápat jako shodu v rámci aktuálního světa, nebo nějakého alternativního popisu stavu, zatímco intenze designátoru je ve všech možných popisech stavu stejná. Intenze je očividně silnější pojem než extenze - mají-li dva designátory stejnou intenzi, tak mají i stejnou extenzi. Obráceně to neplatí. Na rozdíl od Frega u nějž byl smysl čímsi mlhavým a nevyjádřitelným, je Carnapova intenze schopná formální explikace, i když zatím pouze ve tvaru „a má stejnou intenzi jako b". Proto hledá vhodné objekty, se kterými je možné extenze a intenze ztotožnit:

| designátor | extenze | intenze |
|---|---|---|
| predikát | třída individuí, o nichž je pravdivý | vlastnost, kterou vyjadřuje |
| věta | pravdivostní hodnota | propozice, kterou vyjadřuje |
| individuový výraz | individuum, ke kterému odkazuje | individuový pojem |

[27] Samozřejmě o oprávněnosti této definice lze pochybovat, viz slavný aforismus, který údajně pronesl Bertrand Russell: „Říká se, že člověk je rozumné zvíře. Celý svůj život hledám důkaz, který by to mohl podpořit."

Větu nazveme *extenzionální* vzhledem k nějakému designátoru, který se v ní objevuje, pokud nahrazení designátoru jemu ekvivalentním, změní větu na ekvivalentní větě původní. Věta je *intenzionální* vzhledem k designátoru, který se v ní objevuje, pokud není extenzionální a pokud nahrazení toho designátoru L-ekvivalentním přemění větu na L-ekvivalentní. Modální věty jsou intenzionální vzhledem ke svým podvětám, zatímco věty o víře jako „Jiří věří, že se šeří." nejsou vzhledem ke své podvětě ani extenzionální ani intenzionální.

### 2.2.4 Modální logika C

Předpokládejme, že máme prvořádový predikátový *jazyk* L a *doménu individuí* D. L zahrnuje Booleovské spojky, kvantifikátory a identitu =, symbol $\lambda$ pro operaci abstrakce, modální operátory $\Box$ a $\Diamond$ pro logickou nutnost a možnost. L obsahuje individuové konstanty a predikátové symboly, ale žádné funkčních symboly. Mezi individuovými konstantami z L a prvky D existuje vzájemně jednoznačná korespondence, tj. každé individuum v D má právě jednu individuovou konstantu jako své kanonické jméno.

Formálně je tedy *popis stavu* S definován jako třída taková, že pro každou uzavřenou atomickou sentenci $P(a_1,...,a_n)$, kde P je n-ární predikát z L a $a_1$,...,$a_n$ jsou individuové konstanty z L, platí $P(a_1,...,a_n) \in S$ nebo $\neg P(a_1,...,a_n)$, ale ne oboje a nic víc.

„Za hodnoty proměnných považujeme všechny individuové pojmy, ..., každý z nich je reprezentovaný přiřazením individuových konstant popisem stavu."[28] *Individuový pojem* je tedy možné chápat jako funkci f, která každému popisů stavů S přiřadí nějaké individuum $f(S) \in D$. Přiřazení můžeme definovat jako funkci g, která přiřazuje každému popisu stavu S a každé individuové proměnné x individuovou konstantu g(x,S) a je ho možné tedy chápat jako *hodnotu extenze* x v S vzhledem ke g. Každé proměnné je přiřazena nejen hodnota extenze ale i hodnota intenze. Jako *hodnota intenze* je brán individuový pojem ($\lambda$S)g(x,S), který obsahuje hodnotu extenze x vzhledem ke g všech popisů stavu. Lze z ní tedy určit hodnota extenze proměnné, je to jednoduše hodnota intenze proměnné aplikovaná na konkrétní popis stavu.

Tyto pojmy jsou dostatečná k definici *pravdivosti formule* $\varphi$ *v popisu stavu S při ohodnocení g* (symbolicky $S \models \varphi[g]$):

a. $S \models P(t_1,...,t_n)[g] \Leftrightarrow P(S(t_1,g),...,S(t_n,g)) \in S$, kde $S(t_i,g)$ je extenze termu $t_i$ v S vzhledem ohodnocení $g$. Je-li tedy $t_i$ individuová proměnná, potom $S(t_i,g) = t_i$ a pokud je $t_i$ proměnná, potom $S(t_i,g) = g(t_i,S)$.

[28][Carnap, 1956, §41, s. 183]

b. $S \models (t_1 = t_2)[g] \Leftrightarrow S(t_1, g) = S(t_2, g)$, tj. pokud se shodují jejich extenze.

c. $S \models \neg\psi[g] \Leftrightarrow S \not\models \psi[g]$.

d. $S \models \psi \vee \chi[g] \Leftrightarrow S \models \psi[g]$ nebo $S \models \chi[g]$.

e. $S \models \psi \wedge \chi[g] \Leftrightarrow S \models \psi[g]$ a $S \models \chi[g]$.

f. $S \models \forall x\psi[g] \Leftrightarrow$ pro každé $a \in D$ $S \models \psi[g(x/a)]$, kde $g(x/a)$ je přiřazení shodné s $g$, mimo proměnné $x$, které přiřazuje hodnotu $a$. $g$ a $g(x/a)$ přiřazují všem proměnným mimo x stejnou hodnotu intenze.

g. $S \models \Box\psi[g] \Leftrightarrow$ pro každý popis stavu $S'$: $S' \models \psi[g]$

Formule $\varphi$ je *pravdivá v popisu stavu* S (symbolicky $S \models \varphi$), je-li pravdivá v S vzhledem ke každému ohodnocení. Formule $\varphi$ je *logicky pravdivá* (psáno $\models \varphi$ ), je-li pravdivá v každém popisu stavu.

Je snadné dokázat, že v Carnapově sémantice platí $\models \varphi$ právě tehdy, když $\models \Box\varphi$ a tedy v ní nejsou žádné navrstvené neredukovatelné modality jako $\Box\Box\varphi$, $\Box\Diamond\varphi$, $\Diamond\Box\varphi$, nebo $\Diamond\Diamond\varphi$. Také jsou v ní splněné všechny tautologie klasické predikátové logiky, platí zde pravidlo necesitace $(\varphi/\Box\varphi)$. Dále v této sémantice platí všechny zákony systému **S5** i obě formule Barcanové. V *Modality and Quantification* Carnap ukazuje i důkaz korektnosti pro **S5**, důkaz úplnosti nechává otevřený, resp. ukazuje ho pouze v omezené verzi pro formule, které neobsahují $\Box$ a $=$. Později bylo dokázáno, poprvé nejspíše Montaguem a Kalishem,[29] že Carnapova sémantika úplná není a je silnější než S5. Navíc má některé neobvyklé vlastnosti, například v ní platí některá nemonotónní pravidla nebo není uzavřená na substituci.[30]

Důkaz, že C není úplná, je možné formulovat takto: Nechť $\Gamma(L)$ je množina všech logicky pravdivých vět Carnapovy sémantiky v jazyce L. Potom $\Gamma(L)$ není rekurzivně spočetná a tedy neexistuje formální systém, který by měl právě tuto množinu jako své teorémy.

Důkaz: Sporem - předpokládáme, že $\Gamma(L)$ je rekurzivně spočetná. Nechť $\varphi$ je jakákoli formule, která neobsahuje modální operátory. Potom $\models \Box\varphi$ nebo $\models \neg\Box\varphi$ je pravdivá. Podle předpokladu existuje efektivní enumerace logicky pravdivých vět a je tedy možné efektivně určit, která z vět $\models \Box\varphi$ nebo $\models \neg\Box\varphi$ platí. Protože z $\models \Box\varphi$ plyne $\models \varphi$ a z $\models \neg\Box\varphi$ plyne $\not\models \varphi$, můžeme také efektivně rozhodnout i která z $\vDash \varphi$ nebo $\not\models \varphi$ platí. Ale podle věty o úplnosti

[29] [Copeland, 2002, s. 104]

[30] Další informace o Carnapově sémantice jsou k nalezení např. v [Hendry a Pokriefka, 1985] nebo [Schurz, 2000]. Ten ji přes její neklasické vlastnosti obhajuje a dokonce tvrdí, že je to jediná úplná modální logika, když je $\Box$ chápána opravdu jako logická nutnost.

pro predikátovou logiku je formule platná právě tehdy, když je dokazatelná v prvořádové predikátové logice. Existuje tedy efektivní způsob jak zjistit, jestli je $\varphi$, nebo $\neg\varphi$ dokazatelná a to je ve sporu s Churchovou větou, podle které je predikátová logika nerozhodnutelná. QED

# Kapitola 3

# Sémantika možného světa

Za autora první moderní sémantiky modální logiky, tzv. *sémantiky možných světů,* je všeobecně brán Saul Kripke a také se jim proto říká *kripkovské sémantiky*. Ale Kripke měl řadu předchůdců, kteří se k jeho výsledkům také blížili a udělali přitom mnoho významné práce i v sémantikách pro jiné než aletické modální logiky. Vývoj sémantiky možných světů je možné sledovat pomocí tří významných kroků. První z nich - definice modálních operátorů kvantifikováním přes *možné světy* se objevila už u Carnapa. Ale později Carnapovo pojetí možných světů vylepšil Kripke, když definoval možné světy jako libovolné indexové množiny.

Druhý zásadní krok bylo zavedení binární relace na možných světech, což umožnilo vytvářet sémantiky i pro logiky slabší než je **S5**. Tzv. *relace dosažitelnosti* se nezávisle objevila v pracích Kangera, Hintikky, Montaguea i Kripka. Úplně poprvé se ve spojení s modální logiku objevila pravděpodobně v práci A. Priora (1956), který se zabýval časovou logikou a relace dosažitelnosti na možných světech v ní přirozeně reprezentovala následnost dvou časových okamžiků.

Třetí je důkaz úplnosti, který by explicitně využíval pojmů možného světa a relace dosažitelnosti k definici různých sémantik. Ten se pro výrokovou modální logiku objevil poprvé nejspíše v práci T. J. Smileyho (1957), pro predikátovou poprvé uveden v Kripkově práci z roku 1959, ve které ovšem zase chyběla relace dosažitelnosti. Všechny tři tyto kroky propojeny až v jeho pozdějších a také některých Hintikkových pracích. V této podobě potom kripkovské sémantiky zažily nevídaný vzestup, kromě modální logiky je využívá i logika intuicionistická a staví na nich i logika intenzionální.

## 3.1 Stig Kanger

V polovině padesátých let dvacátého století nezávisle na sobě několik logiků vyvíjelo nové dokazovací procedury pro predikátovou logiku. Patřil mezi ně patří Ewert Willem Beth, Jaakko Hintikka, Kurt Schütt a Stig Kanger. Ten ve své dizertační práci *Provability in Logic* (2001a, první vydání 1957) podává elegantní důkaz věty o úplnosti i další významných vět a představuje efektivní důkazovou proceduru založenou na bezřezovém gentzenovském kalkulu. Menší část této práce je věnována i modální logice. A v ní se objevila jedna z nejranějších modelově-teoretických sémantik pro predikátovou modální logiku.

Kanger vyšel z Tarského sémantiky a rozšířil ji pro libovolný počet modálních operátorů. Zavedl relace dosažitelnosti do sémantických ohodnocovacích klauzí pro modální operátory. Připisování různých formálních podmínek relaci dosažitelnosti mu umožnilo vytvořit řadu různých operátorů nutností jako nutnost analytickou, logickou, ale i množinově-teoretickou či geometrickou. Ukázal, že je tímto způsobem možné nasimulovat různé modální logiky. Podle poznámky pod čarou[1] byla jednou z jeho inspirací práce Jónssona a Tarského z roku 1951.

Nutno říci, že Kangerova práce nevzbudila přílišný ohlas - nebyla publikována ve vědeckých časopisech a byla prakticky neznámá mimo Skandinávii. Mělo to své důvody. Jednak to bylo „neokázalým způsobem jejího vydání“[2] a jednak dost nepřehlednou a nestandardní notací. Kanger nepoužíval klasické podmínky na relaci dosažitelnosti, ale definoval si svoje vlastní.

### 3.1.1 Kangerova modální sémantika[3]

$L$ je prvořádový jazyk s identitou a unárními modálními operátory $\{\Box_i; i \in I\}$. Formule jsou tvořené klasickým způsobem. $D$ je neprázdná množina individuí - *doména.*[4]. *Interpretace* $I$ je binární operace, která mimologickým symbolům z $L$ přiřazuje jejich hodnoty v $D$, tj. pro každou konstantu $c \in L$, $I(D,c) \in D$ a pro každý n-ární predikátovou konstantu $P \in L$, $I(D,P) \subseteq D^n$. *Přiřazení* $g$ je binární operace, která každé doméně $D$ a každé proměnné $x$ přiřazuje *hodnotu* $g(D,x) \in D$. Dohromady spolu tvoří tzv. *primární ohodnocení* $v = I \cup g$. *Systém* $S$ je uspořádaná dvojice $< D, v >$, respektive $< D, I, g >$ podle toho, co se hodí lépe k danému účelu. Mezi systémy je pro každý modální operátor $\Box_i$ daná kvarterní *relace dosažitelnosti* $R_i(D, v, D', v')$. Formule $\varphi$ je *pravdivá v systému* $S$ (symbolicky, $S \models \varphi$)

[1] [Kanger, 2001a, s. 39]

[2] [Bull a Segerberg, 2001, s. 14]

[3] z [Kanger, 2001a] a [Kanger, 1957]

[4] Respektive v [Kanger, 2001a] a [Kanger, 1957] Kanger používá jako r jako range. Termín „rozsah“ nahradil termínem „doména individuí“ až později.

pokud splňuje následující podmínky:[5]

1. $S \vDash P(t_1, ..., t_n) \Leftrightarrow < v(D, t_1), ..., v(D, t_n) > \in v(D, P)$.
2. $S \vDash (t_1 = t_2) \Leftrightarrow v(D, t_1) = v(D, t_2)$.
3. $S \nvDash \bot$.
4. $S \vDash \neg\varphi \Leftrightarrow S \nvDash \varphi$.
5. $S \vDash (\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow S \nvDash \varphi$ nebo $S \vDash \psi$.
6. $S \vDash (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow S \vDash \varphi$ a $S \vDash \psi$
7. $< D, I, g > \vDash \forall x\varphi \Leftrightarrow < D, I, g' > \vDash \varphi$, pro každé $g'$ takové, že $g{=_x}g'$, kde $g{=_x}g'$ znamená, že $g'$ je stejné přiřazení jako $g$ kromě možná na proměnné $x$. Jinými slovy, pro každou $D$ a každou proměnnou $y$ různou od $x$, $g'(D, y) = g(D, y)$.
8. $< D, v > \vDash \Box_i\varphi \Leftrightarrow$ pro jakýkoli systém $< D', v' >$ pokud $R_i(D, v, D', v')$, tak $< D', v' > \vDash \varphi$.

Formule $\varphi$ je *platná*, pokud je pravdivá v každém systému. *Propozice* je uspořádaná dvojice $< \varphi, v >$, kde $\varphi$ je sentence a $v$ ohodnocení. Propozice $< \varphi, v >$ je *pravdivá* v doméně D, pokud platí $< D, v > \vDash \varphi$ a *analytická*, pokud je pravdivá v každé doméně D. *Obecnou (nerelativizovanou) pravdu* Kanger definuje jako pravdivost vzhledem k množině všech „reálných" individuí $D_0$ a primárnímu ohodnocení $v_0$, které každé doméně přiřazuje denotace podle „standardního použití L."[6] Tedy sentence $\varphi$ je *pravdivá*, pokud je propozice $< \varphi, v_0 >$ pravdivá a *analytická*, pokud $< \varphi, v_0 >$ je analytická.

Dále Kanger definuje podmínky na relaci dosažitelnosti pro některé významné nutnosti - analytickou nutnost $\Box_N$ a logickou nutnost $\Box_L$. $R_N$ musí být *regulární* - $R_N(D, v, D', v') \rightarrow (v = v')$) a pokaždé platí $R_N(D, v, D', v)$ a $R_L(D, v, D', v')$ nastává vždy. Potom platí, že:

$< D, v > \vDash \Box_N\varphi \Leftrightarrow$ pro každou doménu $D'$, $< D', v > \vDash \varphi$.

$< D, v > \vDash \Box_L\varphi \Leftrightarrow$ pro každý systém $S$, $S \vDash \varphi$.

[5]Jedná se o zjednodušení Kangerovi notace. Kanger označuje splňování jako *sekundární ohodnocení* a je definováno jako libovolná ternární relace T, která dané doméně $D$ a ohodnocené $v$ a formuli $\varphi$ přiřazuje pravdivostní hodnotu $T(D, v, \varphi) \in \{0, 1\}$ podle daných třinácti podmínek. Kvůli větší přehlednosti je notace přiblížena té, která je použitá v [Lindström, 2001b].

[6][Kanger, 1957, s. 4]

Logická spojka $\Box_L$ tedy znamená „pravdivá ve všech systémech”, což připomíná Carnapovo pojetí nutnosti. Z předchozích definic tedy plyne, že:

$\Box_N \varphi$ je pravdivé $\Leftrightarrow$ $\varphi$ je analytická,

$\Box_L \varphi$ je pravdivá $\Leftrightarrow$ $\varphi$ je platná.

Kanger ukazuje, že kladením různých podmínek na relaci dosažitelnosti je možné dosáhnout, aby operátor nutnosti splňoval různé axiomy modální logiky nebo formule Barcanové. Teorémy systému **T** jsou platné, pokud $\Box_i$ je *realizovaná*, tj. vždy platí $R_i(r,V,r,V)$. Pokud je $R_i$ navíc i *pozitivně semi-iterativní*, tj. platí o ní

$R_i(D_1,v_1,D_2,v_2) \rightarrow (R_i(D_3,v_3,D_1,v_1) \rightarrow R_i(D_3,v_3,D_2,v_2))$ a $\exists D_2 \exists v_2 R_i(D_2,v_2,D_1,v_1)$, pak taková $\Box_i$ splňuje i všechny axiomy **S4**. Aby splňoval i všechny teorémy **S5**, má $R_i$ ještě navíc splňovat $R_i(D_1,v_1,D_2,v_2) \rightarrow (R_i(D_3,v_3,D_2,v_2) \rightarrow R_i(D_3,v_3,D_1,v_1))$. Tvrdí korektnost, ale nedokazuje jí. S ohledem na pozdější Kripkovi podmínky na relaci dosažitelnosti, ale není těžké dokázat, že ty Kangerovi z nich vyplývají. Obráceně to ale vždy platit nemusí. Úplnost modálních logik ale také Kanger nechává zcela otevřenou.

## 3.2 Jaakko Hintikka

Hintikkova sémantika pro modální logiky vychází z jeho předchozí práce *Form and content in quantification theory* (1955), ve které vyvinul alternativní sémantiku predikátové logiky pomocí tzv. *modelových množin*. Ty se dnes někdy nazývají také *Hintikkovy množiny*. Modelová množina na doméně konstant U je definována jak množina formulí $\mu$, která má následující uzávěrové vlastnosti :

(C.$\neg$) Pokud $\neg\varphi \in \mu$, pak $\varphi \notin \mu$,

(C.$\wedge$) pokud $\varphi \wedge \psi \in \mu$, pak $\varphi \in \mu$ a $\psi \in \mu$,

(C.$\vee$) pokud $\varphi \vee \psi \in \mu$, pak $\varphi \in \mu$ nebo $\psi \in \mu$,

(C.$\exists$) pokud $(\exists x)\varphi \in \mu$, potom $\varphi(a/x) \in \mu$ pro alespoň jednu $a \in U$;

(C.$\forall$) pokud $(\forall x)p \in \mu$, potom $\varphi(a/x) \in \mu$ pro každou $a \in U$,

(C.self$\neq$) pro žádnou $a \in U$ neplatí $\neg(a = a) \in \mu$;

(C.=) pokud $\varphi$ je atomická formule a $\varphi(a/x) \in \mu$ a $a = b \in \mu$, pak $\varphi(b/x) \in \mu$.

Přitom platí, že žádné jiné logické spojky formule neobsahují a že negace je distribuována až k atomickým formulím. Základním sémantickým pojmem je splnitelnost. Množina formulí $\Gamma$ je *splnitelná*, právě tehdy, pokud je možné jí vnořit do modelové množiny. Formule $\varphi$ je *splnitelná*, pokud $\{\varphi\}$ je splnitelná a *platná* tehdy, když $\{\neg\varphi\}$ není splnitelná.

Hintikka dokázal, že množina formulí $\Gamma$ je splnitelná v klasickém slova smyslu (tj. existuje model, který ji splňuje) právě tehdy, když je možné vnořit $\Gamma$ do modelové množiny přes nějakou neprázdnou množinu U (nových) individuových konstant. Navíc popsal efektivní proceduru k ověřování splnitelnosti/platnosti formulí vnořováním do modelové množiny, která odpovídá obrácené aplikaci bezřezového gentzenovského kalkulu pro predikátovou logiku a která je ekvivalentní té Kangerově z *Provability in Logic*.

### 3.2.1 Sémantika deontické logiky

Mezi pracemi Kangera a Hintikky je vůbec řada zajímavých shod. Ve stejném roce Kanger vydává *New Foundations for Ethical Theory* (2001b, první vydání 1957) a Hintikka *Quantifiers in Deontic Logic* (1957a), které se obě zabývají deontickou logikou. Jsou si podobné co se týče obsahu - oba se věnují problému pravdivosti a vyplývání v normativním diskurzu a jejich využití k řešení etické problémů a v teorii práva. Zkoumají používání kvantifikátorů spolu s deontickými operátory a věnují se i reprezentaci akcí a agenta. Zcela se ale liší svým provedením. Zatímco Kanger vyšel ze Tarského sémantiky, Hintikka rozšiřuje svoji sémantiku modelových množin o deontické modality a tu potom ještě ve své pozdější práci zobecňuje na aletickou modální logiku.

> ... zvažme formule tvaru P$\varphi$. Co míníme tím, když řekneme, že $\varphi$ je dovolené? Očividně obsah tohoto tvrzení není možné vyčerpat tím, co se ve skutečnosti děje. Když mluvíme o povoleních, nemluvíme ve skutečnosti vůbec o aktuálním stavu věcí. Spíše mluvíme o něčem, co by se *mohlo* stát: říkáme, že by to někdo mohl učinit, aniž by porušil svoje povinnosti. Jinými slovy, říkáme, že stav věcí jiný od toho aktuálního je konzistentně myslitelný a to stav věcí, ve kterém je $\varphi$ provedeno, nicméně ve kterém jsou všechny povinnosti splněny.[7]

[7] [Hintikka, 1957a, s. 11]

Na základě toho je jasné, že si pro vyjádření povinnosti a možnosti jednoduše nevystačí s jedinou nastávající modelovou množinou. Ale je možné ji chápat jako aktuální mezi dalšími imaginárními modelovými množinami, které jsou s tou původní „bezesporně myslitelné", respektive *spolupřípustné* [copermissible] v Hintikkově terminologii. Pomocí *relace spolupřípustnosti R* potom definuje podmínky pro operátory povolení *P* a povinnosti *O*:

(C.5) Pokud $P\varphi \in \mu$, potom existuje $\mu^*$ takové, že $\mu R \mu^*$ a $\varphi \in \mu^*$.

(C.6) Pokud $O\varphi \in \mu$ a pokud $\mu R \mu^*$, potom $O\varphi \in \mu^*$.

(C.7) Pokud $O\varphi \in \mu^*$ a pokud $\mu R \mu^*$, potom $\varphi \in \mu^*$[8]

*Modelový systém* je pár $< \Omega, R >$, kde $\Omega$ je množina modelových množin a *R* je binární relace na $\Omega$, která splňuje (C.5)-(C.7). Hintikka nevyžaduje jako Carnap a Kanger, aby byl modelový systém maximální, ale může se lišit model od modelu. Množina formulí $\Gamma$ je *splnitelná* tehdy a jen tehdy, pokud existuje modelový systém $< \Omega, R >$ takový, že $\mu \supseteq \Gamma$ pro nějaký prvek $\mu$ z $\Omega$. Formule $\varphi$ je *platná*, pokud $\{\neg\varphi\}$ není splnitelná v tomto smyslu.

I pro tuto platnost poskytuje Hintikka efektivní metodu ověřování, která spočívá v tom, že vyjde z dané množiny $\Gamma$ a postupně a opakovaně aplikuje stanovené podmínky, které ji rozšiřují do množiny $\mu$. Pokud je aplikováno pravidlo (C.5) je do $\Omega$ přidána nová modelová množina. Pokud je v nějakém okamžiku porušeno pravidlo (C.$\neg$) a pro libovolné $\varphi$ platí, že $\varphi \in \mu$ a $\neg\varphi \in \mu$, znamená to, že původní množina $\Gamma$ není splnitelná. Hintikka ilustruje fungování této procedury na příkladu formule $[O\alpha \wedge (\alpha \rightarrow O\beta)] \rightarrow O\beta$, kterou Prior označil za „docela prostou pravdu"[9]. Hintikka konstruuje dvojici modelových množin $\{O\alpha, \neg\alpha \vee O\beta, P\neg\beta, \neg\alpha\}$ a $\{O\alpha, \neg\beta, \alpha\}$, které splňují její negaci. Pokud se ale k dané formuli přidá ještě jeden operátor povinnosti - $O\{[O\alpha \wedge (\alpha \rightarrow O\beta)] \rightarrow O\beta\}$, tak tato formule už je platná a jakýkoli pokus postavit splňující strukturu pro její negaci vede k porušení pravidla konzistence (C.$\neg$).

*Quantifiers in Deontic Logic* neobsahují žádné podmínky na relaci spolupřípustnosti. Nicméně Copeland uvádí, že v debatách s ním Hintikka zmínil, že na myšlenku získání různých systémů modální logiky požadováním různých podmínek na binární relaci přišel

[8] S definicí povinnosti pomocí podmínky,

(C.O) Pokud $O\alpha \in \mu$ a pokud $\mu R \mu^*$, pak $\alpha \in \mu^*$,

Hintikka nebyl spokojen, zdála se mu příliš slabá. (C.6) se postará o to, že existující povinnosti se přenesou i do alternativních světů a (C.7) navíc zajistí, že budou splněny i povinnosti, které by mohly vyvstat ze splnění $\varphi$. Navíc dohromady z nich (C.O) vyplývá.

[9] [Hintikka, 1957a, s. 16]

„ve stejnou dobu”, kdy zavedl pojem spolupřípustnosti a že už počátkem roku 1957 „měl vágní představu důkazu úplnosti.”[10] Také ve své další práci z téhož roku Hintikka jako první naznačuje způsob důkazu úplnosti pomocí metody tabel, rozšířené pro modální logiku. O něco později Hintikka přednáší o své sémantice na univerzitě v Bostonu, v těchto přednáškách dokazuje větu o úplnosti pro kvantifikované **T**, **S4** a **S5** pomocí dnes standardních podmínek na relaci mezi modely. Poznámky z tohoto semináře se ale nedochovaly a tak nelze určit přesnou formu jeho důkazů. Hintikka později uvádí, že tyto důkazy byly provedeny pravděpodobně něčím podobným jako je metoda tabel. Není známo ani přesné datum těchto přednášek[11] a tedy ani jestli se Hintikka důkazu úplnosti nepřiblížil ještě před Kripkem.

V *Modality and Quantification* (1969, první vydání 1961) Hintikka svůj systém upravil na aletickou modální logiku. Modelovou množinu je podle něj třeba chápat jako formální protějšek částečného carnapovského popisu stavu. Relaci mezi modelovými množinami přejmenoval na *relaci alternativnosti* a upravil požadavky na ní. Pro logickou možnost vyžaduje stále (C.5), pro nutnost vyžaduje (C.O) a deonticky nevhodný princip

(C.N) Pokud $\Box\varphi \in \mu$, potom $\varphi \in \mu$.

Tvrdí korektnost a úplnost této sémantiky vzhledem k systému **T**. Omezení modelových systémů na ty s tranzitivní relací alternativnosti dává sémantiku pro logiku **S4**, ty se symetrickou určují systém **B** a ty, jejichž relace alternativnosti je tranzitivní i symetrická odpovídají **S5**. Další omezení pravidla (C.5) v sémantikách pro systémy **T** a **S4** potom dává vhodné sémantiky pro Lewisovy systémy **S2** a **S3**. Všechna tato tvrzení jsou však ponechána bez důkazu.

### 3.2.2 Referenční mnohonásobnost

Jak už název Hintikkova článku (1969) napovídá jeho velká část je dále věnována kvantifikátorům a důvodům, proč by je deontická logika měla obsahovat. Ukazuje jak jejich použití zjednodušuje interpretaci modálních operátorů. V Hintikkově podání kvantifikátory kvantifikují přes opravdová individua, ne nějaké podezřelé intenzionální entity, jak bývají označovány Carnapovy individuové pojmy. To Hintikka blíže vysvětluje v *Modality as referential multiplicity* (1957). V ní objasňuje selhávání substituce v intenzionálních kontextech

[10][Copeland, 2002, s. 124]

[11]Přibližně se jednalo o zimní semestr akademického roku 1958–59.

pomocí tzv. *referenční mnohonásobnosti* [referential multiplicity], tedy tím, že termy v intenzionálních kontextech odkazují do různých alternativních stavů věcí současně. Tuto myšlenku ilustruje následujícím příkladem:

> ... často shledáme velice užitečné pokusit se naplánovat různé běhy událostí, které se mohou přihodit, přestože nevíme který z těchto diagramů nakonec využijeme... Tato analogie je hodná rozpracování. Generální štáb se nestará pouze o to, co se doopravdy stane. Jeho úkol není jen předpovědět chod plánovaného vojenského tažení, ale spíše být připraven na všechny nepředvídané skutečnosti, které se mohou během něj objevit... Většina map připravených generálním štábem reprezentuje situace, které se nikdy neodehrají... Ve většině případů existují skutečné jednotky, které znázorňují značky na mapě a vzájemná pozice jednotek je taková, že daná situace by mohla teoreticky nastat... Ale poloha jednotek na mapě může být odlišná od polohy, které dané jednotky mají nebo i kdy budou mít. Některé značky mohou představovat jednotky, které dosud nebyly zformované, jiné mapy mohou být připravené pro situace, ve kterých je některá z existujících jednotek zničena. Všechny tyto vlastnosti mají analogie v modální logice.[12]

Aplikaci tohoto přirovnání na modální logiku ještě vysvětluje:

> Můžeme možná říct, že když děláme modální logiku, děláme víc než jednu věc v jednom a tom samém čase. Používáme určité symboly - konstanty a proměnné, abychom odkazovali k existujícím předmětům v naší doméně diskurzu. Ale používáme je také abychom odkazovali k prvkům určitého jiného stavu věci, který nemusí být realizován. Nebo, což vede k témuž, používáme tyto symboly k budování „map" nebo modelů za účelem zakreslování určitých situací, které se možná nikdy nestanou. Pokud bychom mohli omezit naši pozornost najednou na jeden z těchto možných stavu věci, výskyt našich symbolů by byl čistě referenční. Vzájemné propojení mezi různými modely tomu překáží. Ale protože symboly jsou čistě referenční v každém příslušném modelu, odchylka od čisté referenčnosti není dostatečně silná, aby zničila možnost používat kvantifikátory se skoro stejnými pravidly jako v běžné teorii kvantifikace. Pokud bych měl charakterizovat tuto situaci stručně, řekl bych, že výskyty našich termů modálním kontextu nejsou obvykle *čistě referenční*, ale spíše jsou *referenčně mnohonásobné*.[13]

[12][Lindström, 2001a, s. 17]
[13][Lindström, 2001a, s. 18]

V tomto se zdá, že Hintikka zde popisuje jednu z nejranějších intuitivních interpretací modální logiky pomocí možných světů, ačkoli toto označení nepoužívá. V jeho sémantice je kvantifikováno přes opravdová individua v různých světech, které mohou mít různé domény a určité individuum se v nich objevit může, ale nemusí. Je proto přirozené, že v ní neplatí *princip nerozlišitelnosti identických* $\forall x \forall y(x = y \to \Box(x = y))$.

## 3.3 Richard Montague

Ještě před Kangerem měl nápad, jak vytvořit sémantiku modální logiky pomocí relace mezi modely, Richard Montague. Svoji práci *Logical necessity, physical necessity, ethics, and quantifiers* (1974) přednesl poprvé na Výroční filozofické konferenci v Los Angeles v květnu 1955, ale publikoval ji teprve roku 1960. V poznámce pod čarou říká, že to bylo z toho důvodu, že „neobsahuje žádné výsledky skvělého technického zájmu"[14] a rozhodl se jí zveřejnit až vlivem obdobných prací Kangera a Hintikky. Montagueova sémantika je i té Kangerově podobná. Montague také rozšiřuje Tarského sémantiku pro řadu modálních operátorů. Jako hlavní cíl si přitom stanovuje najít interpretace pro logickou a fyzikální nutnost a deontickou modalitu takové, aby je bylo možné je spojovat s kvantifikátory. Přitom si Montague stejně jako před ním von Wright[15] všímá podobnosti mezi chováním modálních operátorů a kvantifikátorů a bere $\forall x$ jako jednu z možných interpretací $\Box$.

### 3.3.1 Syntax a sémantika

Předpokládáme jazyk L s individuovými proměnnými, konstantami a predikáty, logickými spojkami, kvantifikátory a symbolem $\Box$. Formule se tvoří standardně. Montague nepoužívá žádný z Lewisových systémů, ale volí si vlastní, který obsahuje následující axiomy:

(1a) Každá tautologie je axiom.

(1b) Pokud $\varphi$ je tautologie, pak $\Box\varphi$ je axiom.

(2a) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

(2b) $\Box[\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)]$

(3a) $\Box\varphi \equiv \Box\Box\varphi$

[14] [Montague, 1974, s. 71]
[15] [von Wright, 1951]

(3b) $\Box(\Box\varphi \equiv \Box\Box\varphi)$

(4a) $\neg\Box\varphi \equiv \Box\neg\Box\varphi$

(4b) $\Box(\neg\Box\varphi \equiv \Box\neg\Box\varphi)$

Kdyby se k němu přidal axiom T: $\Box\varphi \rightarrow \varphi$, byl by ekvivalentní **S5**. Jak ale Montague vysvětluje v části nazvané *A Missing Law*[16] tento princip vynechává, aby axiomy systému splňovaly všechny interpretace symbolu $\Box$. Axiom T sice platí pro logickou a existenční nutnost, ale selhává pro nutnost fyzikální a deontickou.

*Model* je definován jako uspořádaná trojice $S =< D, I, g >$, kde $D$ je neprázdná množina, $I$ je *přiřazení extenzí* vzhledem k $D$, tj. funkce, která přiřazuje vhodné denotace z $D$ mimologickým konstantám z L a $g$ je *ohodnocení*, které přiřazuje proměnným hodnoty z $D$. *Sémantická hodnota* je funkce, která každému individuovému znaku $\xi$, přiřazuje hodnotu $S(\xi)$ následovně:

$$S(\xi) = \begin{cases} I(\xi) & \text{pokud } \xi \text{ je individuová konstanta} \\ g(\xi) & \text{pokud } \xi \text{ je proměnná} \end{cases}$$

Pojem *platnosti relativní k S* je definován:

(1) $S \models P(t_1, ..., t_n) \Leftrightarrow < S(t_n), ..., S(t_n) > \in S(P)$

(2) $S \models (t_1 = t_2) \Leftrightarrow S(t_1) = S(t_2)$

(3) $S \models \neg\varphi \Leftrightarrow \text{S} \not\models \varphi$

(4) $S \models (\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow S \not\models \varphi$ nebo $S \models \psi$

Nyní hledá klauzi pro $S \models \Box\varphi$ tak, aby splňovala všechny možné interpretace symbolu $\Box$. Pro jednu z nich - kvantifikaci Tarski takovou má:

(5) $S \models \forall x\varphi \Leftrightarrow \forall a \in D, S(a/x) \models \varphi$, kde S(a/x) je stejná funkce jako S, kromě přiřazování hodnoty proměnné x.

[16] [Montague, 1974, s. 82-83]

Montague pozoruje, že to samé lze alternativně vyjádřit pomocí relace $R_Q$ mezi modely, která je definována takto: $< D, I, g > R_Q < D', I', g' > \Leftrightarrow D = D'$, $I = I'$, $g(y) = g'(y)$, pro každou proměnnou $y$ jinou od $x$. Potom je možné (5) přeformulovat:

(5') $S \vDash \Box\varphi \Leftrightarrow$ pro každý model M takový, že $SR_QM$, $M \vDash \varphi$

Ostatní interpretace $\Box$ mají zcela analogickou splňující klauzi, liší se pouze podmínky na relace mezi modely pro logickou nutnost ($R_L$), fyzikální nutnost ($R_P$) a etickou povinnosti($R_E$). To, že je formule logicky nutná, lze chápat jako, že platí za jakéhokoli přiřazení extenzí konstantám. Montague proto definuje relaci $R_L$:

$$< D, I, g > R_L < D', I', g' > \Leftrightarrow D = D',\ g = g'.$$

Pro fyzikální nutnost je nejprve třeba fixovat množinu fyzikálních zákonů nemodálního jazyka K. Pro etickou nutnost se pevně stanoví třída ideálních modelů *Id*, tj. modelů ve kterých přiřazení extenze $I$ obsahuje pouze správné hodnoty takové, které jsou ve shodě s vybranými etickými principy, např. s deklarativně formulovaným Desaterem. Potom je možné jejich relace definovat takto:

$< D, I, g > R_P < D', I', g' > \Leftrightarrow D = D'$, $g = g'$ a $< D', I', g' >$splňuje (v Tarského smyslu) všechny sentence K.

$< D, I, g > R_E < D', I', g' > \Leftrightarrow D = D'$, $g = g'$ a $< D', I', g' > \in Id$

Stejně jako u Kangera je každý modální operátor spojen právě s jednou pevně danou relací dosažitelnosti, ale u Montaguea se jedná o relaci mezi modely výchozího jazyka bez modálních operátorů. Když se tedy porovná jejich přístup k logické nutnosti, je ten Montagueův jednodušší. Zatímco Kanger Tarského interpretaci modifikuje, tak aby mohl přiřazovat hodnoty proměnným a denotace mimologickým konstantám ve všech doménách najednou, Montague ji ponechává a jen přidává klauze pro ohodnocení modálních operátorů.

### 3.3.2 Korektnost a úplnost

Montague tvrdí korektnost svého systému: Pokud $\varphi$ je teorém (1a)-(4b), pak $\varphi$ platí ve všech modelech, pokud relace mezi modely $R_x$, která je definována analogicky s předchozími relacemi, splňuje následující podmínky:

1. pro každé $M$, existuje $N$ tak, že $MR_xN$,
2. pro všechna $M,N,P$, pokud $MR_xN$ a $NR_xP$, potom $MR_xP$,
3. pro všechna $M,N,P$, pokud $MR_xN$ a $MR_xP$, potom $NR_xP$.

Podmínky (2) a (3) jsou analogické podmínkám Kangera. Montague dále tvrdí i úplnost systémů a existenci rozhodovací metody s poukazem na to, že důkazy je možné snadno získat z [Wajsberg, 1933]. Ale není to tak, že by měl Montague důkaz úplnosti predikátové modální logiky už roku 1955. Montague měl na mysli úplnost pouze pro omezený systém - bez kvantifikátorů a identity, což potvrzuje i vyprávění Montagueova studenta Charlese Silvera:

> Jednou po chvále Kripkovi práce, se Richard Montague zmínil, že také měl modální systém již v roce 1955, který byl tomu Kripkovu podobný. Poté, co to řekl, se odmlčel, podíval se dolů na stůl a smutně řekl, „ale bez důkazů úplnosti."[17]

V dalších letech Montague pokračoval v práci na důkazech úplnosti modální logiky ve spolupráci s Donaldem Kalishem a získali se řadu částečných výsledků, které chtěli prezentovat na konferenci v prosinci 1959. Krátce před tím ale viděli abstrakt prosincového vydání *Journal of Symbolic Logic*, ve kterém Kripke oznamoval důkaz úplnosti pro řadu modálních systémů a svůj příspěvek stáhli.

## 3.4 Saul Kripke

Kripke se o modální logiku začal zajímat už na střední škole a svoje metody vyvíjel nezávisle na Kangerovi, Hintikkovi a Montagueovi. Mezi jeho hlavní zdroje patřila práce A. Priora

[17] [Copeland, 2002, s. 111]

*Modality and Quantification in S5* (1955), práce McKinsey-Tarského nebo také *A theory of formal deducibility* (1950) H. Curryho, se kterým vedl korespondenci a na jehož doporučení mu E. W. Beth zaslal svojí práci o metodě sémantických tabel. V roce 1959 Kripke vydává *Completeness Theorem in Modal Logic* (1959a), který obsahuje sémantiku a důkaz úplnosti pro kvantifikovanou **S5**.

### 3.4.1 Kripkova první sémantika

Předpokládáme neprázdnou množinu $D$ - doménu. *Úplné přiřazení* nad $D$ je funkce $G$, která přiřazuje:

(1) každé individuové proměnné $x$ hodnotu $G(x) \in D$,

(2) každé výrokové proměnné $p$ pravdivostní hodnotu $G(p) \in \{\top, \bot\}$,

(3) každému n-árnímu predikátu P hodnotu $G(P) \subseteq D^n$.

$G$ je možné chápat neformálně jako aktuální svět. I Kripke interpretuje nutnost jako pravdivost ve všech možných světech, ale množina možných světů $K$ může být zcela libovolná. *Model* nad $D$ je uspořádaná dvojice $M =< G, K >$, kde $K$ je množina úplných přiřazení nad $D$ taková, že $G \in K$ a všechna přiřazení v $K$ přiřazují individuovým proměnným stejné hodnoty jako $G$. Potom je možné definovat pravdivost ve G (vzhledem k M) rekurzivně:

(1) $G \models P(t_1, ..., t_n) \Leftrightarrow < G(t_1), ..., G(t_n) > \in G(P)$,

(2) $G \models p \Leftrightarrow G(p) = \top$,

(3) $G \models (t_1 = t_2) \Leftrightarrow G(t_1) = G(t_2)$,

(4) $G \models \neg\varphi \Leftrightarrow G \not\models_M \varphi$,

(5) $G \models (\varphi \rightarrow \chi) \Leftrightarrow G \not\models \varphi$ nebo $G \models \chi$,

(6) $G \models \forall x\varphi \Leftrightarrow$ pro každý prvek $a \in D$, $G \models \varphi(a/x)$, kde $\varphi(a/x)$ je formule vzniklá z $\varphi$ ve dvou krocích. Nejprve pokud $\varphi$ obsahuje libovolnou podformuli tvaru $\forall a\psi$, která obsahuje volně $x$, nahradí se v ní proměnná $a$ takovou proměnnou $z$, která se v $\varphi$ neobjevuje. Potom když už se v $\varphi$ žádná taková neobjevuje, všechny volné výskyty $x$ se nahradí $a$.

(7) $G \models \Box\varphi \Leftrightarrow$ pro každé ohodnocení $H \in K$, $H \models \varphi$.

Formule $\varphi$ je *pravdivá* v modelu $M$ vzhledem k $G$ právě tehdy, když $G \models \varphi$. Je *platná* nad D právě tehdy, když je pravdivá ve všech modelech nad D a *univerzálně platná* právě tehdy, když je platná nad všemi neprázdnými množinami D. K definici platností Kripke dodává:

> Ve snaze vytvořit definici univerzální logické platnosti, se zdá reálné předpokládat nejen to, že univerzum diskurzu může obsahovat libovolný počet prvků a že predikátům mohou být přiřazeny jakékoli dané interpretace v aktuálním světě, ale také to, že jakákoli kombinace možných světů může být propojena s reálným světem vzhledem k nějaké skupině predikátů. Jinými slovy, je možné předpokládat, že žádná další omezení na $D$, $G$ a $K$, mimo standardního, aby $D$ nebylo prázdné, nejsou potřeba. Tento předpoklad vede přímo k naší definici univerzální platnosti.[18]

Kripke, stejně jako Hintikka před ním, klade pouze minimální požadavky na množinu úplných přiřazení $K$ a nechává jí lišit se model od modelu. Na proti tomu Carnap, Kanger i Montague požadovali, aby byla daná pro každý model a obsahovala právě všechny možné popisy stavů, všechny domény či všechny prvořádové modely nad danou doménou.

Současně s tím definuje jinak i univerzální platnost, ne jako pravdu ve všech světech z maximální struktury světů, ale jako pravdu přes všechny její podmnožiny. Není zde tedy spojená platnost a nutnost - nutnost je relativní pouze k jednomu modelu s libovolnou $K$, zatímco platnost se vztahuje k potenci všech možných úplných přiřazení. Interpretace $\Box$ jako logické nutnosti na libovolně zvolené množině ohodnocení působí sice neintuitivně, ale právě povolení nestandardních modelů mu umožnilo dokázat větu o úplnosti, protože množina platných sentencí v standardních sémantikách pro logickou nebo analytickou nutnost obecně není rekurzivně spočetná.

### 3.4.2 Důkaz úplnosti kvantifikované S5

Větu o úplnosti Kripke dokazuje pomocí metody sémantických tabel od Betha, kterou rozšířil pro modální operátory. Formule $\psi$ je *sémantický důsledek* formulí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ právě tehdy, když je formule $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$ univerzálně platná. K ověření toho, že $\psi$ není sémantický důsledek tedy stačí mít model ve kterém platí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ a neplatí $\psi$. To lze reprezentovat tablem, které má v levém sloupci, kam patří pravdivé formule, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ a v pravém

[18] [Kripke, 1959a, s. 3]

mezi nepravdivými $\psi$. Tablo je dále stavěno pomocí pravidel, které odpovídají definici logických spojek - např. pokud se $\neg\varphi$ objeví v jednom sloupci, je $\varphi$ zaznamenáno do druhého sloupce. Pro některé spojky, jako například v případě konjunkce v pravém sloupci, je nutné tablo rozdělit na dvě, které budou mít každé v pravém sloupci jednoho člena konjunkce. Pro modální formule Kripke zavádí následující pravidla:

$Yl.$ Pokud $\Box\varphi$ se objeví v levém sloupci tabla, dáme $\varphi$ do levého sloupce každého tabla v množině.

$Yr.$ Pokud se $\Box\varphi$ objeví v pravém sloupci tabla, zavedeme nové pomocné tablo s $\varphi$ v pravém sloupci.

Tablo je *uzavřené* právě tehdy, když se nějaká formule objeví v obou jeho sloupcích, nebo když se formule formy $a = a$ objeví na pravé straně. Množina tabel je *uzavřená* právě tehdy, když obsahuje uzavřené tablo. Kripke postupně ukazuje, jak ze sémantických tabel vystavět model svojí sémantiky. Velmi zjednodušeně řečeno, dokazuje, že tablo použité k ověření toho, že $\psi$ je sémantický důsledek formulí $\varphi_1, ..., \varphi_n$, je uzavřené právě tehdy, když $\varphi_1, ..., \varphi_n \models \psi$ a současně je uzavřené právě tehdy když v **S5** $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \psi$, dohromady tedy korektnost a úplnost svojí sémantiky vůči **S5**.

Jiné systémy než **S5** v této práci Kripke nezkoumá, ale v posledních větách slibuje pokračování, které bude zaměřeno na alternativní sémantiky a jejich porovnání, včetně zkoumání kontroverzních vět jako jsou formule Barcanové nebo princip nerozlišitelnosti identických. Sice se v této práci neobjevila binární relace mezi modely, ale jak Kripke později uvedl, myšlenka na její použití ho napadla krátce po jejím vydání při zkoumání podmínek pro spojování tabel v různých podsystémech **S5**.

Také ještě koncem roku 1959 *Journal of Symbolic Logic* otisknul abstrakt plánovaného článku, ve kterém oznamuje dostupnost „vhodné modelové teorie”[19] a vět o úplnosti pomocí metody tabel pro Lewisovy systémy **S2**, **S3**, **S4**, **S5**; Feys/von Wrightův systém **T/M**; různé Lemmonovy **E**-systémy; dále systémy napůl mezi **S2** a **T**; systémy obsahující Brouwerův axiom; **S6**, **S7**, **S8**; různé systémy deontické logiky a modifikace ve směru Priorova **Q**. Ještě v abstraktu Kripke poznamenává, že: „Pro systémy založené na **S4**, **S5** a **M**, podobná práce byla udělána nezávisle a dříve K. J. J. Hintikkou.”[20]

[19][Kripke, 1959b, s. 323]
[20][Kripke, 1959b, s. 324]

### 3.4.3 Změny

Vydání těchto slíbených systémů se ale dost opozdilo důsledkem toho, že na podzim roku 1958 Kripke začal studovat na Harvardské univerzitě. Toto prostředí nebylo jeho výzkumu příliš nakloněno a někteří učitelé mu doporučovali soustředit se na matematiku a zkoumání modální logiky zanechat. Jeho další prací bylo proto až *Semantical Analysis of Modal Logic I* (1963), která byla zaměřena na výrokové normální logiky a Kripke v ní dokázal korektnost a úplnost **T**, **S4**, **B** a **S5**. Krátce poté vydal ještě *Semantical Considerations on Modal Logic* (1973, první vydání 1963), kde svoje výsledky rozšiřuje pro kvantifikované verze těchto logik. Jsou to právě tyto sémantiky, které jsou chápána jako první opravdové *sémantiky možných světů* a které se staly standardem nejen pro modální logiku.

V Kripkových článcích z roku 1963 jeho teorie prodělala několik podstatných změn. Hlavní Kripkova inovace se týká pojetí množiny možných světů $K$. Kripke opouští představu, že by $K$ měla být jakýmkoli souhrnem přiřazení, ohodnocení, nebo prvořádových modelů. Vadí mu, že v této definici možné světy a úplná přiřazení splývají a tedy nemohou „být dva světy, ve kterých by byla stejná pravdivostní hodnota přiřazená každé atomické formuli."[21] Tento předpoklad je podle něj vhodný pro **S5**, ale ne pro modální logiky obecně.

Nově je tedy $K$ libovolná množina, na které je definována interpretační funkce, která přiřazuje vhodnou sémantickou hodnotu mimologickým symbolům relativně ke každému prvku $K$. Kripke se nesnaží podat definici pojmu možný svět, ale určité obecné vysvětlení je vidět z jeho přístupu - možný svět může být cokoli, na čem je možné rozlišovat pravdivostní hodnotu modálních formulí.

Toto oddělení prvků $K$ a ohodnocení bylo zásadní pro spojení modelově-teoretických sémantik a algeber modální logiky a dále otevřelo dveře k obecnému zvažování *modálních rámců*, tj. množin světů s relací dosažitelnosti mezi nimi. A to je právě druhá změna v Kripkově sémantice - zavedení binární relace.

Je zde ale rozdíl od pojetí binární relace u Kangera, Hintikky nebo Montaguea, které přiřazuje vždy jednomu modálnímu operátoru pevně stanovenou relaci dosažitelnosti, zatímco Kripke ji nechává se lišit od jedné modelové struktury k jiné. Operátor nutnosti je tedy u něj možné chápat spíš jako mimologický symbol s různými interpretacemi. Neformálně vysvětluje Kripke binární relaci takto:

> Jsou-li dány jakékoli dva světy $H_1, H_2 \in K$, čteme „$H_1RH_2$" jako $H_2$ je „možný vzhledem k $H_1$", „možný v $H_1$" nebo „spojený s $H_1$"; to znamená, že každý výrok pravdivý v $H_2$ je možný v $H_1$. Tedy „absolutní" pojem možného světa v [Kripke, 1959a] (kde každý svět byl možný vzhledem ke každému dalšímu)

[21] [Kripke, 1963, s. 69]

> ustupuje relativnímu pojmu, jednoho světa možného vzhledem k jinému. Je jasné, že každý svět $H$ je možný vzhledem k sobě; to jednoduše říká, že každá *pravdivá* věta v $H$ je i *možná* v $H$. Ve shodě s tímto modifikovaným pohledem na „možné světy" ohodnocujeme formuli A jako *nutnou* ve světě $H_1$, pokud je pravdivá ve všech světech možných vzhledem k $H_1$... Duálně, A je možné v $H_1$ právě tehdy, když existuje $H_2$ možný k $H_1$, ve kterém je A pravdivé.[22]

Kripke v [Kripke, 1963] pozoruje, jak je možné různé modální axiomy simulovat kladením požadavků na relaci mezi nimi. Např. tranzitivita - kdy z $H_1RH_2$ a $H_2RH_3$ plyne $H_1RH_3$? $H_1RH_3$ znamená, pro jakoukoli $\varphi$ pravdivá v $H_3$, $\Diamond\varphi$ je pravdivá v $H_1$. Ale z předpokladu plyne, že pro jakoukoli $\varphi$ pravdivou v $H_3$, $\Diamond\varphi$ je pravdivá v $H_2$ a pro jakoukoli $\varphi$ pravdivou v $H_2$, $\Diamond\varphi$ je pravdivá v $H_1$ a tedy, že pro jakoukoli $\varphi$ pravdivou v $H_3$, $\Diamond\Diamond\varphi$ je pravdivá v $H_1$. Relace $R$ je tedy tranzitivní právě tehdy, když ve struktuře platí axiom $\Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$.

Podobně je možné si zpětně všimnout, že v Kripkově sémantice z roku 1959 by univerzální relace mezi všemi prvky $K$ odpovídala právě charakteristickému axiomu **S5** $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$. Jak ukazuje později, stejně tak dobře ho lze simulovat pomocí relace ekvivalence. Dokazuje totiž, že stačí omezit pozornost na modely, které jsou *spojené*, tj. všechny světy jsou spojeny s aktuálním opakovaným použitím relace $R$ a v takových modelech tyto dvě relace splývají. Tím se otevírá možnost k modelování různých modálních sémantik množiny pomocí relace $R$.

### 3.4.4 Sémantiky z roku 1963

Kripke také hned v [Kripke, 1963] tato zkoumání aplikuje na výrokové normální modální logiky. Pro nejjednodušší z nich **T** Kripke definuje *normální modelovou strukturu* jako uspořádanou trojici $(G,K,R)$, kde $K \neq \emptyset$, $G \in K$, a $R$ je reflexivní relace na $K$. Sémantiky ostatních normálních modálních logik se potom tvoří přidáním dalšího požadavku na relaci R - tranzitivity pro **S4**, symetrie pro **B** a ekvivalence pro **S5**. Pomocí metody sémantických tabel Kripke dokazuje korektnost a úplnost. Také ukazuje rozhodnutelnost těchto systémů.

V této práci Kripke dále rozvíjí analogii s algebrami Jónssona a Tarského. K tomu účelu definuje propozici jako funkci funkci $\rho : K \to \{\top, \bot\}$ ze světů do pravdivostních hodnot. Ty se potom dají uskupit do matic, které v podstatě odpovídají modálním algebrám všech propozic, které dávají hodnotu $\top$. Kripke tvrdí, že algebraickou analogií své vlastní sémantické metody nezávisle na Jónssonovi a Tarském dokázal hlavní teorém *Boolean Algebras with*

[22] [Kripke, 1963, s. 70]

*Operators* (1951), ale důkaz nepublikuje. Závěrem práce si všímá možností definovat další nové systémy, např. vynecháním požadavku na reflexivitu relace R, který odpovídá opuštění modálního axiomu $\Box A \rightarrow A$ a nehodí se tak pro deontické logiky.

Zde se ale víc zaměříme na jeho druhou práci z téhož roku *Semantical Consideration on Modal Logic*, ve které se objevuje první verze moderní sémantiky možných světů pro predikátovou logiku s identitou, ve které je navíc pojem možného světa explicitní složkou sémantické teorie. Věnuje se v ní opět normálním logikám **T**, **S4**, **B** a **S5,** ale predikátovým.

Na rozdíl od své rané sémantiky, ve které Kripke předpokládal konstantní domény, nyní se mohou některá individua vyskytovat pouze v některých možných světech. Proto definuje funkci $\psi$, která přiřazuje každé $H \in K$ množinu objektů, které existují ve světě $H$. Říká, že je to přirozenější, protože "ve světech jiných než je tento, mohou chybět některé existující individua a některá nová jako Pegas se mohou objevit."[23] Potom je možné definovat *kvantifikovanou modelovou strukturu* pro jazyk L jako pětici $\langle G, K, R, D, \psi \rangle$ o které platí, že:

(i) $K$ je neprázdná množina možných světů;

(ii) $G \in K$ (aktuální svět);

(iii) $R \subseteq K \times K$ je relace dosažitelnosti;

(iv) $D$ je neprázdná množina - doména objektů;

(v) $\psi$ je funkce z $K$ do podmnožiny $D$ a platí $D = \bigcup_{H \in K} \psi(H)$, tj. každý objekt existuje alespoň v jednom světě.

K definici modelu je potřeba definovat interpretaci mimologických symbolů, každý n-ární predikát určuje určitou množinu n-tic v každém světě - svojí *extenzi*. Co ale v případě, kdy predikát má být vyhodnocen na objektu, který v daném světě neexistuje? Na rozdíl od Hintikky a Priora, Kripke říká, tvrzení obsahující volné proměnné má pravdivostní hodnotu v každém světě pro každé ohodnocení jeho volných proměnných a přitom předpokládá, že na neexistujících individuích je takový výrok nepravdivý. Bylo by sice možné požadovat, aby predikáty byly definované pouze na prvcích daného světa, ale potom by selhávalo pravidlo substituce.

*Kvantifikovaný model M* je uspořádaná dvojice $\langle S, I \rangle$, kde $S = \langle G, K, R, D, \psi \rangle$ je kvantifikovaná modelová struktura a $I$ je funkce, která v každém světě $H$ přiřazuje každému n-ární

[23][Kripke, 1971, s. 65]

predikátové konstantě $P \in L$ podmnožinu $I(H,P) \subseteq D^n$ a každé individuové konstantě $c \in L$ prvek $I(c) \in D$. Individuové konstanty jsou brány jako *rigidní designátory*, tj. mají přiřazenou denotaci světově-nezávislým způsobem. *Ohodnocení g* definujeme jako funkci, která každé proměnné $x$ přiřazuje $g(x) \in D$. Pro každý term $t$ definujeme $M(t,g)$ jako $g(t)$, pokud je $t$ proměnná a $I(t)$, pokud $t$ je individuová konstanta.

Na základě těchto pojmů je možné definovat, že formule $\varphi$ je *pravdivá ve světě H v modelu M a při přiřazení g* (symbolicky $H \vDash_M \varphi[g]$):

1. $H \vDash_M P(t_{1,\ldots},t_n)[g] \Leftrightarrow \, < M(t_1,g),\ldots,M(t_n,g) > \in I(H,P)$.
2. $H \vDash_M (t_1 = t_2)[g] \Leftrightarrow M(t_1,g) = M(t_2,g)$.
3. $H \vDash_M \neg\varphi[g] \Leftrightarrow H \nvDash_M \varphi[g]$.
4. $H \vDash_M (\varphi \rightarrow \chi)[g] \Leftrightarrow H \nvDash_M \varphi[g]$ nebo $H \vDash_M \chi[g]$.
5. $H \vDash_M \forall x\varphi[g] \Leftrightarrow$ pro každé $a \in \psi(H)$, $H \vDash_M \varphi[g(a/x)]$.
6. $H \vDash_M \Box\varphi[g] \Leftrightarrow$ pro každé $H' \in K$ takové , že $HRH'$, $H \vDash_M \varphi[g]$.

$\varphi$ je *pravdivá v modelu M při přiřazení g* (symbolicky $\vDash_M \varphi[g]$), pokud $\varphi$ je pravdivá v aktuálním světě $K$ v modelu $M$ při přiřazení $g$. $\varphi$ je *pravdivá v modelu M* (symbolicky $\vDash_M \varphi$), pokud $\varphi$ *je* pravdivá v modelu $M$ pro každé přiřazení g. $\varphi$ je *pravdivá v modelové struktuře S*, pokud je pravdivá v každém modelu založeném na $S$. Řekneme, že $\varphi$ je *platné* v třídě modelových struktur **K**, pokud $\varphi$ je pravdivé v každé její modelové struktuře.

Důkaz korektnosti a úplnosti pro tuto sémantiku neuvádí, tvrdí pouze, že důkazy z [Kripke, 1963] na ně mohou být rozšířeny. Způsob tohoto rozšíření je naznačen v [Kripke, 1965], ve které dokazuje úplnost sémantiky Heytingova intuicionistického predikátového kalkulu pomocí metody tabel.

Pro ilustraci práce s touto sémantikou předvádí Kripke pomocí protimodelů, že ani první formule Barcanové, ani druhá nejsou platné v **S5**. V nich právě využívá různých velikostí domén - formule Barcanové je možné falzifikovat ve strukturách se zvětšujícími se doménami. Může to být například model s dvěma světy $G$ s doménou $\{a\}$ a $H$ s doménou $\{a,b\}$, takových, že $Fa$ je pravdivé v obou světech a $Fb$ není pravdivé v $H$. V tomto modelu je pravdivé $(\forall x)\Box Fx$, ale ne $\Box(\forall x)Fx$ v $G$. Pro druhou formuli Barcanové je protipříklad komplikovanější a využívá se v něm, že hodnota $F(x)$ je nepravda v případě, že individuum $x$ neexistuje v daném světě.

Neplatnost formulí Barcanové je ale problematická z toho důvodu, že první formule Barcanové je odvoditelná v kvantifikované **S5** a druhá dokonce už v kvantifikované **T**, jak dokázal A. Prior. Kripke proto Priorův důkaz přezkoumává a dochází k závěru, že Prior se dopustil chyby, když aplikoval necesitaci na formule obsahující volné proměnné. Kdyby se volné proměnné místo toho chápaly jako univerzálně vázané, tento krok by nebyl povolený. Necesitace přímo otevřené formule bez předchozího uzavření, tvrdí Kripke, se rovná předpokládání toho, co má být dokázáno. Přitom tvrzení otevřených formulí je záležitostí konvence - formule $\varphi(x)$ s volným $x$ je vždy nahraditelná formulí $\forall x\varphi(x)$.

Kripke proto trvá na tom, že v jeho teorii je povoleno tvrdit pouze uzavřené formule. Pro formuli $\varphi$, která obsahuje volné proměnné, je definován *uzávěr* $\varphi$ jako formule získaná z $\varphi$ zavedením univerzálních kvantifikátorů pro každou volnou proměnnou a znaků nutnosti v jakémkoli pořadí před $\varphi$. Axiomy predikátové **T** jsou tedy nově definovány jako uzávěry následujících schémat:

| | |
|---|---|
| (0) | Všechny pravdivostně-funkční tautologie |
| T | $\Box\varphi \to \varphi$ |
| K | $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ |
| (3) | $\varphi \to \forall x\varphi$, kde x není volné ve $\varphi$ |
| (4) | $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$ |
| (5) | $\forall y(\forall x\varphi(x) \to \varphi(y))$ |

Analogicky získáme kvantifikované **S4**, **S5** a **B** přidáním uzávěru odpovídajícího axiomů redukce. V těchto systémech platí na rozdíl třeba od Hintikkových pravidlo substituce bez omezení. Také tu platí zákon identity $\forall x(x = x)$, princip nerozlišitelnosti identických $\forall x\forall y[x = y \to (\varphi(x/z) \to \varphi(y/z))$ a to i na modální kontexty $\varphi(z)$ a všechny axiomy teorie kvantifikace.

# Kapitola 4

# Jiné interpretace modálního operátoru

Předchozí kapitoly byly věnované především aletickým modalitám možnosti a nutnosti, i když v rámci Hintikkovi a Kangerovi logiky už byly zmíněné i některé další alternativní pojetí modálních operátorů. Kripkovská sémantika umožnila právě tak dobře rozkvět i dalších interpretací modálních operátorů. Tato kapitola si klade za cíl velmi stručně přiblížit nejběžnější alternativní modality, jejich stručnou historii a systémy, které se ukázaly jako vhodné pro jejich zkoumání.

## 4.1 Deontické

**Význam:**

Deontická logika se zabývá normativními vyjádřeními - povinnostmi, povoleními a zákazy. Místo operátor $\Box$ se používá obvykle operátor $O$ (z anglického slova [ought]) a $O\varphi$ je chápáno jako „$\varphi$ je povinné/požadované” a obdobně místo operátoru $\Diamond$ se používá operátor $P$ (z anglického slova [permitted]) a formule $P\varphi$ se čte „$\varphi$ je povolené/přípustné”. Platí $P\varphi \equiv \neg O \neg \varphi$. Občas je používán i operátor $F$ (z anglického slova [forbidden]), kde $F\varphi$ se definuje $F\varphi \equiv O\neg\varphi$ a znamená „$\varphi$ je zakázáno”. Zřídka se ještě vyskytuje další operátor $I$ (z anglického slova [indifference]), definovaný $I\varphi \equiv (\neg O\varphi \wedge \neg O \neg \varphi)$, který se dá chápat jako „$\varphi$ je volitelné/dobrovolné”.

**Historie:**

Deontická logika se zpočátku vyvíjela v závislosti na logice aletické. Jak naznačuje i stejná vzájemná definovatelnost jejich operátorů, je mezi těmito logikami mnoho analogií. Některých z nich si povšimli už učenci ve čtrnáctém století, které je tedy možné chápat jako počátky deontické logiky. V sedmnáctém století se jim věnoval G. W. Leibniz, který je nazýval *legální modality* [Modalia Iuris]. Také Leibniz navrhoval analyzovat je pomocí aletických modalit a pojmu *dobrý člověk* [vir bonus], který představuje logickou konstantu - morálně dokonalého člověka. Toho definuje podle následujících tří podmínek - Dobrý člověk musí (1) dodržovat pečlivě všechny zákony, (2) chovat se vždy se chová tak, aby nikomu neublížil (3) milovat ostatní lidi, nebo k nim být alespoň shovívavý. Potom je *povinné* definováno jako to, „co je nutné, aby dělal dobrý člověk" a *povolené* je to, „co je možné, aby dělal dobrý člověk."[1]

Autorem první formální deontické logiky je Ernst Mally, který roku 1926 vydal pozoruhodný systém, která nevycházel z logiky aletické, ale jako první ji založil explicitně na výrokovém kalkulu. Tento systém ale neměl velký vliv na pozdější vývoj, sám Mally prohlásil některé teorémy svého systému za podivné, i když obhajitelné. Těžko obhajitelný byl už teorém $P\varphi \leftrightarrow \varphi$, který dokázal v Mallyho systému Karl Menger.[2]

Za hlavního iniciátora rozmachu deontické logiky bývá proto považován až G. H. von Wright, který v roce 1951 pro ně představil tři výrokové systémy. V nich deontické operátory nevztahuje na výroky, ale na akty jednání, což působilo řadu komplikací. Akty jednání a iterované modality nebyly správně vytvořené formule, musel používat dvě sady logických spojek pro výroky a pro akty, atd. Z Wrightova systému se ale vyvinul dnes nejpoužívanější *standardní systém deontické logiky*. Z deontické logiky se dále vyvinula mimo jiné soudní logika jako například Kalinowski (1965).[3]

**Běžné systémy:**

Je přirozené, že i v deontických logikách by měl platit axiom K: $[O\varphi \wedge O(\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow O\psi$. Naopak axiom T: $O\varphi \rightarrow \varphi$ v nich nedává velký smysl a proto bývá nahrazován axiomem T': $O(O\varphi \rightarrow \varphi)$, nebo D: $O\varphi \rightarrow P\varphi$, který ve svém ekvivalentním tvaru $\neg(OA \wedge O\neg A)$ ukazuje bezespornost systému. Standardní deontická logika **KD** jsou axiomy K, D, všechny tautologie daného jazyka, modus ponens a necesitace, která sice v deontickém pojetí zní možná trochu podivně, ale jinak je zcela neproblematická. **KD** se také někdy říká *deontické* ***T***. Obdobně existuje i deontické **S4** - **KD4** a deontické **S5** - **KD4E**, kde E je axiom $P\varphi \rightarrow OP\varphi$. Okolo deontických systémů se stále objevuje mnoho komplikací, tzv. *paradoxů deontické logiky*. Mezi ně patří třeba Paradox dobrého samaritána, Chisholmův paradox, nebo Rossův paradox. Ten má formu $O\varphi \rightarrow O(\varphi \vee \psi)$ a je dokazatelný už v logice **K**. Při vhodné interpretaci se ale jeho protiintuitivní znění vytrácí.

[1] [Lenzen, 2005, s. 21, 22]

[2] Více informací o Mallyho systému, včetně příčin chyb v jeho systému a způsobů jak je napravit, lze najít v [Lokhorst a Goble, 2004]

[3] [Piéraut Le-Bonniec, 1980, s. 26]

## 4.2 Epistemické

**Význam:**

Epistemické modality se zabývají reprezentací znalostí. Používá se v nich obvykle operátor $K$ (z anglického slova [know]), a to buď ve všeobecném pojetí $K\varphi$ jako „$K$ je všeobecně známé", „$K$ je známo jako pravdivé", nebo s indexem, který označuje agenta - osobu, na jejíž znalostech se odkazuje. V takovém případě $K_A\varphi$ znamená „$A$ ví, že $\varphi$". Duální znak ke $K$ je $P$ a znamená představitelnost, slučitelnost s ostatními znalostmi, ale příliš často se nevyužívá.

**Historie:**

Historie epistemické logiky je velice dlouhá.[4] Zmínky o ní lze nalézt v dílech Aristotela a první pokusy o formulaci epistemického pojetí logického důsledku lze nalézt už v 12. století u Garlanda a Petera Abelarda. Během středověku se objevovala různá zkoumání vztahu pravdy k vědění a víře i ve spisech významných učenců jako byl William Ockham nebo Duns Scotus, byla zkoumána i problematika iterovaných modalit nebo substituovatelnost do intenzionálních kontextů. Za nejplodnější středověké období epistemické modální logiky bývá označováno 15. století, kdy byla rozvíjena zejména v Padově a dalších severoitalských univerzitách v pracích Pavla z Benátek [Paulus Venetus], Pavla z Pergoly [Paolo da Pergola], Antonia Frachantiana z Vicenzy a mnohých dalších.

Zakladatel moderní epistemické logiky je Jaakko Hintikka, který v [Hintikka, 1962] poprvé exaktně vymezil sémantiku epistemických a doxastických logik pomocí modelových množin. Ale měl početnou skupinu předchůdců - úvahy o větách o vědomosti a o víře se objevují třeba i v pracích Rudolfa Carnapa, Arthura Priora, Hilary Putnama, Nicholase Reschera, ale především Jerzyho Łośe a G. H. von Wrighta. Łoś vyvinul tzv. *logiku víry* či *přesvědčení* s operátorem $Lxp$, který znamená „individuum $x$ věří výroku $p$". Pro tento systém stanovil axiomy, které byly těm Hintikkovým do jisté míry podobné. Hendrik von Wright v [Wright, 1951] podrobuje epistemické modality podrobnému zkoumání a tvoří jejich systémy, tak systémy v kombinaci s modalitami aletickými, nebo existenčními.

Po *Knowledge and Belief* se epistemické logiky samozřejmě dále vyvíjejí. Hintikka sám svoji práci převedl do kripkovské sémantiky, dále jsou zkoumány například spojení epistemických logik s jinými modálními logiky, logické vlastnosti systémů s množinami agentů, epistemické vlastnosti tzv. multimodálních kontextů, atd.

[4] Vyčerpávající přehled počátků historie epistemické logiky lze najít v [Boh, 1993]

**Běžné systémy:**

Výroková epistemická logika má několik variant, všechny založené na systému **K**. Ten obsahuje právě všechny tautologie klasické logiky, modus ponens, necesitaci a *axiom logické racionality agenta*, čili axiom **K**: $[K\varphi \wedge K(\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow K\psi$. Ale obvykle je za nejslabší systém pro epistemické zájmy považován systém **T**, tj. **K** + axiom T: $K\varphi \rightarrow \varphi$, protože se nezdá rozumné uvažovat i systémy ve kterých má agent znalost nepravdivého výroku. Za nejvhodnější systém pro epistemické logiky se obvykle bere **S4**, ke kterému se ve své práci přikláněl i Hintikka, tj. **T** + axiom 4: $K\varphi \rightarrow KK\varphi$, tzv. *pozitivní introspekce*. Nejsilnějším systémem epistemické logiky je **S5**, který vznikne z **T** přidáním axiomu 5: $\neg K\varphi \rightarrow K\neg K\varphi$, tzv. *negativní introspekce*. Tento axiom je, ostatně stejně jako necesitace, asi těžko aplikovatelný na lidského agenta, nebo umělého agenta, který pracuje v rámci nerozhodnutelné teorie, ale může být celkem neproblematicky aplikován na umělého agenta, který pracuje s konečným množstvím informací. Často se v epistemických logikách pracuje i se systémy mezi **S4** a **S5** převážně **S4.2–S4.4**.

## 4.3 Časová

**Význam:**

Časová logika se zabývá reprezentací a úvahám o čase, do jisté míry se jedná o logiku gramatických časů. Patří mezi *bimodální logiky*, tj. má dva vzájemně nedefinovatelné hlavní operátory - $F$ (z anglického [future]) a $P$ (z anglického [past]). $F\varphi$, $P\varphi$ tedy znamená „Někdy v budoucnosti nastane $\varphi$“, respektive „Někdy v minulosti nastalo $\varphi$.“ Z nich jsou standardním způsobem definovatelné duální symboly $G$ - vždy v budoucnosti a $H$[5] - vždy v minulosti. Vedle toho se někdy definují znaky pro „vždy“ - $A\varphi \equiv_{df} H\varphi \wedge \varphi \wedge G\varphi$ a „někdy“ - $E\varphi \equiv_{df} P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi$. Všechny je samozřejmě možné spolu řetězit - např. $PG\varphi$ znamená „Někdy v minulosti nastalo, že vždy v budoucnosti bude platit $\varphi$.“

**Historie[6]:**

Zkoumání časových forem modálních operátorů se objevovalo už ve starém Řecku v megarské a stoické škole nebo u Aristotela a peripatetiků. Konkrétně se jednalo například o problematiku pravdivosti vět o budoucnosti, jako je pravdivostní hodnota věty „Zítra bude námořní bitva.” u Aristotela nebo tzv. *argument vládce* [Master argument], jehož autorem byl

[5] I tyto symboly byly voleny jako mnemotechnická pomůcka - $G$ reprezentuje „it is always Going to be the case“, tedy česky „vždy se tak stane“ a $H$ kvůli „it always Has been the case“ - „vždy to tak bylo.“

[6] Podrobnou historii časových logik lze nalézt v [Øhrstrøm a Hasle, 1995]

pravděpodobně Diodorus Cronus. Časovým modalitám se dále ve středověku věnovali arabští i evropští logikové a vylepšili některé starší postupy.

V moderní době zájem o časovou logiku prudce vzrostl v polovině dvacátého století ve spojení s pracemi Arthura Priora, který navrhl časovou interpretaci kripkovské modální sémantiky. V sedmdesátých letech potom poprvé Burstall navrhl aplikace časové logiky v informatice. Jeho práci potom výrazně vylepšil Amir Pnueli, který ji aplikoval například na ověřování souběžně běžících programů na několika procesorech. Kromě informatiky má časová logika mnoho dalších využití při zkoumání přirozených jazyků nebo v umělé inteligenci.

**Běžné systémy:**

Pro časové logiky je Kripkova sémantika obzvláště přirozená, $R$ si lze jednoduše představit jako relaci časové následnosti a možné světy jako jednotlivé časové okamžiky. Sémantika $F$ a $G$ je potom definována stejně jako pro odpovídající aletické modality, pro $P$ a $H$ se v definici $R$ nahradí $R^{-1}$. I na deontické logiky se bez problému dá aplikovat systém $\mathbf{K}$, s axiomem K a pravidlem necesitace pro obě spojky $G$ i $H$. $\mathbf{K}$ spolu s axiomy $\varphi \to HF\varphi$ a $\varphi \to GP\varphi$ tvoří tzv. *minimální časovou logiku* $\mathbf{K_t}$. Ta je korektní a úplná vůči všem *časovým rámcům*, tj. kripkovským rámcům pro časovou logiku. To se může zdát zvláštní, ale Kripke už v [Kripke, 1963] dokázal, že je možné bez újmy na obecnosti předpokládat pouze stromové modely a ty se pro vyjádření času zdají ideální.

Další systémy pak lze tvořit podle toho, jaké požadavky jsou kladeny na časovou linii. Např. mezi přirozené patří tranzitivita času, které odpovídají axiomy $G\varphi \to GG\varphi$ [7] a $H\varphi \to HH\varphi$, axiomy $F\varphi \to FF\varphi$ a $P\varphi \to PP\varphi$ zase platí právě tehdy, když je čas *hustý*, tj. mezi libovolnými časovými okamžiky vždy existuje další. Naopak časovou diskrétnost je možné reprezentovat axiomy $F\varphi \wedge G(\varphi \to F\varphi) \to GF\varphi$ do minulosti a $P\varphi \wedge H(\varphi \to P\varphi) \to HP\varphi$ do budoucnosti. Linearitě do minulosti odpovídá axiom $FP\varphi \to (P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi)$ a do budoucnosti $PF\varphi \to (P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi)$. Dále je možné požadovat, aby časové univerzum byl otevřený nebo uzavřený interval. Existence počátku a konce se reprezentuje axiomy $H\bot \vee PH\bot$, respektive $G\bot \vee FG\bot$, naopak jejich neexistence pomocí axiomů $H\varphi \to P\varphi$ a $G\varphi \to F\varphi$.

## 4.4 Doxastická

**Význam:**

Doxastické modality se zabývají přesvědčením, vírou. Používá se v nich obvykle operátor $B$ (z anglického slova [believe]) s indexem pro agenta. Tedy $B_A\varphi$ znamená „$A$ věří, že $\varphi$“.

[7] Většina axiomů časové logiky zde je převzatá z [Kolman, 2005, s. 82]

Je velmi blízká logice epistemické, hlavní rozdíl je v tom, že v případě $B_A\varphi$, nemusí být $\varphi$ pravdivé. V případě používání obou operátorů lze předpokládat $K\varphi \rightarrow B\varphi$.

**Historie:**

Pojmy víry a znalosti byly obvykle zkoumány pohromadě a tedy historii doxastické logiky lze považovat za shrnutou už v rámci historie epistemické logiky.

**Běžné systémy:**

Vzhledem k tomu, že víra nemusí být nutně pravdivá, nelze v doxastických logikách předpokládat axiom T. Obvykle bývá nahrazován axiomem D:$\neg(B\varphi \wedge B\neg\varphi)$ tedy konzistencí agentovi víry. I v doxastických logikách platí axiom $K$: $B(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (B\varphi \rightarrow B\psi)$, tzv. *axiom běžného uvažujícího*.[8] Přirozený je i axiom 4 : $B\varphi \rightarrow BB\varphi$, někdy nazývaný *axiom normálního uvažujícího*. Proto nejčastější systém doxastické logiky je **KD4**, nebo **KD45** ještě rozšířený o axiom 5: $\neg B\varphi \rightarrow B\neg B\varphi$. **KD45**, někdy zvaná také slabá **S5**, je korektní a úplný vzhledem k množině kripkovských modelů s tranzitivní, euklidovskou a sériovou relací dosažitelnosti.

## 4.5 Dokazatelnosti

**Význam[9]:**

V rámci logiky dokazatelnosti se nutnost interpretuje jako formální dokazatelnost v nějaké axiomatické teorii prvního řadu. Je zajímavá i tím, že na rozdíl od ostatních modalit má dokazatelnost v nějaké stanovené teorii jednoznačně daný význam. Pro její vyjádření se používají různé znaky, zde bude použita původní Gödelova výroková spojka $B$ (z německého [beweisbar]), $B\varphi$ tedy znamená „$\varphi$ je dokazatelné".

**Historie:**

Zkoumání dokazatelnosti jako modálního operátoru začalo v třicátých letech dvacátého století. Kurt Gödel nejprve v recenzi článku Oskara Beckera zpochybnil spojení intuicionistické

[8] Tyto charakteristiky osoby agenta podle platících axiomů pochází z [Smullyan, 1986]. Mimo již uvedených axiomů Smullyan dále uvádí *přesného uvažujícího* (vše v co věří, je pravdivé, tj. axiom T), *nepřesného uvažujícího* (alespoň jedna z formulí, které věří je nepravdivá), *domýšlivého* (věří, že není taková věta ve kterou by věřil a byla nepravdivá), nebo *zvláštního* (věří, že je taková věta ve kterou věří a přitom nevěří, že v ni věří). Jejich pomocí ukazuje doxastickou variantu druhé Gödelovy věty - logika, který nemůže věřit vlastní bezespornosti, aniž by se dostal do sporu.

[9] Mnoho informací k logice dokazatelnosti lze nalézt v [Boolos a Sambin, 1991]

a modální logiky, aby se tohoto problému nakonec sám úspěšně ujal a přitom ještě zjednodušil původní Lewisovu axiomatiku modálních logik. Dalším významným představitelem byl M. H. Löb, který stanovil některé podmínky, které je přirozeně požadovat od predikátu dokazatelnosti a přitom si povšiml, že jsou dostatečné k důkazu druhé Gödelovy věty. Významný rozmach nastal v sedmdesátých letech zásluhou G. Boolose a R. M. Solovaye, který dokázal, že logika dokazatelnosti **GL** je vhodná pro k zachycení dokazatelnosti v Peanově aritmetice a následně i v dalších rozumných teoriích.

**Běžné systémy:**

Gödelův původní systém byl ekvivalentní **S4**. Ukázalo se, že logice dokazatelnosti ale není možné přijmout řadu základních axiomů modální logiky včetně axiomu T: $B\varphi \to \varphi$, protože jeho obecnou platnost vylučuje druhá Gödelova věta. Naopak bezproblémově lze přijmout axiom K: $B\varphi \to [B(\varphi \to \psi) \to B\psi]$, který je analogií pravidla modus ponens. Löb dokázal, že v Peanově aritmetice je dokazatelná i analogie axiomu 4: $B\varphi \to BB\varphi$. Standardní logiku dokazatelnost je tedy **K4** s Löbovým axiomem : $B(B\varphi \to \varphi) \to B\varphi$, jejíž překlad tzv. Löbova věta je dokazatelná v Peanově aritmetice. Tato logika se nazývá **K4W** nebo **GL** na počest Gödela a Löba a je rozhodnutelná a úplná vůči třídě všech tranzitivních obráceně fundovaných kripkovských rámců.

## 4.6 Další

Vedle již vyjmenovaných existuje mnoho dalších možností, jak chápat modální operátory. V rámci informatiky a úvah nad programy byla vyvinuta *dynamická logika*, v ní $\Box_i\varphi$ a $\Diamond_i\varphi$ znamenají „vždy po vykonání instrukce $i$ bude platit $\varphi$”, respektive „někdy po vykonání instrukce $i$ bude platit $\varphi$”. V rámci sémantiky má potom každá instrukce $i$ svojí vlastní relaci $R_i$, která určuje přechody mezi konfigurace při vykonání instrukce. Různé relace je potom možné řetězit, skládat či iterovat a tak konstruovat složené modality, které odpovídají programům složeným z jednodušších instrukcí.

Mezi chováním kvantifikátorů a modálních operátorů je mnoho podobností, například jsou stejně vzájemně definovatelné, nebo také pravidla generalizace mají také modální analogii - axiom T. Z toho vycházejí *existenční modality*, které zkoumal např. H. von Wright a které se ale nyní mezi modality nepočítají. Podle nich $\Box\varphi$ znamená „$\varphi$ je všeobecné” a $\Diamond\varphi$ „$\varphi$ existuje”. Von Wright zkoumá i jejich spojení s epistemickými modalitami - určitá znalost může být univerzální, přístupná pouze omezenému množství individuí, nebo jí nemusí mít vůbec nikdo.[10]

[10] [Wright, 1951, s. 3]

Dále existují *dispoziční modality*, které se zabývají schopnostmi a potenciály; *geometrické modality*, které mají dvě sady modálních operátorů pro body ($\Box_p, \Diamond_p$) a přímky ($\Box_d, \Diamond_d$). Pokud A označuje bod, potom $\Box_d A$ znamená „každá přímka prochází bodem A"[11]. Mezi málo časté v logice patří ještě například *axiologické modality,* ve kterých modální operátory reprezentují hodnoty jako „je dobré, že...", nebo „je špatné, že...".

[11] [Dupin, 2010, s. 149]

# Závěr

V této práci byla stručně shrnuta historie vývoje modální logiky od počátků moderní logiky. Byly zde zmíněni její zakladatelé a jejich názory na modální logiku, první modální axiomatiky a sémantiky až k sémantikám možných světů. Vývoj kripkovských sémantik byl naznačen jak v pracích Saula Kripka, tak některých jeho současníků. Také zde byly krátce přiblíženy různé interpretace modálního operátoru.

Tento námět je velmi široký na to, aby se vtěsnal do kapacity jedné diplomové práce a zasloužil by si jistě dále rozvést. Mezi velmi zajímavé a zde opomenuté téma patří například Quineova kritika kvantifikovaných modálních logik a to, jak se s ní Kanger, Montague, Hintikka a Kripke vypořádali. Samozřejmě ani výčet těchto průkopníků modální sémantiky není zdaleka vyčerpávající, za zmínku určitě stojí dále práce Priora s Meredithem, Geache, Smileyho, Bayarta a dalších. Pozoruhodný byl i vývoj modálních algeber, ve kterých bylo dosaženo mnoho skvělých výsledků a zde jsou zmíněny pouze okrajově.

# Literatura


BARCAN (MARCUS), RUTH C. A Functional Calculus of First Order Based on Strict Implication. *The Journal of Symbolic Logic*. 1946, 11, 1, s. 1-16.

BECKER, OSKAR. Zur Logik der Modalitäten. *Jahrbuch für Philosophie und Phenomenologische Forschung*. 1930, xi , s. 497-548.

BERGER, ALAN. *Saul Kripke*. New York : Cambridge University Press, 2011.

BOH, IVAN. *Epistemic Logic in the Later Middle Ages*. London and New York: Routledge, 1993.

BOOLOS, GEORGE; SAMBIN, GIOVANNI. Provability: The Emergence of a Mathematical Modality. *Studia Logica*. 1991, 50, 1, s. 1-23.

BULL, ROBERT; SEGERBERG, KRISTER. Basic Modal Logic. In GABBAY, DOV M. ; GUENTHNER, FRANZ. *Handbook of Philosophical Logic: Volume 3*. 2nd Edition. New York: Springer, 2001, s. 1-81.

CARNAP, RUDOLF. *Logische syntax der Sprache*. Wien: Verlag von Julius Springer, 1934.

CARNAP, RUDOLF. *Introduction to Semantics and Formalization of Logic: two Volumes in one*. Cambridge: Harvard University Press, 1959.

CARNAP, RUDOLF. Modality and Quantification. *The Journal of Symbolic Logic.* 1946, 11, 2, s. 33-64.

CARNAP, RUDOLF. *Meaning and Necessity*. Chicago: University of Chicago Press, 1956.

COFFA J. ALBERTO. *The semantic tradition from Kant to Carnap.* Cambridge: Cambridge university Press, 1991.

CURRY, HASKELL B. *A theory of formal deducibility* (Notre Dame Mathematical Lectures, Number 6). Notre Dame, Indiana: University of Notre Dame, 1950.

COPELAND, JACK B. The Genesis of Possible Worlds Semantics. *Journal of Philosophical Logic*. 2002, 31, 2, s. 99-137.

DEJNOŽKA, JAN. *Bertrand Russell on Modality and Logical Relevance* [online]. 2010 [cit. 2011-9-26]. Dostupné z: http://www.members.tripod.com/˜jan_dejnozka/russell_on_modality_and_relevance_book.html

DUPIN DE SAINT-CYR, FLORENCE; PAPINI, ODILE; PRADE, HENRI. Methods for Handling Imperfect Spatial Information. In: JEANSOULIN, ROBERT; PAPINI, ODILE; PRADE, HENRI, SCHOCKAERT, STEVEN. *An Exploratory Survey of Logic-Based Formalism for Spatial Informations*. Berlin : Springer-Verlag, 2010, s. 133-164.

FEYS, ROBERT. Les Logiques Nouvelles des Modalités. *Revue Néoscolastique de Philosophie*, 1937, 40, s. 517–553.

FØLLESDAL, DAGFINN. *Referential Opacity and Modal Logic*. New York and London: Routledge, 2004.

FREGE, GOTTLOB. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. In VAN HEIJENOORT, JEAN (ed.). *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967.

FREGE, GOTTLOB.: On Sense and Reference. In GEACH, PETER; BLACK, MAX (eds.). *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Oxford: Basil Blackwell, 1960.

GABBAY, DOV M. ; GUENTHNER, FRANZ (eds.). *Handbook of the Philosophical Logic.* Vol. 3. Dordrecht: Kluwer, 2001.

GABBAY, DOV M. ; GUENTHNER, FRANZ (eds.). *Handbook of the Philosophical Logic.* Vol. 4. Dordrecht: Kluwer, 2001.

GABBAY, DOV M. ; GUENTHNER, FRANZ (eds.). *Handbook of the History of Logic.* Vol. 7. Amsterdam: Elsevier, 2006.

GÖDEL, KURT. Eine Interpretation des Intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, 1933, 4, s. 39–40.

HENDRY, HERBERT; POKRIEFKA, M. L. Carnapian Extensions of S5. *Journal of Philosophical Logic*. 1985, 14, 2, s. 111-128.

HILPINEN, RISTO. Stig Kanger on Deontic Logic. In HOLMSTRÖM-HINTIKKA, GHITA; LINDSTRÖM, STEN; ŚLIWIŃSKI, RYSIEK (eds.). *Collected papers of Stig Kanger with essays on his life and work,* Vol. 2. Dordrecht: Kluwer, 2001, s. 131-150.

HINTIKKA, JAAKKO. Form and content in quantification theory. *Acta Philosophica Fennica*, 1955, 8, s. 7-55.

HINTIKKA, JAAKKO. Quantifiers in deontic logic. *Societas Scientarum Fennica, Commentationes Humanarum Litterarum*. 1957a, 23, 4, s. 1-23.

HINTIKKA, JAAKKO. Modality as referential multiplicity. *Ajatus*. 1957b, 20, s. 49–64.

HINTIKKA, JAAKKO. Modality and Quantification. In HINTIKKA, JAAKKO. *Models for Modalities*. Dordrecht: D. Reidel, 1969, s. 57-70.

HINTIKKA, JAAKKO. *Knowledge and belief : an introduction to the logic of the two notions*. New York: Cornell University Press, 1962.

HUGHES, GEORGE EDWARD; CRESSWELL, M. J. *A new introduction to modal logic*. London and New York: Routledge, 1996.

JACQUETTE, DALE (ed.). *A Companion to Philosophical Logic*. Malden: Blackwell Publishing, 2002.

JÓNSSON, BJARNI; TARSKI ALFRED. *Boolean algebras with operators, Part I*. In *American Journal of Mathematics*. 1951, 73, 4, s. 891–939.

KALINOWSKI, GEORGES. *Introduction à la logique juridique*. Paris: LGDJ, 1965.

KANGER, STIG. Provability in Logic. In HOLMSTRÖM-HINTIKKA, GHITA; LINDSTRÖM, STEN; ŚLIWIŃSKI, RYSIEK (eds.). *Collected papers of Stig Kanger with essays on his life and work.* Vol. 1. Dordrecht: Kluwer, 2001a, s. 8-41.

KANGER, STIG. New Foundations for Ethical Theory. In HOLMSTRÖM-HINTIKKA, GHITA; LINDSTRÖM, STEN; ŚLIWIŃSKI, RYSIEK (eds.). *Collected papers of Stig Kanger with essays on his life and work.* Vol. 1. Dordrecht: Kluwer, 2001b, s. 99-119.

KANGER, STIG. The Morning Star Paradox. *Theoria.* 1957, 23, s. 1-11.

KANT, IMMANUEL. *Kritika čistého rozumu*. Praha: OIKOYMENH, 2001.

KOLMAN, VOJTĚCH (ed.). *Možnost, skutečnost, nutnost.* Praha: Filosofia, 2005.

KNEALE, WILLIAM CALVERT; KNEALE, MARTHA. *The Development of Logic*. Oxford: Oxford University Press, 1962.

KRIPKE, SAUL AARON. A completeness theorem in modal logic. *Journal of Symbolic Logic*. 1959a, 24, 1, s. 1-14.

KRIPKE, SAUL AARON. Semantical analysis of modal logic (abstract). *Journal of Symbolic Logic*. 1959b, 24, 1, s. 323–324.

KRIPKE, SAUL AARON. Semantical analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*. 1963, 9, s. 67–96.

KRIPKE, SAUL AARON. Semantical Analysis of Modal Logic II. Non-normal Modal Propositional Calculi. In ADDISON, J. W.; HENKIN L.; TARSKI, A. (eds.). *Symposium on the Theory of Models*. Amsterdam: North-Holland, 1965, s. 206–220.

KRIPKE, SAUL AARON. Semantical considerations on modal logic. In LINSKY, LEONARD (ed.). *Reference and modality.* London: Oxford University Press, 1971, s. 63-72.

LENZEN, WOLFGANG. Leibniz on Alethic and Deontic Modal Logic. In BERLIOZ, DOMINIQUE; NEF, FRÉDERIC (eds.). *Leibniz et les puissances du langage*. Paris: Vrin, 2005, s. 341-362.

LEMMON, E. J. New Foundations for Lewis Modal Systems. *Journal of Symbolic Logic*. 1957, 22, s. 176–186.

LEWIS, CLARENCE IRVING. *A Survey of Symbolic Logic*. Berkeley: University of California Press, 1918.

LEWIS, CLARENCE IRVING. Strict Implication, An Emendation. *The Journal of Philosophy, and Scientific Methods*. 1920, 17, 11, s. 300-302.

LEWIS, CLARENCE IRVING; LANGFORD COOPER HAROLD. *Symbolic Logic*. New York and London: Century Co., 1932.

LINDSTRÖM, STEN. Quine's interpretation problem and the early development of possible worlds semantics. In Carlson, Erik; Sliwinski, Rysiek (eds.). *Omnium-gatherum. Philosophical essays dedicated to Jan Österberg on the occasion of his sixtieth birthday*. Uppsala: Department of Philosophy, Uppsala University, 2001a, s. 187-213.

LINDSTRÖM, STEN. An exposition and development of Kanger's early semantics for modal logic. In HOLMSTRÖM-HINTIKKA, GHITA; LINDSTRÖM, STEN; ŚLIWIŃSKI, RYSIEK (eds.). *Collected papers of Stig Kanger with essays on his life and work,* Vol. 2. Dordrecht: Kluwer, 2001b, s. 97-130.

LOKHORST, GERT-JAN C.; GOBLE, LOU. Mally's Deontic Logic. *Grazer philosophische Studien*. 2004, 67, s. 37-57.

MACCOLL HUGH. Symbolic Logic and its Applications. London: Longmans, Green and Co., 1906.

MACCOLL HUGH. Calculus of Equivalent Statements. In *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1896, 28, s. 156-183.

MALLY, ERNST. *Grundgesetze des Sollens: Elemente der Logik des Willens*. Graz: Leuschner und Lubensky, Universitäts-Buchhandlung, 1926.

MONTAGUE, RICHARD. Logical Necessity, Physical Necessity, Ethics, and Quantifiers. In THOMASON, RICHMOND H. (ed). *Formal Philosophy: Selected Papers of Richard Montague*. New Haven: Yale University Press, 1974. s. 71-94.

ØHRSTRØM, PETER; HASLE PER F. V. *Temporal logic: from ancient ideas to artificial intelligence*. Dordrecht: Kluwer, 1995.

PARRY, W. T. The Postulates for Strict Implication. *Mind*. 1934, 43, s. 78–80.

PIÉRAUT-LE BONNIEC, GILBERTE. *The development of modal reasoning : genesis of necessity and possibility nations*. New York: Academic Press, 1980.

PRIOR, ARTHUR. Modality and Quantification in S5. *The Journal of Symbolic Logic*. 1956, 21, 1, s. 60-62.

RESCHER, NICHOLAS. *Studies in the History of Logic*. Heusenstamm: Ontos Verlag, 2006.

RUSSELL, BERTRAND. *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz.* Cambridge: Cambridge University Press, 1900.

RUSSELL, BERTRAND. *The Principles of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

RUSSELL, BERTRAND. Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. *American Journal of Mathematics*. 1908, 30, 3, s. 222-262.

RUSSELL, BERTRAND; WHITEHEAD, ALFRED NORTH. *Principia Mathematica to *56*. Cambridge: University Pres, 1962.

RUSSELL, BERTRAND. *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: George Allen and Unwin Ltd, 1967.

RUSSELL, BERTRAND. Necessity and Possibility. In URQUHART, ALASDAIR; LEWIS, ALBERT C. (eds.). *Foundations of Logic 1903-1905, The Collected Papers of Bertrand Russell*. Vol. 4. London and New York: Routledge, 1994, s. 507-520.

RUSSELL, BERTRAND. *Filozofia logického atomizmu*. Bratislava: Kalligram, 2004.

SCHURZ GERHARD. Rudolf Carnap's Modal Logic. In VON DER PFORDTEN, DIETMAR; SCHURZ, GERHARD (eds.). *PE* Preprints (Annual 2000), 2002, s. 365-380.

SCHILPP, PAUL ARTHUR (ed). *The Philosophy of Rudolf Carnap.* La Salle: Open Court, 1963.

SOBOCIŃSKI, BOLESŁAV. Note on a Modal System of Feys-von Wright. *Journal of Computing Systems*. 1953, 1, s. 171–178.

SMILEY, T. J. *Modal logic, Lecture Handout*. Department of Philosophy, University of Cambridge, 1957.

SMULLYAN, RAYMOND M. Logicians who reason about themselves. *Proceedings of the 1986 conference on Theoretical aspects of reasoning about knowledge*. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1986, s. 341-352.

SUNDHOLM, GORAN. The Proof Theory of Stig Kanger: Personal Recollection. In HOLMSTRÖM-HINTIKKA, GHITA; LINDSTRÖM, STEN; ŚLIWIŃSKI, RYSIEK (eds.). *Collected papers of Stig Kanger with essays on his life and work.* Vol. 2. Dordrecht: Kluwer, 2001, s. 31-42.

SVOBODA, VLADIMÍR; PEREGRIN JAROSLAV. *Od jazyka k logice: filozofický úvod do moderní logiky*. Praha: Academia, 2009.

TARSKI, ALFRED. Das Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. *Studia Philosophica*. 1936, 1, s. 261-405.

VON WRIGHT, GEORG HENDRIK. *An Essay in Modal Logic*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1951.

WAJSBERG, MORDCHAJ. Ein erweiterter Klassenkalkül. *Monatshefte für Mathematik und Physik.* 1933, 40, s. 113-126.

WITTGENSTEIN, LUDWIG. *Tractatus logico-philosophicus*. Praha: OIKOYMENH, 2007.

WOLEŃSKI, JAN. MacColl on Modalities. *Scandinavian Journal of Philosophical Logic*. 1999, 3, 133-140.