

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Alica Kürtiová

Základní matematické metody ve fyzice – řešené úlohy

Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Vojtěch Žák, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Fyzika zaměřená na vzdělávání

Praha 2012

Na tomto mieste by som chcela veľmi pekne poďakovať vedúcemu svojej bakalárskej práce RNDr. Vojtěchovi Žákovi, Ph.D. za jeho cenné rady, odbornú pomoc, originálne nápady a hlavne trpezlivosť pri vypracovávaní úloh a vlastného textu bakalárskej práce.

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracovala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov. Súhlasím s požičianím práce.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení, najmä skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dňa 21.5.2012

Alica Kürtiová

Názov práce: *Základní matematické metody ve fyzice – řešené úlohy*

Autorka: *Alica Kürtiová*

Katedra (ústav): *Katedra didaktiky fyziky*

Vedúci bakalárskej práce: *RNDr. Vojtěch Žák, Ph.D., Katedra didaktiky fyziky*

Abstrakt: Táto bakalárska práca je zameraná na vytvorenie súboru fyzikálnych úloh so štruktúrovaným riešením do kapitoly Matematické doplnky v Elektronické sbírce řešených úloh z fyziky. Po preštudovaní existujúcich zbierok a učebníc používaných na stredných školách bolo zistené, že sa väčšina z nich nevenuje matematickému aparátu, ktorý je potrebný pri štúdiu fyziky v prvom semestri na vysokej škole. Toto bolo primárnou príčinou vytvorenia šestnástich úloh využívajúcich základné matematické metódy vo fyzike, predovšetkým základy diferenciálneho a integrálneho počtu. Komentované postupy riešenia úloh boli vytvorené za účelom oboznámenia riešiteľa so základným matematickým aparátom potrebným pri štúdiu fyziky na vysokej škole. Mali by priniesť študentovi sľubné výsledky pri samoštúdiu a viesť ho k aktívnemu riešeniu úloh.

Kľúčové slová: fyzikálne úlohy, štruktúrované riešenie, elektronická zbierka, diferenciálny a integrálny počet

Title: *Basic Mathematical Methods in Physics – Solved Problems*

Author: *Alica Kürtiová*

Department: *Department of Physics Education*

Supervisor: *RNDr. Vojtěch Žák, Ph.D., Katedra didaktiky fyziky*

Abstract: This bachelor thesis is focused on creating a set of physical tasks with a structured solution to the chapter Mathematical supplements in the Electronic Collection of Solved Problems in Physics. After studying the actual collections and textbooks used in high schools it was found that in most of them the mathematical apparatus which is necessary for studying physics at universities in the first semester is not mentioned. This was the primary cause of the creation of sixteen tasks using the basic mathematical methods in physics, especially the basics of differential and integral calculus. Commented solutions have been created in order to familiarize the solver with basic mathematical apparatus which is needed to study physics at university. They should bring promising results in individual studying and lead the student to be active at solving the problem.

Keywords: physical tasks, structured solution, electronic collection, differential and integral calculus

Obsah

Úvod	7
1 Prehľad vybraných skrípt a zbierok	9
1.1 Skríptá a zbierky v tlačenej podobe	9
1.2 Zbierky v elektronickej podobe	14
2 Elektronická sbírka řešených úloh z fyziky	16
2.1 Základná charakteristika	16
2.2 Úlohy a ich štruktúra	17
2.3 Technické riešenie zbierky	18
3 Vytvorené úlohy	19
3.1 Výber úloh do sekcie Matematické doplnky	19
3.2 Stručná charakteristika vytvorených úloh	20
3.3 Prehľad vytvorených úloh	21
3.3.1 Podkapitola Derivácie	21
3.3.2 Podkapitola Integrály	24
3.3.3 Podkapitola Diferenciálne rovnice	26
Záver	29
Zoznam použitej literatúry	31
Prílohy	32

Úvod

Všetci sme súčasťou prírody, pozorujeme ju a snažíme sa ju čo najlepšie pochopiť. Maliar používa na popis prírody štetec, plátno a farby. Fotograf sa snaží prírodu zvečniť prostredníctvom fotky. Poet jej krásu uchováva vo svojich básnických zbierkach. Avšak, pri takomto popise vystupujú do popredia pocity a fantázia umelca. „Stráca sa“ tak objektivita. Dá sa vôbec prírodu popísať aj inak - nezávisle na tom, kto ju popisuje? Odpoveď znie: fyzikou.

Ten, kto pozná aspoň trochu zákony prírody, sám dobre vie, že väčšina z nich má matematickú podobu. To je dôvod, prečo sa fyzika bez matematiky nezaobíde. Je však všeobecne známe, či už je to na základnej, strednej alebo vysokej škole, že výučba fyziky s potrebným matematickým aparátom „predbieha“ výučbu matematiky. Stredoškólači sa na matematike nestretnú s diferenciálnym a integrálnym počtom buď vôbec, alebo len veľmi povrchno. Množstvo fyzikálnych učebníc určených poslucháčom prvého ročníka vysokej školy však využíva tento aparát, hoci sa vyučuje v rámci matematických predmetov v neskorších semestroch. Vzniká tak akási „díra“ medzi výukou fyziky a matematiky na vysokej škole. S týmto problémom som sa stretla aj ja sama a to je aj jeden z dôvodov, prečo som si zvolila práve túto tému bakalárskej práce.

Hlavným cieľom tejto bakalárskej práce bolo vytvoriť súbor štruktúrovaných úloh, ktoré využívajú základné matematické metódy, najmä základy diferenciálneho a integrálneho počtu, do Elektronické sbírky řešených úloh z fyziky, ktorá vznikla na Katedře didaktiky fyziky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze a je verejnou prístupná na adrese: <http://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/sbirka>. Cieľom bolo vytvoriť úlohy s fyzikálnym podtónom zamerané najmä na matematické metódy, a vytvoriť tak novú, doposiaľ neexistujúcu sekciu Matematické doplnky v spomínanej zbierke. Úlohy sú zamerané na fyzikálnu látku prvého ročníka vysokých škôl a nadväzujú na učivo vyšších ročníkov stredných škôl.

Zoznámila som sa s viacerými učebnicami, ktoré sa venujú danej problematike čisto z matematického hľadiska, ale aj so zbierkami príkladov v knižnej i elektronickej podobe venujúcimi sa príkladom z fyziky, v ktorých sa vyskytuje spomenutý matematický aparát, a z nich som čerpala inšpiráciu pre svoju bakalársku

prácu. Vyhľadala som úlohy z rôznych oblastí fyziky využívajúce predovšetkým diferenciálny a integrálny počet a zaradila ich do elektronickej zbierky. Ako budúca učiteľka som sa snažila „vžiť do kože“ svojich študentov a vytvoril systém nápodiev k príkladom tak, aby študentov čo najlepšie „viedli“ k výsledku pri samostatnom riešení.

Dúfam, že tieto príklady splnia svoj účel a pomôžu študentom, ktorí si zvolili správnu, hoci ťažkú cestu - zvolili si za svoju budúcnosť fyziku a matematiku.

Nasledovný citát by som rada venovala všetkým tým, ktorí krásu fyziky a matematiky zatiaľ neobjavili:

„ Pre tých, ktorí nepoznajú matematiku, je ťažké porozumieť skutočnému pocitu nad najhlbšou krásou prírody. Ak sa chcete dozvedieť niečo o prírode a obdivovať ju, musíte porozumieť jazyku, ktorým hovorí. “

(R.P Feynman, O povahe fyzikálnych zákonov)

1

Prehľad vybraných skrípt a zbierok

Jednou z úloh tejto bakalárskej práce bolo zoznámiť sa s existujúcimi skriptami, ktoré sa venujú oblasti matematických metód vo fyzike a so zbierkami úloh. Boli preštudované rôzne učebnice a zbierky úloh z fyziky a matematiky v tlačenej podobe, v ktorých sa využíva diferenciálny a integrálny počet a sú určené predovšetkým poslucháčom prvých ročníkov vysokých škôl. Uvedené sú aj elektronické zbierky, ktoré sa venujú danej problematike. Výber skrípt a zbierok nie je samozrejme úplný. Bol zhotovený dostupný výber, ktorý poslužil ako inšpirácia pri tvorbe úloh.

1.1 Skriptá a zbierky v tlačenej podobe

J. Kopáček a kolektiv: Příklady z matematiky nejen pro fyziky I. [1]

Tieto skriptá sú určené hlavne pre študentov fyziky prvého semestra na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Pokrývajú príklady k látke preberanej na prednáškach z Matematické analýzy a Lineární algebry. Skriptá sú prehľadne rozdelené na kapitoly a ich oddiely. Na začiatku každého oddielu sú uvedené najdôležitejšie definície, vety a vzorce, ktoré sa využívajú v príkladoch. Za teoretickou časťou sa nachádza niekoľko vzorovo riešených príkladov a množstvo neriešených úloh a cvičení, ktorých výsledky sú k dispozícii na konci každej kapitoly. Skriptá sú doplnené množstvom obrázkov, najmä grafmi funkcií. V skriptách sú uvedené aj príklady s fyzikálnou tematikou, v ktorých sa aplikujú postupy preberané v danej kapitole.

Pozornosť bola venovaná predovšetkým kapitolám: *Limita funkce*, *Derivace*, *Neurčitý integrál*, *Určitý integrál*, *Taylorův rozvoj*. Spomenuté kapitoly obsahujú zoznam najčastejšie používaných derivácií a integrálov elementárnych funkcií. Takisto autor uviedol aj tvary Taylorových mnohočlenov základných elementárnych

funkcií. Skriptá obsahujú príklady, ktoré prechádzajú krok za krokom od najjednoduchších k zložitejším a nechýbajú aj slovné úlohy.

Z hľadiska matematických metód vo fyzike stojí za povšimnutie, že sú kapitoly doplnené príkladmi z fyziky, v ktorých sa využíva prebraný matematický aparát, a tým dáva autor možnosť študentom vyskúšať si nadobudnuté vedomosti a matematické postupy v aplikačných úlohách.

V. Jarník: Diferenciálny počet I. [2]

Vojtěch Jarník hneď v úvode knihy [2] píše: „Tato kniha je určena jako úvod do diferenciálního počtu hlavně těm čtenářům, kteří se chtějí zabývat matematikou důkladněji.“

Táto približne štyristostranová kniha obsahuje pätnásť kapitol rozdelených na niekoľko paragrafov. Autor sa venuje diferenciálnemu počtu hlavne v teoretickej rovine. V skriptách sú uvedené definície, vety s dôkazmi a na konci každého paragrafu je uvedených niekoľko cvičení. Autor takisto v texte uvádza niekoľko príkladov na ozrejmienie prebratého celku.

Podrobnejšie bola preštudovaná ôsma kapitola *Derivace*. Tejto kapitole je venovaných približne dvadsať strán. V úvode kapitoly je obrázok a príklad na ozrejmienie pojmu derivácia, nasleduje formálna definícia a niekoľko riešených príkladov. Ďalej sú tu dokázané dôležité vety, napríklad pravidlo na výpočet derivácie súčinu a podielu funkcií, linearita derivácií, derivácia zloženej funkcie a podobne. V texte sa vyskytuje veľa príkladov, pri ktorých je uvedený postup riešenia aj so sprievodným textom a odkazmi na vety predtým. Na konci kapitol sú cvičenia určené samostatnému výpočtu čitateľa. U cvičení sú udané výsledky a u tých ťažších aj stručný návod na riešenie alebo číslo vety, ktorá sa pri riešení používa.

V. Jarník: Integrálny počet I. [3]

Knihy je písaná rovnakým štýlom ako [2]. Obsahuje osem kapitol delených na paragrafy a tri kapitoly označené spoločným názvom *Dodatky*. Prvá kapitola je venovaná opakovaniu a zhrnutiu základných poznatkov z knihy [2]. Autor sa v knihe venuje predovšetkým pojmom primitívna funkcia a Riemannov integrál. Uvádza vety

a definície v súvislosti s touto problematikou, napríklad 1. a 2. metóda substitučná, integrácia per partes, rozklad na parciálne zlomky atď.. Nechýbajú riešené príklady, napríklad integrály niektorých elementárnych funkcií, ale takisto aj výpočet dĺžky kriviek a obsahov rovinných plôch, ktoré sa tiež počítajú pomocou určitých integrálov.

J. Kvasnica: Matematický aparát fyziky [4]

Táto kniha je rozdelená na osem kapitol a podkapitoly, ktoré sú venované informáciám o základných metódach matematiky, ktoré sa využívajú vo fyzike. Autor v predhovore knihy [4] píše: „Předpokládané předběžné znalosti nepřesahující rámec běžného gymnaziálního učiva matematiky a fyziky.“ Predhovor bol však písaný v roku 1987. Odvtedy sa učebný plán na strednej škole pozmenil a veľa sa z neho vypustilo. Možno je aj toto dôvodom, prečo sa v knihe pojednáva hneď o parciálnych deriváciách a nenachádza sa tu kapitola, ktorá by zaviedla pojem derivácie a integrálu.

Výklad je zrozumiteľný, výstižný a autor čitateľa nezaťažuje zdĺhavými dôkazmi, pre prípadných záujemcov udáva odkaz na inú literatúru, kde je dôkaz uvedený podrobne. Autor sa daným častiam matematiky venuje skôr teoreticky, avšak na konci jednotlivých kapitol uvádza niekoľko riešených príkladov.

Podrobnejšie bola preštudovaná kapitola *Diferenciální rovnice*. V úvode sa nachádza motivácia, teda aplikácie a nevyhnutnosť diferenciálnych rovníc vo fyzike. Nasleduje klasifikácia diferenciálnych rovníc a postupy ich riešenia. V závere kapitoly sa autor znovu venuje aplikácii vo fyzike - vlnovej rovnici rovinatej a sférickej vlny.

J. Kvasnica, A. Havránek, P. Lukáč, B. Sprušil: Mechanika [5]

Obsah tejto učebnice pokrýva učebné plány predmetu Fyzika I na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Učebnica je rozdelená na jednotlivé kapitoly a podkapitoly, ktoré sa venujú hlavne mechanike hmotného bodu, tuhého telesa a spojitých prostredí. Za každou kapitolou sa nachádza niekoľko podrobne vyriešených úloh, a tak majú študenti možnosť precvičiť si základné príklady, ktoré

sa týkajú prebratej látky. Niektoré príklady a rovnako aj výklad je ilustrovaný obrázkami a grafmi.

Z hľadiska matematických metód vo fyzike stoja za povšimnutie *Matematické dodatky* na konci knihy, kde autor vysvetľuje niektoré matematické partie presahujúce predpokladané stredoškolské znalosti, ktoré sa využívajú v texte učebnice. Myslím, že je aj vďaka týmto dodatkom kniha vhodne prispôsobená obmedzeným matematickým znalostiam študentov prvého ročníka Matematicko-fyzikálnej fakulty.

I. Jex, I. Štoll: Výběr fyzikálních úloh (Mechanika, elektřina, magnetismus) [6]

Zbierka vznikla na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze. Napriek tomu je vhodná aj pre študentov Matematicko-fyzikální fakulty UK. Jedná sa o zbierku podrobne riešených úloh, predovšetkým z oblasti mechaniky, elektriny a magnetizmu. Okrem toho učebnica obsahuje aj príklady z teoretickej mechaniky a teórie relativity. Zbierka nie je zameraná na výklad teórie, ale hlavne riešenie príkladov zo spomenutých partií. Zbierka obsahuje približne stošesťdesiat zadaní príkladov, ktoré sú formulované približne v prvej pätine knihy. V druhej časti knihy sú uvedené postupy a riešenia všetkých úloh. Kniha je doplnená prehľadnými obrázkami, ktoré uľahčujú riešenie a pomáhajú študentom si problematiku lepšie predstaviť.

Z hľadiska matematických metód vo fyzike je zbierka vhodná pre študentov prvých ročníkov vysokých škôl na osvojenie si a precvičenie derivácií, integrálov, diferenciálnych rovníc a i., ktoré sú pochopiteľne neoddeliteľnou súčasťou ich budúceho štúdia. Samozrejme, nachádzajú sa tu aj úlohy jednoduchšie, ktoré by mohli byť nápomocné študentom stredných škôl, predovšetkým gymnázií, ktorí sa podrobnejšie zaujímajú o matematiku a fyziku.

Okrem iného za povšimnutie v zbierke stoja vtipné a originálne pomenovania úloh, ktoré takto môžu nalákať čitateľa a nepôsobiť odstrašujúco.

J. Fährnich, A. Havránek, D. Slavínská: Příklady z mechaniky [7]

Zbierka patrí k učebným textom Univerzity Karlovy v Praze. Je určená hlavne poslucháčom odborného štúdia fyziky, je však vhodná aj pre učiteľské odbory.

Skriptá sú rozdelené na desať kapitol, kde sa nachádzajú podrobne riešené úlohy z mechaniky hmotného bodu, tuhého telesa a mechaniky tekutín. Riešených úloh je podľa slov autora na začiatku skript [7] približne jedna pätina. Za každou kapitolou sa nachádzajú neriešené úlohy určené k samostatnému riešeniu čitateľa, ktorých výsledky sú uvedené v zadnej časti knihy a u niektorých sa nachádza aj stručný návod na riešenie. V učebnici sa nachádza množstvo obrázkov, ktoré uľahčujú riešenie príkladov. Na konci zbierky je zopár strán venovaných jednotkám SI sústavy, odvodeným jednotkám a predponám a značkám, ktoré sa využívajú pri tvorbe násobných a dielových jednotiek – to všetko uvedené v prehľadných tabuľkách.

Keďže je zbierka určená predovšetkým študentom prvého semestra, obsahuje napríklad v kapitole *Kinematika* príklady venované hlavne deriváciám, kde si má študent možnosť precvičiť derivovanie elementárnych funkcií, postup pri derivovaní zloženej funkcie, súčinu a podielu derivácií a pod.. V ďalších kapitolách je možnosť precvičenia primitívnych funkcií a určitého integrálu. Zbierka je teda vhodná pre študentov prvého ročníka na osvojenie si matematických metód vo fyzikálnych príkladoch.

Ivana Kučerová: Diferenciálne rovnice v praktických príkladoch (bakalárska práca) [8]

Táto práca bola uznaná ako bakalárska práca v roku 2003 na Katedre matematickej analýzy Univerzity Komenského v Bratislave. Autorka sa v nej venuje rôznym typom lineárnych, ale aj nelineárnych diferenciálnych rovníc. Pri každom type diferenciálnej rovnice je stručne opísaný všeobecný postup jej riešenia. Bakalárska práca je však venovaná predovšetkým zaujímavým aplikačným príkladom z fyziky, finančnej matematiky, ekonómie, medicíny a i., ktoré sú v práci uvedené aj s postupom riešenia. Ďalej sa tu nachádzajú aj cvičenia, pri ktorých je uvedený len výsledok.

1.2 Zbierky v elektronickej podobe

R. Hestic: Zbierka príkladov z matematiky, fyziky a chémie [9]

Táto zbierka vznikla zásluhou dlhoročnej práce stredoškolského učiteľa R. Hesticu a je verejnosti dostupná na internetovej adrese www.priklady.eu. V zbierke je možnosť výberu anglického, českého a slovenského jazyka.

Zbierka je rozdelená na tri sekcie: *Matematika*, *Fyzika*, *Chémia*. Každá zo spomenutých sekcií obsahuje množstvo kapitol a tie sa ďalej delia na podkapitoly. Podrobnejšie bola preskúmaná sekcia *Fyzika* a v nej hlavne príklady, v ktorých sa využívajú jednoduché derivácie a integrály na úrovni pokročilej strednej školy. Úlohy nesú originálne názvy a mnohé sú popísané a riešené hravou formou. Všetky zadania sú doplnené o možnosť zobrazenia celkového riešenia a výsledku. Príklady väčšinou požadujú všeobecné ale aj číselné riešenie pre konkrétne zadané hodnoty. K dispozícii je aj kapitola *Testy*, v ktorej sú uzavreté úlohy s výberom odpovede (jedna zo štyroch). Celkové riešenie v tomto prípade nie je uvedené, len výsledok.

V zbierke nechýbajú historické poznámky, životopisy matematikov a fyzikov, ktoré sú konkrétne uvedené v kapitole *Zaujímavosti v matematike*. V tejto kapitole autor udáva aj zaujímavosti zo sveta, ako napríklad rekord v zapamätaní si 100 000 čísiel Ludolfovoho čísla π .

Z hľadiska matematických metód stojí za povšimnutie množstvo fyzikálnych príkladov úrovňou presahujúce až na vysokú školu, v ktorých sa využíva diferenciálny a integrálny počet. Tieto sa nachádzajú v kapitolách *Fyzikálny význam derivácie* a *Určitý integrál vo fyzike*.

Zbierku by mohla byť vhodná hlavne pre študentov vyšších gymnázií, ako príprava na maturitu alebo prijímacie skúšky z matematiky a fyziky.

We Solve Your Problems [10]

Pri tejto elektronickej zbierke je uvedený len jej názov (v preklade *Riešime Vaše problémy*), keďže na internetových stránkach jej autor/i nie je/sú uvedený/í. Vznikla v Poľsku v roku 2011, je písaná v angličtine a je dostupná verejnosti na webovej adrese <http://www.obliczone.com>.

Zbierka je rozdelená na šesť kapitol, ktoré sú ďalej členené na podkapitoly obsahujúce množstvo matematických príkladov na úrovni vysokej školy.

V rámci tejto bakalárskej práce boli preštudované kapitoly *Integrals (Integrály)*, *Differential Equations (Diferenciálne rovnice)*. Kapitola *Integrals* je ďalej členená na podkapitoly s názvami *Solve an Indefinite Integral (Rieš určitý integrál)*, *Solve a Definite integral (Rieš neurčitý integrál)*, *Solve an Improper Integral (Rieš nevlastný integrál)*.

Nevýhodou zbierky je, že na ukázanie riešenia je nutná registrácia, ktorá je však platená. Podmienkou bezplatnej registrácie je udanie e-mailových adries dvoch priateľov, ktorým následne príde pozvánka do zbierky.

Elektronická sbírka řešených úloh z fyziky

2.1 Základná charakteristika

Zbierka bola založená v roku 2006 na Katedre didaktiky fyziky MFF UK. Od tohto roku sa na jej tvorbe podieľajú učitelia a študenti s cieľom uľahčiť štúdium budúcim generáciám. Zbierka vzniká v elektronickej podobe a je dostupná všetkým záujemcom na internetovej adrese <http://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/sbirka> alebo <http://www.fyzikalniulohy.cz>.

Zbierka je v súčasnosti rozdelená podľa piatich tém: *Mechanika, Elektřina a magnetizmus, Termodynamika a molekulová fyzika, Teoretická mechanika a Fyzika mikrosvěta*. Každá téma obsahuje niekoľko kapitol, do ktorých sú začlenené jednotlivé úlohy podľa obsahu. Niektoré kapitoly sú ďalej delené na podkapitoly.

Viacero úloh je označených jednou zo skratiek ZŠ, SŠ, SŠ+,VŠ, ktoré hovoria o náročnosti danej úlohy a pomáhajú sa tak ľahšie orientovať užívateľom v zbierke a vybrať si tak pre nich vhodné úlohy. ZŠ označuje úlohu, ktorú by mal vedieť vyriešiť žiak zo základnej školy, SŠ je úloha, na vyriešenie ktorej sú potrebné bežné stredoškolské znalosti. SŠ+ označuje ťažšie stredoškolské úlohy (napríklad úroveň fyzikálnej olympiády) alebo veľmi jednoduchú vysokoškolskú úlohu, v ktorej sa nevyužíva matematický aparát diferenciálneho a integrálneho počtu. VŠ označuje štandardnú vysokoškolskú úlohu.

Ďalej môžu byť úlohy označené špeciálnou ikonou, ktorá nesie informáciu napríklad o tom, či sa jedná o úlohu vyžadujúcu neobvyklý trik alebo nápad, či je úloha riešená graficky, úvahou alebo úloha s vysvetlením teórie.

Užívateľ má možnosť využiť tzv. *Filtrování úloh*, kde si môže sám vybrať náročnosť a typ úloh, aké mu majú byť zobrazené.

2.2 Úlohy a ich štruktúra

Zbierka v súčasnej dobe obsahuje približne sedemsto riešených úloh dostupných pre verejnosť a tento počet sa postupne rozrastá vďaka práci učiteľov a študentov na Katedre didaktiky fyziky MFF UK.

Každá úloha sa člení na niekoľko sekcií, ktoré si používateľ môže otvárať postupne. Sekcie sa v úlohách môžu aj opakovať a ich poradie si každý tvorca volí sám.

Na začiatku sa nachádza *Zadanie úlohy*, ktoré je povinné a malo by byť jasne formulované.

Ďalej môže autor vytvoriť sekcie *Zápis* a *Rozbor*, ktoré však nepatria medzi povinné sekcie. V sekcii *Zápis* je uvedený výpis známych a neznámych veličín a ich hodnôt, tak ako je zvykom na strednej škole. Sekcia *Rozbor* obsahuje slovne formulované riešenie, nápady k riešeniu danej úlohy a popis situácie, ktorý by mal riešiteľovi pomôcť danú úlohu pochopiť. Tieto dve sekcie neboli pri tvorbe úloh (až na jednu úlohu) v rámci tejto bakalárskej práce použité, pretože väčšina z nich je formulovaná všeobecne a zápis známych veličín preto nie je potrebný. Hlavným cieľom bol pohľad na úlohu z matematického hľadiska, preto bola sekcia *Rozbor* nahradená poznámkami, ktoré sú súčasťou textu a nachádzajú sa priamo pri danej matematickej úprave.

Veľmi dôležitými sekciami sú *Nápovede*. Usmerňujú študenta pri riešení úlohy, napomáhajú v úvahách potrebných na napredovanie v príklade a navádzajú ho krok za krokom k správne výsledku. Osobne som toho názoru, že nápovede sú pri elektronickej forme zbierky veľmi vhodné, predovšetkým napomáhajú študentovi pri samoštúdiu.

V príkladoch som sa snažila tvoriť nápovede tak, aby si pomocou nich riešiteľ uvedomil, čo presne sa od neho v zadaní požaduje a aby mu čo najviac „uľahčili cestu do cieľa“. Ďalej mu pomáhajú osvojiť si postupy riešenia, ktoré sa v daných typoch príkladov využívajú. Cieľom bolo teda naučiť žiaka „rozkúskovať“ si daný problém a uvedomiť si aj z matematického hľadiska, aký význam majú jednotlivé úpravy a postupy, aby preňho riešenie fyzikálneho príkladu nebolo len „slepým dosadzovaním do vzorčiek“ a viesť ho tak k aktívnemu riešeniu príkladu.

V sekcii *Řešení nápovědy* sa uvádza riešenie toho, čo bolo spomenuté v nápovedi predtým. Študent má takto možnosť kontrolovať si svoje riešenie príkladu po častiach, aby dopredu nevidel celý postup riešenia, prípadne sa uistiť, že príklad rieši správnou úvahou, a ďalej pokračovať vo výpočte samostatne.

Sekcia *Řešení* je povinná a obsahuje spravidla riešenie všeobecné a kde je to možné i číselné. V príkladoch vytvorených v rámci tejto práce nesie táto sekcia názov *Celkové řešení*, pretože postupy, ktoré sú uvedené v nápovediach a ich samostatných riešeniach sú v tejto sekcii zhrnuté za sebou, prípadne čiastočne doplnené a udávajú teda celkové riešenie daného príkladu. Sekciu *Celkové řešení* bola vytvorená preto, aby sa študent pri samostatnom vyriešení celého príkladu nemusel „zbytočne preklikávať“ nápovedami, ale si len overiť správnosť svojho riešenia a výsledku.

V povinnej sekcii *Odpověď* je slovné zhrnutý výsledok a presné odpovede na všetky otázky v zadaní úlohy.

Posledné dve nepovinné sekcie, ktoré sú k dispozícii pri zostavovaní úloh sa nazývajú *Komentář* a *Odkaz*. V sekcii *Komentář* autor úlohy zadáva nejakú zaujímavosť, ktorá má súvislosť s danou úlohou, prípadne viac možností postupu riešenia úlohy. Do sekcii *Odkaz* sa odkazuje na podobné úlohy v zbierke, ktoré sa venujú tej istej tematike.

Do niektorých úloh vytvorených v rámci tejto práce bola zaradená sekcia s názvom *Teorie*, a to v prípade využívania vzorcov, veličín a vzťahov, ktoré nie sú známe zo strednej školy a sú v tejto sekcii podrobne vysvetlené. Sekcia *Teorie* v niektorých úlohách ozrejmuje matematické operácie využité v príklade.

2.3 Technické riešenie zbierky

Rozhranie zbierky je rozdelené na administrátorské, ktoré je prístupné len tvorcom zbierky a užívateľské, ktoré je voľne prístupné verejnosti na internete.

Text úloh sa píše v jazyku XHTML a vzorce sa píše vo formáte LaTeX. Obrázky sa najčastejšie kreslia vo vektorovom grafickom editore CorelDraw X3 a do zbierky sa zadávajú vo formáte CDR, ktorý je k dispozícii pre ďalšie úpravy a vo formáte GIF, ktorý prehliadač v zbierke zobrazuje.

3

Vytvorené úlohy

Hlavným cieľom tejto bakalárskej práce bolo zaviesť v elektronickej zbierke úloh z fyziky novú, zatiaľ nepublikovanú kapitolu *Matematické doplnky* a zaradiť do nej riešené príklady z rôznych oblastí fyziky, v ktorých sa využívajú základné matematické metódy, predovšetkým diferenciálny a integrálny počet.

Po preštudovaní učebníc zo stredných a vysokých škôl bolo zistené, že učebnice určené stredoškólakom sa danej problematike nevenujú vôbec alebo len minimálne. Naopak, množstvo vysokoškolských učebníc z fyziky určených poslucháčom prvého ročníka používa tento matematický aparát predpokladajúc, že s ním bol čitateľ v predošlom štúdiu oboznámený. Po preštudovaní zbierok a skript využívaných predovšetkým na vysokých školách, ktoré sa venujú tejto problematike, boli zvolené príklady, ktoré čiastočne pokrývajú danú tému, keďže je veľmi rozsiahla, a teda prekračuje rámec jednej bakalárskej práce. Preto je tu možnosť danú tému v budúcnosti rozvíjať a dopĺňať o príklady v rámci iných prác.

3.1 Výber úloh do sekcie Matematické doplnky

Matematické doplnky (v zbierke uvedená pod názvom *Matematické doplnky*) je názov jednej z tém v elektronickej zbierke riešených úloh z fyziky. Až doteraz v nej však neboli publikované žiadne úlohy. Keďže sa študenti prvého ročníka nastupujúci do štúdia (či už z odboru *Obecná fyzika*, alebo *Fyzika zaměřená na vzdělávání*) bez matematického aparátu, ktorý sa vo vysokoškolskej fyzike využíva, nezaobídu, bolo vhodné vytvoriť niekoľko úloh práve do tejto kapitoly.

Pojem matematické doplnky je veľmi obšírny, zahŕňa napríklad limity, derivácie, integrály, postupnosti, rady, diferenciálne rovnice, Taylorov rozvoj atď. Preto je vhodné túto kapitolu rozdeliť na podkapitoly venujúce sa jednotlivým celkom.

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo vytvoriť sadu úloh predovšetkým na tému diferenciálny a integrálny počet. Daná téma bola naštudovaná z vysokoškolských učebníc a bolo zistené, čo sa o danej téme majú možnosť dozvedieť žiaci na strednej škole. Derivácie a integrály sa na stredných školách nevyučujú do potrebnej hĺbky

a niekedy sa nevyučujú vôbec, preto sa pri výbere úloh dôraz kládol hlavne na také, v ktorých sa vyskytujú základné techniky a metódy ich výpočtu. Ďalej boli vybrané úlohy z fyziky riešené pomocou diferenciálnych rovníc, pretože s tými sa na strednej škole zoznámi naozaj málokto.

Zadania týchto úloh boli čerpané hlavne z tlačенých zdrojov. Niektoré sú uvedené v presnom znení, v iných je čiastočne pozmenené zadanie doplnené o viacero podotázok, prípadne je doplnené alternatívne riešenie danej úlohy. Niektoré úlohy boli čerpané z vlastných poznámok z predmetov vyučovaných na MFF UK, konkrétne z *Matematických metod I. a II.* a z *Matematické analýzy*. Pri potrebe ozrejmiť si a zopakovať teóriu som využívala hlavne [1] a [4].

Úlohy sa týkajú rôznych oblastí fyziky, no väčšinou bola snaha vyberať také, v ktorých sú potrebné fyzikálne znalosti javov a vzorcov na úrovni strednej školy alebo z prvého semestra výuky fyziky, aby bolo primárne ich matematické riešenie.

3.2 Stručná charakteristika vytvorených úloh

Vzniknutá kapitola a jej podkapitoly boli nazvané:

- Diferenciálny a integrálny počet
(v zbierke je kapitola uvedená pod názvom *Diferenciální a integrální počet*)
 - Derivácie
(v zbierke je podkapitola uvedená pod názvom *Derivace*)
obsahuje 7 úloh
 - Integrály
(v zbierke je podkapitola uvedená pod názvom *Integrály*)
obsahuje 5 úloh
 - Diferenciálne rovnice
(v zbierke je podkapitola uvedená pod názvom *Diferenciální rovnice*)
obsahuje 4 úlohy

Spolu bolo vytvorených šestnásť štruktúrovaných úloh.

3.3 Prehľad vytvorených úloh

Poznámka: Názvy úloh sú uvedené presne tak, ako v zbierke úloh, teda v češtine. Pri úlohách sú znázornené obrázky, ktoré sú uvedené v zadaní úlohy v elektronickej zbierke.

3.3.1 Podkapitola Derivácie

Pohyb hmotného bodu

Zadanie úlohy bolo inšpirované príkladom zo zbierky [7]. Túto úlohu som zaradila ako prvú, pretože sa jedná o úlohu z kinematiky, teda učiva prvého semestra.

Fyzikálna charakteristika úlohy:

Úloha je zameraná na počítanie rýchlosti a zrýchlenia z parametrického vyjadrenia trajektórie.

Matematická charakteristika úlohy:

Táto úloha by mala slúžiť na pochopenie základného zmyslu derivácie vo fyzike. Študent má pri jej výpočte možnosť zoznámiť sa s deriváciou súčinu a zloženej funkcie, ktorých znalosť je nevyhnutná pri počítaní ďalších príkladov. V úlohe sa počítajú derivácie goniometrických funkcií.

Pohyb po válci

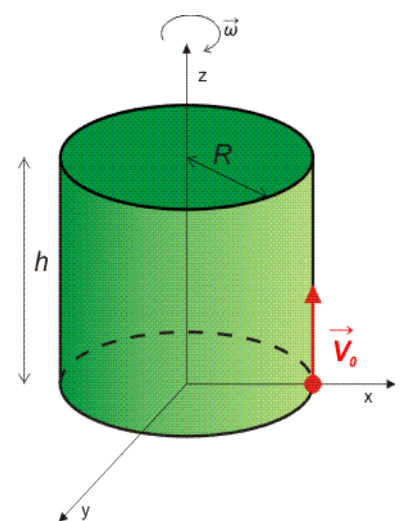
Zadanie tejto úlohy som čerpala z učebných materiálov RNDr. Dany Mandíkovej, CSc. určených k cvičeniam z predmetu *Fyzika I – Mechanika a molekulová fyzika*.

Fyzikálna charakteristika úlohy:

Hmotný bod sa pohybuje po valci, ktorý sa rovnomerne otáča, jedná sa teda o zložený pohyb. Úlohou je určiť parametrické vyjadrenie krivky, ktorú pri svojom pohybe popisuje hmotný bod, ďalej sa od riešiteľa vyžaduje určiť zložky vektora rýchlosti a zrýchlenia.

Matematická charakteristika úlohy:

Úloha je zameraná na počítanie derivácií, avšak je o niečo



obrázok č. 1

<http://fyzikalniulohy.cz>

zložitejšia ako prvá, a to v tom, že parametrické vyjadrenie trajektórie hmotného bodu nie je v zadaní uvedené, ale ho musí riešiteľ sám vymyslieť. Po jeho určení sa zoznamuje so špeciálnou krivkou – skrutkovicou (šroubovice).

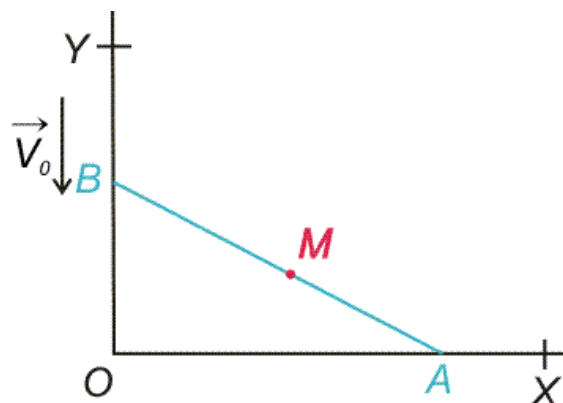
Úloha je doplnená o sekciu *Alternatívni zadání*, v ktorej je uvedené, ako by sa príslušné vzťahy zmenili pri zámene osí y a z , alebo pri výpočte v súradnicovej sústave spätéj s valcom.

Klouzání tyče

Príklad bol vybraný zo zbierky [11].

Fyzikálna charakteristika úlohy:

Úlohou je určiť parametrické vyjadrenie trajektórie hmotného bodu M , ktorý je znázornený na obrázku č. 2. Bod M patrí tyči, ktorá je znázornená modro a kľže sa tak, že jej koniec B sa pohybuje smerom dolu po polpriamke OY , koniec A po polpriamke OX .



obrázok č. 2

<http://fyzikalniulohy.cz>

Matematická charakteristika úlohy:

Riešiteľ má z parametrického vyjadrenia vylúčením parametru určiť všeobecnú rovnicu danej trajektórie. Riešením je rovnica elipsy, ktorá je známa už zo strednej školy. Ďalšou úlohou je spočítať rýchlosť bodu M , na čo sa využije derivácia zloženej funkcie.

Stabilní rovnovážná poloha polokoule se závažím

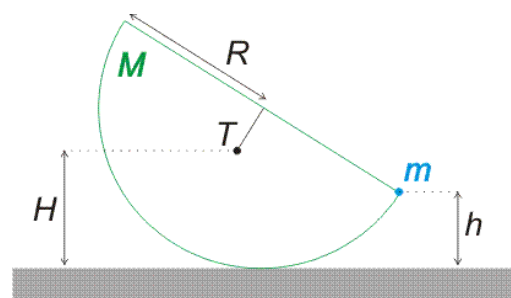
Tento príklad bol vybraný zo zbierky [6].

Fyzikálna charakteristika úlohy:

Úlohou je nájsť rovnovážnu polohu pologule, na ktorej je na jednej strane pripevnené závažie, teda nájsť minimum potenciálnej energie.

Matematická charakteristika úlohy:

Úloha je zameraná na hľadanie extrému funkcie a výpočet derivácie vyšších rádov. Žiak si pri jej riešení



obrázok č. 3

<http://fyzikalniulohy.cz>

môže uvedomiť, že nutnou podmienkou extrému je nulová hodnota derivácie (ak existuje). Samozrejme, nejedná sa o podmienku postačujúcu, preto sa v nasledovnej časti príkladu počíta aj druhá derivácia.

Zaření černého tělesa

Inšpiráciu pri tvorbe tejto úlohy som čerpala zo svojich poznámok z predmetu *Fyzika III - Optika* (prednášajúci prof. RNDr. Vladimír Baumruk, DrSc.). Pri tvorbe úlohy boli ďalej využité vzťahy z [12].

Fyzikálna charakteristika úlohy:

Keďže sa v príklade vyskytuje fyzikálne pozadie z tretieho semestra štúdia, ktoré by mohlo byť pre pochopenie študenta prvého ročníka zložité, bola zaradená k riešeniu aj sekcia s názvom *Teorie*. V tejto sekcii sa stručne vysvetľujú pre prváka neznáme pojmy a vzťahy, ako napríklad spektrálna hustota intenzity vyžarovania čierneho telesa, aby bol príklad pochopiteľný aj z fyzikálnej stránky.

Matematická charakteristika úlohy:

Príklad je postavený na hľadaní extrému, derivovaní, ale takisto sa tam zavádza aj substitúcia, ktorá vedie na rovnicu

$$5(e^x + 1) = xe^x \quad (1)$$

riešiteľnú len numericky alebo graficky. V príklade je uvedený odkaz na internet, kde si študent môže pozrieť graf funkcie

$$y = 5(e^x + 1) - xe^x \quad (2)$$

a overiť si správnosť uvedeného výsledku.

Zákony černého tělesa

Zadanie úlohy bolo inšpirované učebnými materiálmi k prednáške *Fyzika III – Optika* (prednášajúci prof. RNDr. Vladimír Baumruk, DrSc.). Pri tvorbe úlohy boli ďalej využité vzťahy z [12].

Fyzikálna charakteristika úlohy:

V zadaní je uvedený Planckov zákon. Úlohou je z neho odvodiť Wienov zákon a Rayleigh-Jeansov zákon, ktorých tvar je v zadaní takisto uvedený. Úloha je doplnená o sekciu *Historická poznámka*, pretože bolo vhodné podotknúť, že najskôr boli zistené Wienov zákon a Rayleigh-Jeansov zákon, a Planckov zákon je ich zovšeobecnením.

Matematická charakteristika úlohy:

Táto úloha bola do zbierky zaradená z dôvodu, že je zameraná hlavne na Taylorov rozvoj, ktorého znalosť je pri ďalšom štúdiu poslucháča fyziky veľmi dôležitá. Pri určovaní Rayleigh-Jeansovho zákona sa vychádza z Taylorovho rozvoja exponenciály, niekoľko pár členov rozvoja sa v príklade počíta priamo derivovaním. Študent si takto môže precvičiť počítanie vyšších derivácií.

Relativistická a klasická kinetická energie

Zadanie tejto úlohy bolo inšpirované zbierkou [1] a takisto aj poznámkami z prednášky *Teorie relativity* (prednášajúci doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc.).

Fyzikálna charakteristika úlohy:

Zadaný je vzťah pre celkovú energiu voľnej častice v teórii relativity. Má sa z neho odvodiť vzťah pre klasickú kinetickú energiu z newtonovskej mechaniky za predpokladu $v \ll c$. K príkladu je zaradená aj sekcia *Teorie*, v ktorej je stručne vysvetlené, čo sa rozumie pod pojmom pokojová hmotnosť.

Matematická charakteristika úlohy:

V úlohe sa ako aj v predošlej znovu určuje Taylorov rozvoj funkcie výpočtom vyšších derivácií.

3.3.2 Podkapitola Integrály

Práce v silovém poli

Tvorba zadania tejto úlohy bola inšpirovaná skriptami [5].

Fyzikálna charakteristika úlohy:

V príklade treba vypočítať prácu, ktorú vykoná silové pole pri prenesení hmotného bodu v priestore po priamke, ktorá však v skriptách [5] bola zadaná rovnicou

$$x = 2y = 4z, \quad (3)$$

teda ako priesečnica dvoch rovín daných všeobecnými vyjadreniami. V úlohe vytvorenej v rámci tejto práce je však použité parametrické vyjadrenie uvedenej priamky, pretože by vyjadrenie (3) mohlo byť pre „čerstvých“ vysokoškolákov trochu neštandardné, keďže sa na strednej škole stretávali hlavne s parametrickým vyjadrením priamky v priestore. Ďalším dôvodom tejto voľby je, že týmto spôsobom by bolo zložité vyjadriť inú krivku ako priamku a príklad by bol preto veľmi

špecifický. Riešenie príkladu pomocou vyjadrenia (3) je v zbierke uvedené v sekcii *Alternativní řešení*.

Matematická charakteristika úlohy:

Úloha je zameraná predovšetkým na výpočet určitého integrálu. Úloha je zaradená ako prvá, pretože sa v nej integrujú jednoduché funkcie, spravidla kvadratické polynómy. Je teda vhodná na prvotné pochopenie výpočtu integrálu, práce s medzami integrálu a jeho aplikácie vo fyzike.

Hráz přehrady

Zadanie tejto úlohy bolo prevzaté zo zbierky [6].

Fyzikální charakteristika úlohy:

Úlohou je vypočítať silu, ktorou pôsobí voda na riečnu priehradu. Riešiteľ pri tom využíva vzťah pre veľkosť hydrostatickej sily pod hladinou vody, s ktorým sa oboznámil na strednej škole.

Matematická charakteristika úlohy:

Jedná sa o úlohu na výpočet určitého integrálu a využitie linearity integrálu. Úloha je zameraná na precvičenie si integrácie polynómov maximálne druhého stupňa a práce s medzami integrálu. Pri výpočte sa využíva aj podobnosť pravouhlých trojuholníkov. Úloha je doplnená o výpočet veľkosti sily, ktorou pôsobí voda na priehradu Hoover Dam na rieke Colorado. Úloha je doplnená o sekcii *Diskuze*, v ktorej sa uvádza zamyslenie nad veľkosťou vypočítanej sily.

Obsah kruhu

Jedná sa o typickú úlohu počítanú na prednáške alebo cvičení z predmetov *Matematické metody ve fyzice I*, *Matematická analýza Ib*, preto bola vybratá.

Matematická charakteristika úlohy:

Úlohou je spočítať obsah kruhu. V zadaní príkladu je priamo vyžadované riešiť úlohu metódou per partes a substitučnou metódou. Študent si tak vyskúša postupy pri riešení úloh týmito metódami. V príklade sa integrujú už zložitejšie výrazy ako v prvých dvoch úlohách, a to lomené výrazy s odmocninami a goniometrické funkcie. Cieľom tohto príkladu je naučiť študenta, ako sa postupuje pri integrovaní funkcií sínus a kosínus, ktoré sa tu vyskytujú v súčine, v druhej mocnine alebo

s dvojnásobným argumentom a ukázať mu postupy, ktoré uľahčia výpočet zložitejších integrálov, ako napríklad rozklad na parciálne zlomky.

Poloha ťžišťa polokoule

Zadanie tejto úlohy bolo inšpirované poznámkami z cvičenia k predmetu *Fyzika I – Mechanika a molekulová fyzika* (vyučujúci RNDr. Martin Veis, Ph.D.)

Matematická charakteristika úlohy:

Príklad na výpočet ťažiska poglobule bol zvolený preto, lebo sa v tejto úlohe prevádza objemový integrál na jednorozmerný, a to využitím symetrie poglobule. Študent si tak uvedomí, že sa niekedy dá viacrozmerný integrál zjednodušiť pomocou jednoduchých úvah a poloha ťažiska sa spočíta pomocou jednorozmerného integrálu napriek tomu, že sa jedná o priestorový útvar.

Poloha ťžišťa komolého kužeľa

Zostavovanie zadania tejto úlohy bolo inšpirované poznámkami z cvičenia *Fyziky I – Mechanika a molekulová fyzika* (vyučujúci RNDr. Martin Veis, Ph.D.).

Matematická charakteristika úlohy:

Znovu sa jedná o príklad zameraný na počítanie určitého integrálu a prevedenie objemového integrálu na jednorozmerný využitím symetrie komolého kužeľa. Pri riešení tejto úlohy sa môže študent dozvedieť, ako sa dá odvodiť vzorec pre výpočet objemu komolého kužeľa, ktorý je síce známy už na strednej škole, ale tam takpovediac „spadol z neba“. Takisto sa študent naučí, ako sa postupuje pri takýchto typoch úloh, teda že je potrebné komolý kužel „rozsekať“ na komolé kužele o elementárnej výške, ktoré môžu byť považované za valčeky a vysčítať ich cez jeho výšku.

3.3.3 Podkapitola Diferenciálne rovnice

Hojící se rána

Zadanie úlohy je prevzaté z [8].

Matematická charakteristika úlohy:

Zaradená je ako prvá z toho dôvodu, že diferenciálna rovnica je uvedená priamo v zadaní a žiak sa môže sústrediť len na matematický postup, akým sa táto

diferenciálna rovnica rieši. Jedná sa o diferenciálnu rovnicu so separovanými premennými

$$y'(t) = f(t), \quad (4)$$

ktorá sa rieši priamou integráciou, pretože poznáme deriváciu hľadanej funkcie. Na tomto príklade by si mal žiak ozrejmiť základný postup pri riešení tohto typu diferenciálnej rovnice.

Radioaktivita

Zadanie tejto úlohy je prebraté z [8].

Fyzikálna charakteristika úlohy:

V príklade sa počíta závislosť hmotnosti na čase, konkrétne izotopu thória ^{234}Th . V priebehu príkladu sa žiak zoznámí s tým, že sa jedná o exponenciálny pokles hmotnosti a pomocou rovnice spočíta polčas rozpadu daného izotopu thória. Príklad je doplnený o podotázku, v ktorej má riešiteľ za úlohu zostrojiť tabuľku z niekoľkých hodnôt (dvojíc hmotnosť a čas) a na základe nej zostrojiť graf tejto závislosti. Táto otázka bola zaradená preto, lebo by mohla mať prínos pre študentov prvého ročníka, napríklad pri písaní protokolu praktík z fyziky.

Matematická charakteristika úlohy:

V zadaní je uvedená diferenciálna rovnica typu:

$$y'(t) = f(y), \quad (5)$$

podľa ktorej sa rozpadajú rádioaktívne izotopy. Rieši sa separáciou premenných a následnou integráciou.

Pád s odporom vzduchu

Úloha je prebraná z mojich poznámok z *Matematických metod ve fyzice II* (vyučujúci RNDr. Vojtěch Žák, Ph.D.).

Fyzikálna charakteristika úlohy:

Ako už z názvu plynie, jedná sa o pád hmotného bodu v tiažovom poli Zeme za pôsobenia odporu vzduchu, ktorý je úmerný prvej mocnine veľkosti rýchlosti hmotného bodu. Úloha je ťažšia ako predošlá, pretože vyžaduje od riešiteľa samostatné zostavenie diferenciálnej rovnice a jej vyriešenie. Pri jej zostavovaní však musí použiť len druhý Newtonov zákon, ktorý je v jednoduchšej podobe známy už zo strednej školy.

Matematická charakteristika úlohy:

Úloha vedie na lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu s konštantnými koeficientmi, ktorá sa dá vyriešiť separáciou premenných a následnou integráciou. Študent sa pri jej riešení naučí pracovať aj s počiatkovou podmienkou, pomocou ktorej sa určí aditívna konštanta.

Pohyb elektrónu v kovovom vodiči

Úloha bola čerpaná z poznámok z *Klasické elektrodynamiky* (prednášajúci RNDr. Vojtěch Žák, Ph.D.) a je zameraná na výpočet diferenciálnej rovnice. Jedná sa o úlohu podobnú úlohe *Pád s odporom vzduchu*, ktorá je uvedená vyššie.

Fyzikálna charakteristika úlohy:

V zadaní je uvedená lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu s konštantnými koeficientmi tvaru

$$m \frac{dv}{dt} = eE, \quad (6)$$

ktorá popisuje pohyb elektrónu s nábojom e v kovovom vodiči zapojeného do elektrického obvodu, kde má elektrické pole intenzitu o konštantnej veľkosti E , v je rýchlosť elektrónu a m jeho hmotnosť. Prvou úlohou je vyriešiť diferenciálnu rovnicu a potom sa zamyslieť, či získaný výsledok

$$v = \frac{eE}{m}t + c \quad (7)$$

vyhovuje reálnej situácii v kovovom vodiči. Po jednoduchej úvahe však plynie, že v obvode s konštantnou intenzitou by prúd lineárne rástol s časom, čo však v praxi nepozorujeme. Preto sa v zadaní ďalšej podotázky vyžaduje opraviť rovnicu (6) o člen $-\gamma mv$ vyjadrujúci odpor kladený elektrónu.

Matematická charakteristika úlohy:

Hlavným cieľom úlohy je nájsť riešenie homogénnej a nehomogénnej rovnice a celkové riešenie je potom ich súčtom. Úloha je zameraná aj na výpočet limity, keďže sa má určiť, na akej hodnote sa prúd po určitej dobe ($t \rightarrow \infty$) ustáli.

Záver

Hlavným cieľom tejto bakalárskej práce bolo zostaviť štruktúrované úlohy, ktoré sa venujú niektorým základným matematickým metódam vo fyzike a ktoré by sčasti pokryli sekciu *Matematické doplnky* v Elektronické sbírce řešených úloh z fyziky. Verejnosti je dostupná na internetovej adrese <http://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/sbirka>.

Úlohy boli zaradené konkrétne do kapitoly *Diferenciální a integrální počet* a sú zamerané predovšetkým na riešenie derivácií funkcií jednej reálnej premennej, jednorozmerných integrálov, diferenciálnych rovníc a Taylorovho rozvoja. Dôraz bol kladený hlavne na matematické postupy uplatnené v úlohách, preto sú pri ich riešení potrebné bežné fyzikálne znalosti väčšinou na úrovni strednej školy.

Najprv bolo potrebné oboznámiť sa s literatúrou, ktorá sa venuje danej problematike. Boli preštudované skriptá a zbierky úloh v tlačenej i elektronickej podobe a aj z nich bola čerpaná inšpirácia pri tvorbe zadania príkladov.

Úlohy vytvorené v rámci tejto bakalárskej práce by mali byť určené predovšetkým študentom, ktorý by sa chceli venovať ďalej štúdiu matematiky a fyziky a poslucháčom prvého ročníka, ktorí pociťujú nedostatky matematických znalostí pri štúdiu fyziky v prvom semestri. Ďalej môžu byť nápomocné aj pre pedagógov, napríklad pri tvorbe študijných materiálov, hľadani inšpirácie pri zaraďovaní nových príkladov do výuky a celkového obohatenia vyučovacích hodín fyziky a matematiky.

Táto bakalárska práca bola pre mňa prínosom, pretože som si ako budúca učiteľka mohla precvičiť tvorbu úloh a ich vysvetľovanie prostredníctvom nápovedí. Takisto som sa naučila pracovať s novými programami. Zopakovala som si učivo predovšetkým matematickej analýzy a inšpirovala som sa pre tvorbu a zostavovanie vlastných úloh.

V súčasnej dobe plnej technických vymožeností je takýto typ zbierky veľmi výhodný, keďže je vytvorená v elektronickej podobe a je takto ľahko a bezplatne dostupná pre verejnosť na internete buď v českom, a niektoré úlohy aj v anglickom jazyku. Výhodou je, že sa do nej dajú neustále dopĺňať nové kapitoly, prípadne pozmeniť úlohy a pridávať odkazy na literatúru dostupnú na internete. Štruktúrované úlohy a ich logické zaradenie do kapitol podľa jednotlivých tém umožňuje jednoduchú orientáciu v zbierke a nájdenie požadovaných úloh „len niekoľkými kliknutiami“, čo môže na rozdiel od zbierok v knižnej podobe ušetriť čas. Riešenie

úloh s komentovanými postupmi a názornými, farebnými obrázkami môže byť pre určitú skupinu študentov zábavné. To môže mať za následok vyvolanie záujmu žiaka o fyziku a matematiku a zefektívnenie štúdia týchto predmetov.

Samozrejme, všetko má svoje klady a zápory. Zbierka dostupná len na internete môže byť nevýhodná napríklad pre staršie generácie pedagógov, ktorí uprednostňujú knižné formy učebníc a zbierok a takisto aj pre ľudí, ktorí nemajú prístup na internet.

Matematické metódy vo fyzike sú však veľmi obširne a zahŕňajú mnoho iných tém, ktorým sa táto bakalárska práca nevenovala. V budúcnosti by bolo vhodné kapitoly *Derivace, Integrály a Diferenciální rovnice* v zbierke úloh obohatiť o nové príklady venujúce sa napríklad parciálnym deriváciám, viacrozmerným integrálom, sústavám diferenciálnych rovníc, parciálnym diferenciálnym rovniciam atď.. Pochopiteľne, sekcia Matematické doplnky by mala byť doplnená aj o nové podkapitoly venujúce sa napríklad rôznym operátorom využívaným vo fyzike, vektorovej a tenzorovej analýze a pod..

Zoznam použitej literatúry

- [1] Kopáček, J. a kol. (2005). *Příklady z matematiky nejen pro fyziky I*. Praha: Matfyzpress.
- [2] Jarník, V. (1974). *Diferenciální počet I*. Praha: Academia.
- [3] Jarník, V. (1963). *Integrální počet I*. Praha: Nakladatelství československé akademie věd.
- [4] Kvasnica, J. (1997). *Matematický aparát fyziky*. Praha: Academia.
- [5] Kvasnica, J., & Havránek, A., & Lukáč, P., & Sprušil, B. (2004). *Mechanika*. Praha: Academia.
- [6] Jex, I., & Štoll, I. (2008). *Výběr fyzikálních úloh – Mechanika, elektřina, Magnetismus*. Praha: České vysoké učení technické v Praze.
- [7] Fährnich, J., & Havránek, A., & Slavínská, D. (2005). *Příklady z mechaniky*. Praha: Karolinum.
- [8] Kučerová, I. (2003). *Diferenciálne rovnice v praktických príkladoch* (Bakalárska práca). Bratislava: Univerzita Komenského.
- [9] Hestic, R. (2008). *Zbierka príkladov z matematiky, fyziky a chémie*.
Dostupné z <http://www.priklady.eu>
- [10] *We Solve Your Problems* (2011).
Dostupné z <http://www.obliczone.com>
- [11] Böhlm, R., & Klimo, M. (2001). *Matematické metody vo fyzike*. Bratislava: FMFI UK
- [12] Planck, M., & Masius, M. (1914). *The Theory of Heat Radiation*. Philadelphia: P. Blakiston's Son & Company

Prílohy

Poznámka: Úlohy a obrázky sú určené pre vkladanie na web, nie pre tlač. Boli vytlačené v najlepšej možnej kvalite.

