Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michaela Majerová

Identifikace vhodných užitkových funkcí

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční matematika

Praha 2012

Poděkování. Týmto by som sa chcela poďakovať RNDr. Ing. Milošovi Kopovi, Ph.D. za odborné rady a cenné pripomienky a za čas, ktorý mi venoval počas tvorby tejto práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Identifikace vhodných užitkových funkcí

Autor: Michaela Majerová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Abstrakt: Na začiatku tejto práce uvedieme základné vlastnosti úžitkových funkcií a budeme skúmať ich tvar v závislosti na vzťahu investora k riziku. Ďalej zavedieme pojem rizikovej prémie a miery rizikovej averzie investora. V druhej kapitole sa budeme zaoberať klasifikáciou úžitkových funkcií a to práve na základe miery absolútnej rizikovej averzie a uvedieme si niekoľko základných typov úžitkových funkcií. V tretej kapitole budeme odhadovať vhodný tvar úžitkovej funkcie investora na základe hodnôt poisťovacej prémie, ktoré získame prostredníctvom dotazníkov od študentov MFF UK. Takto získané úžitkové funkcie využijeme v poslednej kapitole, kde si najskôr formálne zadefinujeme úlohu optimalizácie portfólia a potom zostavíme optimálne portfólio českých akcií zo SPADu pre niekoľko rôznych investorov.

Klíčová slova: úžitková funkcia, poisťovacia prémia, miera rizikovej averzie, optimalizácia portfólia

Title: Suitable utility function identification

Author: Michaela Majerová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Abstract: At the beginning of this work we study basic properties of utility functions and connection between their shape and investor's relation to risk. Then we define risk premium and we recall measure of risk aversion. In the second chapter we study classification of utility functions according to the absolute risk aversion measure and we list some basic types of utility functions. In the third chapter we construct investor's utility function. We use values of insurance premium which we get from questionnaire filled by MFF UK students. We use these utility functions in the last chapter. First we define portfolio selection problem and then we find optimal portfolio for different investors.

Keywords: utility function, insurance premium, measure of risk aversion, portfolio optimization

Obsah

Úvod

Už v minulosti bol pojem úžitku pre ekonómov dobre známy. Vyjadrovali ním mieru ľudskej spokojnosti, preto bolo prirodzené, že spotrebitelia svoje rozhodnutia robili tak, aby maximalizovali svoj úžitok, a boli tak čo najspokojnejší. Teória úžitku poskytuje spôsob ako vyjadriť preferencie spotrebiteľa (investora). Ako je uvedené napr. v [10], ordinálny princíp úžitku vychádza z toho, že spotrebitelia dokážu zoradiť statky podľa svojich preferencií, pritom však nepotrebujeme vedieť, o koľko preferujú jeden statok pred druhým. Druhým prístupom je koncept kardinálneho, merateľného, úžitku, ktorý vyžaduje presnú hodnotu o koľko je jeden statok preferovaný pred druhým. Pomocou kardinálneho úžitku sa často skúma ľudské chovanie v podmienkach neistoty a rizika. Úžitkovou funkciou budeme rozumieť funkciu, ktorá vyjadruje vzťah medzi úžitkom a majetkom investora. Teória očakávaného úžitku navrhnutá von Neumannom a Morgensternom, viď [7], sa aplikuje v ekonomických úlohách, ako je napríklad optimalizácia portfólia.

Túto prácu začneme zadefinovaním úžitkovej funkcie a rozlíšime investorov podľa ich vzťahu k riziku. Následne si ukážeme ako súvisí tvar úžitkovej funkcie investora od jeho postoja k riziku. V ďalšej časti si zadefinujeme pojem rizikovej prémie, ktorú ako prvý odvodili, nezávisle na sebe, Arrow a Pratt, viď [9].

Z definície rizikovej prémie si odvodíme tvar miery absolútnej rizikovej averzie investora, tzv. Arrow–Prattovej miery, a ukážeme si ako znamienko tejto miery a takisto rizikovej prémie závisí od typu investora. Ďalej si uvedieme ako je možné na základe miery rizikovej averzie porovnávať dvoch investorov. V druhej kapitole sa budeme zaoberať klasifikáciou úžitkových funkcií na základe miery absolútnej rizikovej averzie. Odvodíme tvar úžitkovej funkcie, ktorý je charakteristický pre investora s konštantnou mierou absolútnej rizikovej averzie a bližšie sa budeme zaoberať aj tzv. HARA funkciami. V tretej kapitole budeme analyzovať úžitkové funkcie konkrétnych investorov. Tými budú pre nás študenti MFF, od ktorých prostredníctvom dotazníka zistíme ich hodnoty poisťovacej prémie na rozličných úrovniach počiatočného majetku. S využitím vzťahov odvodených v Kapitole 2 budeme schopní určiť vhodný tvar úžitkovej funkcie týchto investorov.

Štandardným problémom investora je vybrať si z prípustných investícií tú najviac preferovanú. Investori teda čelia úlohe maximalizovať očakávaný úžitok svojho koncového majetku s ohľadom na výšku ich počiatočného majetku. V poslednej kapitole tejto práce sa budeme zaoberať úlohou optimalizácie portfólia, kde optimálne portfólio je to, ktoré maximalizuje očakávaný úžitok investora. Túto úlohu vyriešime pre investorov s úžitkovými funkciami odvodenými v Kapitole 3 a ukážeme rozdiely v optimálnom portfóliu pri použití rôznych úžitkových funkcií. Na záver tejto práce sa budeme zaoberať aproximáciou optimálneho očakávaného úžitku navrhnutou v [5].

1. Úžitkové funkcie a riziková averzia

1.1 Základné vlastnosti úžitkových funkcií

Úžitkové funkcie umožňujú vyjadriť preferencie investora s ohľadom na podstúpené riziko a očakávaný výnos. Na určitej hladine majetku investora určujú úžitok, ktorý z tohto majetku má, pričom úžitkom rozumieme subjektívnu hodnotu investora. Za úžitkovú funkciu budeme považovať spojitú a neklesajúcu funkciu definovanú na nejakom intervale reálnych čísel. Sformulujme si jej presnú definíciu. Definície a vety v tejto časti, pokiaľ nebude uvedené inak, budeme čerpať z [5] a [6].

Definícia 1. *Nech I je interval, $I \subseteq R$. Potom funkciu $u : I \to R$, nazývame úžitková funkcia, ak u je spojitá a neklesajúca na intervale I.*

Za hru, resp. investíciu budeme považovať náhodnú veličinu ω, ktorá nadobúda reálne hodnoty a má pravdepodobnostné rozdelenie P_ω a distribučnú funkciu $F_\omega(x) = P[\omega \leq x]$. Naviac budeme predpokladať, že hra ω má konečnú strednú hodnotu, tj. $E\omega < \infty$. Ak má hra ω nulovú strednú hodnotu, takúto hru nazveme spravodlivá.

Rozlišujeme dva prístupy ku hre: aditívny a multiplikatívny. Rozdiel spočíva v tom, že pri aditívnom prístupe, je výsledný majetok investora po hre ω rovný hodnote $W + \omega$, zatiaľ čo pri prístupe multiplikatívnom je jeho výsledný majetok tvaru ωW.

Tvar úžitkovej funkcie závisí od postoja investora k riziku. Ten je možné charakterizovať napr. pomocou rizikovej averzie. Pod pojmom riziková averzia rozumieme neochotu prijať investíciu s neistým výnosom a uprednostnenie takej investície, ktorá má síce menší výnos, ale zato so sebou nesie menšie riziko. Takže, ak je investor rizikovo averzný, v prípade, že má na výber dve investície s porovnateľnými výnosmi, vyberie si tú, ktorá je pre neho menej riziková.

Všeobecne, podľa vzťahu investora k riziku, rozlišujeme tri typy investorov.

Definícia 2. *Nech u je úžitková funkcia a W je hladina majetku investora. Uvažujme vhodnú hru, ako náhodnú veličinu ω, s rozdelením P_ω tak, že existujú stredné hodnoty $Eu(W{+}\omega)$ a $E\omega$.*

(i) Ak pre každú vhodnú hru platí $Eu(W{+}\omega) < u(W{+}E\omega)$, potom investora s takouto úžitkovou funkciou nazývame rizikovo averzný na hladine majetku W.

(ii) Ak pre každú vhodnú hru platí $Eu(W{+}\omega) > u(W{+}E\omega)$, potom investora s takouto úžitkovou funkciou nazývame obľubujúci riziko na hladine majetku W.

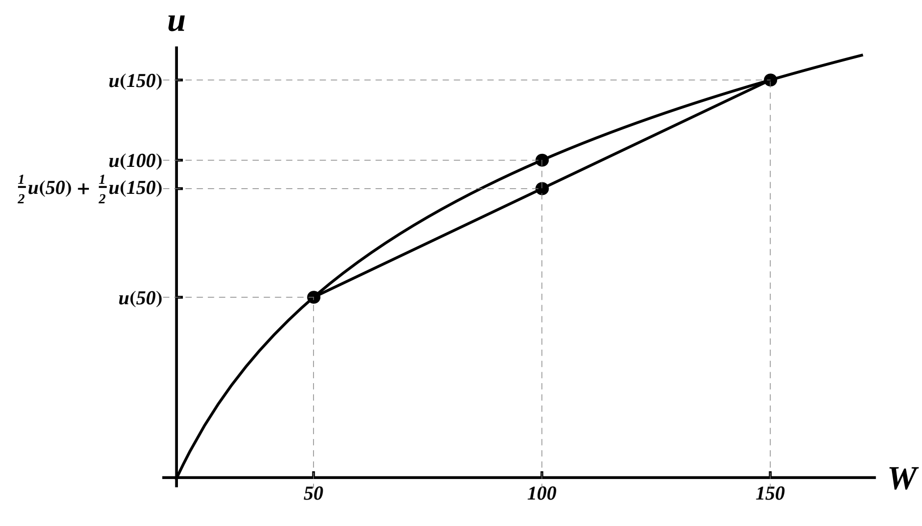
(iii) Ak pre každú vhodnú hru platí $Eu(W{+}\omega) = u(W{+}E\omega)$, potom investora s takouto úžitkovou funkciou nazývame rizikovo neutrálny na hladine majetku W.

Z tejto definície je zrejmé, že postoj investora k riziku môže byť na rôznych hladinách jeho majetku odlišný. Takisto vidíme, že na správanie investora nemá vplyv konkrétna hra, ale len jeho úžitková funkcia a hladina počiatočného majetku. Vlastnosti z Definície 2 sú teda len lokálne, preto si teraz zadefinujeme aj vlastnostni globálne.

Definícia 3. *Investor sa nazýva (globálne) rizikovo averzný (neutrálny, obľubujúci riziko), pokiaľ je rizikovo averzný (neutrálny, obľubujúci riziko) na každej hladine majetku.*

V praxi sa najčastejšie stretávame s rizikovo averznými investormi. Takýto investor nie je ochotný riskovať v spravodlivej hre, pretože strata určitej časti majetku mu spôsobí väčší pokles úžitku, ako by bol nárast jeho úžitku pri získaní rovnakej sumy majetku. Rizikovo neutrálne správanie investora je typické pre prípad, keď má investor príliš veľký majetok v porovnaní so sumou, ktorú by mohol v spravodlivej hre získať alebo stratiť. A nakoniec investor obľubujúci riziko, s ktorým sa v praxi stretávame najmenej, je typickým príkladom pre lotérie. V takejto hre môže investor s veľmi malou pravdepodobnosťou a za veľmi malú časť svojho majetku získať obrovskú časť bohatstva a preto je ochotný podstúpiť aj väčšie riziko.

Teraz si uvedieme jednoduchý príklad, podľa [11]. Predstavme si, že investor má majetok v hodnote 100 Kč a uvažuje nad hrou ω, pri ktorej s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ vyhrá 50 Kč a s rovnakou pravdepodobnosťou môže pri tejto hre 50 Kč stratiť. Stredná hodnota tejto hry je rovná $E\omega = \frac{1}{2}50 + \frac{1}{2}(-50) = 0$, a teda sa jedná o spravodlivú hru. Tým pádom je rovnako pravdepodobné, že na konci hry bude mať majetok investora hodnotu 50 Kč alebo 150 Kč. Očakávaná hodnota investorovho majetku je $\frac{1}{2}50 + \frac{1}{2}150 = 100$ Kč a očakávaný úžitok $\frac{1}{2}u(50) + \frac{1}{2}u(150)$, kde u je úžitková funkcia investora. Pre lepšie pochopenie si to znázornime na Obrázku 1.1.

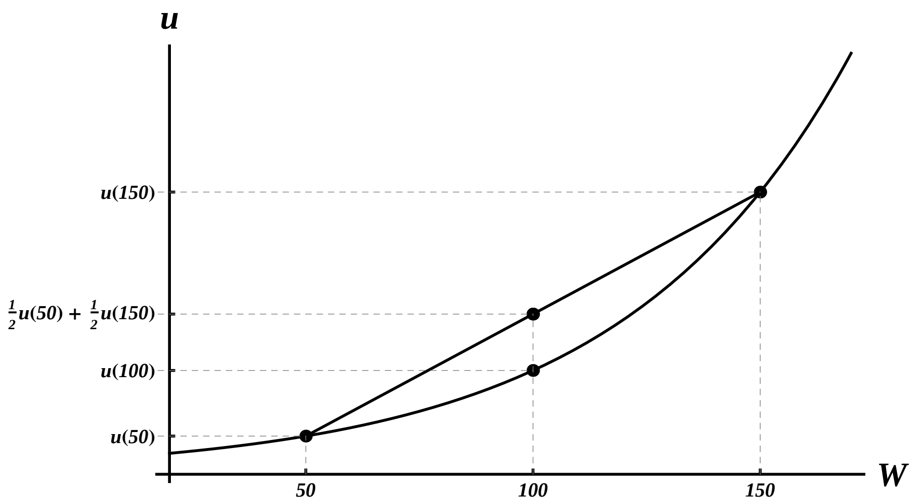


Obr. 1.1: Úžitková funkcia rizikovo averzného investora.

Očakávaný úžitok z koncového majetku je priemer hodnôt $u(50)$ a $u(150)$. Na obrázku je znázornený taktiež úžitok z očakávanej hodnoty koncového majetku, teda hodnota úžitkovej funkcie v bode 100. Z obrázku vidíme, že očakávaný úžitok je menší ako úžitok z očakávaného majetku. Platí

$$u(\frac{1}{2}150+\frac{1}{2}50)=u(100)>\frac{1}{2}u(150)+\frac{1}{2}u(50).$$

Z tejto nerovnosti a Definície 2 vyplýva, že investor s úžitkovou funkciou zobrazenou na Obrázku 1.1 je rizikovo averzný, to znamená, že preferuje istú očakávanú hodnotu jeho majetku pred hraním hry ω. V prípade, že by jeho preferencie boli opačné, jednalo by sa o investora obľubujúceho riziko. V takom prípade platí $u(\frac{1}{2}150+\frac{1}{2}50)=u(100)<\frac{1}{2}u(150)+\frac{1}{2}u(50)$ a teda očakávaný úžitok je väčší, ako úžitok z očakávanej hodnoty majetku. Úžitková funkcia takéhoto investora je zobrazená na Obrázku 1.2.



Obr. 1.2: Úžitková funkcia investora obľubujúceho riziko.

Všimnime si, že úžitková funkcia rizikovo averzného investora je konkávna, zatiaľ čo funkcia investora obľubujúceho riziko je konvexná. Ak by sme uvažovali rizikovo neutrálneho investora, jeho úžitková funkcia by bola lineárna, a očakávaný úžitok by sa rovnal úžitku z očakávanej hodnoty majetku. Takýto investor sa zaujíma len o očakávanú hodnotu jeho majetku. Zakrivenie úžitkovej funkcie nám teda udáva postoj investora k riziku. Zjednodušene povedané, čím je funkcia viac konkávna, tým je investor viac rizikovo averzný, a naopak, čím je úžitková funkcia konvexnejšia, tým investor viac obľubuje riziko. Táto úvaha nás vedie k formulovaniu Vety 1. Pre úplnosť si však najskôr zadefinujeme konvexnú, konkávnu, striktne konvexnú a striktne konkávnu funkciu podľa [8].

Definícia 4. *Nech I je interval a $f : I \to R$ je reálna funkcia. Hovoríme, že*

(i) f je konvexná na intervale I, ak

$$\forall x,y\in I,\ \lambda\in(0,1)\qquad f(\lambda x+(1-\lambda)y)\ \le\ \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y); \tag{1.1}$$

(ii) f je konkávna, ak

$$\forall x,y\in I,\ \lambda\in(0,1)\qquad f(\lambda x+(1-\lambda)y)\ \ge\ \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y); \tag{1.2}$$

(iii) f je striktne konvexná, ak

$$\forall x, y \in I,\ \lambda \in (0,1) \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y); \tag{1.3}$$

(iv) f je striktne konkávna, ak

$$\forall x, y \in I,\ \lambda \in (0,1) \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{1.4}$$

Veta 1. *Nech $u : I \to R$ je úžitková funkcia. Potom investor s touto úžitkovou funkciou je*
(i) globálne rizikovo averzný práve vtedy, keď u je striktne konkávna na intervale I,
(ii) globálne rizikovo neutrálny práve vtedy, keď u je lineárna na intervale I,
(iii) globálne obľubujúci riziko práve vtedy, keď u je striktne konvexná na intervale I.

Dôkaz. Viď napr. [5]. □

1.2 Rizikové prémie

Uvažujme investora s počiatočným majetkom W a úžitkovou funkciou u. Rizikovou prémiou rozumieme čiastku, pri ktorej bude investor ľahostajný medzi možnosťou hrať hru ω a získať istú čiastku $E\omega - \pi(W, F_\omega)$. Riziková prémia hry ω závisí na troch charakteristikách, a to na tvare úžitkovej funkcie, pravdepodobnostnom rozdelení hry a na hodnote počiatočného majetku.

Definícia 5. *[6] Nech u je úžitková funkcia investora a W je hodnota jeho majetku. Nech existuje stredná hodnota $Eu(W+\omega)$. Potom existuje riziková prémia $\pi(W, F_\omega)$ definovaná ako riešenie rovnice*

$$u(W + E\omega - \pi(W, F_\omega)) = Eu(W+\omega). \tag{1.5}$$

Z Definície 5 priamo vyplýva pre každú konštantu δ rovnosť

$$\pi(W, \omega) = \pi(W+\delta, F_{\omega-\delta}). \tag{1.6}$$

Pri voľbe $\delta = E\omega$, získame rizikovú prémiu pre spravodlivú hru.

Pokiaľ hra predstavuje pre investora veľké riziko, proti ktorému sa chce poistiť, môžeme uvažovať tzv. poistnú prémiu $\pi_I(W, F_\omega)$ definovanú ako

$$\pi_I(W, F_\omega) = \pi(W, F_\omega) - E\omega. \tag{1.7}$$

Investor s majetkom W je ľahostajný medzi platením poistnej prémie a podstúpením rizika, ktoré mu prináša hra. Ak je hra spravodlivá, poisťovacia prémia je rovná prémii rizikovej.

Záporná čiastka poisťovacej prémie $\pi_a(W, F_\omega) = -\pi_I(W, F_\omega)$ sa niekedy označuje ako peňažný ekvivalent. Predstavuje najmenšiu sumu peňazí, za ktorú by bol investor ochotný predať možnosť hrať hru ω. Peňažný ekvivalent môžeme vyjadriť rovnicou

$$u(W + \pi_a(W, F_\omega)) = Eu(W + \omega). \tag{1.8}$$

Podobne môžeme určiť hodnotu $\pi_b(W, \omega)$ ako najvyššiu sumu, ktorú je investor ochotný zaplatiť za účasť v hre ω. Túto čiastku môžeme vyjadriť rovnicou

$$u(W) = Eu(W + \omega - \pi_b(W, F_\omega)). \tag{1.9}$$

Obdobne ako pre aditívny prístup ku hre, ktorým sme sa zaoberali doteraz, definujeme rizikovú prémiu pre multiplikatívny prístup. Multiplikatívnou poisťovacou prémiou rozumieme čiastku, ktorá spĺňa

$$u(W - W\pi_\varrho(W, F_\omega)) = Eu(\omega W), \tag{1.10}$$

kde u je úžitková funkcia investora a W jeho majetok. Investor je indiferentný medzi účasťou v hre ω a zaplatením istej čiastky $W\pi_\varrho(W, F_\omega)$.

1.3 Miery rizikovej averzie

Riziková prémia vyjadruje vzťah investora k riziku. Závisí však na zvolenej hre, a preto si teraz odvodíme, podľa [9], mieru rizikovej averzie investora, ktorá bude záležať len na hladine investorovho majetku a jeho postoji k riziku. Vo zvyšku tejto práce predpokladajme rizikovo averzného investora s dvakrát diferencovateľnou úžitkovou funkciou a majetkom W a spravodlivú hru ω s dostatočne malým rozptylom σ_ω^2. Ďalej predpokladajme, že tretí absolútny centrálny moment hry ω je menšieho rádu ako σ_ω^2.

Z predpokladu spravodlivej hry dostávame dosadením do definície rizikovej prémie nasledovný vzťah:

$$u(W - \pi(W, F_\omega)) = Eu(W + \omega). \tag{1.11}$$

Rozvinutím u pomocou Taylorovho rozvoja okolo bodu W získavame za vhodných podmienok rovnosti

$$u(W - \pi(W, F_\omega)) = u(W) - \pi(W, F_\omega)u'(W) + O(\pi^2(W, F_\omega)) \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} Eu(W + \omega) &= E[u(W) + \omega u'(W) + \frac{1}{2}\omega^2 u''(W) + O(\omega^3)] \\ &= u(W) + \frac{1}{2}\sigma_\omega^2 u''(W) + o(\sigma_\omega^2). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Symbol $O(\pi^2(W, F_\omega))$ znamená, že výraz je nanajvýš rádu $\pi^2(W, F_\omega)$ a $o(\sigma_\omega^2)$, že je výraz rádu menšieho ako σ_ω^2.

Dosadením do (1.11) získame

$$\pi(W, \omega) = -\frac{1}{2}\sigma_\omega^2 \frac{u''(W)}{u'(W)} + o(\sigma_\omega^2). \tag{1.14}$$

Za predpokladu, že hra ω nie je spravodlivá, a teda $E\omega = \mu$, $\mu \neq 0$, dostávame vďaka (1.11) a (1.6) vzťah pre ľubovoľnú hru s nenulovou strednou hodnotou μ a dostatočne malým rozptylom σ_ω^2

$$\pi(W,\omega) = -\frac{1}{2}\sigma_\omega^2 \frac{u''(W+\mu)}{u'(W+\mu)} + o(\sigma_\omega^2). \tag{1.15}$$

Odvodili sme vyjadrenie rizikovej prémie ako súčin rozptylu hry ω a podielu derivácií úžitkovej funkcie. Podstatné je, že rozptyl závisí len na hre a nezávisí od úžitkovej funkcie, ani od hladiny majetku investora. Naopak podiel druhej a prvej derivácie úžitkovej funkcie nezávisí na zvolenej hre, ale zato závisí na hladine majetku a úžitkovej funkcii.

Definícia 6. *Nech $u : I \to R$ je úžitková funkcia rastúca a dvakrát diferencovateľná na intervale I. Potom funkciu $r(W)$ s definičným oborom I, pre ktorú platí*

$$r(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)} = -\frac{d}{dW}\log u'(W) \tag{1.16}$$

nazývame miera absolútnej rizikovej averzie alebo Arrow-Prattova absolútne rizikovo averzná miera (ARA miera).

Z Definície 6 a rovnice (1.14) je zrejmý približný vzťah medzi ARA mierou a rizikovou prémiou

$$\pi(W,\omega) \approx \frac{1}{2}\sigma_\omega^2 r(W). \tag{1.17}$$

Znamienko ARA miery a takisto rizikovej prémie závisí od typu investora. Platí
(i) $r(W) > 0$, $\pi(W, F_\omega) > 0$ pre rizikovo averzného investora,
(ii) $r(W) = 0$, $\pi(W, F_\omega) = 0$ pre rizikovo neutrálneho investora,
(iii) $r(W) < 0$, $\pi(W, F_\omega) < 0$ pre investora obľubujúceho riziko.
Myšlienka dôkazu tohto tvrdenia je založená na (1.17). Presný dôkaz je uvedený v [9].

Rovnako ako ARA mieru by sme za mieru rizikovej averzie mohli zvoliť funkciu definovanú ako

$$t(W) = \frac{1}{r(W)}. \tag{1.18}$$

Takejto miere budeme hovoriť funkcia rizikovej obľuby.

Uvažujme investora, pre ktorého je hodnota rizikovej prémie kladná pre každú hru na všetkých hladinách majetku a čím väčší je jeho majetok, tým je riziková prémia pre rovnakú hru menšia. To znamená, že platí
(i) $\pi(W,\omega) > 0$ pre každé W a ω,
(ii) $\pi(W,\omega)$ je striktne klesajúca funkcia premennej W pre každé ω.

Potom môžeme sformulovať nasledujúcu vetu, podľa [9].

Veta 2. *Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné*
(i) Miera absolútnej rizikovej averzie $r(W)$ je [striktne] klesajúca.
(ii) Riziková prémia $\pi(W,\omega)$ je [striktne] klesajúca funkcia premennej W pre každú hru ω.
Rovnaká ekvivalencia platí, ak nahradíme klesajúce funkcie za rastúce a obmedzíme sa na nejaký inverval I, aby platilo, že W, $W+\omega \in I$. Podmienky (i) a(ii) sú ekvivalentné aj v podobe uvedenej v hranatých zátvorkách.

Dôkaz. Viď [9]. □

Aj pre multiplikatívny prístup ku hre je možné pre spravodlivú hru s malým rozptylom, podobne ako pri aditívnom prístupe, odvodiť približný vzťah

$$\pi_{\varrho}(W, F_{\omega}) \approx -\frac{1}{2}\frac{Wu''(W)}{u'(W)}\sigma_{\omega}^2. \tag{1.19}$$

Vychádzajúc z predchádzajúceho vzťahu definujeme, podľa [6], pre multiplikatívny prístup mieru rizikovej averzie ako súčin absolútne rizikovo averznej miery a majetku investora.

Definícia 7. *Nech u je úžitková funkcia a nech $r(W)$ je miera absolútnej rizikovej averzie odpovedajúca $u(W)$. Potom funkciu definovanú vzťahom $r_{\varrho}(W) = Wr(W)$ nazývame miera relatívnej rizikovej averzie (RRA miera).*

Investora, pre ktorého je $r_{\varrho}(W) > 0$, nazveme relatívne rizikovo averzný. Za predpokladu, že majetok W nadobúda len kladné hodnoty, investor je relatívne rizikovo averzný práve vtedy, keď je absolútne rizikovo averzný.

Absolútna aj relatívna miera rizikovej averzie patria medzi lokálne miery rizikovej averzie. Teraz si uvedieme príklad globálnej miery, a tým je Rubinsteinova rizikovo averzná miera. Podľa [3] uvažujme hru ω s normálnym rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$, potom Rubinsteinovou rizikovo averznou mierou budeme nazývať funkciu

$$R(W) = -\frac{WEu''(W\omega)}{Eu'(W\omega)}. \tag{1.20}$$

Nevýhodou tejto miery je, že okrem pár špecifických prípadov, má pomerne zložitý tvar. Naopak jej pozitívna vlastnosť sa využíva v úlohe maximalizácie očakávaného úžitku. Pokiaľ majú dvaja investori rovnakú Rubinsteinovu mieru rizika, tak majú aj rovnaké optimálne portfólio.

Porovnávať rizikovú averziu dvoch investorov môžeme pomocou ich miery absolútnej rizikovej averzie. Uvažujme dvoch investorov s úžitkovými funkciami u_1 a u_2. Je prirodzené považovať za menej rizikovo averzného investora toho, ktorý je menej ochotný podstúpiť riziko a teda si vždy vyberie menej rizikovú investíciu, ako druhý investor. Formálne zapísané, podľa [6]:

Definícia 8. *Nech u_1, u_2 sú úžitkové funkcie dvoch investorov a nech r_1, r_2 sú ich miery absolútnej rizikovej averzie. Pokiaľ v nejakom bode W platí*

$$r_1(W) > r_2(W)$$

potom investor s úžitkovou funkciou u_1 je lokálne viac rizikovo averzný v bode W ako investor s úžitkovou funkciou u_2.

Nakoniec tejto kapitoly si uveďme vetu, podľa [2], ktorá udáva ekvivalentné podmienky pre porovnanie rizikovej averzie dvoch investorov. Symbol C^2 označuje triedu dvakrát diferencovateľných funkcií.

Veta 3. *Nasledujúce štyri podmienky sú ekvivalentné:*

(i) $r_1(W) > r_2(W)$ *pre každé* W,

(ii) $\exists\, g \in C^2$ *pre ktoré* $g' > 0\ ,\ g'' < 0$ *také, že* $u_1(W) = g(u_2(W))$,

(iii) $\pi_1(W, F_\omega) > \pi_2(W, F_\omega)$ *pre každé* W *a každú hru* ω,

(iv) $u_1(u_2^{-1}(x))$ *je konkávna funkcia.*

Dôkaz. Viď [2]. □

2. Klasifikácia úžitkových funkcií

Jedným zo spôsobov ako klasifikovať úžitkové funkcie je podľa miery rizikovej averzie investora. Ak za mieru rizika rizikovo averzného investora pri aditívnom prístupe ku hre budeme považovať ARA mieru, potom takúto úžitkovú funkciu nazveme absolútne rizikovo averznou, teda ARA úžitkovou funkciou. Pokiaľ sa budeme zaoberať multiplikatívnym prístupom ku hre a za mieru rizika rizikovo averzného investora vezmeme relatívne rizikovo averznú mieru, potom takúto úžitkovú funkciu nazveme relatívne rizikovo averzná (RRA) úžitková funkcia.

Špeciálnym prípadom je situácia, kedy je investor rizikovo averzný, ale so vzrastajúcim majetkom jeho riziková prémia klesá. Teda napr. čím má investor väčší majetok, tým menšiu čiastku požaduje za to, aby pristúpil na hranie spravodlivej hry. Mieru rizika takéhoto investora nazveme DARA (decreasing absolute risk aversion) mierou a jeho úžitkovú funkciu DARA úžitkovou funkciou.

2.1 Úžitkové funkcie s konštantnou mierou rizikovej averzie

Dôležitým príkladom úžitkových funkcií sú funkcie s konštantnou mierou rizikovej averzie, či už absolútnou, alebo relatívnou. My sa budeme zaoberať prípadom konštantnej miery absolútnej rizikovej averzie a funkcie s takouto mierou budeme nazývať CARA funkcie. V takomto prípade riziková prémia nezávisí na majetku investora W, ale iba na uvažovanej hre ω.

Teraz si odvodíme tvar CARA funkcie pre rizikovo averzného investora. Vieme, že takýto investor má kladnú mieru rizikovej averzie a preto budeme riešiť nasledovnú rovnicu

$$\frac{u''(W)}{u'(W)} = -c$$

$$u''(W) + cu'(W) = 0.$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice je tvaru

$$u_{CARA}(W) = ae^{-cW} + b. \tag{2.1}$$

Aby funkcia u_{CARA} spĺňala definíciu úžitkovej funkcie, musí pre ňu platiť, že je neklesajúca, a preto musíme voliť konštanty $a \leq 0$, $c > 0$, $b \in R$.

Tieto poznatky nám umožňujú sformulovať nasledujúcu vetu, podľa [5].

Veta 4. *Dvakrát diferencovateľná úžitková funkcia je konštantne absolútne rizikovo averzná práve vtedy, keď je tvaru*

$$u_{CARA}(W) = ae^{-cW} + b \qquad a \leq 0,\ c > 0,\ b \in R. \tag{2.2}$$

Konkrétne by pre investora rizikovo neutrálneho, rizikovo averzného a obľubujúceho riziko vyzerali úžitkové funkcie s konštatnou ARA mierou v uvedenom poradí nasledovne.

$$u(W) \sim W \quad pre \quad r(W) = 0 \tag{2.3}$$

$$u(W) \sim -e^{-cW} \quad pre \quad r(W) = c > 0 \tag{2.4}$$

$$u(W) \sim e^{-cW} \quad pre \quad r(W) = c < 0 \tag{2.5}$$

Zápis $u_1(W) \sim u_2(W)$ znamená, že funkcie u_1, u_2 sú ekvivalentné, a teda, že existujú ľubovoľné konštanty $a, b, (b > 0)$ také, že $u_1(W) = a + bu_2(W)$.

2.2 HARA funkcie

Významným a v praxi často využívaným typom úžitkových funkcií sú hyperbolicky absolútne rizikovo averzné, tzv. HARA funkcie.

Definícia 9. *[5] Hovoríme, že úžitková funkcia u_{HARA} je hyperbolicky absolútne rizikovo averzná, ak pre jej absolútne rizikovú mieru platí*

$$r(W) = \frac{1}{aW + b} \qquad pre \quad aW + b > 0. \tag{2.6}$$

Pre $a \neq 0$ môžeme tvar HARA úžitkovej funkcie odvodiť riešením diferenciálnej rovnice

$$\frac{u''(W)}{u'(W)} = -r(W) = -\frac{d}{dW}\log u'(W) = -\frac{1}{aW + b}.$$

Zintegrovaním a následnou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} \log u'(W) &= -\frac{1}{a}\log(aW + b) + c_1 \\ u'(W) &= c_2(aW + b)^{-\frac{1}{a}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Vyriešením poslednej rovnice získame tvar úžitkovej HARA funkcie:

$$u(W) = \frac{c}{a-1}(aW + b)^{\frac{a-1}{a}} + d \qquad pre \quad a \neq 1,\, a \neq 0,\, aW + b > 0$$

$$u(W) = c\log(W + b) + d \qquad pre \quad W + b > 0.$$

Aby bola funkcia neklesajúca musíme sa obmedziť na voľbu konštánt $c \geq 0$ a $d \in R$. Voľbou a $= 0$ vidíme, že CARA funkcie sú špeciálnym prípadom HARA funkcií. Táto skutočnosť nás vedie k formulovaniu nasledujúcej vety, podľa [5].

Veta 5. *Dvakrát diferencovateľná úžitková funkcia je hyperbolicky absolútne rizikovo averzná práve vtedy, keď má jeden z nasledujúcich tvarov*

$$u_{HARA}(W) = \frac{c}{a-1}(aW + b)^{\frac{a-1}{a}} + d\, pre\; a \neq 0,\; a \neq 1,\; aW + b > 0 \tag{2.8}$$

$$u_{HARA}(W) = c\log(W + b) + d \quad pre \quad W + b > 0 \tag{2.9}$$

$$u_{HARA}(W) = -ce^{-\frac{1}{b}W} + d \quad pre \quad b > 0 \tag{2.10}$$

kde $\quad c \geq 0,\, d \in R$.

Iný zápis HARA funkcie je možné odvodiť, podľa [2], využitím substitúcie:

$$a = \frac{1}{1-\gamma}, \quad b = \frac{\beta}{\alpha}, \quad c = \alpha^{\gamma}, \quad d = 0.$$

Konštantu d môžeme zvoliť nulovú, pretože jej hodnota nemá vplyv pri praktickom využití HARA funkcií. Touto substitúciou dostaneme HARA funkciu definovanú ako

$$u_{HARA}(W) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{\alpha W}{1-\gamma} + \beta\right)^{\gamma} \qquad pre \quad \gamma \neq 0, \quad \gamma \neq 1. \tag{2.11}$$

Miera absolútnej rizikovej averzie takejto funkcie je potom tvaru

$$r(W) = \frac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha W + \beta(1-\gamma)}. \tag{2.12}$$

Funkcia absolútnej rizikovej obľuby je lineárna, z čoho je odvodený alternatívny názov HARA funkcií, a to LRT funkcie (linear risk tolerance).

$$t(W) = \frac{1}{r(W)} = \frac{W}{1-\gamma} + \frac{\beta}{\alpha} \qquad pre \quad \alpha \neq 0, \quad \gamma \neq 1. \tag{2.13}$$

Voľbou konkrétnych hodnôt parametrov a, b, c dostaneme niekoľko špecifických HARA funkcií. Uvedieme si ich aj s príslušnou ARA mierou. Parameter d zvolíme všade rovný 0.

(i) Mocninná HARA funkcia. Získame ju pre $b = 0$.

$$u_{HARA}(W) = \frac{c}{a-1}(aW)^{\frac{a-1}{a}} \qquad kde \quad c > 0, a \neq 0, a \neq 1, aW > 0 \tag{2.14}$$

$$r(W) = \frac{1}{aW} \tag{2.15}$$

(ii) Kvadratická HARA funkcia. Dostaneme ju voľbou $a = -1$ do (2.8).

$$u_{HARA}(W) = -\frac{c}{2}(b-W)^2 \qquad pre \quad c > 0, b > W \tag{2.16}$$

$$r(W) = \frac{1}{b-W} \tag{2.17}$$

(iii) Exponenciálna HARA funkcia. Konštantu a volíme rovnú 0.

$$u_{HARA}(W) = -ce^{-\frac{1}{b}x} \qquad pre \quad c > 0, b > 0 \tag{2.18}$$

$$r(W) = \frac{1}{b} \tag{2.19}$$

(iv) Logaritmická HARA funkcia. Volíme $a = 1$.

$$u_{HARA}(W) = c\log(W+b) + d \qquad pre \quad c > 0, W+b > 0 \tag{2.20}$$

$$r(W) = \frac{1}{W+b} \tag{2.21}$$

3. Analýza úžitkovej funkcie študenta MFF

V tejto kapitole sa budeme zaoberať zostavením úžitkovej funkcie študentov MFF, ďalej označovaných ako investori. Na zostavenie vhodnej úžitkovej funkcie investora, využijeme znalosť jeho averzie voči riziku, ktorá je daná mierou rizikovej averzie. Ako sme sa zmienili v Kapitole 2, existuje vzťah medzi mierou absolútnej rizikovej averzie a rizikovou prémiou investora. Preto nám na určenie rizikovej averzie postačí zistiť hodnoty rizikovej prémie na rôznych hladinách investorovho majetku a pomocou vzťahu (1.14) určiť absolútne rizikovo averznú mieru. Aby sme mohli využiť tento vzťah musíme uvažovať hru, ktorá má dostatočne malý rozptyl. Vzhľadom k tomu, že sa budeme zaoberať spravodlivou hrou, zo vzťahu (1.7) vyplýva, že namiesto rizikovej prémie, môžeme pri počítaní použiť hodnoty poisťovacej prémie.

Hodnoty poisťovacej prémie investorov sme získali anketovým spôsobom. Tridsať opýtaných vyplnilo dotazník, v ktorom sme uvažovali nasledujúcu situáciu. Predstavte si, že máte istý počiatočný majetok W. Budete hrať hru ω, pri ktorej s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ prehráte a s rovnakou pravdepodobnosťou vyhráte. Pokiaľ hru prehráte, váš majetok sa zníži o 1000 Kč, v prípade výhry 1000 Kč dostanete. Takáto hra je spravodlivá, pretože jej stredná hodnota je rovná $E\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1) = 0$. Vy však máte tú moc, že hru hrať nemusíte, ale môžete sa pred jej hraním poistiť. Opýtaní odpovedali na otázku, koľko by boli ochotní zaplatiť, aby nemuseli hrať hru, a tak sa poistili pred prípadnou prehrou. V každej otázke sme uvažovali rôzny počiatočný majetok, a tak sme zistili hodnoty poisťovacej prémie na rozličných hladinách majetku investorov. Konkrétne sme uvažovali hladiny majetku rovné 1 000 Kč, 5 000 Kč, 10 000 Kč, 15 000 Kč, 20 000 Kč, 50 000 Kč, 100 000 Kč, 150 000 Kč a 200 000 Kč. Výsledky pre hladinu majetku od 50 000Kč vyššie sa ukázali ako nepoužiteľné, takže ďalej budeme pracovať s najvyššou možnou úrovňou majetku 20 000 Kč. Presné znenie dotazníka a odpovede 30 respondentov sú uvedené v Prílohe 1.

Spomedzi všetkých investorov sme vybrali štyroch, pre ktorých odhadneme tvar úžitkovej funkcie. Prvým bude najviac rizikovo averzný investor. Podľa Vety 3 vieme, že na porovnanie rizikovej averzie dvoch investorov nám stačí porovnať hodnoty ich poisťovacej prémie. Takže najviac rizikovo averzného investora sme vybrali tak, aby hodnota jeho poisťovacej prémie na každej hladine majetku bola väčšia, ako všetkých ostatných investorov. Tohto investora označíme I_1, jeho poisťovaciu prémiu $\pi_1(W, F_\omega)$ a úžitkovú funkciu $u_1(W)$. Ďalej budeme skúmať úžitkovú funkciu $u_2(W)$ priemerného investora I_2 . Hodnoty jeho poisťovacej prémie $\pi_2(W, F_\omega)$ sme určili ako aritmetický priemer všetkých investorov. Za tretieho investora sme vybrali mediánového investora I_3 , čiže takého, ktorého výška poisťovacej prémie $\pi_3(W, F_\omega)$ je určená ako medián poisťovacích prémií všetkých investorov. Jeho úžitkovú funkciu označíme $u_3(W)$. Posledným investorom, ktorým sa budeme zaoberať, bude najmenej rizikovo averzný, ktorého určíme podobne ako investora I_1, ale tentokrát budeme vyberať investora s najnižšou hodnotou poisťovacej prémie na každej hladine majetku W. Takýto investor bude označený I_4, jeho poisťovacia prémia $\pi_4(W, F_\omega)$ a úžitková funkcia $u_4(W)$. Investori I_1 a I_4

sú skutočnými investormi vybratí spomedzi 30 opýtaných študentov. Investorov I_2 a I_3 sme určili výpočtom a chápeme ich ako (priemerné a mediánové) reprezentatívne prípady, ktoré ale nezodpovedajú žiadnemu z 30 opýtaných respondentov.

V nasledujúcej tabuľke sú uvedené hodnoty poisťovacej prémie pre investorov I_1, I_2, I_3, I_4 .

W_0	1	5	10	15	20
$\pi_1(W, F_\omega)$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\pi_2(W, F_\omega)$	0.33695	0.26385	0.21535	0.1662	0.1451
$\pi_3(W, F_\omega)$	0.35	0.215	0.2	0.15	0.1
$\pi_4(W, F_\omega)$	0.08	0.06	0.04	0	0

Tabuľka 3.1: Zistené hodnoty poisťovacej prémie v tisícoch Kč.

Podľa znamienka poisťovacej prémie vieme, že sa v prvých troch prípadoch jedná o rizikovo averzného investora. Investor I_4 sa tiež spočiatku chová ako rizikovo averzný, ale od hladiny majetku rovnej 15 000 Kč, sa správa ako investor rizikovo neutrálny.

Keďže sa jedná o spravodlivú hru na výpočet miery absolútnej rizikovej averzie môžeme využiť vzťah (1.14). Rozptyl uvažovanej hry ω je rovný 1. Takto vypočítané hodnoty si zhrnieme do Tabuľky 3.2. Hodnoty hladiny majetku sú udané v tisísoch Kč.

W_0	1	5	10	15	20
$\mathrm{r}_1(W)$	1	1	1	1	1
$\mathrm{r}_2(W)$	0.6739	0.5277	0.4307	0.3324	0.2902
$\mathrm{r}_3(W)$	0.7	0.43	0.4	0.3	0.2
$\mathrm{r}_4(W)$	0.16	0.12	0.08	0	0

Tabuľka 3.2: Vypočítané hodnoty miery absolútnej rizikovej averzie.

Z Tabuľky 3.2 vidíme, že miera rizikovej averzie investora I_1 je konštantná. Pre investorov I_2, $I_3\,a\,I_4$ musíme tvar ARA miery odhadnúť. Budeme predpokladať, že táto miera má tvar $r(W) = \frac{1}{aW+b}$, a teda sa jedná o HARA funkciu. Na odhadnutie parametrov a, b použijeme software Mathematica a jej zabudovanú funkciu, ktorá odhaduje parametre funkcie pomocou metódy najmenších štvorcov. Tento príklad je uvedený v Prílohe 2.

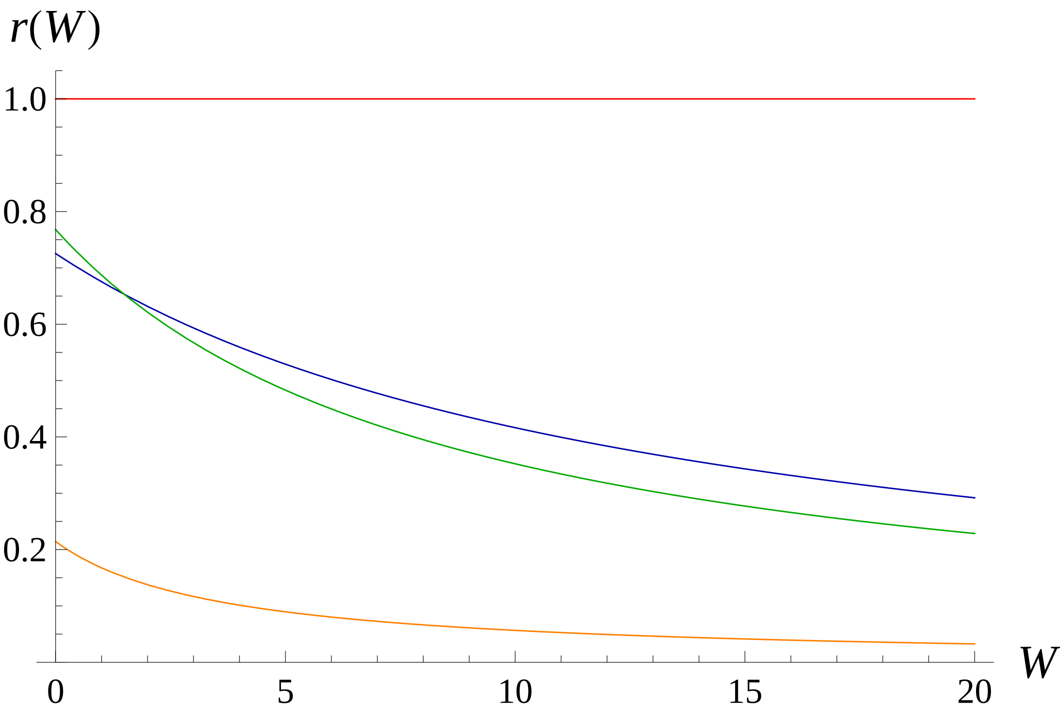
Dostali sme nasledovné predpisy ARA funkcií

$$r_1(W) = 1 \tag{3.1}$$

$$r_2(W) = \frac{1}{0.102327\,W + 1.37838} \tag{3.2}$$

$$r_3(W) = \frac{1}{0.153653\,W + 1.30217} \tag{3.3}$$

$$r_4(W) = \frac{1}{1.29983W + 4.66667} \tag{3.4}$$



Obr. 3.1: ARA miery - červená $r_1(W)$, modrá $r_2(W)$, zelená $r_3(W)$, oranžová $r_4(W)$.

Pre lepšie porovnanie si všetky štyri miery rizikovej averzie zobrazíme v jednom obrázku.

Vidíme, že miera absolútnej rizikovej averzie investorov I_2, I_3, I_4 má klesajúci charakter. To znamená, že čím väčší majetok má investor pred hraním hry ω, tým je viac ochotný podstúpiť riziko a naopak, neochotný platiť za poistenie sa proti hraniu tejto hry.

Z Obrázku 3.1 jasne vidíme rozdiel medzi najviac a najmenej rizikovo averzným investorom. Červená ARA miera, ktorá charakterizuje rizikovú averziu najviac rizikovo averzného investora, nadobúda v každom bode väčšiu hodnotu ako ARA miery ostatných investorov.

Keďže už poznáme mieru absolútnej rizikovej averzie investorov, dokážeme určiť aj tvar ich úžitkových funkcií. Riešením diferenciálnej rovnice $r(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)}$ dostaneme predpis úžitkovej funkcie, ktorý však bude závisieť na dvoch konštantách. Tie zvolíme tak, aby všetky funkcie prechádzali bodom [0,0] a v bode 20 nadobúdali hodnotu 1. Takto budeme môcť vypočítané funkcie lepšie porovnať.

Z Kapitoly 1.3 vieme, že pokiaľ má investor konštantnú mieru absolútnej rizikovej averzie, jeho úžitková funkcia má tvar (2.2). To nám potvrdzuje aj výpočet získaný prostredníctvom softwaru Mathematica. Riešením diferenciálnej rovnice tvaru $-\frac{u''(W)}{u'(W)} = 1$ pomocou tohto programu a dosadením za konštanty sme dostali takýto tvar úžitkovej funkcie investora I_1

$$u_1(W) = \frac{e^{20}}{e^{20}-1} - \frac{e^{20-W}}{e^{20}-1}. \tag{3.5}$$

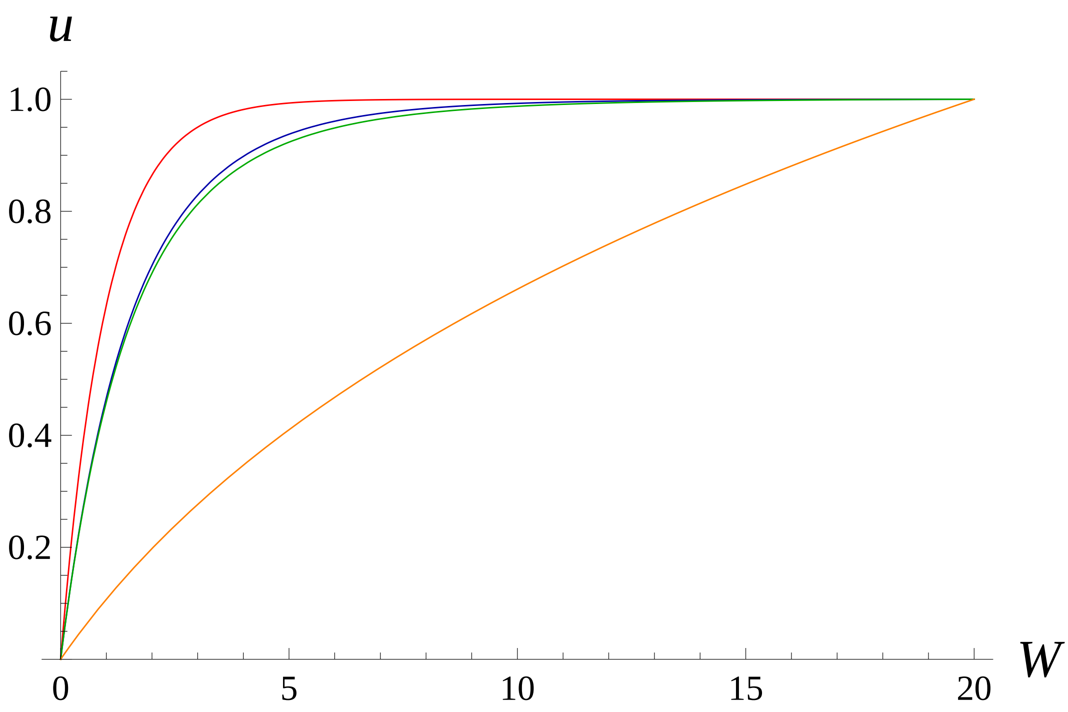
V ostatných troch prípadoch bude mať úžitková funkcia tvar (2.8). Jej predpis sme znova získali riešením diferenciálnej rovnice, tentokrát tvaru $\frac{1}{aW+b} = -\frac{u''(W)}{u'(W)}$. Dosadením za konštanty sme dostali nasledujúce úžitkové funkcie

$$u_2(W) = 1.00034 - \frac{16.7026}{(0.102327\,W + 1.37838)^{8.77258}} \tag{3.6}$$

$$u_3(W) = 1.00126 - \frac{4.28697}{(0.153653\,W + 1.30217)^{5.50817}} \tag{3.7}$$

$$u_4(W) = 1.28894(1.29983\,W + 4.66667)^{0.230666} - 1.83886. \tag{3.8}$$

Vypočítané úžitkové funkcie si znázorníme na Obrázku 3.2. Vidíme, že najmenej rizikovo averzný investor má úžitkovú funkciu „najmenej“ konkávnu. Jeho úžitková funkcia má s narastajúcim majetkom stále viac lineárny charakter, pretože investor je od hladiny majetku 15 000 Kč rizikovo neutrálny. Naopak "najviac" konkávna je úžitková funkcia investora, ktorý je najviac rizikovo averzný. Od hodnoty majetku 10 000 Kč, však táto funkcia takmer splýva s úžitkovými funkciami investorov I_2 a I_3.



Obr. 3.2: Úžitkové funkcie - červená $u_1(W)$, modrá $u_2(W)$, zelená $u_3(W)$, oranžová $u_4(W)$.

4. Úloha optimalizácie portfólia

Úžitkové funkcie môžeme využiť v úlohe zostavenia optimálneho portfólia, v ktorej sa investor rozhoduje o rozdelení svojho majetku medzi rôzne investície s rozličnou rizikovosťou a jeho cieľom je maximalizovať svoj úžitok.

Uvažujme investora, ktorý sa rozhodol svoj majetok rozdeliť medzi n investícií za účelom maximalizovať očakávaný úžitok z výsledného majetku a aditívny prístup ku hre, ktorú v našom prípade predstavuje výraz $\boldsymbol{\varrho}'\mathbf{W}$. Túto úlohu si sformulujeme podľa [5].

$$\max Eu(W_0 + \boldsymbol{\varrho}'\mathbf{W})$$

$$\begin{aligned} \text{za podmienok} \quad & \sum_{i=1}^{n} W_i = W_0 \\ & W_i \geq 0, \, \forall\, i = 1, ..., n \end{aligned} \tag{4.1}$$

W_0...počiatočný majetok
$\boldsymbol{\varrho} = (\varrho_1, ..., \varrho_n)$ ...náhodný vektor výnosov investícií na jednotku majetku
$\mathbf{W} = (W_1, ..., W_n)$ ....rozdelenie majetku do investícií 1 až n
u ...úžitková funkcia investora

Rovnako môžeme predpokladať multiplikatívny prístup ku hre, vtedy bude úloha maximalizácie očakávaného úžitku tvaru

$$\max Eu(W_0 \boldsymbol{\varrho}'\mathbf{W})$$

$$\begin{aligned} \text{za podmienok} \quad & \sum_{i=1}^{n} W_i = 1 \\ & W_i \geq 0, \, \forall i = 1, ..., n \end{aligned} \tag{4.2}$$

s tým rozdielom, že v tomto prípade ϱ_i je súčtom výnosu investície i na jednotku majetku a jednotky majetku.

V súvislosti s hľadaním extrémov funkcie, si sformulujeme podľa [1] nasledujúcu vetu, ktorá predstavuje postačujúcu podmienku pre existenciu globálneho extrému funkcie viacerých premenných.

Veta 6. *Nech $f : D \to R$ je spojitá funkcia a $D \subset R^n$ je obmedzená a uzavretá množina. Potom f nadobúda na množine D globálne maximum aj globálne minimum.*

Vzhľadom k spojitosti úžitkovej funkcie a spojitosti funkcionálu strednej hodnoty vidíme, že funkcia $Eu(W_0 + \boldsymbol{\varrho}'\mathbf{W})$ v (4.1) je spojitá v $\mathbf{W}$. Navyše podmienky úlohy (4.1) určujú množinu prípustných riešení, ktorá je obmedzená a uzavretá. Veta 6 teda zaručuje existenciu optimálneho riešenia úlohy (4.1). Analogicky môžeme odôvodniť existenciu optimálneho riešenia úlohy (4.2).

Nasledujúca veta, podľa [5], odhaduje maximálnu očakávanú odchýlku, ktorá nastane pokiaľ v úlohe (4.1) nahradíme úžitkovú funkciu u_1 funkciou u_2, pre ktoré platí, že ich ARA miery sa od seba líšia maximálne o δ.

Veta 7. *Nech $\boldsymbol{\varrho'} = (\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_n)'$ je náhodný vektor výnosov n investícií, ktoré sú obmedzené a W_0 je počiatočný majetok investora. Nech $\langle a, b\rangle$ je interval taký, že $W_0 + \boldsymbol{\varrho}'\mathbf{W} \in \langle a, b\rangle$ pre ľubovoľné $W_i \geq 0$, pre ktoré platí $\mathbf{1}'\mathbf{W} = W_0$. Nech $u_1(W)$, $u_2(W)$ sú dvakrát diferencovateľné, rastúce úžitkové funkcie a $r_1(W)$, $r_2(W)$ im prislúchajúce miery absolútne rizikovej averzie splňujúce*

$$| r_1(W) - r_2(W) | \leq \delta$$

pre každé $W \in \langle a, b\rangle$ a vopred zvolené δ. Potom pre optimálne riešenie $\mathbf{W^1}$, resp. $\mathbf{W^2}$, úlohy (4.1) pri použití funkcií $u_1(W)$, resp. $u_2(W)$, platí

$$Eu_1(W_0 + \boldsymbol{\varrho'}\mathbf{W^1}) - Eu_1(W_0 + \boldsymbol{\varrho'}\mathbf{W^2}) < [u_1(b) - u_1(a)](e^{2\delta(b-a)} - 1) \qquad (4.3)$$

Dôkaz. Viď [5]. □

Teraz si uvedieme úlohu, v ktorej predpokladáme, že cenné papiere, do ktorých plánuje investor rozdeliť svoj majetok, majú konkrétnu hodnotu, a teda nemôže do nich investovať úplne ľubovoľnú sumu peňazí. Budeme uvažovať aditívny prístup ku hre.

$$\max Eu(W_0 + \boldsymbol{\varrho'}P\mathbf{W})$$

$$\begin{aligned} \text{za podmienok} \quad & \mathbf{p}'\mathbf{W} \leq W_0 \\ & W_i \in N_0, \forall\, i = 1, ..., n \end{aligned} \qquad (4.4)$$

W_0...počiatočný majetok
$\boldsymbol{\varrho} = (\varrho_1, ..., \varrho_n)$ ...náhodný vektor výnosov investícií pripadajúcich na jednotku majetku
$\mathbf{W} = (W_1, ..., W_n)$ ...počet jednotlivých cenných papierov
u ...úžitková funkcia investora

$$P = diag(p_1, p_2, ..., p_n) = \begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & p_n \end{pmatrix} \qquad (4.5)$$

kde $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$ je vektor cien cenných papierov.

4.1 Optimálne portfólio študenta MFF

V tejto časti sa budeme zaoberať zostavením optimálneho portfólia investorov, ktorých úžitkové funkcie sme odvodili v Kapitole 3. Budeme uvažovať portfólio tvorené desiatimi akciami, AAA Auto Group N.V. (AAA), CENTRAL EUROPEAN MEDIA ENTERPRISES LTD, (CETV), ČEZ, a.s. (ČEZ), Erste Group

Bank AG (ERSTE), Komerční banka, a.s. (KOMB), Orco Property Group S.A. (ORCO), PEGAS NONWOVENS SA (PEGAS), Philip Morris ČR a.s. (PHILL), Telefónica Czech Republic, a.s. (TELE), UNIPETROL, a.s. (UNI), s ktorými sa obchoduje na Pražskej burze cenných papierov v SPADe od 9. 11. 2007 do 30. 3. 2012. Uvažujeme týždňové výnosy týchto aktív $\boldsymbol{\varrho}_i$, $i = 1, ..., 299$ upravené o dividendy. Data sú prebraté z [4]. Pre lepšiu predstavu o výnosnosti uvažovaných akcií si uvedieme v Tabuľke 4.1 priemerné týždňové výnosy a rozptyly týchto výnosov.

	AAA	CETV	ČEZ	ERSTE	KOMB
priemer	-0.00204	-0.00707	-0.00063	-0.00167	0.0018
rozptyl	0.005106	0.009861	0.001639	0.006296	0.002932
	ORCO	PEGAS	PHILL	TELE	UNI
priemer	-0.01006	-0.00045	0.0035	0.000434	-0.00143
rozptyl	0.008769	0.001575	0,001346	0,000705	0,002551

Tabuľka 4.1: Aritmetický priemer a rozptyl výnosov akcií.

Úlohu budeme riešiť v tvare (4.1), ktorý si môžeme prepísať ako

$$z = \max \frac{1}{229} \sum_{i=1}^{229} u(W_0 + \boldsymbol{\varrho}_i{}'\mathbf{W})$$

$$\text{za podmienok} \quad \sum_{i=1}^{10} W_i = W_0$$

$$W_i \geq 0, \, \forall \, i = 1, ..., 10 \tag{4.6}$$

Za počiatočný majetok investora zvolíme postupne 2 000 Kč, 4 000 Kč, 6 000 Kč, 8 000 Kč, 10 000 Kč a 12 000 Kč. Investor chce celý tento majetok investovať do desiatich akcií, tak aby maximalizoval očakávaný úžitok z výsledného majetku. Predpokladáme, že nie je povolený predaj nakrátko, o čom hovorí podmienka $W_i \geq 0, \forall \, i = 1, ..., 10$. Úlohu maximalizácie vypočítame pomocou softwaru Mathematica, zabudovanou funkciou Maximize. Zdrojový kód tohto programu je uvedený v Prílohe 2. V nasledujúcich štyroch tabuľkách si uvedieme výsledok úlohy (4.6) pre investorov z Kapitoly 3. V každom riadku tabuľky je uvedené optimálne portfólio pri počiatočnom majetku W_0, hodnota z udáva očakávaný úžitok investora pri takomto portfóliu.

W_0	z	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9	W_{10}
2000	0.865246	0	0	0	0	0	0	0	2000	0	0
4000	0.981749	0	0	0	0	128	0	0	3358	514	0
6000	0.99752	0	0	0	0	32	0	0	3981	1987	0
8000	0.999662	0	0	0	0	0	0	0	4623	3377	0
10000	0.999954	0	0	0	0	0	0	0	5307	4693	0
12000	0.999994	0	0	0	0	0	0	0	6069	5931	0

Tabuľka 4.2: Optimálne portfólio najviac rizikovo averzného investora I_1 s úžitkovou funkciou (3.5).

W_0	z	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9	W_{10}
2000	0.704242	0	0	0	0	0	0	0	2000	0	0
4000	0.898529	0	0	0	0	0	0	0	4000	0	0
6000	0.960998	0	0	0	0	174	0	0	5826	0	0
8000	0.983647	0	0	0	0	301	0	0	7156	543	0
10000	0.992694	0	0	0	0	275	0	0	8204	1521	0
12000	0.996606	0	0	0	0	246	0	0	9256	2498	0

Tabuľka 4.3: Optimálne portfólio priemerného investora I_2 s úžitkovou funkciou (3.6).

W_0	z	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9	W_{10}
2000	0.69046	0	0	0	0	0	0	0	2000	0	0
4000	0.88266	0	0	0	0	0	0	0	4000	0	0
6000	0.948983	0	0	0	0	41	0	0	5959	0	0
8000	0.975629	0	0	0	0	297	0	0	7703	0	0
10000	0.98762	0	0	0	0	396	0	0	9151	453	0
12000	0.993515	0	0	0	0	393	0	0	10414	1193	0

Tabuľka 4.4: Optimálne portfólio mediánového investora I_3 s úžitkovou funkciou (3.7).

W_0	z	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9	W_{10}
2000	0.198311	0	0	0	0	0	0	0	2000	0	0
4000	0.347478	0	0	0	0	0	0	0	4000	0	0
6000	0.46882	0	0	0	0	0	0	0	6000	0	0
8000	0.571984	0	0	0	0	0	0	0	8000	0	0
10000	0.662227	0	0	0	0	0	0	0	10000	0	0
12000	0.742756	0	0	0	0	0	0	0	12000	0	0

Tabuľka 4.5: Optimálne portfólio najmenej rizikovo averzného investora I_4 s úžitkovou funkciou (3.8).

Z Tabuľky 4.2 vidíme, že najviac rizikovo averzný investor pri počiatočnom majetku 2 000 Kč investuje všetok svoj majetok do akcie Philip Morris ČR a.s., ktorá má najväčší priemerný výnos. So zvyšujúcim sa počiatočným majetkom ho však delí aj medzi akciu Telefónica Czech Republic, a.s., ktorá má síce nižší výnos, ale keďže tento investor je voči riziku najviac averzný, neinvestuje svoj majetok len do jednej akcie.

Priemerný investor a mediánový investor majú optimálne portfólio takmer rovnaké. Dôvodom je veľmi podobná úžitková funkcia, čo si môžeme všimnúť na Obrázku 3.2. Títo investori by po počiatočný majetok 4 000 Kč investovali len do akcie Philip Morris ČR a.s.. Pri vyššom počiatočnom majetku by svoj majetok rozdelili síce do viacerých investícií, ale najväčšiu čiastku by vždy investovali do akcie Philip Morris ČR a.s. s najväčším priemerným výnosom.

Investor, ktorý je najmenej rizikovo averzný by na každej hladine počiatočného majetku investoval všetko do akcie Philip Morris ČR a.s., pretože má najväčší priemerný výnos. Tento investor sa skoro vôbec nestará o rizikovosť investície, z Obrázku 3.2 vidíme, že jeho úžitková funkcia je takmer lineárna a teda je tento investor skoro rizikovo neutrálny.

4.2 Aproximácia optimálneho očakávaného úžitku

Keďže v praxi často nepoznáme presný tvar úžitkovej funkcie investora, môžeme použiť na výpočet jeho optimálneho portfólia nejaký odhad úžitkovej funkcie. Ak pre tieto funkcie platí, že im prislúchajúce ARA miery sa líšia najviac o δ, vieme podľa Vety 7 odhadnúť maximálnu odchýlku očakávaného úžitku, ktorej sa pri takomto výpočte dopustíme. Vetu 7 si teraz aplikujeme na úžitkové funkcie vypočítané v Kapitole 3. Za skutočnú úžitkovú funkciu budeme považovať funkciu (3.6) priemeného investora. Označme si δ_i konštantu, ktorá spĺňa $\mid r_2(W) - r_i(W) \mid \leq \delta_i$, pre $i = 1, 3, 4$ a $\forall W \in \langle a, b\rangle$. Funkcie $r_i(W)$ sú ARA miery vypočítané v Kapitole 3 a interval $\langle a, b\rangle$ udáva hodnoty koncového majetku, ktoré môže W nadobúdať po hre, čiže platí $W_0 + \boldsymbol{\varrho}'\mathbf{W} \in \langle a, b\rangle$ pre ľubovoľné $W_i \geq 0$ splňujúce $\mathbf{1}'\mathbf{W} = W_0$. Tabuľka 4.6 udáva maximálne rozdiely ARA mier na intervaloch $\langle a, b\rangle$ pre jednotlivé hodnoty počiatočného majetku.

W_0	$\langle a, b\rangle$	δ_1	δ_3	δ_4
2000	$\langle 1.12, 3.32\rangle$	0.417964	0.0302507	0.506467
4000	$\langle 2.24, 6.64\rangle$	0.514052	0.0553642	0.490093
6000	$\langle 3.37, 9.96\rangle$	0.582909	0.0640529	0.469776
8000	$\langle 4.49, 13.28\rangle$	0.634674	0.0661648	0.448909
10000	$\langle 5.61, 16.6\rangle$	0.675009	0.0654402	0.42856
12000	$\langle 6.73, 19.92\rangle$	0.707323	0.0634738	0.409238

Tabuľka 4.6: Rozdiely ARA mier.

Označme

$$l_i := Eu_2(W_0 + \boldsymbol{\varrho}'\mathbf{W^2}) - Eu_2(W_0 + \boldsymbol{\varrho}'\mathbf{W^i})$$

pre $i = 1, 3, 4$ rozdiel očakávaného úžitku investora s úžitkovou funkciou (3.6) pri optimálnom portfóliu W^2 a úžitku tohto investora pri optimálnom portfóliu W^i.

Portfólio W^i odpovedá optimálnemu portfóliu investora s úžitkovou funkciou u_i z Kapitoly 3. Ďalej si označme

$$p_i := [u_2(b) - u_2(a)](e^{2\delta_i(b-a)} - 1)$$

pre $i = 1, 3, 4$. V Tabuľke 4.7 porovnáme skutočný rozdiel očakávaného úžitku investorov po nahradení úžitkovej funkcie priemerného investora I_2 funkciami investorov I_1, I_3, a I_4 a odhad tohto rozdielu vypočítaného na základe Vety 7.

W_0	l_1	p_1	l_3	p_3	l_4	p_4
2000	3.507*10^{-11}	2.211	1.087*10^{-11}	0.402	1.989*10^{-11}	3.265
4000	3.206*10^{-5}	21.175	-5.564*10^{-12}	0.374	6.263*10^{-12}	17.149
6000	2.899*10^{-5}	289.322	2.225*10^{-7}	0.310	3.806*10^{-7}	65.134
8000	1.445*10^{-5}	5450.46	6.150*10^{-7}	0.249	1.499*10^{-6}	208.035
10000	7.094*10^{-6}	128549	7.763*10^{-7}	0.195	2.439*10^{-6}	570.848
12000	3.512*10^{-6}	3.58607*10^{6}	4.794*10^{-7}	0.151	2.38043*10^{-6}	1378.95

Tabuľka 4.7: Skutočná a vypočítaná odchýlka očakávaného úžitku.

Záver

V tejto práci sme sa venovali tematike úžitkových funkcií, ich tvaru v závislosti od postoja investora k riziku a ich klasifikáciou. Zadefinovaný bol pojem rizikovej prémie a miery rizikovej averzie investora. Na základe týchto poznatkov sme v tretej kapitole určovali vhodný tvar úžitkovej funkcie investorov podľa ich hodnoty poisťovacej prémie. Tú sme získali anketovým spôsobom. Zo vzťahu medzi poisťovacou prémiou a mierou absolútnej rizikovej averzie sme určili ARA mieru pre štyroch investorov, ktorých sme vybrali tak, aby mali rôzny tvar úžitkovej funkcie. Pre každého z nich sme vypočítali jeho úžitkovú funkciu. V poslednej kapitole sme sa venovali úlohe optimalizácie portfólia investorov, ktorých úžitkové funkcie sme vypočítali. Uvažovali sme portfólio akcií, ktoré sa obchodujú na Pražskej burze cenných papierov v SPADe. Zistili sme, že investor, ktorý je najviac rizikovo averzný by svoj majetok rozdeľoval do dvoch akcií, a to Philip Morris ČR a.s. a Telefónica Czech Republic, a.s.. Naopak najmenej rizikovo averzný investor by všetok svoj majetok investoval do investície s najväčším priemerným výnosom, ktorú predstavuje akcia Philip Morris ČR a.s., bez ohľadu na jej rizikovosť. Ukázalo sa, že investori, ktorí mali veľmi podobnú úžitkovú funkciu, by si aj svoje optimálne portfólio zostavili približne rovnako. V poslednej časti tejto práce sme odhadovali maximálnu odchýlku očakávaného úžitku, v prípade, že by sme za úžitkovú funkciu investora zobrali inú úžitkovú funkciu s približne rovnakou ARA mierou. Za skutočnú úžitkovú funkciu investora sme považovali úžitkovú funkciu priemerného investora z tretej kapitoly. Zistili sme, že najmenšia odchýlka je pri investorovi mediánovom, pretože má s priemerným investorom takmer rovnakú úžitkovú funkciu a takisto aj mieru absolútnej rizikovej averzie.

Zoznam použitej literatúry

[1] Dupačová, J., Lachout P.: Úvod do optimalizace, MFF UK, Matfyzpress, PRAHA, 2011.

[2] Ingersoll, J. E. Jr.: Theory of financial decision making, Rowman and Littlefield, Totowa, New Jersey, 1987.

[3] Kalberg, J. G., Ziemba, W. T.: Comparison of alternative utility functions in portfolio selection problems, Management Science vol. 29, no. 11, 1257-1276, 1983.

[4] Klouda L.: Semi-infinitní programování: Teorie a aplikace na eficienci portfolia, Diplomová práce, MFF UK, 2012.

[5] Kopa, M.: Postavení užitkové funkce v úlohách stochastického programování, Rigorózní práce, MFF UK, 2004.

[6] Kuběnová, V.: Užitkové funkce a modelování vztahu k riziku, Bakalářska práce, MFF UK, 2006.

[7] Neumann, J. von, Morgenstern, O.: Theory of Games and Economic Behaviour, Princeton, NJ, Princeton University Press, 1944.

[8] Pick, L., Spurný, J.: Matematická analýza, MFF UK, 2010, http://www.karlin.mff.cuni.cz/ spurny/doc/ma1-zima/ma-pred.pdf.

[9] Pratt, J. W.: Risk aversion in the small and in the large, Econometrica 32, 122-136, 1964.

[10] Samuelson, P. A., Nordhaus, W. D.: Ekonomie, 18. vydání, NS Svoboda, Praha, 2010.

[11] Varian, H. R.: Intermediate Microeconomics, A modern approach, Seventh Edition, W. W. NortonCompany, New York, 2005.

Zoznam tabuliek

Prílohy

K práci je priložené CD, ktoré obsahuje túto prácu v PDF formáte, súbor Priloha1, v ktorom je znenie dotazníka, použitého v tretej kapitole a odpovede na tento dotazník. Ďalej obsahuje súbory Priloha2.nb, ktorým sme počítali tvar ARA mier a úžitkových funkcií a Priloha3.nb, ktorý počíta úlohu optimálizácie portfólia a aproximáciu optimálneho očakávaného úžitku. Súbor data_burza.xlsx je potrebný pre optimalizačnú úlohu, obsahuje týždenné výnosy akcií obchodovateľných na Pražskej burze cenných papierov v SPADe.

Príloha 1 - Dotazník

Predstavte si, že ste si práve zarobili na brigáde určitú sumu peňazí. Predtým, ako Vám šéf vyplatí peniaze, si s ním zahráte hru. V tejto hre s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ vyhráte a s rovnakou pravdepodobnosťou prehráte. Na začiatku hry sa stanoví suma, o ktorú budete hrať. Pokiaľ hru prehráte, danú sumu budete musieť zaplatiť vy. Pokiaľ hru naopak vyhráte, dohodnutú čiastku peňazí Vám šéf daruje. Vy máte ale tú moc, šéfa presvedčiť, aby od tejto hry odstúpil. A keďže ste na svoje peniaze veľmi ťažko pracovali, boli by ste radi, keby Vám aj niečo zostalo. To však bude niečo stáť a mňa by zaujímalo, koľko ste ochotní zaplatiť za to, že si poistíte svoj majetok a nebudete musieť riskovať, že o jeho časť prídete. Uveďme si príklad: Nech je Váš majetok rovný sume 10 000 Kč a my budeme hrať o 1 000 Kč. To znamená, že ak vyhráte, čo sa môže stať s polovičnou pravdepodobnosťou, dostanete odo mňa 1 000 Kč a tým sa Váš majetok zvýši na 11 000 Kč. Avšak ak prehráte, budete musieť 1 000 Kč zaplatiť vy a Váš majetok klesne na hodnotu 9 000 Kč. Keďže 1 000 Kč nie je práve najmenšia suma peňazí, môžete uvážiť možnosť sa proti tejto hre poistiť. Moja otázka teda znie, koľko najviac by ste mi boli ochotný zaplatiť, aby ste hrať nemuseli. Vaša odpoveď môže napríklad znieť 200 Kč. Ak Vám navrhnem možnosť zaplatiť mi len 150 Kč, tým pádom nehrať hru, tak by ste mi ich radšej dali a ostali na sume 9 850 Kč. Ale ak by som Vám navrhla sumu vo výške 300 Kč, vy by ste sa rozhodli radšej hrať. Riskovali by ste teda, že prehráte dohodnutých 1 000 Kč.

Takže teraz naostro. Hráme sa hru opísanú vyššie. Snažte sa rozmýšľať tak, akoby sme hrali o reálne peniaze. Vždy budeme hrať o sumu 1 000 Kč.

Váš majetok je rovný sume 1 000 (5 000, 10 000, 15 000, 20 000, 50 000, 100 000, 150 000, 200 000) Kč. Koľko ste ochotný zaplatiť, aby ste sa nemuseli hru hrať, a tak sa poistiť pred prípadnou prehrou?

W_0	1000	5000	10000	15000	20000	50000	100000	150000	200000
1	500	300	200	200	100	100	50	50	50
2	500	250	100	100	80	50	20	0	0
3	100	200	300	200	150	100	100	0	0
4	350	325	300	250	200	150	100	50	0
5	350	200	100	100	50	0	0	0	0
6	500	500	400	350	300	200	100	100	100
7	500	300	100	50	30	0	0	0	0
8	500	500	500	400	400	200	100	100	100
9	200	200	100	0	0	0	0	0	0
10	499	450	400	350	300	200	100	50	0
11	150	100	100	50	0	0	0	0	0
12	450	300	200	100	100	0	0	0	0
13	50	200	200	200	0	0	0	0	0
14	500	350	200	150	90	50	25	10	5
15	400	400	350	300	300	150	100	100	100
16	200	200	200	200	200	200	200	200	200
17	300	300	250	200	200	100	100	0	0
18	100	100	150	150	200	200	150	150	150
19	380	230	120	86	53	0	0	0	0
20	200	100	50	0	0	0	0	0	0
21	400	400	350	350	300	100	0	0	0
22	300	200	150	100	100	50	30	20	10
23	350	250	200	150	100	0	0	0	0
24	500	500	500	500	500	500	500	500	500
25	300	200	100	0	0	0	0	0	0
26	400	200	100	50	0	0	0	0	0
27	350	200	200	100	100	100	100	100	100
28	200	200	100	100	100	100	50	50	50
29	80	60	40	0	0	0	0	0	0
30	500	200	400	200	400	200	100	50	0

Tabuľka 4.8: Odpovede dotazníka.

Príloha 2

```
konst = 1;
solV = DSolve[-y"[x]/y'[x] == 1, y, x];
solVk = Solve[(y[0]/.solV) == 0&&(y[20]/.solV) == 1, {C[1], C[2]}];
model = 1/(a x + b);
dataP = {{1, 0.6739}, {5, 0.5277}, {10, 0.4307}, {15, 0.3324}, {20, 0.2902}};
fitP = FindFit[dataP, model, {a, b}, x];
solP = DSolve[-y"[x]/y'[x] == model/.fitP, y, x];
solPk = Solve[(y[0]/.solP) == 0&&(y[20]/.solP) == 1, {C[1], C[2]}];
dataM = {{1, 0.7}, {5, 0.43}, {10, 0.4}, {15, 0.3}, {20, 0.2}};
fitM = FindFit[dataM, model, {a, b}, x];
solM = DSolve[-y"[x]/y'[x] == model/.fitM, y, x];
solMk = Solve[(y[0]/.solM) == 0&&(y[20]/.solM) == 1, {C[1], C[2]}];
dataL = {{1, 0.16}, {5, 0.12}, {10, 0.08}, {15, 0}, {20, 0}};
fitL = FindFit[dataL, model, {a, b}, x];
solL = DSolve[-y"[x]/y'[x] == model/.fitL, y, x];
solLk = Solve[(y[0]/.solL) == 0&&(y[20]/.solL) == 1, {C[1], C[2]}];
graf1 = Plot[{Evaluate[y[x]/.solV/.solVk], Evaluate[y[x]/.solP/.solPk],
Evaluate[y[x]/.solM/.solMk], Evaluate[y[x]/.solL/.solLk]}, {x, 0, 20},
PlotRange → {0, 1.05}, PlotStyle → {Red, Darker[Blue], Darker[Green], Orange},
AxesLabel → {Style[W, Italic, 18], Style[u, Italic, 18]},
TicksStyle → Directive[Black, 12]];

Export["uzitkove.pdf", graf1];
graf2 = Plot[{1, model/.fitP, model/.fitM, model/.fitL}, {x, 0, 20},
PlotRange → {0, 1.05}, PlotStyle → {Red, Darker[Blue], Darker[Green], Orange},
AxesLabel → {Style[W, Italic, 16], Style["r(W)", Italic, 16]},
TicksStyle → Directive[Black, 12]];
Export["ARA.eps", graf2];
Export["uzitkove.eps", graf1];
```

Príloha 3

```
u1[x_]:= - (E^20/(E^x * (-1 + E^20))) + E^20/(-1 + E^20);
u2[x_]:= - (16.7026/(1.37838 + 0.102327 * x)^8.77258) + 1.00034;
u3[x_]:= - (4.28697/(1.30217 + 0.153653 * x)^5.50817) + 1.00126;
u4[x_]:=1.28894 * (4.66667 + 1.29983 * x)^0.230666 - 1.83886;
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
dataBCPP = Import["data_burza.xlsx"];
x = {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10};
ro = Table[dataBCPP[[1, i]], {i, 1, 229}];
x0 = {2, 4, 6, 8, 10, 12};
m1 = Table[(1/229) * Sum[u1[{ro[[i]]}.x + x0[[j]]], {i, 1, 229}], {j, 1, 6}];
m2 = Table[(1/229) * Sum[u2[{ro[[i]]}.x + x0[[j]]], {i, 1, 229}], {j, 1, 6}];
m3 = Table[(1/229) * Sum[u3[{ro[[i]]}.x + x0[[j]]], {i, 1, 229}], {j, 1, 6}];
m4 = Table[(1/229) * Sum[u4[{ro[[i]]}.x + x0[[j]]], {i, 1, 229}], {j, 1, 6}];
podm = Table[And@@Thread[x>=0]&&Total[x]==x0[[i]], {i, 1, 6}];
t1b = Table[Maximize[{m1[[i, 1]], podm[[i]]}, x], {i, 1, 6}];
s1 = (Round[#1]&)/@(1000 * #1&)/@Table[x/.t1b[[i, 2]], {i, 1, 6}];
t2b = Table[Maximize[{m2[[i, 1]], podm[[i]]}, x], {i, 1, 6}];
s2 = (Round[#1]&)/@(1000 * #1&)/@Table[x/.t2b[[i, 2]], {i, 1, 6}];
t3b = Table[Maximize[{m3[[i, 1]], podm[[i]]}, x], {i, 1, 6}];
s3 = (Round[#1]&)/@(1000 * #1&)/@Table[x/.t3b[[i, 2]], {i, 1, 6}];
t4b = Table[Maximize[{m4[[i, 1]], podm[[i]]}, x], {i, 1, 6}];
s4 = (Round[#1]&)/@(1000 * #1&)/@Table[x/.t4b[[i, 2]], {i, 1, 6}];
r1[x_]:=1;
r2[x_]:=(0.102327 * x + 1.37838)^(-1);
r3[x_]:=(0.153653 * x + 1.30217)^(-1);
r4[x_]:=(1.29983 * x + 4.6667)^(-1);
uzi1 = Table[m2[[i]]/.t1b[[i, 2]], {i, 1, 6}];
uzi2 = Table[m2[[i]]/.t2b[[i, 2]], {i, 1, 6}];
uzi3 = Table[m2[[i]]/.t3b[[i, 2]], {i, 1, 6}];
uzi4 = Table[m2[[i]]/.t4b[[i, 2]], {i, 1, 6}];
roz1 = Table[uzi2[[i]] - uzi1[[i]], {i, 1, 6}];
roz3 = Table[uzi2[[i]] - uzi3[[i]], {i, 1, 6}];
roz4 = Table[uzi2[[i]] - uzi4[[i]], {i, 1, 6}];
min = -0.43884;
max = 0.660377;
a = (Round[#1, 0.01]&)/@Table[x0[[i]] + min *x0[[i]], {i, 1, 6}];
b = (Round[#1, 0.01]&)/@Table[x0[[i]] + max *x0[[i]], {i, 1, 6}];
d1 = Table[Max[Abs[r2[a[[i]]] - r1[a[[i]]]], Abs[r2[b[[i]]] - r1[b[[i]]]]], {i, 1, 6}];
d3 = Table[Max[Abs[r2[a[[i]]] - r3[a[[i]]]], Abs[r2[b[[i]]] - r3[b[[i]]]]], {i, 1, 6}];
d4 = Table[Max[Abs[r2[a[[i]]] - r4[a[[i]]]], Abs[r2[b[[i]]] - r4[b[[i]]]]], {i, 1, 6}];
PS1 = Table[(u2[b[[i]]] - u2[a[[i]]]) * E^(2 * d1[[i]] * (b[[i]] - a[[i]])), {i, 1, 6}];
PS3 = Table[(u2[b[[i]]] - u2[a[[i]]]) * E^(2 * d3[[i]] * (b[[i]] - a[[i]])), {i, 1, 6}];
PS4 = Table[(u2[b[[i]]] - u2[a[[i]]]) * E^(2 * d4[[i]] * (b[[i]] - a[[i]])), {i, 1, 6}];
```