Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Klára Hůdová

Analýza formulí pro kapitálovou přiměřenost neživotních pojišťoven

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Petr Mandl, DrSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Děkuji Prof. RNDr. Petru Mandlovi, DrSc. za cenné rady, zapůjčení literatury a obětavou pomoc při řešení problémů souvisejících se vznikem této práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 13.4.2006 Klára Hůdová

Obsah

Název práce: Analýza formulí pro kapitálovou přiměřenost neživotních pojišťoven
Autor: Klára Hůdová
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Petr Mandl, DrSc.

Abstrakt: Úkolem této diplomové práce je porovnat možné metody pro kapitálovou přiměřenost neživotních pojišťoven a navrhnout jejich případné zlepšení. Práce se zabývá stanovením požadovaného kapitálu podle Schnieperova modelu na základě pravděpodobnosti ruinování. Schnieperův model využívá kovariancí mezi celkovým rizikem a dílčími riziky, kterým je pojišťovny vystavena, pro modelování závislostí mezi nimi. Model je dále rozšířen s využitím poznatků přednášených na MFF UK. Pro predikci škod v rozšířeném modelu rizikového kapitálu je využita logaritmicko-lineární regrese. Použití metody stanovení výše celkového požadovaného kapitálu a kapitálu alokovaného jednotlivým rizikům je ilustrováno na numerických příkladech. Práce také stručně charakterizuje model Risk Based Capital (RBC).
Klíčová slova: Schnieperův model, model logaritmicko-lineární regrese, kapitálová přiměřenost (solventnost) neživotních pojišťoven, rizikový kapitál

Title: An analysis of formulae for capital adequacy of non-life insurance companies
Author: Klára Hůdová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Prof. RNDr. Petr Mandl, DrSc.

Abstract: This diploma thesis compares methods for capital adequacy of non-life insurance companies and shows their possible improving. The thesis denotes determining capital requirement according to Schnieper due to the ruin probability. The Schnieper's model uses covariances between total risk and individual risks, that threatend the insurance company, to describe dependences between the risks. This model is extended by using knowledge recited at MFF UK. We use logarithm-linear model for prediction of claims. The method of determining the whole capital requirement and the capital alocated for individual risks is applied to concrete data. We briefly describe the Risk Based Capital formula.
Keywords: Schnieper's model, logarithm-linear regression model, capital adequacy (solvency)of non-life insurance companies, risk based capital

Úvod

Úkolem této diplomové práce je porovnat možné metody pro kapitálovou přiměřenost neživotních pojišťoven a navrhnout jejich případné zlepšení. Kapitálovou přiměřeností se obecně rozumí schopnost pojišťovny alokovat dostatečné množství kapitálu tak, aby byla pojišťovna schopna dostát veškerým svým závazkům s danou vysokou pravděpodobností. Minimální množství takového kapitálu bychom označili jako požadovaný kapitál.

Zadání diplomové práce vychází z projektu Solvency II, který se v současné době zabývá mimo jiné právě metodou stanovení požadovaného kapitálu pojišťoven. Projekt je orientován na nalezení vhodné metody, která lépe zohlední vzájemné vazby mezi riziky, kterým je pojišťovna vystavena a následně nahradí metodu starou. Solvency II má třípilířovou strukturu. Rozdělení projektu na tři pilíře vychází z obdobného projektu Basel II, který je v současnosti implementován v oboru bankovnictví a určuje metodiku stanovení požadovaného kapitálu pro banky. První pilíř Solvency II se orientuje na nalezení metodiky pro stanovení požadovaného kapitálu. Druhý pilíř řeší vnitřní a vnější kontrolu dodržování opatření stanovených pilířem prvním. Třetí pilíř se zaměřuje na zveřejňování informací o pojišťovně, zejména o použitých metodách stanovení požadovaného kapitálu, a porovnatelnost zveřejněných informací.

Tato diplomová práce se zabývá stanovením požadovaného kapitálu podle Schnieperova modelu uvedeného v materiálu Schnieper [11], který je dále rozšířen s využitím poznatků přednášených na MFF UK (viz Mandl [5], [8] a [9]). Při výpočtech požadovaného kapitálu jsme uvažovali pouze jedno odvětví pojištění na rozdíl od Schnieperova modelu, který stanovuje požadovaný kapitál s ohledem na závislosti mezi jednotlivými odvětvími.

První kapitola popisuje podrobně Schnieperův model rizikového kapitálu neživotní pojišťovny, který byl prezentován v Schnieper [11]. Rizikový kapitál je v tomto modelu rozčleněn na části odpovídající jednotlivým rizikům, kterým je pojišťovna vystavena. Těmto dílčím rizikům je alokován příslušný kapitál, který zohledňuje závislosti mezi dílčím a celkovým rizikem. Celkový kapitál alokovaný pojišťovnou je součtem těchto dílčích složek kapitálu.

Kapitola druhá se zabývá rozšířením Schnieperova modelu rizikového kapitálu na základě poznatků přednesených při přednáškách (viz Mandl [9]) a seminářích (viz Mandl [5] a [8]) na MFF UK. V modelu je pro jednoduchost uvažováno pouze jedno odvětví neživotního pojištění. Pro predikci škod v modelu rizikového kapitálu je využita logaritmicko-lineární regrese. Na datech čerpaných z Christofides [1], Mack [12] a Mack [10] je ilustrován výpočet rezervy nejprve bez zahrnutí diskontování a poté i rezervy diskontované. Výše rezervy je určena jednak na počátku období, ke kterému se vztahuje výpočet požadovaného kapitálu, tj. v použitém značení na konci roku 0, jednak je stanoven odhad rezervy na konci období, tj. na konci roku 1. Rezerva nezahrnující diskontování je také vypočítána s obezřetností 75%, o které se hovoří v souvislosti s prijektem Solvency II.

Použití Schnieperovy metody stanovení velikosti požadovaného kapitálu, jehož model je detailně rozebrán v druhé kapitole, je ilustrováno na numerických příkladech uvedených v kapitole třetí. Výpočet požadovaného kapitálu je založen na určení kovariancí mezi jednotlivými složkami rizikového kapitálu a na stanovení směrodatné odchylky rizikového kapitálu.

Čtvrtá kapitola stručně charakterizuje model Risk Based Capital (RBC) s využitím materiálů Evropské komise [3] a Cipra [2].

Kapitola 1

Schnieperův model

1.1 Model rizikového kapitálu a jeho předpoklady

Předpokládejme, že finančním rokem pro pojišťovnu je jeden rok. Uvažujme pojišťovnu, jejíž účet zisků a ztrát sestává z následujících položek

- zasloužené pojistné očištěné o zajištění,
- příjmy z investic,
- realizovaný kapitálový zisk,
- vzniklé škody očištěné o částky kryté zajistitelem,
- náklady,
- podíly na výnosech vyplacené pojistníkům (pojištěným),
- dividendy vyplacené akcionářům.

Rozdělíme pojistné na tři složky

- ryzí pojistné,
- zisková přirážka,
- nákladová přirážka.

Vzniklé škody rozdělíme na

- škody vzniklé v běžném škodním roce,
- změny ve škodním úhrnu s ohledem na škody z předchozích škodních let.

Uvažujme zjednodušenou situaci

- Časová perioda odpovídá jednomu finančnímu roku.
- Platby vztahující se k dané časové periodě se provádějí na konci této periody.

- Pojistné předepsané v dané časové periodě je zasloužené, tedy předpokládáme, že společnost netvoří rezervu nezaslouženého pojistného.
- Náklady a nákladová složka jsou si rovné a proto se anulují.
- Podíly na výnosech vyplácené pojistníkům (pojištěným) se účtují jako výplaty škod.
- Vyplacení dividend akcionářům je zanedbáno, jelikož se zajímáme o změnu hodnoty přebytku pojišťovny před výplatou těchto dividend.

Označme volný kapitál společnosti u, tzv. ekonomický nebo rizikový kapitál, na začátku finančního roku a jeho změnu jako Δu. Změnu volného kapitálu pojišťovny budeme modelovat rovností

$$\Delta u = E(S) + l - S - \Delta L + \Delta A, \tag{1.1}$$

kde význam položek je následující

Δu	je změna volného kapitálu během finančního roku,
$E(S)$	je ryzí pojistné,
l	je zisková přirážka,
S	je celkový škodní úhrn vztahující se k běžnému škodnímu roku,
ΔL	je nárůst škodního úhrnu s ohledem na škody vztahující se k předchozím škodním rokům,
ΔA	jsou příjmy z investic zvětšené o realizovaný a nerealizovaný kapitálový zisk.

Dále formulujeme pět základních předpokladů

1. Druhé momenty všech náhodných veličin vyskytujících se v modelu jsou konečné.
2. Ryzí pojistné se počítá jako současná hodnota očekávaných vyplacených škod.
3. Škodní rezervy jsou rovny současné hodnotě očekávaných budoucích vyplacených škod.
4. Pro odhad ryzího pojistného a škodních rezerv se používají diskontní faktory založené na výnosové křivce určené trhem dluhopisů.
5. Aktiva společnosti se oceňují tržní hodnotou.

Ve výše uvedené rovnici můžeme Δu interpretovat jako celkové riziko pojišťovny, S jako pojistně-technické riziko, ΔL by odpovídalo riziku škodní rezervy a ΔA riziku aktiv.

1.2 Požadovaný kapitál

Požadovaný kapitál, tedy kapitál zaručující schopnost pojišťovny dostát svým závazkům, definujeme jako minimální množství kapitálu u takové, že

$$P(\Delta u < -\alpha u) \leq \epsilon. \tag{1.2}$$

Speciálně pro $\alpha = 1$ dostáváme, že požadovaný kapitál je minimální množství kapitálu, se kterým pojišťovna zůstane solventní do konce periody s pravděpodobností $1-\epsilon$. Pravděpodobnost definovaná vztahem 1.2 se potom označuje jako pravděpodobnost ruinování. Definici požadovaného kapitálu lze interpretovat také tak, že $1-\epsilon$ je pravděpodobnost, se kterou zůstane pojišťovna solventní v dané periodě, aniž by musela navýšit kapitál. Dozorčím orgánem by pak mohlo být po pojišťovně požadováno držet minimální kapitál ve výši $(1-\alpha)\,u$.

Za předpokladu, že F je distribuční funkce standardizované náhodné veličiny Δu, $\sigma\,(\Delta u)$ je směrodatná odchylka a $\rho = E(\Delta u/u)$ je očekávaný výnos pojišťovny, platí

$$P\left(\frac{\Delta u - E(\Delta u)}{\sigma\,(\Delta u)} < \frac{-\alpha u - E(\Delta u)}{\sigma\,(\Delta u)}\right) \leq \epsilon, \tag{1.3}$$

tedy

$$\begin{aligned} F^{-1}(\epsilon) &= \frac{-\alpha u - E(\Delta u)}{\sigma\,(\Delta u)}, && (1.4)\\ u &= -\frac{F^{-1}(\epsilon)}{\alpha+\rho}\sigma(\Delta u). && (1.5) \end{aligned}$$

Požadovaný kapitál rozložíme na složky odpovídající jednotlivým rizikům. Například pojistně-technické riziko a riziko škodní rezervy dále rozdělíme podle obchodních složek a riziko aktiv rozložíme po kategoriích jednotlivých aktiv. Platí tedy $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} U_i$, kde U_i je dílčí riziko a nechť u_i je kapitál alokovaný tomuto dílčímu riziku.

Pro směrodatnou odchylku $\sigma(\Delta u)$ platí vztah

$$\begin{aligned} \sigma(\Delta u) &= \left(Cov(\Delta u, \sum_{i=1}^{n} U_i)\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(E\Big(\Delta u - E(\Delta u)\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} U_i - E(\sum_{i=1}^{n} U_i)\Big)\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} Cov(\Delta u, U_i)\right)^{\frac{1}{2}}. && (1.6) \end{aligned}$$

A dále z rovnosti $\sum_{i=1}^{n} u_i = u$ a předchozího vztahu dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = u\frac{\sum_{i=1}^{n} Cov(U_i, \Delta u)}{\sigma^2(\Delta u)}. \tag{1.7}$$

Kapitál alokovaný pro dílčí riziko U_i vyjádříme v jednom z možných tvarů jako

$$u_i = u \cdot \frac{Cov(U_i, \Delta u)}{\sigma^2(\Delta u)} \tag{1.8}$$

a s použitím rovnosti (1.5) máme

$$u_i = -\frac{F^{-1}(\epsilon)}{\alpha+\rho} \cdot \frac{Cov(U_i, \Delta u)}{\sigma(\Delta u)}. \tag{1.9}$$

1.3 Riziko škodní rezervy

Riziko škodní rezervy zohledňuje nejistotu výše a času plateb za škody a nejistotu ve vývoji úrokových měr. Předpokládejme, že škodní proces a proces vývoje úrokové míry jsou nezávislé. Za tohoto předpokladu rozložme riziko vývoje škodní rezervy na dvě složky

$$\Delta L = \Delta L' + R_L \cdot L, \tag{1.10}$$

kde

$\Delta L'$	je riziko škodní rezervy zohledňující nejistotu ve výši plateb, pro které je $E(\Delta L') = 0$,
R_L	je náhodný výnos portfolia dluhopisů se splatnostmi shodnými s očekávanými splatnostmi závazků pojišťovny,
L	je objem diskontovaných škodních rezerv na začátku finančního roku.

Vrátíme-li se zpět k modelu rizikového kapitálu, dostáváme

$$\Delta u = E(S) + l - S - \Delta L' - R_L \cdot L + \Delta A. \tag{1.11}$$

První čtyři členy modelu vyjadřují pojistné riziko a poslední dva členy riziko investiční.

1.4 Riziko aktiv

Rozdělme navíc jednotlivé členy modelu rizikového kapitálu na složky podle obchodních linií a kategorií aktiv.

$$S = \sum_{n=1}^{N} S_n, \qquad l = \sum_{n=1}^{N} l_n, \qquad \Delta L' = \sum_{n=1}^{N} S'_n, \qquad \Delta A = \sum_{m=1}^{M} R_m \cdot A_m,$$

kde S_n, l_n, S'_n jsou popořadě škody, riziková přirážka a změna ve škodní rezervě vztahující se k obchodní linii n, A_m a R_m jsou množství aktiv a očekávaný výnos aktiv v kategorii aktiv m.

Rizikový kapitál pak můžeme zapsat ve tvaru

$$\Delta u = \sum_{n=1}^{N} (E(S_n) + l_n - S_n) + \sum_{n=1}^{N} S'_n - R_L \cdot L + \sum_{m=1}^{M} R_m A_m. \tag{1.12}$$

Budeme-li znát kovarianční matici náhodných veličin, které se vyskytují ve vzorci (1.12)

$$Cov(\cdots S_n, \cdots S'_n, \cdots R_L, \cdots R_m, \cdots),$$

můžeme již určit $\sigma(\Delta u)$ a $Cov(U_i, \Delta u)$ a vypočítat kapitál alokovaný individuálnímu riziku U_i.

Kapitola 2

Rozšíření Schnieperova modelu

Uvažujme dále pouze jedno odvětví pojištění.

Předpokládejme, že se nacházíme na konci roku 0 a máme k dispozici pouze pozorované hodnoty nekumulativního trojúhelníku zaplacených škod do konce roku 0. Pro modelování škod použijeme logaritmicko-lineární regresi. Kapitola 2.1 popisuje obecně stanovení parametrů tohoto modelu. V následující kapitole 2.2 jsou vypočteny vstupní parametry na datech uvedených v Christofides [1], Mack [12] a Mack [10], na jejichž základě jsme dopočítali odhady škod v čase 0.

Jelikož riziku škodní rezervy popsanému ve Schnieperově modelu v kapitole 1.3 odpovídá rozdíl mezi rezervou vytvořenou na konci roku 0 a rezervou na konci roku 1, potřebujeme odhadnout škody v čase 1. Rezervu na konci roku 1 určíme na základě modelu pro odhad škod v čase 1, který popisuje kapitola 2.3. V kapitole 2.4 jsou následně odvozeny kovariance veličin použitých v modelech, které jsou dále potřebné pro stanovení rezervy na škody v čase 0 a v čase 1 a také pro výpočet požadovaného kapitálu. Obě zmíněné rezervy počítáme se zahrnutím obezřetnosti 75% (viz kapitoly 2.5 a 2.6). Výpočty rezerv jsou opět aplikovány na datech.

Rozšíření Schnieperova modelu popsaného v kapitole 1 spočívá ve vyjádření jednotlivých členů rizikového kapitálu pomocí veličin s logaritmicko-normálním rozložením definovaných v kapitole 2. Rozšířením se podrobně zabývá kapitola 2.7, která zároveň rozděluje změnu celkového rizikového kapitálu na jednotlivá rizika, tj. na riziko technické, riziko ve vývoji škodních rezerv, riziko vývoje výnosové křivky a investiční riziko. Kapitola také zavádí diskontování škodních rezerv.

Problému diskontování rezerv se blíže věnují kapitoly 2.9 a 2.10, které ukazují výpočet diskontované rezervy na datech. Diskontování probíhá s využitím okamžité úrokové intenzity. Pro výpočty jsme zvolili jednodušší Vašíčkův model. Zmiňujeme však i model Hull-Whiteův. Oba modely popisuje kapitola 2.8. Protože se nacházíme na konci roku 0, je úroková intenzita v čase 0 nenáhodná a intenzita v čase 1 je považována za náhodnou veličinu.

Investiční riziko budeme modelovat jako násobek volného kapitálu v kapitole 2.11.

2.1 Stanovení vstupních parametrů modelu

Nechť $P_{i,j}$ označuje velikost škod, které nastaly v roce i a byly zaplaceny se zpožděním j let. Předpokládejme, že

$$logP_{i,j} = Y_{i,j} = a_i + b_j + \xi_{i,j},$$

kde a_i je parametr, který vyjadřuje závislost velikosti škod na roce vzniku, b_j je parametr, který zohledňuje zpoždění v zaplacení škody a $\xi_{i,j}$ jsou vzájemně nezávislé náhodné odchylky s normálním rozložením se střední hodnotou 0 a rozptylem σ^2. Dále předpokládejme, že vývoj je po $r+1$ letech ukončen, tedy $P_{i,r+1} = P_{i,r+2} = \ldots = 0$ pro všechna i.

Odhady parametrů modelu a_i, b_j určíme na základě modelu lineární regrese. Pro získání odhadů parametrů modelu použijeme nekumulativní vývojový trojúhelník zaplacených škod z let $i = -r, \cdots, 0$

$$\begin{array}{l} P_{-r,0}, P_{-r,1}, \ldots, P_{-r,r} \\ \vdots \\ P_{-s,0}, \ldots, P_{-s,s} \\ \vdots \\ P_{0,0} \end{array}$$

Veličiny $Y_{i,j}$ odpovídající výše uvedenému trojúhelníku seřadíme do sloupcového vektoru po jednotlivých řádcích. Taktéž seřadíme parametry a_i a b_j do sloupcového vektoru, přičemž budeme předpokládat, že $b_0 = 0$ a z vektoru tedy vypadne.

$$\begin{aligned} Y &= (Y_{-r,0}, Y_{-r,1}, \ldots, Y_{0,0})^T, \\ \beta &= (a_{-r}, \ldots, a_0, b_1, \ldots, b_r)^T. \end{aligned}$$

Označme X regresní matici takovou, že platí $EY = X\beta$. Parametry β pak odhadneme jako

$$\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^TY. \tag{2.1}$$

2.2 Odhad škod v čase 0

Předpokládejme, že se nacházíme na konci vývojového roku 0. Uvažujme, že v čase 0 jsou dány pozorované hodnoty trojúhelníku zaplacených škod $P^0_{i,j}$, tedy

$$\begin{array}{l} P_{-r,0} = P^0_{-r,0}, P_{-r,1} = P^0_{-r,1}, \ldots, P_{-r,r} = P^0_{-r,r} \\ \vdots \\ P_{-s,0} = P^0_{-s,0}, \ldots, P_{-s,s} = P^0_{-s,s} \\ \vdots \\ P_{0,0} = P^0_{0,0} \end{array}$$

Označme P^0 vektor, který vznikne seřazením řádků výše uvedeného trojúhelníka

$$P^0 = (P^0_{-r,0}, P^0_{-r,1}, \ldots, P^0_{0,0})^T.$$

Nechť Y^0 je vektor, jehož složky mají vyjádření

$$Y^0_{i,j} = logP^0_{i,j}.$$

Vektor Y^0 zapíšeme jako

$$Y^0 = (Y^0_{-r,0}, Y^0_{-r,1}, \ldots, Y^0_{0,0})^T.$$

Pro doplnění trojúhelníka a následný odhad rezervy na škody v čase 0 určíme odhad parametru β jako

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y^0, \tag{2.2}$$

kde X je regresní matice taková, že platí $EY = X\beta$. Rozměry matice X jsou

$$\frac{(r+1)(r+2)}{2} \times (2r+1).$$

Odhad $\widehat{Y}_{i,j}$, kde $i + j > 0$, položíme rovný

$$\hat{Y}_{i,j} = \hat{a}_i + \hat{b}_j,$$

kde $\hat{a}_i$ a $\hat{b}_j$ jsou složky vektoru $\hat{\beta}$.

Protože platí

$$\begin{aligned} Y_{i,j} - EY_{i,j} &= \xi_{i,j}, \\ E(Y - EY)^T (Y - EY) &= E(\xi)^T (\xi), \\ EY &= X\beta, \end{aligned} \tag{2.3}$$

kde ξ je vektor odchylek $\xi_{i,j}$ po řádcích seřazených, odhadneme σ^2 s využitím známých hodnot Y^0 a $X\hat{\beta}$:

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{\frac{(r+1)(r+2)}{2} - (2r+1)} \cdot (Y^0 - X\hat{\beta})^T (Y^0 - X\hat{\beta}). \tag{2.4}$$

Ve výpočtu $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ je počet složek vektoru $\xi_{i,j}$ a $(2r+1)$ je počet složek vektoru parametrů. Předpokládejme, že odhad $\widehat{\sigma^2}$ je dostatečně přesný a že jím můžeme nahradit σ^2.

Odhad škod $\hat{P}_{i,j}$ v čase 0, které již nastaly, ale ještě nebyly evidovány, stanovíme jako

$$\begin{aligned} \hat{P}_{i,j} &= e^{\hat{Y}_{i,j} + \frac{1}{2}\widehat{\sigma^2}} \\ \hat{P}_{i,j} &= e^{\hat{a}_i + \hat{b}_j + \frac{1}{2}\widehat{\sigma^2}}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Příklad 1

Ilustrujme odhad škod v čase 0 na příkladu. Uvažujme nekumulativní trojúhelník evidovaných škod uvedený v Christofides [1]

	0	1	2	3	4	5	6
-6	3511	3215	2266	1712	1059	587	340
-5	4001	3702	2278	1180	956	629	
-4	4355	3932	1946	1522	1238		
-3	4295	3455	2023	1320			
-2	4150	3747	2320				
-1	5102	4548					
0	6283						

Vektor Y^0, který vznikne logaritmováním jednotlivých složek trojúhelníka a jejich seřazením po řádcích do sloupcového vektoru, má prvky

$$Y^0 = (8,1637;\ 8,0756;\ 7,7258;\ 7,4454;\ 6,9651;\ldots;\ 8,4224;\ 8,7456)^T.$$

Pomocí regresní matice X a vektoru Y^0 získáme odhad parametru β

$$\begin{aligned}\hat{\beta} = &\ (\hat{a}_{-6}, \hat{a}_{-5}, \hat{a}_{-4}, \hat{a}_{-3}, \hat{a}_{-2}, \hat{a}_{-1}, \hat{a}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4, \hat{b}_5, \hat{b}_6)^T = \\ = &\ (8,2864;\ 8,265;\ 8,3561;\ 8,2732;\ 8,3513;\ 8,5385;\ 8,7456; \\ &-0,1171;\ -0,6280;\ -1,0372;\ -1,3195;\ -1,8661;\ -2,4575)^T.\end{aligned}$$

Odhad σ^2 určíme na základě znalosti Y^0 a $X\hat{\beta}$

$$\widehat{\sigma^2} = 0,0077405.$$

Pro odhad $\hat{Y}_{i,j} = \hat{a}_i + \hat{b}_j$ pro $i + j > 0$ obdržíme hodnoty

$$\hat{Y}_{i,j} = (5,8075;\ 6,4899;\ 5,8986;\ 6,9537;\ 6,4071;\ldots;\ 6,8795;\ 6,2881)^T.$$

Z výše uvedených hodnot $\hat{Y}_{i,j}$ a $\widehat{\sigma^2}$ napočítáme trojúhelník s odhady zaplacených škod $\hat{P}_{i,j}$

	1	2	3	4	5	6
-5						335,39
-4					663,60	367,36
-3				1055,20	610,83	338,15
-2			1513,00	1140,90	660,47	365,63
-1		2746,80	1824,40	1375,70	796,38	440,87
0	5632,1	3379,00	2244,30	1692,40	979,67	542,33

Příklad 2

Nyní uvažujeme kumulativní trojúhelník evidovaných škod zmíněný v Mack [10].

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
-8	58046	127970	476599	1027692	1360489	1647310	1819179	1906852	1950105
-7	24492	141767	984288	2142656	2961978	3683940	4048898	4115760	
-6	32848	274682	1522637	3203427	4445927	5158781	5342585		
-5	21439	529828	2900301	4999019	6460112	6853904			
-4	40397	763394	2920745	4989572	5648563				
-3	90748	951994	4210640	5866482					
-2	62096	868480	1954797						
-1	24983	284441							
0	13121								

Trojúhelník převedeme na nekumulativní trojúhelník

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
-8	58046	69924	348629	551093	332797	286821	171869	87673	43253
-7	24492	117275	842521	1158368	819322	721962	364958	66862	
-6	32848	241834	1247955	1680790	1242500	712854	183804		
-5	21439	508389	2370473	2098718	1461093	393792			
-4	40397	722997	2157351	2068827	658991				
-3	90748	861246	3258646	1655842					
-2	62096	806384	1086317						
-1	24983	259458							
0	13121								

Vektor Y^0, který vznikne logaritmováním jednotlivých složek trojúhelníka a jejich seřazením po řádcích do sloupcového vektoru, má prvky

$$Y^0 = (10,969;\ 11,155;\ 12,762;\ 13,220;\ 12,715;\dots;\ 12,466;\ 9,482)^T.$$

Pomocí regresní matice X a vektoru Y^0 získáme odhad parametru β

$$\begin{aligned}\hat{\beta} = {} & (\hat{a}_{-8}, \hat{a}_{-7}, \hat{a}_{-6}, \hat{a}_{-5}, \hat{a}_{-4}, \hat{a}_{-3}, \hat{a}_{-2}, \hat{a}_{-1}, \hat{a}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4, \hat{b}_5, \hat{b}_6, \hat{b}_7, \hat{b}_8)^T = \\ = {} & (9,7886;\ 10,237;\ 10,503;\ 10,716;\ 10,857;\ 11,308;\ 10,986;\ 10,237;\ 9,482; \\ & 2,119;\ 3,458;\ 3,587;\ 3,171;\ 2,793;\ 2,152;\ 1,233;\ 0,886)^T.\end{aligned}$$

Odhad σ^2 určíme na základě znalosti Y^0 a $X\hat{\beta}$

$$\widehat{\sigma^2} = 0,20387.$$

Pro odhad $\hat{Y}_{i,j} = \hat{a}_i + \hat{b}_j$ pro $i + j > 0$ obdržíme hodnoty

$$\hat{Y}_{i,j} = (11,123;\ 11,736;\ 11,389;\ 12,868;\ 11,949;\dots;\ 10,715;\ 10,368)^T.$$

Z výše uvedených hodnot $\hat{Y}_{i,j}$ a $\widehat{\sigma^2}$ napočítáme trojúhelník s odhady zaplacených škod $\hat{P}_{i,j}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
-7								83024,59
-6							153204,68	108290,69
-5						475362,58	189678,93	134072,02
-4					1039754,41	547523,52	218472,55	154424,41
-3				2382084,10	1632361,44	859584,02	342990,76	242438,46
-2			2617007,79	1725475,83	1182410,06	622644,45	248447,26	175611,64
-1		1086284,62	1236866,64	815505,21	558838,06	294278,13	117422,70	82998,68
0	133931,65	510790,82	581597,23	383465,41	262775,84	138374,94	55214,29	39027,49

Příklad 3

Pro následující příklad uvažujeme kumulativní trojúhelník evidovaných škod, uvedený v Mack [12].

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-9	357848	1124788	1735330	2182708	2745596	3319994	3466336	3606286	3833515	3901463
-8	352118	1236139	2170033	3353322	3799067	4120063	4647867	4914039	5339085	
-7	290507	1292306	2218525	3235179	3985995	4132918	4628910	4909315		
-6	310608	1418858	2195047	3757447	4029929	4381982	4588268			
-5	443160	1136350	2128333	2897821	3402672	3873311				
-4	396132	1333217	2180715	2985752	3691712					
-3	440832	1288463	2419861	3483130						
-2	359480	1421128	2864498							
-1	376686	1363294								
0	344014									

Trojúhelník převedeme na nekumulativní trojúhelník

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-9	357848	766940	610542	447378	562888	574398	146342	139950	227229	67948
-8	352118	884021	933894	1183289	445745	320996	527804	266172	425046	
-7	290507	1001799	926219	1016654	750816	146923	495992	280405		
-6	310608	1108250	776189	1562400	272482	352053	206286			
-5	443160	693190	991983	769488	504851	470639				
-4	396132	937085	847498	805037	705960					
-3	440832	847631	1131398	1063269						
-2	359480	1061648	1443370							
-1	376686	986608								
0	344014									

Vektor Y^0, který vznikne logaritmováním jednotlivých složek trojúhelníka a jejich seřazením po řádcích do sloupcového vektoru, má prvky

$$Y^0 = (12,788;\ 13,550;\ 13,322;\ 13,011;\ 13,241;\ldots;\ 13,802;\ 12,748)^T.$$

Pomocí regresní matice X a vektoru Y^0 získáme odhad parametru β

$$\begin{aligned} \hat{\beta} = & \ (\hat{a}_{-9}, \hat{a}_{-8}, \hat{a}_{-7}, \hat{a}_{-6}, \hat{a}_{-5}, \hat{a}_{-4}, \hat{a}_{-3}, \hat{a}_{-2}, \hat{a}_{-1}, \hat{a}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4, \hat{b}_5, \hat{b}_6, \hat{b}_7, \hat{b}_8, \hat{b}_9)^T = \\ = & \ (12,518;\ 12,88;\ 12,802;\ 12,691;\ 12,802;\ 12,832; \\ & \ 12,915;\ 13,000;\ 12,865;\ 12,748;\ 0,911;\ 0,939;\ 0,954; \\ & \ 0,395;\ -0,004;\ -0,117;\ -0,439;\ -0,053;\ -1,392)^T. \end{aligned}$$

Odhad σ^2 určíme na základě znalosti Y^0 a $X\hat{\beta}$

$$\widehat{\sigma^2} = 0,095303.$$

Pro odhad $\hat{Y}_{i,j} = \hat{a}_i + \hat{b}_j$ pro $i + j > 0$ obdržíme hodnoty

$$\hat{Y}_{i,j} = (11,489;\ 12,749;\ 11,410;\ 12,252;\ 12,638;\ldots;\ 12,696;\ 11,357)^T.$$

Z výše uvedených hodnot $\hat{Y}_{i,j}$ a $\widehat{\sigma^2}$ napočítáme trojúhelník s odhady zaplacených škod $\hat{P}_{i,j}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-8									107371,57
-7								378729,29	99246,95
-6							230405,15	338946,72	88821,82
-5						354961,08	257477,97	378773,28	99258,47
-4					409393,30	365625,50	265213,61	390153,11	102240,58
-3				662951,51	444873,07	397312,17	288198,16	423965,45	111101,19
-2			1263589,82	722120,15	484578,14	432772,41	313919,94	461804,50	121017,01
-1		1087101,99	1103900,70	630860,52	423338,44	378079,78	274247,57	403442,87	105723,20
0	941218,67	967490,41	982440,79	561448,25	376759,39	336480,45	244072,68	359052,89	94090,70

2.3 Odhad škod v čase 1

Odhadněme nyní škody v čase 1, tedy pro vývojový rok jedna. Předpokládáme, že se nyní nacházíme na konci roku 1. Nechť $Q_{i,j}$ označují nekumulativní škody ve vývojovém trojúhelníku zaplacené do konce roku 1.

$$\begin{array}{lcl}
Q_{-(r-1),0}, \ldots, Q_{-(r-1),(r-1)}, Q_{-(r-1),r} & & P^0_{-(r-1),0}, \ldots, P^0_{-(r-1),(r-1)}, e^{a_{-(r-1)}+b_r+\xi_{-(r-1),r}} \\
\vdots & & \vdots \\
Q_{-s,0}, \ldots, Q_{-s,s}, Q_{-s,(s+1)} & = & P^0_{-s,0}, \ldots, P^0_{-s,s}, e^{a_{-s}+b_{s+1}+\xi_{-s,s+1}} \\
\vdots & & \vdots \\
Q_{1,0} & & e^{a_1+\xi_{1,0}}
\end{array}$$

Uvažujme vektor Z, který vznikne seřazením řádků trojúhelníka do sloupcového vektoru a jejich následným logaritmováním. Pro jeho složky platí $Z_{i,j} = logQ_{i,j}$, tedy

$$Z = (logP^0_{-(r-1),\,0}, \ldots, logP^0_{-(r-1),r-1}, \; a_{-(r-1)} + b_r \; + \xi_{-(r-1),r}, \ldots, \; a_1 + \xi_{1,0})^T.$$

Složky vektoru Z jsou buď logaritmy pozorovaných hodnot $logP^0_{i,j}$ nebo náhodné hodnoty $a_i + b_j + \xi_{i,j}$, kde a_i a b_j jsou parametry a $\xi_{i,j}$ je náhodná veličina. Pro tento vektor Z odhadneme regresí vektor parametrů. Odhad parametrů se určí jako

$$\tilde{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Z, \tag{2.6}$$

kde regresní matice X je shodná s regresní maticí pro určení odhadů parametrů $\hat{\beta}$.

Odhad výší škod $\tilde{Q}_{i,j}$ na konci roku 1, tj. škod, které nastanou do konce roku 1, ale nebudou ještě zaplaceny, určíme jako

$$\tilde{Q}_{i,j} = e^{\tilde{a}_i + \tilde{b}_j + \frac{1}{2}\widehat{\sigma^2}}. \tag{2.7}$$

V dalších kapitolách nahradíme prvky na diagonále trojúhelníka $Q_{i,j}$ nenáhodnými složkami pomocí odhadů parametru $\tilde{\beta}$ a odhadu $\hat{a}_1$, který stanovíme lineární extrapolací.

2.4 Odvození kovariancí

Za předpokladu, že odhad $\widehat{\sigma^2}$ je dostatečně přesný a že jím můžeme nahradit σ^2, je varianční matice vektoru Y rovna

$$VarY = \sigma^2 I = \widehat{\sigma^2} I, \tag{2.8}$$

kde I je jednotková matice, protože

$$\begin{aligned}
Var(Y_{i,j}) &= Var(a_i + b_j + \xi_{i,j}) = \sigma^2, \\
Cov(Y_{i,j}, Y_{k,l}) &= Cov(\xi_{i,j}, \xi_{k,l}) = 0, \\
i &= -r, \ldots, 0, \\
j &= 0, \ldots, r,
\end{aligned}$$

z nezávislosti odchylek.

Nechť $\hat{P}_{i,j}$ jsou odhady škod ze znalostí škod na konci roku 0. Odpovídající vývojový trojúhelník má tvar

$$\begin{array}{r} \hat{P}_{-(r-1),r} \\ \vdots \\ \hat{P}_{-s,s+1}, \dots, \hat{P}_{-s,r} \\ \vdots \\ \hat{P}_{0,1},\ \hat{P}_{0,2}, \dots\dots, \hat{P}_{0,r} \end{array}$$

Jelikož $\hat{P}_{i,j}$ mají následující vyjádření

$$\hat{P}_{i,j} = e^{\hat{Y}_{i,j} + \frac{1}{2}\widehat{\sigma^2}}, \tag{2.9}$$

platí pro střední hodnotu

$$E\hat{P}_{i,j} = e^{E\hat{Y}_{i,j} + \frac{1}{2}Var\hat{Y}_{i,j} + \frac{1}{2}\widehat{\sigma^2}} \tag{2.10}$$

a pro kovariance

$$Cov(\hat{P}_{i,j}, \hat{P}_{k,l}) = e^{E\hat{Y}_{i,j} + E\hat{Y}_{k,l} + \frac{1}{2}Var\hat{Y}_{i,j} + \frac{1}{2}Var\hat{Y}_{k,l} + \widehat{\sigma^2}}(e^{Cov(\hat{Y}_{i,j},\hat{Y}_{k,l})} - 1), \tag{2.11}$$

$$Cov(\hat{P}_{i,j}, \hat{P}_{k,l}) = E\hat{P}_{i,j}E\hat{P}_{k,l}(e^{Cov(\hat{Y}_{i,j},\hat{Y}_{k,l})} - 1). \tag{2.12}$$

Hodnoty $Var\hat{Y}_{i,j}$ a $Cov(\hat{Y}_{i,j}, \hat{Y}_{k,l})$ určíme jako prvky varianční matice $\hat{Y}_{i,j}$. Nechť $\hat{Y}$ je vektor, který vznikne seřazením řádků doplněného vývojového trojúhelníka $\hat{Y}_{i,j}$ pro $i+j > 0$

$$\begin{array}{r} \hat{Y}_{-(r-1),r} \\ \vdots \\ \hat{Y}_{-s,s+1}, \dots, \hat{Y}_{-s,r} \\ \vdots \\ \hat{Y}_{0,1},\ \hat{Y}_{0,2}, \dots\dots, \hat{Y}_{0,r} \end{array}$$

Uvažujme matici X_f takovou, že pro vektor $\hat{Y}$ platí

$$\hat{Y} = X_f\hat{\beta} = X_f(X^TX)^{-1}X^TY, \tag{2.13}$$

$$E\hat{Y} = EX_f\hat{\beta} = X_f(X^TX)^{-1}X^TEY, \tag{2.14}$$

kde

$$\begin{aligned} Y_{i,j} &= a_i + b_j + \epsilon_{i,j}, \\ EY_{i,j} &= a_i + b_j, \\ i &= -r, \dots, 0, \\ j &= 0, \dots, -i. \end{aligned}$$

Varianční matici $\hat{Y}_{i,j}$ určíme jako

$$\begin{aligned} Var\hat{Y} &= E(\hat{Y} - E\hat{Y})(\hat{Y} - E\hat{Y})^T = \\ &= (X_f(X^TX)^{-1}X^T)E(Y - EY)(Y - EY)^T(X_f(X^TX)^{-1}X^T) = \\ &= (X_f(X^TX)^{-1}X^T)VarY(X_f(X^TX)^{-1}X^T) = \\ &= \widehat{\sigma^2}X_f(X^TX)^{-1}X^TX_f(X^TX)^{-1}X^T = \\ &= \widehat{\sigma^2}X_f(X^TX)^{-1}(X_f(X^TX)^{-1}X^TX)^T = \\ &= \widehat{\sigma^2}X_f(X^TX)^{-1}X_f^T. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Varianční matice vektoru Z má složky

$$\begin{aligned} Var(logP^0_{i,j}) &= 0, \\ Cov(logP^0_{i,j}, logP^0_{k,l}) &= 0, \\ Var(a_i + b_j + \xi_{i,j}) &= \sigma^2, \\ Cov(a_i + b_j + \xi_{i,j}, a_k + b_l + \xi_{k,l}) &= 0. \end{aligned}$$

Na základě znalosti varianční matice vektoru Z určíme varianční matici vektoru $\tilde{\beta}$, který je vyjádřen jako

$$\tilde{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Z. \tag{2.16}$$

Pro jeho varianční matici platí

$$Var\tilde{\beta} \;=\; (X^T X)^{-1} X^T \; VarZ \; X(X^T X)^{-1}. \tag{2.17}$$

Nechť $\tilde{Q}_{i,j}$ je odhad škod na konci roku 1.

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{i,j} &= e^{\tilde{a}_i + \tilde{b}_j + \frac{1}{2}\widehat{\sigma^2}}, \\ E\tilde{Q}_{i,j} &= e^{E(\tilde{a}_i + \tilde{b}_j) + Var(\tilde{a}_i + \tilde{b}_j) + \frac{1}{2}\widehat{\sigma^2}} = e^{E\tilde{Z}_{i,j} + Var\tilde{Z}_{i,j} + \frac{1}{2}\widehat{\sigma^2}}, \end{aligned}$$

kde $\tilde{Z}_{i,j} = \tilde{a}_i + \tilde{b}_j$, hodnoty $Var\tilde{Z}_{i,j}$ jsou prvky matice

$$Var\tilde{Z} = VarX_f\tilde{\beta} = X_f(X^T X)^{-1} X^T VarZX(X^T X)^{-1} X_f^T$$

a pro střední hodnotu platí

$$E\tilde{Z} = EX_f\tilde{\beta} = X_f(X^T X)^{-1} X^T EZ.$$

2.5 Odhad rezervy v čase 0

Zanedbejme nyní časovou hodnotu škod, tedy uvažujme, že zaplacené škody nediskontujeme.

Na konci roku 0 určíme náklady na škody, které již nastaly, ale zatím nebyly zaplaceny, jako

$$\widehat{R}_0 = \sum_{i+j>0} \hat{P}_{i,j}. \tag{2.18}$$

Rezerva zahrnuje dvě složky

- rezervu na škody, které nastaly do konce roku 0, ale nebyly zatím nahlášeny,
- a rezervu na škody, které již byly nahlášeny, ale nebyly zatím zaplaceny.

Pro zachování zvýšené obezřetnosti při stanovení výše škodních rezerv počítáme rezervu jako součet škodních nákladů a z_α násobek směrodatné odchylky rezervy $\widehat{R}_0$, kde z_α je kvantil normálního rozdělení $N(0,1)$ a α je stupeň obezřetnosti. Rezervu, které přísluší obezřetnost $\alpha\%$, určíme jako horní intervalový odhad

$$V_0 = \widehat{R}_0 + z_\alpha \sqrt{Var\widehat{R}_0}, \tag{2.19}$$

přičemž α je pravděpodobnost, že rezerva nepřekročí hranici horního intervalového odhadu.

Pro rozptyl odhadu rezervy platí

$$\begin{aligned}
Var\widehat{R}_0 &= Var \sum_{i+j>0} \hat{P}_{i,j} = \\
&= \sum_{i+j>0,k+l>0} Cov(\hat{P}_{i,j}, \hat{P}_{k,l}) = \\
&= \sum_{i+j>0,k+l>0} E\hat{P}_{i,j} E\hat{P}_{k,l} (e^{Cov(\hat{Y}_{i,j},\hat{Y}_{k,l})} - 1).
\end{aligned}$$

Odhad rozptylu rezervy položíme roven

$$\widehat{Var}\widehat{R}_0 \cong \sum_{i+j>0,k+l>0} \hat{P}_{i,j} e^{\frac{1}{2}Var\hat{Y}_{i,j}} \hat{P}_{k,l} e^{\frac{1}{2}Var\hat{Y}_{k,l}} (e^{Cov(\hat{Y}_{i,j},\hat{Y}_{k,l})} - 1). \tag{2.20}$$

Hodnoty $Var\hat{Y}_{i,j}$ a $Cov(\hat{Y}_{i,j}, \hat{Y}_{k,l})$ určíme jako prvky varianční matice $\hat{Y}_{i,j}$.

Pokračování příkladu 1

Budeme-li pokračovat ve výpočtech uvedených v numerickém příkladu v kapitole 2.2 dostaneme odhad rezervy $\widehat{R}_0$ jako

$$\widehat{R}_0 = 28\ 705$$

a odhad jejího rozptylu

$$\widehat{Var}\widehat{R}_0 = 2\ 772\ 322.$$

Rozptyl odhadu rezervy odhadneme na základě odhadu $\hat{Y}$ a jeho kovarianční matice $Var\hat{Y}$, kde

$$\hat{Y} = (5,8075;\ 6,4899;\ 5,8986;\ 6,9537\cdot\ 6,4071; \ldots;\ 6,8795;\ 6,2881)^T.$$

Rezervu s obezřetností $\alpha = 75\%$, které přísluší kvantil normálního rozdělení

$$z_{0,75} = 0,6745,$$

určíme rovnou

$$V_0 = 29\ 828.$$

Pokračování příkladu 2

Odhad rezervy $\widehat{R}_0$ dostaneme jako

$$\widehat{R}_0 = 21\ 432\ 236$$

a odhad jejího rozptylu

$$\widehat{Var}\widehat{R}_0 = 18\ 239 \cdot 10^9.$$

Rozptyl odhadu rezervy odhadneme na základě odhadu $\hat{Y}$ a jeho kovarianční matice $Var\hat{Y}$, kde

$$\hat{Y} = (11,123;\ 11,736;\ 11,389;\ 12,868;\ 11,949;\dots;\ 10,715;\ 10,368)^T.$$

Rezerva s obezřetností $\alpha = 75\%$, které přísluší kvantil normálního rozdělení

$$z_{0,75} = 0,6745,$$

je rovna

$$V_0 = 24\ 312\ 837.$$

Pokračování příkladu 3

Odhad rezervy $\widehat{R}_0$ dostaneme jako

$$\widehat{R}_0 = 19\ 264\ 571$$

a odhad jejího rozptylu

$$\widehat{Var}\widehat{R}_0 = 7\ 298 \cdot 10^9.$$

Rozptyl odhadu rezervy odhadneme na základě odhadu $\hat{Y}$ a jeho kovarianční matice $Var\hat{Y}$, kde

$$\hat{Y} = (11,489;\ 12,749;\ 11,410;\ 12,252;\ 12,638;\dots;\ 12,696;\ 11,357)^T.$$

Rezervu s obezřetností $\alpha = 75\%$, které přísluší kvantil normálního rozdělení

$$z_{0,75} = 0,6745,$$

určíme rovnou

$$V_0 = 21\ 086\ 726.$$

2.6 Odhad rezervy v čase 1

Modelujme nyní výši rezervy v čase 1, kterou bude pojišťovna tvořit na konci roku 1.

Označme

$$\widetilde{R}_1 = \sum_{i+j>1} \widetilde{Q}_{i,j}$$

odhad rezervy na konci roku 1. Tato rezerva $\widetilde{R}_1$ je náhodnou veličinou. Rezervu bez zahrnutí obezřetnosti, kterou bude pojišťovna tvořit, označíme $\bar{R}_1$ a určíme ji následujícím postupem.

Nechť W_j označuje prvky na diagonále vývojového trojúhelníka s prvky $Q_{i,j}$

$$W_j = a_{j-r} + b_{r+1-j} + \xi_{j-r,r+1-j} = w_j + \Xi_j, \tag{2.21}$$

pro $j = 1,\dots,r+1$, kde w_j odpovídá $a_{j-r}+b_{r+1-j}$ a Ξ_j jsou vzájemně nezávislé s normálním rozdělením $N(0,\widehat{\sigma^2})$. W_j je totožné s prvky vektoru Z, které se nacházejí na místě $u(j)$, kde

$$u(j) = j(r+1) - \frac{(j-1)j}{2}.$$

Označme $\bar{Z}$ vektor, který vznikne z vektoru Z nahrazením prvků na místech $u(j)$ konstantami w_j. Takto vytvořený vektor je nenáhodný. Veličiny, které vypočítáme na jeho základě, budeme označovat $\bar{\beta}, \bar{Q}_{i,j}, \bar{R}_1, \dots$

Tedy

$$\bar{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \bar{Z}, \tag{2.22}$$

$$\bar{Q}_{i,j} = e^{\bar{a}_i + \bar{b}_j + \widehat{\sigma^2}}, \tag{2.23}$$

$$\bar{R}_1 = \sum_{i+j>1} \bar{Q}_{i,j}. \tag{2.24}$$

Výši rezervy s obezřetností $\alpha = 75\%$ určíme rovnou

$$V_1 = \bar{R}_1 + z_\alpha \sqrt{E(\bar{R}_1 - \widetilde{R}_1)^2}, \tag{2.25}$$

kde z_α je kvantil normálního rozložení. Výraz pod odmocninou reprezentuje statistické riziko.

Statistické riziko stanovíme následujícím postupem. Zapíšeme $\widetilde{R}_1$ jako rozvoj prvního řádu v $\bar{Z}$

$$\widetilde{R}_1 = \bar{R}_1 + \sum_{m=1}^{r+1} \frac{\partial}{\partial w_m} \bar{R}_1 (W_m - w_m). \tag{2.26}$$

Dále dostáváme

$$\begin{aligned} E(\widetilde{R}_1 - \bar{R}_1)^2 &= \sum_{m=1}^{r+1} (\frac{\partial}{\partial w_m} \bar{R}_1)^2 Var(W_m - w_m) = \\ &= \sum_{m=1}^{r+1} (\frac{\partial}{\partial w_m} \bar{R}_1)^2 Var \Xi, \end{aligned} \tag{2.27}$$

kde pro jednotlivé členy rozvoje platí

$$\frac{\partial}{\partial w_m} \bar{R}_1 = \sum_{i+j>1} \frac{\partial}{\partial w_m} \bar{Q}_{i,j}, \tag{2.28}$$

$$Var\ \Xi = \widehat{\sigma^2}. \tag{2.29}$$

Zbývá určit $\frac{\partial}{\partial w_m} \bar{Q}_{i,j}$.

Označme

$$F = (X^T X)^{-1} X^T.$$

Nechť $\bar{\beta}$ je odhad parametru vektoru $\bar{Z}$

$$\bar{\beta} = F\bar{Z},$$

jehož složky

$$\bar{a}_i = \bar{\beta}(i + r),$$

$$\bar{b}_j = \bar{\beta}(j + r + 1)$$

jsou na místech $i+r$ a $j+r+1$.

Potom

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_m}\bar{Q}_{i,j} &= (F(i+r,u(m))+F(j+r+1,u(m)))\bar{Q}_{i,j} = \\ &= \varphi_{i,j}^{(m)}\bar{Q}_{i,j}, \qquad (2.30)\end{aligned}$$

kde

$$\varphi_{i,j}^{(m)} = F(i+r,u(m))+F(j+r+1,u(m)).$$

Nyní můžeme zapsat statistické riziko jako

$$\begin{aligned}E(\widetilde{R}_1-\bar{R}_1)^2 &= \sum_{m=1}^{r+1}\Big(\sum_{i+j>1}\varphi_{i,j}^{(m)}\bar{Q}_{i,j}\Big)^2 Var\,\Xi = \\ &= \widehat{\sigma^2}\sum_{m=1}^{r+1}\Big(\sum_{i+j>1}\varphi_{i,j}^{(m)}\bar{Q}_{i,j}\Big)^2, \qquad (2.31)\end{aligned}$$

Pokračování příkladu 1

Na základě vývojového trojúhelníka uvedeného v kapitole 2.2 a znalosti odhadů parametrů β, sestavíme nový trojúhelník zaplacených škod $Q_{i,j}$, kde $i = -5,-4,\dots,1$ a $j = 0,\dots,6$. Diagonálu tohoto trojúhelníka nahradíme nenáhodnými prvky $e^{\hat{a}_i+\hat{b}_j}$. Prvek $\hat{a}_1$ určíme lineární extrapolací jako

$$a_1 = 8,9527.$$

Trojúhelník zaplacených škod v čase 1 potom obsahuje hodnoty

	0	1	2	3	4	5	6
-5	4001	3702	2278	1180	956	629	332,8
-4	4355	3932	1946	1522	1238	658,5	
-3	4295	3455	2023	1320	1047,1		
-2	4150	3747	2320	1501,4			
-1	5102	4548	2725,7				
0	6283	5588,7					
1	7729,0						

Hodnoty uvedené v trojúhelníku logaritmujeme, abychom určili $\bar{Z}$

$$\bar{Z} = (8,2943;\ 8,2166;\ 7,7311;\ 7,0733;\ 6,8628;\dots;\ 8,6285;\ 8,9527)^T.$$

Podle vztahu (2.22) určíme $\bar{\beta}$

$$\begin{aligned}\bar{\beta} = &(8,2891;\ 8,3801;\ 8,3018;\ 8,3808;\ 8,5526;\ 8,7480;\ 8,9527; \\ &-0,1220;\ -0,6655;\ -1,1128;\ -1,3444;\ -1,8676;\ -2,4815)^T\end{aligned}$$

a ze znalosti tohoto parametru a dříve stanoveného parametru $\widehat{\sigma^2}$ vypočteme dolní trojúhelník zaplacených škod $\bar{Q}_{i,j}$ pro $i+j>1$ jako

	1	2	3	4	5	6
-4						367,4
-3					627,6	339,7
-2				1146,1	679,3	367,6
-1			1715,6	1360,9	806,6	436,5
0		3262,4	2085,9	1654,7	980,6	530,7
1	6894,8	4003,5	2559,7	2030,6	1203,4	651,3

Rezervu $\bar{R}$ spočítáme jako součet jednotlivých položek trojúhelníka $\bar{Q}_{i,j}$

$$\bar{R}_1 = 33\ 705.$$

Statistické riziko vychází

$$E(\widetilde{R}_1 - \bar{R}_1)^2 = 2\ 950\ 479.$$

Rezervu s obezřetností $0,75\%$ určíme rovnou

$$V_1 = 34\ 864.$$

Pokračování příkladu 2

Při určení rezervy v čase 1 postupujeme stejně jako v předchozím příkladu. Trojúhelník zaplacených škod v čase 1 potom obsahuje hodnoty

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
-7	24492	117275	842521	1158368	819322	721962	364958	66862	67712,24
-6	32848	241834	1247955	1680790	1242500	712854	183804	124948,90	
-5	21439	508389	2370473	2098718	1461093	393792	387690,71		
-4	40397	722997	2157351	2068827	658991	847990,86			
-3	90748	861246	3258646	1655842	1942752,57				
-2	62096	806384	1086317	2134348,91					
-1	24983	259458	885939,43						
0	13121	109230,42							
1	6169,73								

Hodnoty uvedené v trojúhelníku jsme logaritmovali, abychom určili $\bar{Z}$

$$\bar{Z} = (10,106;\ 11,672;\ 13,644;\ 13,963;\ 13,616;\ldots;\ 11,601;\ 8,727)^T.$$

Podle vztahu (2.22) určíme $\bar{\beta}$

$$\begin{aligned}\bar{\beta} \;=\; & (10,107;\ 10,373;\ 10,561;\ 10,693;\ 11,141;\ 10,826;\ 10,082;\ 9,361;\ 8,727;\\ & 2,360;\ 3,678;\ 3,764;\ 3,369;\ 2,941;\ 2,252;\ 1,182;\ 1,015)^T\end{aligned}$$

a ze znalosti tohoto parametru a dříve stanoveného parametru $\widehat{\sigma^2}$ vypočítáme dolní trojúhelník zaplacených škod $\bar{Q}_{i,j}$ pro $i+j>1$ jako

	1	2	3	4	5	6	7	8
-6								108290,69
-5							154447,12	130672,22
-4						513427,21	176265,97	149132,37
-3					1601471,44	803492,04	275848,85	233385,90
-2				1792688,49	1168934,50	586479,13	201345,60	170351,36
-1			1265567,12	852144,54	555646,54	278779,60	95708,52	80975,57
0		564395,64	615221,48	414247,19	270112,65	135521,22	46526,13	39364,10
1	80190,52	299469,97	326438,31	219800,76	143322,56	71907,95	24686,90	20886,71

Rezervu $\bar{R}$ stanovíme jako součet jednotlivých položek trojúhelníka $\bar{Q}_{i,j}$

$$\bar{R}_1 = 14\ 467\ 147.$$

Statistické riziko vychází

$$E(\widetilde{R}_1 - \bar{R}_1)^2 = 2\ 424 \cdot 10^9.$$

Rezerva s obezřetností $0,75\%$ potom nabývá hodnotu

$$V_1 = 15\ 517\ 302.$$

Pokračování příkladu 3

Při určení rezervy v čase 1 postupujeme stejně jako v prvním příkladu. Trojúhelník zaplacených škod v čase 1 potom obsahuje hodnoty

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-8	352118	884021	933894	1183289	445745	320996	527804	266172	425046	97611
-7	290507	1001799	926219	1016654	750816	146923	495992	280405	344301	
-6	310608	1108250	776189	1562400	272482	352053	206286	209460		
-5	443160	693190	991983	769488	504851	470639	322694			
-4	396132	937085	847498	805037	705960	372178				
-3	440832	847631	1131398	1063269	602687					
-2	359480	1061648	1443370	1148725						
-1	376686	986608	988281							
0	344014	855659								
1	306162									

Hodnoty uvedené v trojúhelníku logaritmujeme, abychom určili $\bar{Z}$

$$\bar{Z} = (12,77;\ 13,69;\ 13,75;\ 13,98;\ 13,01;\ldots;\ 13,66;\ 12,63)^T.$$

Podle vztahu (2.22) určíme $\bar{\beta}$

$$\begin{aligned}\bar{\beta} \ = \ &(12,83;\ 12,75;\ 12,65; 12,77;\ 12,83;\ 12,89;\\ &12,96;\ 12,84;\ 12,74;\ 12,63;\ 0,93;\ 0,99;\ 1,05;\\ &0,37;\ -0,12;\ 0,05;\ -0,32;\ 0,06;\ -1,34)^T\end{aligned}$$

a ze znalosti tohoto parametru a dříve stanoveného parametru $\widehat{\sigma^2}$ vypočítáme dolní trojúhelník zaplacených škod $\bar{Q}_{i,j}$ pro $i + j > 1$ jako

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-7									99246,95
-6								365070,35	89557,61
-5							282899,52	412796,47	101265,59
-4						430358,22	298264,33	435216,23	106765,52
-3					384999,77	456523,23	316398,27	461676,61	113256,67
-2				677863,81	414090,02	491017,73	340305,05	496560,49	121814,25
-1			1193503,53	603864,87	368885,92	437415,82	303155,68	442353,51	108516,41
0		1008238,51	1076892,35	544864,29	332843,94	394678,14	273535,87	399133,39	97913,82
1	851631,20	904757,07	966364,56	488941,67	298682,21	354170,00	245461,28	358167,98	87864,35

Rezervu $\bar{R}$ spočítáme jako součet jednotlivých položek trojúhelníka $\bar{Q}_{i,j}$

$$\bar{R}_1 = 19\ 037\ 783.$$

Statistické riziko vychází

$$E(\widetilde{R}_1 - \bar{R}_1)^2 = 3\ 606 \cdot 10^9.$$

Rezerva s obezřetností $0,75\%$ je rovna

$$V_1 = 20\ 318\ 747.$$

2.7 Rozšířený model požadovaného kapitálu pro jedno odvětví

Nechť $\hat{P}_{i,j}$ je odhad škod, které budou zaplaceny během roku 1 a později, na základě trojúhelníku $P_{i,j}$. Nechť $\tilde{Q}_{i,j}$ je odhad škod, které budou zaplaceny během roku 2 a později, na základě znalosti trojúhelníku $Q_{i,j}$. Odhady jsme získali pomocí regrese, kde odhady parametrů logaritmicko-lineárního modelu škod byly $\hat{\beta}$ a $\tilde{\beta}$.

Nechť ΔU značí změnu volného kapitálu na konci roku 1, počítanou na základě znalosti zaplacených škod na konci roku 0.

$$\Delta U = \Pi - P_{1,0} + \sum_{i+j>0} \hat{P}_{i,j} v_0(i+j-1) - \sum_{i=0}^{r-1} P_{-i,i+1} - \sum_{i+j>1} \tilde{Q}_{i,j} v_1(i+j-2) + \sum_k R_k A_k, \quad (2.32)$$

kde

Π	je zasloužené pojistné s rizikovou přirážkou, ale bez nákladové složky,
$P_{i,j}$	jsou škody z roku i zaplacené po j letech.
$v_0(t)$	je diskontní faktor na období $(0,t)$ závislý na úrokové intenzitě r_0, která je na konci roku 0 známa.
$v_1(t)$	je diskontní faktor na období $(1, 1+t)$ závislý na úrokové intenzitě r_1, která je náhodnou veličinou.
R_k	je náhodný výnos z k-té skupiny aktiv.
A_k	je objem k-té skupiny aktiv v čase 0.

První suma ve vzorci odpovídá převzaté rezervě z roku 0, index i se pohybuje v rozmezí $0, \dots, -(r-1)$. Druhá suma reprezentuje škody z minulých let zaplacené v roce 1. Třetí suma označuje rezervu na škody dosud nezaplacené vytvořenou na konci roku 1. Čtvrtá suma vyjadřuje investiční riziko.

Upravme dále tento vztah, abychom obdrželi rozklad podle jednotlivých typů rizika:

$$\begin{aligned}
\Delta U &= \Pi - \\
&\quad -P_{1,0} - \sum_{j=1}^{r} \tilde{Q}_{1,j} v_1(j-1) - \\
&\quad -\sum_{i=0}^{r-1} (P_{-i,i+1} - \hat{P}_{-i,i+1}) + \sum_{\substack{i+j>1 \\ i=0,\dots,-(r-2)}} (\hat{P}_{i,j} - \tilde{Q}_{i,j}) v_1(i+j-2) + \\
&\quad + \sum_{i+j>1} \hat{P}_{i,j}(v_0(i+j-1) - v_1(i+j-2)) + \\
&\quad + \sum_{k} R_k A_k,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

kde

druhý řádek	$\dots C_1 \dots$	je technické riziko,
třetí řádek	$\dots C_2 \dots$	je riziko vývoje škodních rezerv,
čtvrtý řádek	$\dots C_3 \dots$	je riziko vývoje výnosové křivky (úrokové riziko),
pátý řádek	$\dots C_4 \dots$	je investiční riziko.

Při tomto označení jednotlivých druhů rizik je změna volného kapitálu rovna

$$\Delta U = \Pi + C_1 + C_2 + C_3 + C_4. \tag{2.34}$$

Schnieperův model uvažuje změnu volného kapitálu pojišťovny za předpokladu, že střední hodnota jednotlivých druhů rizik je rovna 0. Jednotlivá rizika v modelu ΔU v rovnosti (2.34) ale nemají střední hodnotu rovnou nule. Odečtením středních hodnot dostáváme

$$U_i = C_i - EC_i, \tag{2.35}$$

$$\Delta u = \Delta U - E\Delta U, \tag{2.36}$$

kde veličiny U_i a Δu odpovídají veličinám zavedeným v kapitole 1.2.

2.8 Okamžitá úroková intenzita

Označme

$$\begin{aligned}
P(t, r_0) &= v_0(t), \\
P(t, r_1) &= v_1(t),
\end{aligned}$$

kde $v_0(t)$ je nenáhodný diskontní faktor a $v_1(t)$ je náhodná veličina, obojí definované v předchozí kapitole. $P(t, r)$ je hodnota jednotkového bezkupónového dluhopisu splatného za dobu t, za předpokladu, že počáteční hodnota okamžité úrokové intenzity je r.

Postupně ukážeme, že veličina $v_1(t)$ má logaritmicko normální rozložení.

V následujících dvou kapitolách ukážeme, jak bychom modelovali okamžitou úrokovou intenzitu pomocí Hull-Whiteova modelu a pomocí Vašíčkova modelu. Výpočet diskontované rezervy, uvedený v kapitole 2.9 a 2.10, jsme provedli pouze za použití Vašíčkova modelu.

2.8.1 Hull-Whiteův model

Hull-Whiteův model okamžité úrokové intenzity r_t vychází z předpokladu, že

$$dr_t = (\rho(t) - ar_t)dt + bdW_t,$$

kde $\rho(t)$ zvolíme jako funkci tržní výnosové křivky $f^M(0,t)$ ve tvaru

$$\rho(t) = f^M(0,t)' + af^M(0,t) + \varphi(t), \tag{2.37}$$

a, b jsou parametry a W_t je Wienerův proces.
Tržní výnosová křivka se vztahuje na období $(0,t)$. Čárkou je značena derivace výnosové křivky podle času t. Funkci $\varphi(t)$ později dopočítáme.

Pro e^{at} platí

$$d(e^{at}r_t) = ae^{at}r_tdt + e^{at}dr_t = ae^{at}r_tdt + e^{at}((\rho(t) - ar_t)dt + bdW_t) = e^{at}\rho(t)dt + e^{at}bdW_t.$$

Potom pro $s < u$ platí

$$\begin{aligned} e^{au}r_u &= e^{as}r_s + \int_s^u e^{at}\rho(t)dt + \int_s^u e^{at}bdW_t, \\ r_u &= e^{-a(u-s)}r_s + \int_s^u e^{-a(u-t)}\rho(t)dt + b\int_s^u e^{-a(u-t)}dW_t. \end{aligned}$$

Dále dostáváme

$$\int_s^t r_udu = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(t-s)})r_s + \frac{1}{a}\int_s^t (1 - e^{-a(t-z)})\rho(z)dz + \frac{b}{a}\int_s^t (1 - e^{-a(t-z)})dW_z. \tag{2.38}$$

Nechť je dále $s = 0$. Potom

$$r_u = e^{-au}r_0 + \int_0^u e^{-a(u-z)}\rho(z)dz + b\int_0^u e^{-a(u-z)}dW_z, \tag{2.39}$$

kde r_u má normální rozdělení $N(e^{-au}r_0 + \int_0^u e^{-a(u-z)}\rho(z)dz, \frac{b^2}{2a}(1 - e^{-2au}))$.

Střední hodnota a rozptyl r_u jsou odvozeny na základě následujících úvah

$$Eb\int_0^u e^{-a(u-z)}dW_z = 0,$$

$$\begin{aligned} Er_u &= e^{-au}r_0 + \int_0^u e^{-a(u-z)}\rho(z)dz + Eb\int_0^u e^{-a(u-z)}dW_z = \\ &= e^{-au}r_0 + \int_0^u e^{-a(u-z)}\rho(z)dz, \\ Var\ r_u &= Var\ b\int_0^u e^{-a(u-z)}dW_z = b^2\int_0^u (e^{-a(u-z)})^2dz = \\ &= \frac{b^2}{2a}(1 - e^{-2au}). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Protože integrál (2.38) má normální rozložení a okamžitá úroková intenzita je r, platí

$$\begin{aligned} P(t,r) &= exp(-E\int_0^t r_u du + \frac{1}{2}\, Var \int_0^t r_u du) = \\ &= \frac{1}{a}(1-e^{-at})r + \frac{1}{a}\int_s^t (1-e^{-a(t-z)})\rho(z)dz + \\ &+ \frac{b^2}{2a^2}(t - \frac{2}{a}(1-e^{-at}) + \frac{1}{2a}(1-e^{-2at})). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Střední hodnota a rozptyl integrálu (2.38) pro $s = 0$ vychází z těchto úvah

$$E\frac{b}{a}\int_0^t (1-e^{-a(t-z)})dW_z = 0,$$

$$E\int_0^t r_u du = \frac{1}{a}(1-e^{-at})r_0 + \frac{1}{a}\int_0^t (1-e^{-a(t-s)})\rho(z)dz, \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} Var\int_0^t r_u du &= Var\ \frac{b}{a}\int_0^t (1-e^{-a(t-z)})dW_z = \\ &= \frac{b^2}{a^2}\int_0^t (1-e^{-a(t-z)})^2 dz = \\ &= \frac{b^2}{a^2}(t - \frac{2}{a}(1-e^{-at}) + \frac{1}{2a}(1-e^{-2at})). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Náhodná veličina $v_1(t) = P(t, r_1)$ má tedy logaritmicko normální rozložení. Odvoďme dále tvar funkce $\varphi(t)$ pro určení $\rho(t)$, která je vyjádřena pomocí (2.37). Má platit

$$-\frac{\partial}{\partial t} lnP(t,r) = f^M(0,t).$$

Derivací logaritmovaného vztahu (2.41) obdržíme

$$e^{-at}r + \int_0^t e^{-a(t-z)}\rho(z)dz - \frac{b^2}{2a^2}(1-2e^{-at}+e^{-2at}) = f^M(0,t). \tag{2.44}$$

Po dosazení (2.37) za $\rho(z)$ upravíme levou stranu rovnosti

$$e^{-at}r + \int_0^t e^{-a(t-z)}(f^M(0,z)' + af^M(0,z) + \varphi(z))dz - \frac{b^2}{2a^2}(1-2e^{-at}+e^{-2at}) =$$

$$= e^{-at}r + e^{-at}\int_0^t e^{az}(f^M(0,z)' + af^M(0,z)) + e^{-at}\int_0^t e^{az}\varphi(z))dz - \cdots =$$

$$= e^{-at}r + e^{-at}[e^{az}(f^M(0,z)]_{z=0}^t + \cdots =$$

$$= e^{-at}r + e^{-at}[e^{at}(f^M(0,t) - f^M(0,0)] + \cdots =$$

$$= e^{-at}(r - f^M(0,0)) + f^M(0,t) + e^{-at}\int_0^t e^{az}\varphi(z))dz - \frac{b^2}{2a^2}(1-2e^{-at}+e^{-2at}).$$

Srovnáním s pravou stranou vztahu (2.44) a položením $r = f^M(0,0)$ dostáváme

$$\int_0^t e^{az}\varphi(z)dz = \frac{b^2}{2a^2}(1-e^{-at})^2 e^{at}. \tag{2.45}$$

Derivací obou stran podle t máme

$$e^{at}\varphi(t) = \frac{b^2}{2a^2}(1-e^{-at})e^{at} + \frac{b^2}{2a}(1-e^{-at})^2 e^{at} = \frac{b^2}{2a}(1-e^{-2at}).$$

Funkci $\rho(t)$ tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\rho(t) = f^M(0,t)' + af^M(0,t) + \frac{b^2}{2a}(1-e^{-2at}), \tag{2.46}$$

za předpokladu, že okamžitá úroková intenzita je $f^M(0,0)$.

2.8.2 Vašíčkův model

Budeme-li okamžitou úrokovou intenzitu modelovat pomocí Vašíčkova modelu, vyjdeme z rovnice pro r_t, která má tvar

$$dr_t = (\theta - ar_t)dt + \delta dW_t,$$

kde θ, a, δ jsou známé kladné konstanty. Dále platí

$$d(e^{at}r_t) = ae^{at}r_t dt + e^{at}dr_t = ae^{at}r_t dt + e^{at}((\theta - ar_t)dt + \delta dW_t) = \theta e^{at}dt + \delta e^{at}dW_t.$$

Pro $s < u$ máme

$$e^{au}r_u = e^{as}r_s + \theta\int_s^u e^{at}dt + \delta\int_s^u e^{at}dW_t,$$

$$r_u = e^{-a(u-s)}r_s + \theta\int_s^u e^{-a(u-t)}dt + \delta\int_s^u e^{-a(u-t)}dW_t.$$

Pro $s = 0$ dostáváme

$$r_u = \frac{\theta}{a} + e^{-au}(r_0 - \frac{\theta}{a}) + \delta\int_0^u e^{-a(u-t)}dW_t.$$

Nechť $r_t = x_0$. Pro integrál z intenzity na intervalu $[t,T]$ platí

$$\begin{aligned}\int_t^T r_s ds &= \int_0^{T-t} r_{t+u}du = \qquad (2.47)\\ &= \frac{\theta}{a}(T-t) + \frac{1}{a}(1-e^{-a(T-t)})(x_0 - \frac{\theta}{a}) + \frac{\delta}{a}\int_0^{T-t}(1-e^{-a(T-t-s)})d\bar{W}_s,\end{aligned}$$

kde $\bar{W}_s = W_{t+s} - W_t$. Protože integrál má normální rozložení, vyjádříme

$$\begin{aligned}P_t(T) &= E\{exp(-\int_t^T r_s ds)/r_t = x_0\} = \\ &= exp(-E\int_t^T r_s ds + \frac{1}{2}Var\int_t^T r_s ds), \qquad (2.48)\end{aligned}$$

kde střední hodnotu a rozptyl integrálu z intenzity jsme stanovili jako

$$E\int_t^T r_s ds = \frac{\theta}{a}(T-t) + \frac{1}{a}(1-e^{-a(T-t)})(x_0 - \frac{\theta}{a}), \quad (2.49)$$

$$Var\int_t^T r_s ds = \frac{\delta^2}{a^2}\int_0^{T-t}(1-e^{-(T-t-s)})^2 ds. \quad (2.50)$$

$P_t(T)$ odpovídá diskontnímu faktoru na období $[t, T]$, přičemž předpokládáme, že okamžitá úroková intenzita v čase t je rovna x_0.

2.9 Odhad diskontované rezervy v čase 0

Rezervu v čase 0 budeme modelovat s využitím Vašíčkova modelu úrokové intenzity.

Položme $t = 0$ a uvažujme, že známe r_0. Za T budeme dosazovat pořadí jednotlivých vývojových let, tedy T bude odpovídat $i + j - 1$ pro $i + j > 0$. Přeznačíme-li $P_0(T)$ jako $v_0(i+j-1)$ v závislosti na počáteční úrokové intenzitě r_0, dostaneme hodnoty jednotlivých diskontních faktoru pro příslušné vývojové roky. Na základě znalosti těchto diskontních faktorů potom stanovíme diskontovanou hodnotu rezervy na škody na konci roku 0 jako

$$\hat{R}_0 = \sum_{i+j>0} \hat{P}_{i,j} v_0(i+j-1). \quad (2.51)$$

Pokračování příkladu 1

Úrokovou intenzitu spočítáme Vašíčkovým modelem. Jako hodnoty vstupních parametrů δ, a, θ uvažujeme

$$\begin{aligned}\delta &= 0,000802,\\ a &= 0,313631,\\ \theta &= 0,007527144.\end{aligned}$$

Hodnoty vstupních parametrů jsou převzaty z Klečková [4] a upraveny dle charakteru našeho modelu.

Po dosazení vstupních parametrů do vztahů (2.49), (2.50) a (2.48) a po volbě

$$x_0 = r_0 = 0,0239,$$

určíme jednotlivé diskontní faktory jako

$$\begin{aligned}&(v_0(0), v_0(1), \ldots, v_0(5)) =\\ &= (1,0000;\ 0,9764;\ 0,9533;\ 0,9307;\ 0,9087;\ 0,8872).\end{aligned}$$

Z těchto diskontních faktorů a ze znalosti odhadnutých výší v budoucnu zaplacených škod, které jsme již vypočítali v kapitole 2.5, stanovíme trojúhelník diskontovaných hodnot v budoucnu zaplacených škod a diskontovanou rezervu

	1	2	3	4	5	6
-5						335,39
-4					663,6	358,68
-3				1055,2	596,4	322,35
-2			1513	1114	629,61	340,3
-1		2746,8	1781,3	1311,5	741,21	400,61
0	5632,1	3299,2	2139,4	1575,1	890,2	481,13

$$\hat{R}_0^d = 27\ 927.$$

Pro porovnání uvádíme i hodnotu nediskontované rezervy, stanovenou již dříve v kapitole (2.5),

$$\hat{R}_0 = 28\ 705.$$

Pokračování příkladu 2

Pro výpočty uvažujeme stejné vstupní parametry jako v příkladě prvním. Hodnoty diskontních faktorů stanovíme jako

$$(v_0(0), v_0(1), \ldots, v_0(7)) =$$
$$= (1,0000;\ 0,9764;\ 0,9533;\ 0,9307;\ 0,9087;\ 0,8872;\ 0,8661;\ 0,8456).$$

Trojúhelník diskontovaných škod obsahuje hodnoty

	1	2	3	4	5	6	7	8
-7								83024,59
-6							153204,68	105731,79
-5						475362,58	185196,82	127807,88
-4					1039754,41	534585,56	208265,02	143725,38
-3				2382084,10	1593788,82	819422,34	319227,22	220298,64
-2			2617007,79	1684702,93	1127165,23	579505,58	225758,71	155794,66
-1		1086284,62	1207639,55	777403,00	520119,91	267404,24	104172,08	71888,02
0	133931,65	498720,86	554423,71	356897,65	238778,79	122759,95	47823,01	33001,98

Diskontovaná rezerva je rovna

$$\hat{R}_0^d = 20\ 802\ 664.$$

Hodnota nediskontované rezervy, uvedená v kapitole (2.5), je

$$\hat{R}_0 = 21\ 432\ 236.$$

Pokračování příkladu 3

Pro výpočty budeme uvažovat stejné vstupní parametry jako v příkladě prvním. Hodnotu posledního diskontního faktoru stanovíme rovnou

$$v_0(8) = 0,8256.$$

Trojúhelník diskontovaných škod obsahuje hodnoty

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-8									107371,57
-7								378729,29	96901,74
-6							230405,15	330937,42	84671,87
-5						354961,08	251393,78	361076,15	92381,52
-4					409393,30	356985,79	252822,24	363122,00	92903,83
-3				662951,51	434360,74	378748,86	268230,83	385248,34	98563,92
-2			1263589,82	705056,49	461937,57	402788,50	285252,34	409691,94	104817,01
-1		1087101,99	1077815,58	601385,32	394008,15	343553,02	243299,97	349435,82	89400,45
0	941218,67	944628,66	936538,97	522549,25	342353,20	298510,15	211399,78	303618,22	77678,10

Diskontovaná rezerva je rovna

$$\hat{R}_0^d = 18\ 389\ 790.$$

Hodnota nediskontované rezervy, uvedená v kapitole (2.5), je pro porovnání

$$\hat{R}_0 = 19\ 264\ 571.$$

2.10 Odhad diskontované rezervy v čase 1

Modelujme dále rezervu v čase 1 taktéž s využitím Vašíčkova modelu úrokové intenzity. Diskontní faktory v čase 1 jsou náhodnými veličinami. Při jejich modelování budeme vycházet z následující představy.

Počáteční hodnota x_0 v rovnosti 2.48 odpovídá úrokové intenzitě r_1, která je náhodnou veličinou, pro kterou platí

$$r_1 = \frac{\theta}{a} + e^{-a}(r_0 - \frac{\theta}{a}) + \delta \int_0^1 e^{-a(1-s)} dW_s.$$

Střední hodnota a rozptyl r_1 jsou potom

$$\begin{aligned}
Er_1 &= \frac{\theta}{a} + e^{-a}(r_0 - \frac{\theta}{a}) + E\delta \int_0^1 e^{-a(1-s)} dW_s = \\
&= \frac{\theta}{a} + e^{-a}(r_0 - \frac{\theta}{a}), \\
Var\ r_1 &= Var\delta \int_0^1 e^{-a(1-s)} dW_s = \delta^2 \int_0^1 e^{-2a(1-s)} ds = \\
&= \frac{\delta^2}{2a}(1 - e^{-2a}).
\end{aligned}$$

Po dosazení do vztahu 2.47 potom pro integrál z intenzity platí

$$\begin{aligned}
\int_1^T r_s ds &= \frac{\theta}{a}(T-1) + \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-1)})\Big(\frac{\theta}{a} + e^{-a}(r_0 - \frac{\theta}{a}) + \delta \int_0^1 e^{-a(1-s)} dW_s - \frac{\theta}{a}\Big) + \\
&+ \frac{\delta}{a} \int_0^{T-1} (1 - e^{-a(T-1-s)}) d\bar{W}_s
\end{aligned}$$

Střední hodnota a rozptyl integrálu potom vychází

$$\begin{aligned}
E \int_1^T r_s ds &= \frac{\theta}{a}(T-1) + \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-1)})\Big(e^{-a}(r_0 - \frac{\theta}{a})\Big), && (2.52) \\
Var \int_1^T r_s ds &= Var\ \Big(\frac{\delta}{a}(1 - e^{-a(T-1)}) \int_0^1 e^{-a(1-s)} dW_s + \frac{\delta}{a} \int_0^{T-1} (1 - e^{-a(T-1-s)}) d\bar{W}_s\Big) = \\
&= \frac{\delta^2}{a^2}(1 - e^{-a(T-1)})^2 \int_0^1 e^{-2a(1-s)} ds + \frac{\delta^2}{a^2} \int_0^{T-1} (1 - e^{-a(T-1-s)})^2 ds = \\
&= \frac{\delta^2}{2a^3}(1 - e^{-a(T-1)})^2 (1 - e^{-2a}) + \frac{\delta^2}{a^2} \int_0^{T-1} (1 - e^{-a(T-1-s)})^2 ds.
\end{aligned}$$

Pro $t = 1$ potom platí

$$\begin{aligned}
P_1(T) &= E\{exp(-\int_1^T r_s ds)/r_0 = x_0\} = \\
&= exp(-E \int_1^T r_s ds + \frac{1}{2} Var \int_1^T r_s ds), && (2.53)
\end{aligned}$$

Za T budeme dále dosazovat pořadí jednotlivých vývojových let, tedy T bude odpovídat $i + j - 2$ pro $i + j > 1$. Přeznačíme-li $P_1(T)$ jako $v_1(i + j - 2)$ v závislosti na počáteční úrokové intenzitě r_1. dostaneme hodnoty jednotlivých diskontních faktorů pro příslušné vývojové roky. Na základě znalosti těchto diskontních faktorů potom stanovíme diskontovanou hodnotu rezervy na škody na konci roku 1 jako

$$\hat{R}_1^d = \sum_{i+j>1} \tilde{Q}_{i,j} v_1(i+j-2). \tag{2.54}$$

Pro diskontovanou rezervu na škody vytvářenou na konci roku 1 obdržíme v jednotlivých příkladech níže uvedené hodnoty a vývojové trojúhelníky.

Pokračování příkladu 1

$$\bar{R}_1^d = \sum_{i+j>1} \bar{Q}_{i,j} v_1(i+j-2)$$

$$\bar{R}_1^d = 32\ 782.$$

Pro porovnání uvádíme nediskontovanou rezervu

$$\bar{R}_1 = 33\ 705.$$

Trojúhelník diskontovaných hodnot v čase 1 obsahuje následující údaje

	1	2	3	4	5	6
-4						367,36
-3					627,64	331,65
-2				1146,15	663,20	350,43
-1			1715,61	1328,74	768,84	406,25
0		3262,41	2036,55	1577,29	912,64	482,23
1	6894,85	3908,85	2440,05	1889,77	1093,44	577,75

Pokračování příkladu 2

$$\bar{R}_1^d = 14\ 095\ 984.$$

Pro porovnání uvádíme nediskontovanou rezervu

$$\bar{R}_1 = 14\ 467\ 147.$$

Trojúhelník diskontovaných hodnot v čase 1 obsahuje následující údaje

	1	2	3	4	5	6	7	8
-6								108290,69
-5							154447,12	127581,49
-4						513427,21	172096,84	142158,89
-3					1601471,44	784487,44	262950,06	217204,78
-2				1792688,49	1141286,27	559055,16	187385,91	154785,14
-1			1265567,12	831989,19	529664,31	259451,25	86962,95	71832,96
0		564395,64	600669,95	394876,85	251385,19	123137,68	41273,06	34092,13
1	80190,52	292386,75	311173,94	204561,53	130226,15	63789,13	21380,62	17660,63

Pokračování příkladu 3

$$\bar{R}_1^d = 18\ 168\ 045.$$

Pro porovnání uvádíme nediskontovanou rezervu

$$\bar{R}_1 = 19\ 037\ 783.$$

Trojúhelník diskontovaných hodnot v čase 1 obsahuje následující údaje

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-7									99246,95
-6								365070,35	87439,34
-5							282899,52	403032,80	96530,38
-4						430358,22	291209,63	414865,37	99363,25
-3					384999,77	445725,31	301603,38	429667,63	102907,60
-2				677863,81	404295,75	468057,57	316711,01	451186,22	108060,72
-1			1193503,53	589581,95	351636,68	407088,90	275454,18	392409,25	93982,97
0		1008238,51	1051421,14	519386,24	309767,20	358613,58	242652,09	345678,07	82790,45
1	851631,20	883357,29	921177,02	455042,35	271389,49	314182,17	212587,03	302846,83	72532,11

Upravme ještě vyjádření úrokové intenzity v čase 1 a její střední hodnoty takto

$$\begin{aligned} v_1 &= exp\Big(-\frac{\theta}{a}(T-1) - \frac{1}{a}(1-e^{-a(T-1)})(x-\frac{\theta}{a}) + \frac{\delta^2}{2a^2}\int_0^{T-1}(1-e^{-a(T-1-s)})^2 ds\Big) \\ Ev_1 &= Ee^{c_1+c_2x} = exp\ (c_1 + c_2Ex + \frac{1}{2}c_2^2 Var\ x), \end{aligned} \tag{2.55}$$

kde x je náhodná veličina reprezentující okamžitou úrokovou intenzitu r_1,

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{\theta}{a}(T-1) - \frac{1}{a}(1-e^{-a(T-1)})(-\frac{\theta}{a}) + \frac{\delta^2}{2a^2}\int_0^{T-1}(1-e^{-a(T-1-s)})^2 ds \\ c_2 &= -\frac{1}{a}(1-e^{-a(T-1)}) \end{aligned} \tag{2.56}$$

a

$$Ex = \frac{\theta}{a} + e^{-a}(r_0 - \frac{\theta}{a}), \tag{2.57}$$

$$Var\ x = \frac{\delta^2}{2a}(1-e^{-2a}). \tag{2.58}$$

Takto upravené vyjádření použijeme pro výpočty v kapitole Výpočet požadovaného kapitálu.

2.11 Investiční riziko

Investiční riziko, vyjádřené v kapitole 2.7 jako

$$\sum_k R_k A_k,$$

budeme modelovat jako násobek volného kapitálu pojišťovny na konci roku 0. V modelu použijeme náhodné veličiny ϵ_1 a ϵ_2 s normálním rozdělením, z nichž ϵ_1 vyjadřuje závislost na škodním průběhu a ϵ_2 vyjadřuje závislost na vývoji výnosové křivky. Budeme předpokládat, že obě náhodné veličiny jsou nezávislé. Investiční riziko modelujeme takto

$$\sum_k R_k A_k \cong e^{\epsilon_1+\epsilon_2+c}u,$$

kde c je konstanta.

Rozdělení veličin je následující

$$\epsilon_1 \sim N(0, \sigma^2),$$

$$\epsilon_2 \sim N(0, Varx) \sim N(0, \frac{\delta^2}{2a}(1-e^{-2a})).$$

Kovariance s $\xi_{i,j}$ a x položíme rovny

$$\begin{aligned} Cov(\epsilon_1, \xi_{i,j}) &= \sigma^2, \\ Cov(\epsilon_2, x) &= \frac{\delta^2}{2a}(1-e^{-2a}), \end{aligned} \tag{2.59}$$

přičemž předpokládáme, že ϵ_1 a x jsou nezávislé a ϵ_2 a $\xi_{i,j}$ jsou také nezávislé.

Kapitola 3

Výpočet požadovaného kapitálu

V této kapitole budeme vycházet ze Schnieperova modelu pro stanovení požadovaného kapitálu popsaného v první kapitole Schnieperův model. Náhodné veličiny použité v modelu popisuje podrobně kapitola druhá o rozšíření Schnieperova modelu.

3.1 Odvození rovnice pro celkový požadovaný kapitál

Nyní odvodíme rovnici pro požadovaný kapitál u a následně i vztahy pro určení kapitálu u_i alokovaného dílčímu riziku. Připomeňme, že požadovaný kapitál určujeme na konci roku 0 na období jednoho roku.

Upravme vztah 1.5, uvedený v kapitole Schnieperův model, takto

$$u = -\frac{F^{-1}(\epsilon)\sigma(\Delta u)}{1+\rho},$$

kde α jsme položili rovno jedné.

Pro směrodatnou odchylku Δu platí

$$\sigma(\Delta u) = \sqrt{Var\Delta u} = \sqrt{Var\Delta U},$$

kde rozptyl ΔU je součtem kovariancí jednotlivých složek ΔU (viz kap. 2.7), přičemž jedna ze složek obsahuje samotné u. Tyto složky ΔU obsahují ve svém vyjádření následující náhodné veličiny $P_{i,j}, \hat{P}_{i,j}, \tilde{Q}_{i,j}$ a v_1. Další náhodnou složkou je vyjádření výnosu z aktiv $e^{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon}u$, které v sobě zahrnuje vyjádření požadovaného kapitálu u.

Zapišme vztah pro změnu rizikového kapitálu jako součet deseti sčítanců

$$\begin{aligned}
\Delta U \;=\;& \Pi - \\
& -P_{1,0} - \sum_{j=1}^{r} \tilde{Q}_{1,j} v_1(j-1) - \\
& - \sum_{i=0}^{r-1} P_{-i,i+1} + \sum_{i=0}^{r-1} \hat{P}_{-i,i+1} + \sum_{i+j>1} \hat{P}_{i,j} v_1(i+j-2) - \qquad (3.1) \\
& - \sum_{\substack{i+j>1 \\ i=0,\ldots,-(r-2)}} \tilde{Q}_{i,j} v_1(i+j-2) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \sum_{i+j>1} \hat{P}_{i,j} v_0(i+j-1) - \sum_{i+j>1} \hat{P}_{i,j} v_1(i+j-2) + \\
& + \sum_k R_k A_k = \\
= \; & \Pi - \\
& - e^{a_{1,0}+\epsilon_{1,0}} - \sum_{j=1}^{r} e^{\tilde{Z}_{1,j}+\frac{\sigma^2}{2}} e^{c_1^{j-1}+c_2^{j-1}x} - \\
& - \sum_{i=0}^{r-1} e^{a_{-i}+b_{i+1}+\epsilon_{-i,i+1}} + \sum_{i=0}^{r-1} e^{\hat{Y}_{-i,i+1}+\frac{\sigma^2}{2}} \\
& + \sum_{i+j>1} e^{\hat{Y}_{i,j}+\frac{\sigma^2}{2}} e^{c_1^{i+j-2}+c_2^{i+j-2}x} - \sum_{\substack{i+j>1 \\ i=0,\dots,-(r-2)}} e^{\tilde{Z}_{i,j}+\frac{\sigma^2}{2}} e^{c_1^{i+j-2}+c_2^{i+j-2}x} + \\
& + \sum_{i+j>1} e^{\hat{Y}_{i,j}+\frac{\sigma^2}{2}} v_0(i+j-1) - \sum_{i+j>1} e^{\hat{Y}_{i,j}+\frac{\sigma^2}{2}} e^{c_1^{i+j-2}+c_2^{i+j-2}x} + \\
& + e^{\epsilon_1+\epsilon_2+c} u.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Náhodné složky se vyskytují ve druhém až desátém sčítanci vztahu 3.2. Utvořme matici kovariancí těchto sčítanců o rozměrech 9×9. Matici označme M. Prvky této matice, které se vyskytují v posledním sloupci a posledním řádku obsahují ve svém vyjádření požadovaný kapitál u. Prvek na místě $[9,9]$

$$
Var(e^{\epsilon_1+\epsilon_2+c} u) = u^2 Var(e^{\epsilon_1+\epsilon_2+c})
$$

obsahuje druhou mocninu požadovaného kapitálu u^2.

Označme souhrnně součet prvků matice M v prvním až osmém sloupci a prvním až osmém řádku k_1. Součet posledního sloupce a posledního řádku s výjimkou posledního prvku $M_{9,9}$ má tvar $k_2 u$, kde k_2 je konstanta. Prvek $M_{9,9}$ má vyjádření $k_3 u^2$.

Pro $\sigma(\Delta u)$ potom platí

$$
\sigma(\Delta u) = \left(k_1 + k_2 u + k_3 u^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3}
$$

kde k_1, k_2 a k_3 jsou konstanty a u je neznámá. Neznámé u určíme z následující rovnice

$$
u = -\frac{F^{-1}(\epsilon)\sqrt{k_1 + k_2 u + k_3 u^2}}{1+\rho}, \tag{3.4}
$$

$$
(1+\rho)^2 u^2 = \left(F^{-1}(\epsilon)\right)^2 (k_1 + k_2 u + k_3 u^2),
$$

$$
0 = u^2\Big((1+\rho)^2 - \left(F^{-1}(\epsilon)\right)^2 k_3\Big) + u\Big(-\left(F^{-1}(\epsilon)\right)^2 k_2\Big) - \left(F^{-1}(\epsilon)\right)^2 k_1. \tag{3.5}
$$

3.2 Požadovaný kapitál pro dílčí rizika

Kapitál alokovaný dílčímu riziku U_i stanovíme na základě znalosti u takto

$$
u_i = u\frac{Cov(U_i, \Delta u)}{\sigma^2(\Delta u)}, \tag{3.6}
$$

kde $Cov(U_i, \Delta u)$, pro $i = 1, 2, 3$, tj. pro rizika závislá na složkách $P_{i,j}, \hat{P}_{i,j}, \tilde{Q}_{i,j}$ a v_1, určíme následujícím postupem.

U_1 je odvozeno od rizika C_1, které je součtem druhého a třetího sčítance ve vztahu pro rizikový kapitál 3.2. Kovariance $Cov(U_1, \Delta u)$ je potom součtem prvního a druhého sloupce matice M, přičemž tento součet lze vyjádřit jako $k_1^1 + k_2^1 u$, kde k_1^1 odpovídá součtu prvků matice M

$$k_1^1 = \sum_{i=1,\dots,8;j=1,2} M_{i,j}$$

a pro $k_2^1 u$ platí

$$k_1^2 u = M_{9,1} + M_{9,2}.$$

Podobně pro kovariance $Cov(U_i, \Delta u)$, pro $i = 2, 3$

$$Cov(U_i, \Delta u) = k_1^i + k_2^i u,$$

kde

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \sum_{i=1,\dots,8;j=3,4,5,6} M_{i,j}, \\ k_2^2 u &= M_{9,3} + M_{9,4} + M_{9,5} + M_{9,6}, \\ k_1^3 &= \sum_{i=1,\dots,8;j=7,8} M_{i,j}, \\ k_2^3 u &= M_{9,7} + M_{9,8}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Potom platí

$$u_i = u \frac{k_1^i + k_2^i u}{k_1 + k_2 u + k_3 u^2}. \tag{3.8}$$

Pro riziko vývoje hodnoty aktiv pojišťovny, které je odvozeno od celkové výše požadovaného kapitálu, obdržíme kovariance

$$\begin{aligned} Cov(U_4, \Delta u) &= Cov(e^{\epsilon_1+\epsilon_2+c} u, \Delta u) = \\ &= \sum_{i=1,\dots,8;j=9} M_{i,j} + M_{9,9} = \\ &= k_1^4 u + k_2^4 u^2, \end{aligned} \tag{3.9}$$

kde

$$\begin{aligned} k_1^4 u &= \sum_{i=1,\dots,8;j=9} M_{i,j}, \\ k_2^4 u^2 &= M_{9,9} = u^2 Var(e^{\epsilon_1+\epsilon_2+c}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Kapitál alokovaný riziku vývoje aktiv stanovíme jako

$$u_4 = u \frac{k_1^4 u + k_2^4 u^2}{k_1 + k_2 u + k_3 u^2}. \tag{3.11}$$

3.3 Výpočet kovariancí

V této kapitole nastíníme výpočet kovariancí $Cov(U_i, \Delta u)$ a $\sigma(\Delta u)$. Nebudeme uvádět detailní popis všech výpočtů, ale zvolíme pouze některé kroky výpočtu, na kterých ukážeme postup. Další výpočty, které je třeba provést pro určení zbylých kovariancí, probíhají analogicky.

Budeme se zabývat určením kovariancí $Cov(U_1, \Delta u)$, kde U_1 odpovídá technickému riziku C_1, tj.

$$-P_{1,0} - \sum_{j=1}^{r} \tilde{Q}_{1,j} v_1(j-1).$$

Platí

$$\begin{aligned} Cov(U_i, \Delta u) &= Cov(C_i, \Delta u) = \\ &= Cov(-P_{1,0} - \sum_{j=1}^{r} \tilde{Q}_{1,j} v_1(j-1), \Delta u). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Náhodné veličiny $P_{1,0}, \tilde{Q}_{1,j}$ a $v_1(j-1)$ mají logaritmicko-normální rozložení. Δu rozložíme na složky stejně jako ΔU. Uvažujme dále kovarianci

$$Cov(U_1, -P_{1,0}) = Cov(-P_{1,0} - \sum_{j=1}^{r} \tilde{Q}_{1,j} v_1(j-1), -P_{1,0}).$$

Pro libovolné náhodné veličiny a, b, c, d platí

$$\begin{aligned} Cov(a+bc, d) &= Cov(a,d) + Cov(bc, d), \\ Cov(bc, d) &= Ebcd - EbcEd, \\ Var(a+b+c) &= Var\ a + Var\ b + Var\ c + 2Cov(a,b) + 2Cov(b,c) + 2Cov(a,c), \\ Var(a+b+c+d) &= Var\ a + Var\ b + Var\ c + Var\ d + 2Cov(a,b) + 2Cov(b,c), \\ & +2Cov(a,c) + 2Cov(a,d) + 2Cov(b,d) + 2Cov(c,d), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(e^a e^b, e^c e^d) &= Ee^{a+b+c+d} - Ee^{a+b} Ee^{c+d} = \\ &= e^{E(a+b+c+d) + \frac{1}{2} Var(a+b+c+d)} - e^{E(a+b) + \frac{1}{2} Var(a+b) + E(c+d) + \frac{1}{2} Var(c+d)}. \end{aligned}$$

V našem případě tedy máme

$$\begin{aligned} Cov(U_1, -P_{1,0}) &= Var(P_{1,0}) + \sum_{j=1}^{r} Cov(\tilde{Q}_{1,j} v_1(j-1), P_{1,0}) = \\ &= E(P_{1,0})^2 - (EP_{1,0})^2 + \\ &+ \sum_{j=1}^{r} \left\{ E(\tilde{Q}_{1,j} v_1(j-1) P_{1,0}) - E(\tilde{Q}_{1,j} v_1(j-1)) EP_{1,0} \right\}. \end{aligned}$$

Pro jednotlivé členy napravo platí

$$E(P_{1,0})^2 = Ee^{2(a_1+\epsilon_{1,0})} = e^{2a_1 + E\epsilon_{1,0} + \frac{1}{2} Var \epsilon_{1,0}} = e^{2a_1 + 2\sigma^2}, \tag{3.13}$$

$$(EP_{1,0})^2 = (Ee^{a_1+\epsilon_{1,0}})^2 = (e^{a_1 + \frac{1}{2}\sigma^2}) = e^{2a_1+\sigma^2}, \tag{3.14}$$

$$
\begin{aligned}
E(\tilde{Q}_{1,j}v_1(j-1)P_{1,0}) &= Ee^{\tilde{Z}_{1,j}+\frac{1}{2}\sigma^2}e^{c_1^j+c_2^jx}e^{a_1+\epsilon_{1,0}} = \\
&= e^{E(\tilde{Z}_{1,j}+c_2^jx+\epsilon_{1,0})+\frac{1}{2}Var(\tilde{Z}_{1,j}+c_2^jx+\epsilon_{1,0})+\frac{1}{2}\sigma^2+c_1^j+a_1},
\end{aligned}
$$

kde pro jednotlivé členy v exponentu platí

- $E\tilde{Z}_{1,j}$ je prvkem matice $X_f(X^TX)^{-1}X^TEZ$,
- $Ex = \frac{\theta}{a} + e^{-a}(r_0 - \frac{\theta}{a})$,
- $E\epsilon_{1,0} = 0$,
- $Var\tilde{Z}_{1,j}$ určíme jako prvky matice $X_f(X^TX)^{-1}X^TVarZX(X^TX)^{-1}X_f^T$,
- $Varx = \frac{\delta^2}{2a}(1 - e^{-2a})$,
- $Var\epsilon_{1,0} = \sigma^2$,
- $Cov(\tilde{Z}_{1,j}, x)$ a $Cov(x, \epsilon_{1,0})$ jsou rovny 0, což plyne z nezávislosti veličin,
- $Cov(\tilde{Z}_{1,j}, \epsilon_{1,0})$ je nenulová.

$Cov(\tilde{Z}_{1,j}, \epsilon_{1,0})$ určíme za použití vyjádření $\tilde{Z}$

$$\tilde{Z} = X_f(X^TX)^{-1}X^TZ.$$

Označíme-li

$$G = X_f(X^TX)^{-1}X^T,$$

pak její řádek v pořadí na $\frac{r(r-3)}{2} + j$ místě vynásobený vektorem Z odpovídá prvku $\tilde{Z}_{1,j}$. Poslední prvek na tomto řádku matice G (tj. ve sloupci $\frac{(r+2)(r+1)}{2}$) určuje konstantu, kterou je násobena složka $\epsilon_{1,0}$ vektoru Z. Hodnotu tohoto prvku matice G označíme $G(j)$. Potom

$$Cov(\tilde{Z}_{1,j}, \epsilon_{1,0}) = G(j)\sigma^2.$$

Pro poslední člen $Cov(U_1, -P_{1,0})$ platí

$$
\begin{aligned}
E(\tilde{Q}_{1,j}v_1(j-1))EP_{1,0} &= Ee^{\tilde{Z}_{1,j}+\frac{1}{2}\sigma^2}e^{c_1^j+c_2^jx}Ee^{a_1+\epsilon_{1,0}} = \\
&= e^{E(\tilde{Z}_{1,j}+c_2^jx+\epsilon_{1,0})+\frac{1}{2}Var(\tilde{Z}_{1,j}+c_2^jx)+\frac{1}{2}Var\epsilon_{1,0}+\frac{1}{2}\sigma^2+c_1^j+a_1}.
\end{aligned}
$$

Takto stanovená kovariance $Cov(U_1, -P_{1,0})$ odpovídá součtu prvků matice M na místech $M_{1,1}$ a $M_{1,2}$.

3.4 Stanovení požadovaného kapitálu za užití dat

Abychom stanovili všechny kovariance potřebné pro výpočet požadovaného kapitálu, určíme nejprve matici kovariancí M mezi devíti náhodnými sčítanci ve vzorci 3.2. Připomeňme, že poslední sloupec matice kovariancí je násobkem u a prvek na místě [9, 9] násobek u^2. V tabulkách budeme uvádět pouze matice s číselnými hodnotami, tedy u a u^2 budeme v maticích vynechávat.

Parametr ρ, který reprezentuje očekávaný výnos pojišťovny, položíme rovný hodnotě 30%, která se pohybuje v rozmezí hodnot očekávaného výnosu uvedených v Mandl [6] nebo Pilcová [7].

Za hodnotu konstanty c ve vyjádření rizika aktiv jsme dosadili $0,0239$.

Za ϵ dosadíme postupně hodnoty

$$\epsilon = 0,001 \quad \text{a} \quad \epsilon = 0,0045,$$

a

$$\epsilon = 0,01 \quad \text{až} \quad \epsilon = 0,07,$$

převzaté z [13] a [7].

Pokračování příkladu 1

Matice kovariancí obsahuje hodnoty

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3579	7845	0	0	0	239967447	0	0	-31,75
2		2270056	409859577	0	-5,99	237119505	0	5,99	-1,44
3			2589	0	0	168802154	0	0	25215
4				401269	614334	0	585632	-614334	0,76
5					1083835	-236876336	689079	-1083835	1,07
6						729231717	0	236876336	-14828
7							984937	-689079	1,02
8								1083835	-1,07
9									0,00

Celkový požadovaný kapitál vychází jako řešení rovnice 3.5 a je pro $\epsilon = 0,001$ roven

$$u = 189\ 959.$$

Kapitál alokovaný technickému riziku má hodnotu

$$u_1 = 26\ 264.$$

Požadovaný kapitál odpovídající riziku vývoje technických rezerv vychází

$$u_2 = 98\ 038.$$

Riziku vývoje výnosové křivky je třeba alokovat

$$u_3 = 7\ 064.$$

Investičnímu riziku odpovídá kapitál rovný

$$u_4 = 58\ 594.$$

Pro ostatní hodnoty ϵ jsme obdrželi následující hodnoty kapitálu

ϵ	u	u_1	u_2	u_3	u_4
0,001	189959	26264	98038	7064	58594
0,0045	149703	23847	77601	6404	41853
0,01	127745	22185	66415	5953	33193
0,02	108200	20429	56428	5478	25866
0,03	96491	19220	50428	5151	21692
0,04	88027	18260	46081	4892	18793
0,05	81357	17445	42650	4673	16589
0,06	75828	16726	39801	4480	14821
0,07	71092	16077	37357	4305	13353

Pokračování příkladu 2

Matice kovariancí obsahuje hodnoty

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1684016	$362 \cdot 10^6$	0	0	0	$51 \cdot 10^9$	0	0	-853,43
2		$359 \cdot 10^9$	$117 \cdot 10^{12}$	0	-23358559	$7812 \cdot 10^9$	0	23358559	-82418
3			$639 \cdot 10^9$	0	0	$51735 \cdot 10^9$	0	0	18950804
4				$1980 \cdot 10^9$	$3553 \cdot 10^9$	0	$3387 \cdot 10^9$	$-3553 \cdot 10^9$	417590
5					$16241 \cdot 10^9$	$-93107 \cdot 10^9$	$5766 \cdot 10^9$	$-16241 \cdot 10^9$	724526
6						$144050 \cdot 10^9$	0	$93107 \cdot 10^9$	-7633341
7							$14760 \cdot 10^9$	$-5766 \cdot 10^9$	690676
8								$16241 \cdot 10^9$	-724526
9									0,06

Celkový kapitál a kapitál alokovaný dílčím rizikům nabývá pro příslušná ϵ následujících hodnot

ϵ	u	u_1	u_2	u_3	u_4
0,001	229550461	2617131	77557764	2562760	146812806
0,0045	149435049	3052559	57204466	2885915	86292109
0,01	114927311	3228383	46597692	3008991	62092244
0,02	88549863	3327530	37546426	3068864	44607042
0,03	74478292	3350866	32337593	3073401	35716432
0,04	65054924	3345721	28688666	3057510	29963026
0,05	58051283	3325840	25889192	3031182	25805070
0,06	52520946	3296975	23624305	2998542	22601125
0,07	47976804	3262028	21726741	2961645	20026389

Pokračování příkladu 3

Matice kovariancí obsahuje hodnoty

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$863 \cdot 10^6$	$13 \cdot 10^9$	0	0	0	$3199 \cdot 10^9$	0	0	-17279
2		$2059 \cdot 10^9$	$102 \cdot 10^{12}$	0	-72711208	$24428 \cdot 10^9$	0	72711208	-59315
3			$42 \cdot 10^9$	0	0	$30875 \cdot 10^9$	0	0	12041310
4				$343 \cdot 10^9$	$1135 \cdot 10^9$	0	$1082 \cdot 10^9$	$-1135 \cdot 10^9$	56500
5					$5180 \cdot 10^9$	$-77260 \cdot 10^9$	$3066 \cdot 10^9$	$-5180 \cdot 10^9$	142870
6						$174214 \cdot 10^9$	0	$77260 \cdot 10^9$	-6036636
7							$4707 \cdot 10^9$	$-3066 \cdot 10^9$	136196
8								$5180 \cdot 10^9$	-142870
9									0,01

Celkový kapitál a kapitál alokovaný dílčím rizikům nabývá pro příslušná ϵ následujících hodnot

ϵ	u	u_1	u_2	u_3	u_4
0,001	229550461	2617131	77557764	2562760	146812806
0,0045	149435049	3052559	57204466	2885915	86292109
0,01	114927311	3228383	46597692	3008991	62092244
0,02	88549863	3327530	37546426	3068864	44607042
0,03	74478292	3350866	32337593	3073401	35716432
0,04	65054924	3345721	28688666	3057510	29963026
0,05	58051283	3325840	25889192	3031182	25805070
0,06	52520946	3296975	23624305	2998542	22601125
0,07	47976804	3262028	21726741	2961645	20026389

Kapitola 4

RBC formule

V následující kapitole bude stručně charakterizována RBC formule (Risk Based Capital formula) používaná v neživotním pojištění, vyvinutá v devadesátých letech v USA asociací NAIC (National Association of Insurance Commissioners).

Při stanovení rizikově váženého kapitálu je rozlišováno několik typů rizik: riziko aktiv (riziko investic s pevným výnosem, riziko ostatních investic, úvěrové riziko), riziko technických rezerv, riziko předepsaného pojistného a obchodní riziko ve vztahu k podrozvahovým závazkům.

R_1 **Riziko investic s pevným výnosem (Fixed-income invesment risk):**
Do této kategorie spadají například dluhopisy s pevným výnosem, hypoteční úvěry, hotovost nebo krátkodobé investice. Dluhopisy s pevným výnosem mají přiděleny váhy podle ratingové stupnice v rozmezí 0-30%. Váha státních dluhopisů odpovídá 0%, nejrizikovější dluhopisy mají přidělenu váhu 30%. Kapitálový požadavek se pro toto riziko určí jako součet objemů investic vynásobených příslušnou vahou. Váha (faktor) představuje možnou ztrátu z dané investice vztaženou k určitému období. Váhy prvních deseti největších investic jsou dvojnásobeny, ale nesmějí překročit hodnotu 30%.

R_2 **Riziko ostatních investic (Other investment risk):**
Tato skupina zahrnuje investice do akcií (váha 15%) a nemovitostí (váha 10%). Stejně jako u předchozí skupiny váhy prvních deseti největších investic jsou dvojnásobeny, ale nesmějí překročit hodnotu 30%.

R_3 **Úvěrové riziko(Credit risk, claims risk):**
Rozlišují se dva typy rizik, riziko pohledávek za zajistiteli $\hat{R}_3$ (faktor obvykle 10%) a riziko ostatních pohledávek $\check{R}_3$ (faktor obvykle 5%). Princip tvorby požadovaného kapitálu je opět shodný s předchozími dvěma způsoby výpočtu v rámci rizika aktiv.

R_4 **Riziko technických rezerv (Underwriting-reserve risk):**
Požadovaný kapitál se určí jako součet škodních rezerv pro jednotlivá pojistná odvětví (s výjimkou rezervy na nezasloužené pojistné), které jsou násobeny příslušnými vahami.

$$R_4 = \sum_i w_i \cdot LR_i, \tag{4.1}$$

kde w_j jsou váhy příslušných škodních rezerv (loss reserv) LR_j. Váhy w_j závisejí na faktorech, které se označují CRBC (Company RBC) a určí se pro každé odvětví jako

$$CRBC = 0,5 \cdot \frac{CD}{IAD} \cdot IRBC + 0,5 \cdot IRBC.$$

IRBC (Industry RBC) a IAD (Industry Average Developement) jsou hodnoty založené na průměrném nárůstu odhadů škod pro dané odvětví stanovené asociací NAIC, CD (Company Developement) je hodnota určená pojišťovnou z vývojových trojúhelníků. Při výpočtu je užito diskontování. Podrobněji viz Cipra [2]. Hodnota R_4 pokrývá riziko, že vytvořené rezervy na škody nebudou dostačovat s ohledem na kolísání odhadu rezervy v čase.

R_5 Riziko předepsaného pojistného (Underwriting-premium risk):

Složka R_5 zohledňuje riziko, že předepsané pojistné v daném finančním roce nebude postačovat na škody vzniklé v daném roce.

$$R_5 = \sum_i w_i \cdot P_i, \tag{4.2}$$

kde w_i jsou váhy a P_i je předepsané pojistné. Váhy vycházejí obdobně jako v případě R_4 z hodnot určených asociací NAIC a hodnot určených pojišťovnou. Váhy získáme pomocí faktoru CR (Company Ratio)

$$CR = 0,5 \cdot \frac{CAR}{IAR} \cdot IR + 0,5 \cdot IR,$$

kde IR (Industry Ratio) a IAR (Industry Average Ratio) stanovuje NAIC a CAR (Company Average Ratio) pojišťovna na základě historie škod. Taktéž se užije diskontování.

R_0 Obchodní riziko spojené s podrozvahovými závazky (Affiliate insurers and other off-balance-sheet risk):

R_0 je součtem dvou rizik, rizika investice do dceřinné společnosti, provozující pojišťovací činnost, a rizika podrozvahových závazků.

RBC formule pro neživotní pojištění je potom dána vztahem

$$R = R_0 + \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + (0,5 \cdot \hat{R}_3 + \check{R}_3)^2 + (0,5 \cdot \hat{R}_3 + R_4)^2 + R_5^2}. \tag{4.3}$$

Při užití tohoto vztahu se předpokládá například, že riziko investic s pevným výnosem je nekorelované s rizikem předepsaného pojistného, že riziko pohledávek za zajistiteli je částečně korelované s rizikem škodní rezervy a že riziko R_0 je perfektně korelované s ostatními riziky.

Závěr

Metody stanovení požadovaného kapitálu používané v současnosti vycházejí ze zjednodušujících předpokladů, které nezohledňují nebo nedostatečně zohledňují vzájemné závislosti mezi jednotlivými riziky a celkovým rizikem, kterému je pojišťovna vystavena. Pravidlo používané Evropskou unií pro stanovení minimální míry solventnosti určuje tuto míru rovnou upravenému násobku přijatého pojistného, které je případně očištěno o zajištění. Minimální míra solventnosti je pak snadno a jednoznačně stanovitelná. Nebere však v úvahu například skladbu aktiv dané pojišťovny. Pojišťovna, která investuje pouze do bezrizikových aktiv musí držet stejný požadovaný kapitál jako pojišťovna, která investuje do rizikových akcií.

Skladbu aktiv pojišťovny například zohledňuje Risk Based Capital formule (RBC), vyvinutá asociací NAIC v USA. Riziko investice pojišťovny do různých druhů aktiv je modelováno pomocí rizikových vah (faktorů), které se liší dle typu rizikového aktiva. RBC také částečně uvažuje závislosti mezi jednotlivými typy rizik. Tyto závislosti však nevycházejí z modelu skutečných kovariancí mezi riziky, ale jsou stanoveny pevně (viz vztah 4.3).

Možné řešení problému se zahrnutím skutečných kovariancí mezi jednotlivými typy rizik přináší Schnieperův model. Model stanovuje celkový požadovaný kapitál v závislosti na směrodatné odchylce změny volného kapitálu během finančního roku a pravděpodobnosti ruinování. Kapitál alokovaný dílčímu riziku se odvíjí od hodnoty celkového požadovaného kapitálu a kovariance mezi dílčím rizikem a celkovým rizikem, tj. celkovou změnou volného kapitálu pojišťovny. V kapitole o rozšíření Schnieperova modelu jsme ukázali, jak je možné modelovat jednotlivé složky změny volného kapitálu během finančního období. Z tohoto modelu jsme dále vycházeli při určení potřebných kovariancí a stanovení celkového požadovaného kapitálu a kapitálů alokovaných dílčím rizikům.

Pro výpočty byl použit software MATLAB 7.0.1.

Literatura

[1] Christofides S.: Regression models based on log-incremental payments, Claims Reserving Manual II., Institute and Faculty of Actuaries, London, 1990.

[2] Cipra T.: Kapitálová přiměřenost ve financích a solventnost v pojišťovnictví, Ekopress, Praha, 2002.

[3] European Commission - Internal Market DG: MARKT/2085/01-EN Risk-based capital system.

[4] Klečková N.: Ocenění závazků z penzijního pojištění a připojištění, diplomová práce, MFF UK, Praha, 2005.

[5] Mandl P.: Rozptyl škodních nákladů a solvenční kapitálový požadavek - předneseno na semináři z aktuárských věd, MFF UK, Praha, 10.3.2006.

[6] Mandl P.: Přednáška Účetnictví II, MFF UK, Praha, 2004-2005.

[7] Pilcová D.: Matematicko-statistická analýza metod sledování solventnosti, disertační práce, MFF UK, Praha, 2001.

[8] Mandl P.: Stochastické finanční modely - předneseno na semináři z aktuárských věd, MFF, Praha 14.3.2003.

[9] Mandl P.: Přednáška Neživotní pojištění, MFF UK, Praha, 2004-2005.

[10] Mack: Sanders Data, ASTIN Bulletin, str. 223, 1993.

[11] Schnieper R.: Solvency testing, Mitteilungen der Schweiz. Aktuarvereinigung, Heft 1/1999, str. 11-45, 1999.

[12] Mack: Taylor Data, ASTIN Bulletin, 1993.

[13] Všetulová E.: Doktorská disertační práce - Matematické modelování neživotních pojišťoven - aplikace na pojištění odpovědnosti provozovatelů motorových vozidel, MFF UK, 1998.