Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

David Zamazal

Výpočet kreditní hodnoty v riziku

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: Mgr. Markéta Benková, Komerční banka

Studijní program: matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2006

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat zejména vedoucí diplomové práce Mgr. Markétě Benkové za řadu podnětných nápadů, pomoc při odstraňování chyb, za náměty pro zdokonalování práce a za řadu cenných rad.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 6. dubna 2006 David Zamazal

Obsah

Název práce: Výpočet kreditní hodnoty v riziku

Autor: David Zamazal

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Markéta Benková, Komerční banka

E-mail vedoucího: marketa_benkova@kb.cz

Abstrakt: Diplomová práce popisuje výpočet kreditní hodnoty v riziku pro portfolio složené z klasických bankovních úvěrů. Měřítkem kreditního rizika je velikost očekávané i neočekávané ztráty, kterou můžeme na portfoliu očekávat za určitý časový úsek. Práce je rozdělena do dvou částí – teoretické a výpočetní. V první části jsou shrnuty dnes nejznámější a nejpoužívanější modely a definovány jejich hlavní vstupní parametry – pravděpodobnost defaultu, velikost dlužné částky v případě defaultu, procentuální ztráta z dlužné částky v případě defaultu a korelace mezi úvěry (dlužníky). Následuje podrobný teoretický popis dvou vybraných metod – CreditMetrics a Vašíčkovy metody. V úvodu výpočetní části je nejprve charakterizováno portfolio, které budeme zkoumat, a další vstupní parametry, které budeme potřebovat pro výpočet. Následuje popis implementace modelů do programu Mathematica, průběh výpočtu a vypočtené hodnoty kreditního rizika. V závěru jsou metody porovnány.

Klíčová slova: hodnota v riziku, CreditMetrics, Vašíček

Title: Calculation of the Credit Value at Risk

Author: David Zamazal

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Markéta Benková, Komerční banka

Supervisor's e-mail address: marketa_benkova@kb.cz

Abstract: Thesis describes calculation of the credit value at risk for portfolio composed of traditional bank loans. The risk is measured by incurred expected and unexpected losses at the end of some time horizon. Thesis is splitted into two parts - theoretical part and computational part. The most known and most widely used models are described in the first part, in conjunction with definition of their main input parameters – probability of default, exposure at default, loss given default and correlation between debtors. Detailed theoretical description of two chosen methods comes after – CreditMetrics method and Vasicek's method. The examined portfolio is characterized in the computational part, along with other input parameters, essential for evaluation. Then model implementation into software Mathematica is described, evaluation run and the results. Eventually both methods are compared.

Keywords: Value at Risk, CreditMetrics, Vasicek

Část I

Teoretická část

Kapitola 1

Úvod

Během posledního desetiletí většina bank intenzívně rozvíjela svůj sofistikovaný přístup k modelování kreditního rizika, plynoucího z jejích obchodů. Vzniklé modely jim sloužily a slouží ke kvalifikování, kvantifikování a sdružování rizika jednotlivých dlužníků. Nové znalosti se banky snaží uplatňovat nejen při rozhodování o nových obchodech, ale i aktivně ke správě stávajícího portfolia a k oceňování nových obchodů s přihlédnutím k riziku. Lepší znalost úvěrového rizika je také požadována regulatorními institucemi pro nastavení kapitálového požadavku k úvěrovému riziku. I přes velké úsilí se prozatím nepodařilo překonat významné překážky, kterými jsou především nedostatek dat a z toho plynoucí špatný backtesting. Kvůli tomu bohužel není možno uvažovat o kreditních modelech jako o pouhém rozšíření modelů tržních, kde jsou data měřena denně a slouží ke krátkodobějším predikcím. Horizonty pro hodnocení kreditního rizika jsou naproti tomu typicky jednoleté a delší. Navíc tržní ceny se odvozují od očekávaného budoucího vývoje, zato ukazatele pro kreditní modely se obvykle odvozují z historie. Tato data jsou však bývají dostupná jen pro několik období (let) a často je třeba používat zástupných dat. Výše uvedené nedostatky jsou impulsem pro neustálé rozvíjení a zpřesňování modelů.

Abychom ukázali skutečnou potřebu vytváření a zdokonalování kreditních modelů, uvedeme jejich hlavní výhody. Je jasné, že diverzifikace snižuje riziko, kterému je banka vystavena, neboli že kreditní nebezpečí pro banku klesá s rostoucím počtem úvěrů v portfoliu. Méně zřejmé je však kvantitativní vyjádření této vazby. Často je proto spoléháno na zkušenosti banky či na hrubé („od oka“) nastavení parametrů[1], což však může zkreslovat skutečnost a vystavovat finanční instituci neúměrnému nebezpečí. Špatně nastavené rizikové parametry ovlivní tvorbu opravných položek a tím i hospodářský výsledek

[1]Jakých parametrů bude vysvětleno v další kapitole.

banky, na druhé straně určují nastavení kapitálového požadavku. Zajímají tedy jak regulatorní instituce, tak i akcionáře.

V první části této práce nadefinujeme, co si pod velikostí kreditní ztráty představit a jaké přístupy užíváme k jejímu měření. Shrneme si v současné době používané modely a popíšeme si veličiny, které do nich vstupují. Poté se zaměříme na dva modely – model CreditMetrics společnosti JP Morgan (1997) a Vašíčkův model společnosti KMV Corporation (1987). Tímto uzavřeme teoretickou část a v části výpočetní nastíníme praktickou aplikaci těchto dvou modelů na bankovní portfolio. Vypočteme očekávanou a především neočekávanou ztrátu tohoto portfolia na konci časového horizontu. Jedním z hlavních cílů této práce je srovnání obou metod. Portfolio v celém textu uvažujeme tradiční, složené pouze z úvěrů.

1.1 Typy kreditních modelů

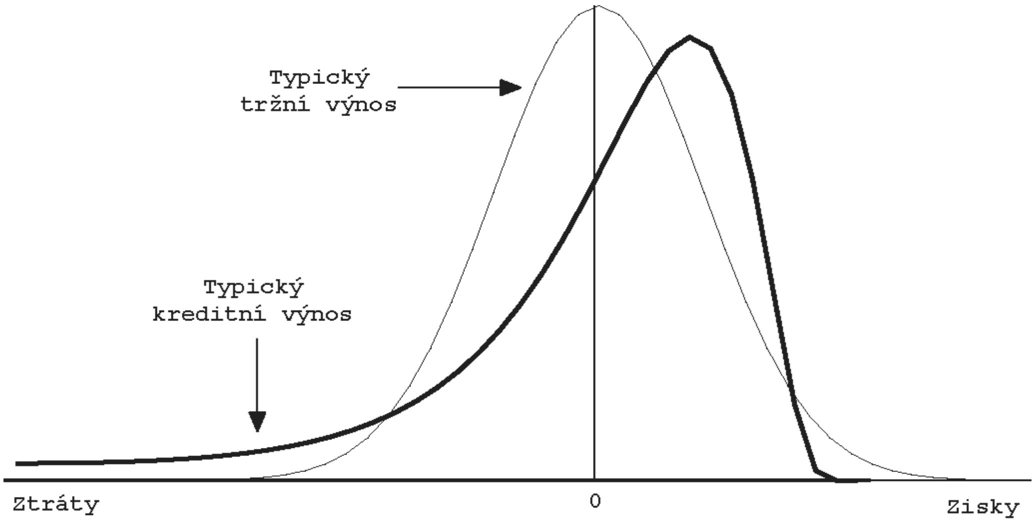
Modelem kreditního rizika označujeme všechny postupy užívané bankou k odhadu pravděpodobnostního rozložení hodnoty portfolia na konci daného časového horizontu (PDF – Probability Distribution Function – hustota rozložení), popřípadě pouze hlavních ukazatelů jako je hodnota portfolia (ztráty portfolia) na určitém kvantilu (viz podkapitola (1.2)).[2] U tržních modelů je za standard považováno normální rozdělení, pro kreditní modely však ještě nedošlo ke shodě. Je to hlavně kvůli mnoha zjednodušujícím předpokladům a nesnadným odhadům korelací při přechodu od individuálních dluhů k celému portfoliu. Typicky je PDF skloněná ke straně zisků a má „tlustší“ konec směrem k vyšším ztrátám (viz obrázek (1.1)).

Základní členění kreditních modelů je podle definice kreditní ztráty – takto je rozlišujeme na *standardní (default mode)* a *tržní (mark-to-market).*

1.1.1 Standardní (jednostavový) přístup

U tohoto přístupu kreditní ztráta vzniká pouze v případě, že dlužník během daného horizontu selže. Existují tedy pouze dva stavy; pokud dlužník neselže, nevzniká žádná ztráta, pokud selže, je ztráta rovna rozdílu velikosti dluhu a současné hodnoty budoucích náhrad. Tento přístup je snazší než následující a lze ho užít u institucí, které chtějí nakoupit a držet své portfolio či u neobchodovatelných portfolií.

[2] Někdy se ekvivalentně odhaduje pravděpodobnostní rozložení ztrát na daném portfoliu na konci časového horizontu.



Obrázek 1.1: Srovnání typického rozdělení výnosů portfolia tržních a kreditních modelů.

1.1.2 Tržní (vícestavový) přístup

Na rozdíl od předchozího přístupu může dojít ke zhoršení kvality dlužníka, avšak nemusí ještě dojít k jeho defaultu. Kromě pravděpodobnosti defaultu je třeba ještě znát pravděpodobnosti přechodu do ostatních stavů (ratingových skupin). Ty jsou vyjádřeny maticí pravděpodobností přechodu. Poté se modeluje budoucí rating (např. metodou Monte Carlo).

Od doby, kdy se problematikou kreditního rizika začaly banky zajímat, vzniklo několik modelů, snažících se jej popsat. Mezi nejznámější a nejpoužívanější patří tyto:

CreditMetrics: Tento přístup užívá simulace Monte Carlo pro modelování rozdělení hodnoty portfolia na konci časového horizontu. Každý dlužník je zařazen do určité ratingové třídy a je dána matice pravděpodobností přechodu, která určuje pravděpodobnost změny ratingu dlužníka či jeho defaultu. Změna hodnoty kreditního instrumentu je dána tedy nejen defaultem dlužníka, ale i jeho přechodem do jiné ratingové kategorie (tržní přístup). Tento přechod je modelován právě Monte Carlo simulacemi. Dle nových ratingů se přepočtou hodnoty jednotlivých instrumentů a hodnota portfolia je dána jejich součtem. Koncentrace dlužníků v určitém průmyslovém odvětví nebo regionu vstupuje do modelu v podobě koeficientů korelace. Více viz kapitola (3).

CreditRisk+: Na rozdíl od modelu CreditMetrics považuje tento přístup pravděpodobnost defaultu za spojitou náhodnou veličinu. Pro každý rating se může měnit v čase, velikost této změny je dána odhadem její volatility, vzájemné korelace defaultů jsou dány externími faktory. Mezi výhody modelu patří rychlý (analytický) výpočet ve srovnání s modely využívajícími simulace a minimum vstupních dat.

CreditPortfolioView: Tento model uvažuje navíc celé makroekonomické prostředí. Pravděpodobnosti defaultu se nepočítají z historie, ale jsou podmíněny stavem ekonomiky. Ten se namodeluje do budoucnosti a z něj odvodíme pravděpodobnosti defaultu pro libovolný budoucí okamžik. Jelikož se neuvažují další korelace mezi firmami, hodnota portfolia je dána součtem hodnot úvěrů jednotlivých klientů.

Vašíček: Vašíčkův model vychází z předpokladu, že default nastane, pokud hodnota firmy klesne pod určitou předem stanovenou hodnotu, zároveň je default jedinou příčinou poklesu hodnoty úvěru (standardní přístup). Za předpokladu, že hodnota firmy splňuje stochastickou rovnici, v níž jsou parametry odhadnuty z historického vývoje hodnoty firmy, určíme pravděpodobnosti, s jakými jednotliví dlužníci zdefaultují. Detailnější popis nalezneme v kapitole (4). Největší výhodou tohoto modelu je rychlost – výsledek je k dispozici prakticky okamžitě.

Modely se dále liší přechodem od kreditního rizika jednotlivých úvěrů k celému portfoliu, tedy modelování vzájemných korelací. To bude popsáno v další kapitole.

1.2 Kvantifikace kreditního rizika

Míra rizika portfolia se obecně vztahuje k variabilitě hodnoty daného portfolia v určitém budoucím čase a obvykle se udává ve stejných jednotkách jako hodnota portfolia. Zahrneme zde rovněž očekávanou budoucí hodnotu portfolia (a z ní plynoucí očekávanou ztrátu).[3] Naopak se u kreditních modelů neužívá pro určení rizika směrodatná odchylka. Důvodem je výrazná nesymetrie rozložení hodnoty portfolia na konci časového horizontu a tedy špatná interpretovatelnost této veličiny. Dále se rozlišují tzv. *koherentní míry*

[3] Ta někdy není pokládána za veličinu znázorňující kreditní riziko s odůvodněním, že ji lze snadno ocenit a tedy zahrnout do úroků a opravných položek.

rizika, jejichž vlastnosti lze stručně a zjednodušeně formulovat následujícím způsobem:

1. Míra rizika obchodu je přímo úměrná objemu obchodu.
2. Hedging zmenšuje míru rizika.
3. Míra rizika subportfolia s nižší nebo stejnou hodnotou, než má portfolio, ze kterého subportfolio vzniklo, je menší nebo rovna míře rizika tohoto portfolia.
4. Míra rizika portfolia vzniklého sloučením dvou portfolií je menší nebo rovna součtu měr rizika jednotlivých portfolií, tzv. *subaditivita.*

1.2.1 Očekávaná ztráta

Očekávaná ztráta je dána rozdílem dnešní hodnoty portfolia a jeho střední hodnoty na konci časového horizontu, diskontované k současnosti. Označme dnešní hodnotu portfolia PV a náhodnou veličinu, udávající hodnotu portfolia na konci časového horizontu, označíme X (v dnešních cenách, tedy diskontovanou bezrizikovou úrokovou sazbou). Pak *očekávanou ztrátu* μ definujeme jako

$$\mu \stackrel{def}{=} PV - E[X] \tag{1.1}$$

K pokrytí očekávaných ztrát instituce tvoří opravné položky.

1.2.2 Value At Risk (VaR)

Hodnota v riziku (Value-At-Risk) daného portfolia je definována jako maximální ztráta,[4] kterou může vlastník tohoto portfolia utrpět, a to ve stanoveném časovém horizontu a s předem určenou pravděpodobností. Teoretická hodnota VaR daného portfolia má dva parametry – *hladinu spolehlivosti* (například 99% – určí se dle cílové míry solventnosti instituce) a *časový horizont* pro dobu držení (obvykle 1 rok). VaR můžeme chápat jako 1% riziko, že ztráta, kterou může investor utrpět v horizontu jednoho roku – budeme-li po tuto dobu držet portfolio neměnné – bude minimálně na úrovni VaR. Označme hladinu spolehlivosti α a hodnotu portfolia na této hladině

$$P_\alpha(X) = inf\left\{x : P\left(X \leq x\right) \geq \alpha\right\},$$

[4]Myšleno maximální ztráta nad očekávanou ztrátu, která je plně zohledněna při ocenění úvěru. U modelů se symetrickým rozložením se neočekávanou ztrátou označuje volatilita kolem očekávané ztráty.

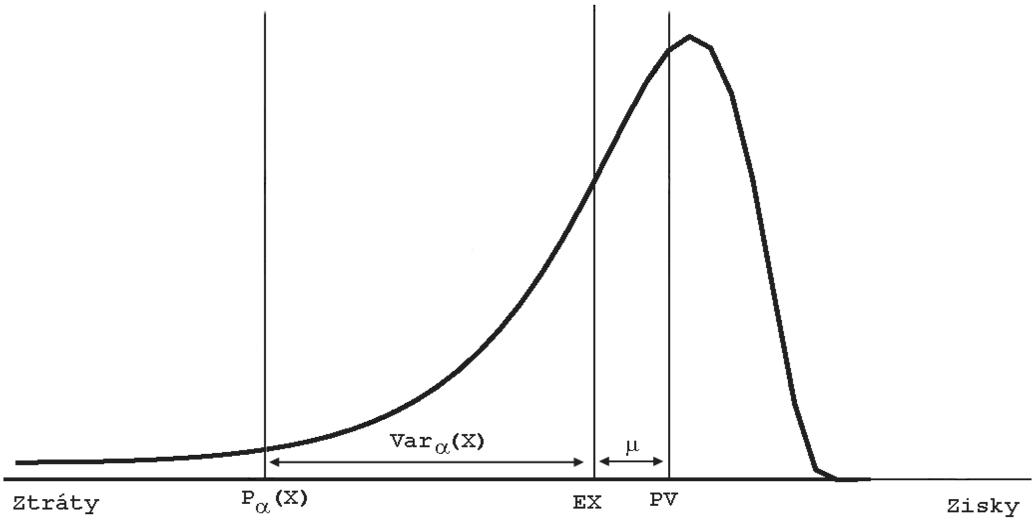
pak *hodnota v riziku (neočekávaná ztráta)* je definována

$$VaR_\alpha(X) \stackrel{def}{=} E[X] - P_\alpha(X) \tag{1.2}$$

Nevýhodou této veličiny je skutečnost, že nemá vlastnost (4)[5], tedy obecně neplatí vztah

$$VaR\,(P_1 \cup P_2) \leq VaR(P_1) + VaR(P_2)$$

K pokrytí neočekávaných kreditních ztrát slouží ekonomický kapitál.



Obrázek 1.2: Rozdělení hodnoty portfolia na konci časového horizontu (diskontované k jeho počátku) s vyznačenými kreditními ztrátami (hodnota $ES_\alpha(X)$ by byla někde nalevo od $P_\alpha(X)$).

1.2.3 Shortfall

Slabinou přístupů měření rizik založených na metodologii Value at Risk je skutečnost, že nic neříkají o rozsahu možných ztrát za příslušným pravděpodobnostním kvantilem. Například údaj, že VaR portfolia činí 100 milionů korun v případě ročního časového intervalu a s pravděpodobností 99%, uživateli nepodává žádnou informaci, jakou ztrátu může očekávat za touto úrovní, to je v jednom případě ze sta.

[5]Příklad viz příloha (B).

Očekávanou extrémní ztrátu (Expected Shortfall) definujeme vztahem

$$ES_\alpha(X) \stackrel{def}{=} E[X] - E\left[X \mid X < P_\alpha(X)\right] \tag{1.3}$$

Tato míra je koherentní, tedy splňuje i podmínku 4. Může sloužit jako konzervativnější ukazatel neočekávané kreditní ztráty.

Kapitola 2

Veličiny vstupující do modelu

Do většiny dnes užívaných modelů vstupují následující čtyři veličiny, mající vliv na velikost kreditní ztráty:

1. Pravděpodobnost defaultu (PD - Probability of Default) a změny ratingu
2. Výtěžnost v případě defaultu (LGD - Loss Given Default)
3. Korelace mezi pravděpodobnostmi defaultu
4. Velikost dlužné částky v případě defaultu (EAD - Exposure at Default)

U tržních modelů je třeba uvažovat ještě změny diskontních (forwardových) sazeb. Dále je třeba zvolit časový horizont, na jehož konci budeme hodnotu modelovat.

2.1 Pravděpodobnost defaultu / změny ratingu

Dle způsobu výpočtu pravděpodobností defaultu jednotlivých dlužníků můžeme modely rozdělit v podstatě do tří kategorií:

- všichni dlužníci mají stejný rating a kreditní událostí je pouze default (nebo je portfolio rozděleno na homogenní části, kde toto platí – Vašíčkův model)
- dlužníci jsou rozděleni do ratingových tříd, ale kreditní událostí je pouze default (CreditRisk+)

- dlužníci jsou rozděleni do ratingových tříd a kreditní událostí je každá změna ratingu (CreditMetrics)

Přidělení dlužníků do ratingových tříd se provádí na základě kvalitativních (složení managementu, pověst, tradice) a především kvantitativních (ekonomických) ukazatelů. Všechny firmy v dané ratingové třídě jsou považovány za statisticky identické, se stejnou pravděpodobností defaultu (vektorem pravděpodobností přechodu do jiného ratingu). Banky často užívají data od externích agentur – mezi nejznámější patří Moody's (data od roku 1909) a Standard&Poor's (1916).

Pro odhad defaultu a matic přechodu mezi ratingy se obvykle užívá buď pojistně matematický přístup, nebo přístup založený na hodnotě vlastního jmění.

2.1.1 Pojistně matematický přístup (actuarial-based)

Tento přístup užívá historická data o defaultech pro předpověď budoucích pravděpodobností defaultu a změn ratingů pro dlužníky s podobnou charakteristikou. Banky užívají buď nějaký vlastní skóringový model, popřípadě jej nakupují od externí agentury. Je třeba zvolit, jak se ratingové kategorie této agentury naváží na kategorie banky. Obvykle se srovnávají PD v jednotlivých skupinách a podle toho se zvolí podobnost skupin. Jsou však možné i další přístupy.[1] Jelikož pro úvěry nemají banky obvykle zaznamenánu dostatečnou historii, přihlíží se k chování trhu s dluhopisy.

2.1.2 Přístup založený na hodnotě vlastního jmění (equity-based)

Tento přístup, založený na Mertonově modelu,[2] je použitelný, na rozdíl od předchozího, pouze pro velké a středně velké zákazníky, jejichž akcie jsou obchodovány na burzách. K jeho modelování je totiž třeba znát dnešní hodnotu závazků firmy a historické a současnou tržní hodnotu vlastního jmění. Z těchto dat odhadneme parametry pro modelování budoucí hodnoty aktiv a za předpokladu, že default nastane při poklesu hodnoty aktiv pod stanovenou hodnotu, lze užitím Black-Scholesova modelu pro výpočet hodnoty opce spočítat očekávanou PD. Tyto PD spočítáme např. pro 20 let (při ročním časovém horizontu) a z nich metodou nejmenších čtverců odvodíme matici přechodu pro jedno období. Je zřejmé, že takto můžeme postupovat pouze

[1] Viz [1], str. 41

[2] Velmi dobře je tento model popsán např. v [7]. Praktická aplikace je ve Vašíčkově modelu (kapitola (4)).

za předpokladu, že uvažujeme konstantní matici ve všech obdobích a nepřihlížíme k sezónním efektům (např. makroekonomické situaci).

Mezi výhody patří užití dat o vlastním jmění, které za předpokladu efektivních trhů obsahují data s výhledem do budoucnosti, navíc teoreticky na denní bázi. Dále neobsahují vzorkovací chybu, tedy je možné získat hodnoty pravděpodobností defaultu na celém intervalu $[0, 1]$. Nevýhody spočívají v tom, že cena akcií se obvykle neodvíjí pouze od ceny aktiv, ale mají na ni vliv i spekulace, nedostatek informací atd. Ty způsobují zvýšení volatility aktiv a tím k nadhodnocení pravděpodobnosti defaultu. Další nevýhody plynou z předpokladů Mertonova modelu.[3]

2.1.3 Matice přechodu

Matice přechodu je čtvercové schéma udávající v prvním sloupci výchozí rating dlužníka a v prvním řádku rating na konci časového horizontu. Na příslušném průsečíku je pravděpodobnost, že k tomuto přechodu dojde. Příklad takové matice pro 8 ratingových tříd můžeme vidět v tabulce (2.1). Je výhodné, pokud má banka dobře navázáno své portfolio na rating některé významné ratingové agentury (Standard&Poor's, Moody's), neboť stačí aplikovat její data na vlastní portfolio.[4] Tyto matice jsou obvykle založeny na velkém množství dat a jsou dostatečně spolehlivé.

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	C	Def
AAA	90.0	5.0	3.0	1.5	0.5	0.0	0.0	0.0
AA	5.0	88.0	3.0	2.0	1.0	0.8	0.2	0.0
A	2.0	3.0	86.0	4.0	3.0	1.0	0.5	0.5
BBB	1.5	2.0	5.0	85.0	3.0	2.0	1.0	0.5
BB	1.0	1.5	2.0	3.0	86.0	4.0	1.5	1.0
B	0.5	0.5	1.0	3.0	4.0	85.0	4.0	2.0
C	0.0	0.0	0.0	1.5	2.5	7.2	79.0	9.8

Tabulka 2.1: Příklad roční matice přechodu (v %)

Pokud tvoří banka vlastní matici, je třeba dávat pozor na několik intuitivních zákonitostí, které by měla matice splňovat. Především nejpravděpodobnější rating na konci daného období je ten současný. Pravděpodobnost

[3]Například definice defaultu jako (dluh > aktiva) nemusí zahrnovat firmy v dočasné platební neschopnosti či jinak neschopné splácet (např. kvůli kriminální činnosti). Představa dluhu jako call opce také není přesná, protože držitelé long opce (akcií) mohou volně disponovat majetkem, zatímco držitelé dluhu (věřitelé) velmi omezeně.

[4]To bude i náš případ; ve výpočetní části užijeme rating Moody's.

migrace do dalších ratingů postupně klesá s rostoucí vzdáleností od současné ratingové třídy (horizontální a vertikální monotónnost od diagonály). Pokud tomu naše odhadnutá matice kvůli nedostatku dat nevyhovuje, je třeba ji upravit. Často lze také pozorovat další specifika modelu. Pokud se společnosti zhoršil v daném období rating, je u ní větší pravděpodobnost přechodu do horších ratingových skupin v dalším období, než je u společností se stejným ratingem.

2.1.4 Aplikace dat na české prostředí

Přestože výběr správného modelu je pro konečný výsledek důležitý, neméně důležité je nastavení hodnot vstupních parametrů. Především matice přechodu mezi jednotlivými ratingy, nabízené světovými ratingovými agenturami, vychází obvykle z historie amerických firem.

Index	**Rok**						
bonity	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	**Celkem**
100-199	627	607	574	678	491	538	3 415
200-299	5 929	6 003	7 744	10 024	6 553	4 522	40 775
300-399	3 474	3 003	4 206	5 305	3 258	1 970	21 216
400-499	121	72	102	101	35	14	445
500	24	184	233	234	193	115	983
600	2	219	633	764	719	815	3 152
Celkem	10 177	10 088	13 492	17 106	11 249	7 874	69 986

Přelom roku	**1997- -1998**	**1998- -1999**	**1999- -2000**	**2000- -2001**	**2001- -2002**	**Celkem**
Nezdefaultované	5 470	7 816	9 778	7 420	6 380	36 864
Zdefaultované	297	472	315	371	360	1 815
Celkem	5 767	8 288	10 093	7 791	6 740	38 679
PD	5.15%	5.69%	3.12%	4.76%	5.34%	4.69%

Tabulka 2.2: Tabulky Creditreform, udávají počet sledovaných firem a pravděpodobnosti defaultu v jednotlivých letech

Jedna z mála databází, jež se snaží zařazovat české firmy do ratingových tříd a měřit jejich PD, je databáze Creditreform. Z 320 000 firem zapsaných v obchodním rejstříku, po vyloučení společností nových a těch, jejichž obrat je nižší než 3 miliony, bylo vybráno asi 25 000 firem, což dává mezi roky 1997-2002 zhruba 70 000 pozorování (viz tabulka (2.2)). Poté se firmě dle daných kritérií (finanční data, platební morálka, zařazení do průmyslu,...) přiřadí tzv. *index bonity* a dle toho se zařadí do určité ratingové třídy.[5] Default nastane, když se index bonity dostane do intervalu $(500; 600)$. Nevýhoda této definice je v tom, že firma s dobrou platební morálkou, ovšem se špatnými finančními ukazateli, může být považována za defaultující a naopak.

2.2 Výtěžnost v případě defaultu (LGD)

Výtěžnost v případě defaultu je definována jako procento z aktuální dlužné částky, které banka nedostane zpět, pokud dlužník zdefaultuje. Závisí na čtyřech hlavních kritériích: *typ produktu* (spotřebitelský úvěr, kreditní karta, dluhopis atd.), jeho *priorita* (podřízený resp. nepodřízený dluh), *zajištění* a *země původu dlužníka*. Její velikost závisí také na definici defaultu; je-li definován jako totální default, LGD je velká, je-li definován jako pouhé snížení hodnoty aktiv pod určitou hodnotu, LGD je logicky menší. Z tabulky (2.3) vidíme, že zajištění i priorita splácení mají na velikost LGD značný vliv.[6]

Kategorie	**Střední hodnota**	**Rozptyl**
Zajištěný dluh	57.4	25.5
Nezajištěný dluh	44.9	22.3
Podřízený dluh	39.1	25.7

Tabulka 2.3: Závislost LGD na prioritě dluhu (pro dluhopisy - v %)

LGD se obvykle měří na agregované úrovni pro skupinové úvěry a na individuální bázi pro korporátní úvěry. Dle vybraného modelu může být LGD pokládána za známou (deterministickou) nebo náhodnou s β-rozdělením, které se v nemění v čase. Hustota β-rozdělení s parametry a, b je definována jako

$$f_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$$

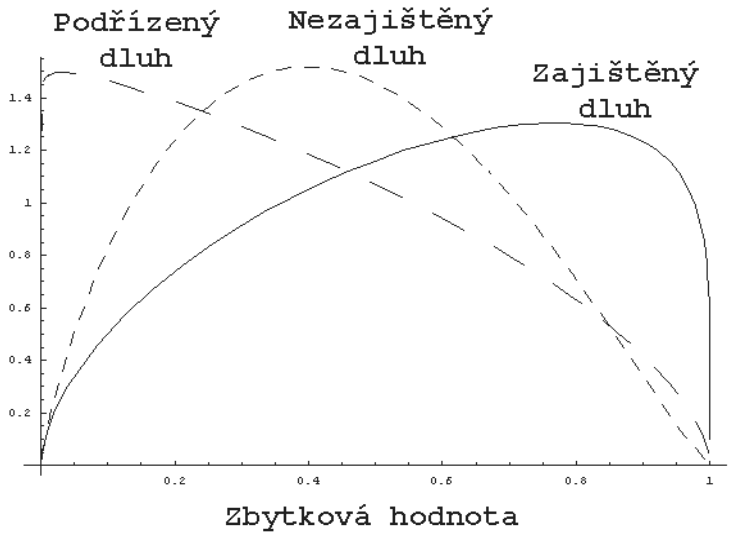
kde $\Gamma(\cdot)$ je Γ-funkce. Parametry a, b vypočteme ze střední hodnoty a rozptylu LGD užitím vztahů

$$a = \frac{\mu^2 (1-\mu)}{\sigma^2} - \mu, \qquad b = \frac{\mu (1-\mu)^2}{\sigma^2} - (1-\mu)$$

Pro zjednodušení jsou také obvykle všechny korelace pokládány za nulové (mezi LGD a ostatními veličinami, mezi LGD jednotlivých dlužníků, mezi

[5] Více o této metodě lze nalézt v publikaci [3].

[6] Viz [4], tabulka 9.



Obrázek 2.1: Srovnání grafů hustot β-rozdělení s různými středními hodnotami a rozptyly dle tabulky (2.3).

LGD jednoho dlužníka s více úvěry). Poslední předpoklad je jistě nesprávný, proto si banka musí dávat pozor na koncentraci rizika v jednom odvětví či zemi, které by mohlo vést k jeho podhodnocení při defaultu jedné z více ekonomicky svázaných firem.

2.3 Korelace mezi defaulty

Korelace nám udávají vztah mezi jednotlivými dlužníky a umožňují tak přechod od individuálních modelů k modelování celého portfolia. V kreditním modelu můžeme, alespoň teoreticky, předpokládat několik vzájemných korelací mezi a) pravděpodobností defaultu b) ztrátou danou při defaultu c) velikostí dluhu. Bohužel zkušenosti bank a dostupná data bývají nedostatečná a obvykle je uvažována pouze korelace pravděpodobností defaultu mezi různými dlužníky. Vysokou korelaci můžeme očekávat například pro hypoteční obchody (výrazná závislost trhu s nemovitostmi na výši úrokových sazeb), nízká je naopak pro kreditní karty (závislost mezi jednotlivými držiteli není vysoká).

2.4 Velikost dluhu v případě defaltu

Velikost dluhu pro účely měření kreditního rizika nás zajímá pouze v případě, že dlužník selže. V případě tradičních dluhových instrumentů, jako jsou dluhopisy nebo úvěry, se velikost dluhu rovná dlužné částce. U kontokorentních účtů, kreditních karet a dalších instrumentů, kde velikost vybrané částky závisí na potřebách klienta, volily konzervativní banky maximální možnou dlužnou částku, jiné třeba její střední hodnotu. První přístup nebezpečí jistě přeceňuje, druhý jej naopak podceňuje vzhledem k rostoucím vybíraným částkám při zhoršující se finanční situaci klienta, způsobeným zdražením peněz z jiných zdrojů (viz tabulka (2.4)). Z čerpané části platí klient obvyklý úrok, z nečerpané části určitý poplatek (buď pevnou částku, nebo určité procento z nečerpané části, obvykle řádově nižší než sazba úroku za čerpanou část – viz poslední sloupec tabulky (2.4)). Dnes se obvykle užívá přístup dle Basel II:

$$EAD = \check{c}erpan\acute{a}\ \check{c}\acute{a}st + CCF \cdot ne\check{c}erpan\acute{a}\ \check{c}\acute{a}st$$

CCF (Credit Conversion Factor) udává podíl nečerpané části úvěru, která bude pravděpodobně vybrána v okamžiku defaultu (například 70%).

Rating	**Průměrná vybraná část**	**Podíl z obvykle nevybrané části v případě defaultu**	**Poplatek za nevybranou část (b.p)**
AAA	0.1%	69%	3
AA	1.6%	73%	4
A	4.6%	71%	6
BBB	20.0%	65%	9
BB	46.8%	52%	18
B	63.7%	48%	40
C	75.0%	44%	120

Tabulka 2.4: Závislost nečerpané části na ratingu klienta a poplatek za nečerpanou část úvěru (Zdroj: [5], str. 43, 45)

Kapitola 3

CreditMetrics

CreditMetrics je přístup sloužící k měření rizika kreditní ztráty způsobené změnou kreditní kvality dlužníka. Ztráta tedy nevzniká pouze při defaultu protistrany, ale i při jejím přechodu do některé z horších ratingových tříd (pravděpodobnosti defaultu jsou ovšem závislé pouze na ratingu, jinak se nemění).[1] Cílem je odhadnout očekávanou a neočekávanou ztrátu portfolia; postupujeme tak, že ke konci časového horizontu určíme střední hodnotu portfolia, jeho hodnotu na určitém zvoleném kvantilu a použijeme vzorce z podkapitoly (1.2). Výstupem tohoto modelu je ovšem celá distribuční funkce hodnoty portfolia.

Nejprve si ukážeme aplikaci této metody na jeden úvěr, poté úvahy rozšíříme na celé portfolio.[2] V první části rovněž uvedeme analytický výpočet, pro větší portfolia se však kvůli velké komplexnosti modelu používá výhradně výpočet pomocí simulací Monte Carlo.[3]

3.1 Výpočet kreditního rizika pro jeden úvěr

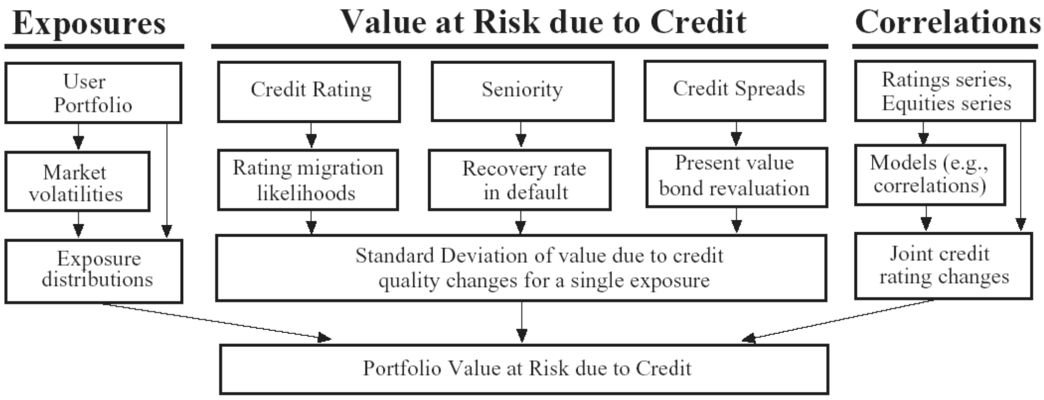
Mějme pro začátek v portfoliu pouze jeden úvěr. Riziko vzniká v důsledku nestálosti hodnoty úvěru, způsobené ratingovými změnami a posunem tržních bezrizikových forwardových úrokových křivek. Očekáváme tedy stále stejné budoucí toky z úvěru (kromě defaultu), mění se pouze diskontní (forwardové) sazby.[4] Ty jsou rovny součtu bezrizikové úrokové sazby a prémie za riziko,

[1] Narozdíl např. od modelu CreditPortfolioView, kde jsou pravděpodobnosti defaultu funkcemi ukazatelů makroekonomické situace.

[2] Podobný postup je zvolen v [5].

[3] Více o metodě Monte Carlo, stejně jako o potřebném počtu simulačních běhů, lze nalézt v [7], od str. 155.

[4] Pokud v průběhu trvání úvěru můžeme měnit velikost vybrané částky (např. u kreditních karet), mění se i budoucí toky z úvěru.



Obrázek 3.1: Schéma výpočtu CreditMetrics

která roste s rostoucím rizikem klienta; výsledné hodnoty pak vypadají například jako v tabulce (3.1). Závisí na tržních podmínkách, jejich modelování přesahuje rámec této práce. Uvažujeme tedy pouze kreditní ztrátu, která vznikne při změně ratingu dlužníka. Tu modelujeme pomocí matice pravděpodobnosti přechodu (užijeme matici (2.1)).

Rating	**Rok 1**	**Rok 2**	**Rok 3**	**Rok 4**
AAA	3.60	4.17	4.73	5.12
AA	3.65	4.22	4.78	5.17
A	3.72	4.32	4.93	5.32
BBB	4.10	4.67	5.25	5.63
BB	5.55	6.02	6.78	7.27
B	6.05	7.02	8.03	8.52
CCC	15.05	15.02	14.03	13.52

Tabulka 3.1: Příklad forwardových sazeb rozlišených dle ratingu dlužníka (Zdroj: [5], str.27).

Nyní se dostáváme k samotnému výpočtu kreditního rizika. Mějme klasický úvěr s délkou trvání t let. Dle počátečního ratingu r_0 vyčteme z příslušného řádku matice (2.1) pravděpodobnosti přechodu do jednotlivých ratingových tříd

$$p := \{p_{AAA}, p_{AA}, \ldots, p_{CCC}, p_{Def}\}$$

a z tabulky (3.1) dostaneme forwardové sazby v čase k pro rating r (označme i_k^r). Předpokládejme dále, že se tyto sazby v čase nemění. Označme dnešní hodnotu úvěru PV a jeho hodnotu za rok za předpokladu, že bude mít klient rating r, označme FV^r. Hodnoty těchto veličin spočteme pomocí vzorců

$$PV = \sum_{k=1}^{t} \frac{CF_k}{(1+i_k^{r_0})^k} \tag{3.1}$$

$$FV^r = CF_1 + \sum_{k=2}^{t} \frac{CF_k}{\left(1+i_{k-1}^{r}\right)^{k-1}} \tag{3.2}$$

CF_k je tok plynoucí z úvěru v čase k. V případě jednorázově splatného úvěru ve výši EAD s úrokovou sazbou u a ročním splácením úroků je tento tok dán vektorem

$$CF_1 = CF_2 = \cdots = CF_{t-1} = u \cdot EAD, \quad CF_t = (1+u) \cdot EAD$$

Pokud klient během roku zdefaultuje, pak je $CF_1 = (1 - LGD) \cdot EAD$ a ostatní toky jsou nulové. Pro výpočet očekávané ztráty μ použijeme vzorec (1.1)

$$\mu = PV - \frac{\sum_{r=1}^{\mathrm{RC}} p_r \cdot FV^r}{1+i}, \qquad \begin{array}{l} RC \ldots \text{počet ratingových tříd} \\ i \ldots \text{bezriková úr. míra} \end{array} \tag{3.3}$$

Nyní s použitím vzorců z odstavce (1.2.2) vypočtěme velikost neočekávané ztráty. Nejprve si musíme zvolit kvantil α, na kterém budeme hodnotu portfolia počítat. Poté sčítáme pravděpodobnosti přechodu na konci časového horizontu od nejhoršího ratingu k nejlepšímu (včetně defaultu), dokud nepřekročíme hladinu α (rating 1 je nejlepší, RC je nejhorší). Rating, do kterého budeme migrovat s poslední přičtenou pravděpodobností, označme r'.

$$r' := \max\{r; p_{RC} + p_{RC-1} + \ldots + p_r \geq \alpha\}$$

Odečteme-li hodnotu úvěru v ratingu r' od střední hodnoty úvěru na konci časového horizontu, dostaneme dle vzorce (1.2) hledanou neočekávanou ztrátu

$$VaR_\alpha(X) = \frac{\sum_{r=1}^{RC} p_r \cdot FV^r - FV^{r'}}{1+i} \qquad i \ldots \text{bezriková úr. míra}$$

3.2 Výpočet kreditního rizika pro portfolio

Při přechodu od jednoho úvěru k celému portfoliu musíme zahrnout do našich úvah vzájemné korelace mezi úvěry. Nejprve předpokládejme, že jsou jednotlivé úvěry nezávislé. Pak pravděpodobnost, že dlužníci A, B, kteří jsou nyní v ratingu r_1, resp. r_2, budou na konci období v ratingových kategoriích r_3, resp. r_4, je zřejmě dána součinem pravděpodobností jejich migrací do těchto kategorií.

$$P\left(A_{r_1 \to r_2} \wedge B_{r_3 \to r_4}\right) = P\left(A_{r_1 \to r_2}\right) \cdot P\left(B_{r_3 \to r_4}\right)$$

Počet možných kombinací budoucích ratingů dlužníků v portfoliu je roven

$$(\text{Počet ratingových kategorií})^{(\text{Počet dlužníků})}$$

Hodnotu portfolia na konci časového horizontu při jednotlivých ratingových migracích dlužníků dostaneme prostým součtem hodnot dluhů v nových ratingových třídách, které spočteme dle vzorce (3.2). Máme tedy hodnoty portfolia na konci časového horizontu pro všechny ratingové migrace a k nim příslušející pravděpodobnosti, což nám dává celou distribuční funkci. Stejným postupem jako v případě jednoho úvěru spočteme očekávanou a neočekávanou ztrátu portfolia.

Předpoklad nulové korelace mezi úvěry je ovšem příliš zjednodušující, neboť vývoj některých makroekonomických ukazatelů nebo legislativní rozhodnutí mají vliv na všechny firmy současně, nehledě na to, že firmy mohou mít mezi sebou dodavatelské a odběratelské vazby a default jedné firmy může ohrozit existenci jiných. Sdružená pravděpodobnost již není pouhým součinem pravděpodobností jednotlivých ratingových stavů, ale musíme uvažovat složitější vazby. K jejich modelování a tedy určení ratingů dlužníků na konci časového horizontu používáme simulace Monte Carlo.

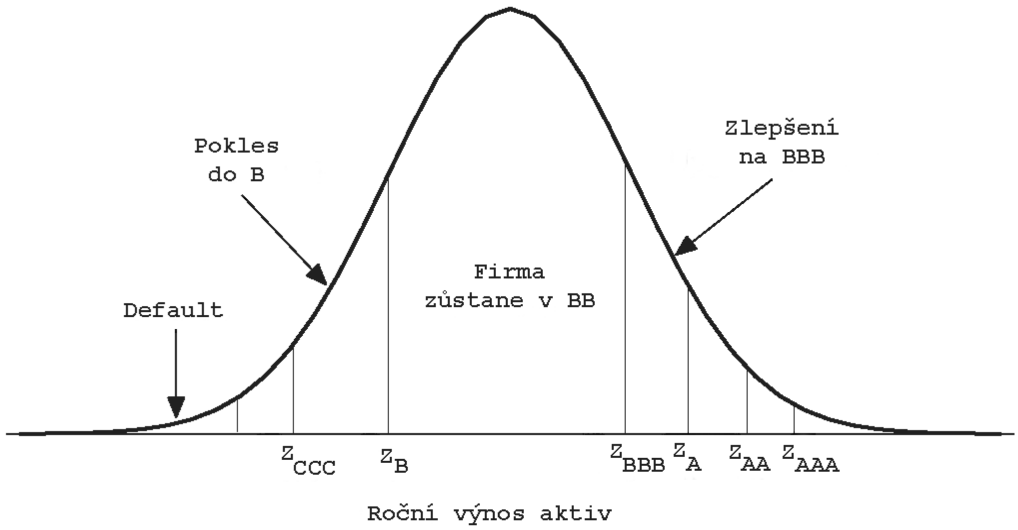
Nejprve si zavedeme model, kterým navážeme hodnotu firmy na ratingové třídy. To můžeme udělat například tak, že zařazení do ratingu bude funkcí výnosnosti aktiv. Tento přístup vychází z Mertonova modelu,[5] kde je default definován jako pokles hodnoty firmy (výnosnosti aktiv firmy) pod zvolenou hodnotu, a rozšiřuje jej na všechny ratingové kategorie. Předpokládáme, že vývoj aktiv firmy R se řídí normálním rozdělením $N(\mu, \sigma)$ (je ovšem možno uvažovat i jiná rozdělení). Jelikož nás zajímá především rozptyl hodnot, můžeme pro zjednodušení předpokládat $\mu = 0$. Tato volba na náš výsledek nemá vliv.[6] Jelikož z matice (2.1) známe pravděpodobnosti přechodu dlužníků, můžeme ze vzorců (3.4) stanovit pro každý rating prahové hodnoty přechodu Z_{AAA} až Z_{Def}. Tyto hodnoty poté vyznačíme do grafu normálního rozdělní (3.2).

[5]Viz [7].

[6]Později si ukážeme, že při generování scénářů lze užít dokonce jednotkový rozptyl. Použití normálního rozdělení nám umožní snadnou implementaci korelací mezi dlužníky do modelu.

$$\begin{aligned}
P\,(\text{Default}) &= P\,(R < Z_{Def}) = \Phi\left(\frac{Z_{Def}}{\sigma}\right) \\
P\,(\text{Rating CCC}) &= P\,(Z_{Def} < R < Z_{CCC}) = \Phi\left(\frac{Z_{CCC}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{Z_{Def}}{\sigma}\right) \\
&\vdots \\
P\,(\text{Rating AAA}) &= 1 - \Phi\left(\frac{Z_{AA}}{\sigma}\right) \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

V dalším kroku vybíráme hodnoty z rozdělení $N\,(0,\sigma)$ a dle toho, do jaké části grafu (3.2) hodnoty padnou, odečteme na ose x rating na konci časového horizontu.



Obrázek 3.2: Prahové hodnoty pro výchozí rating BB

Při modelování celého portfolia vybíráme hodnoty z multinormálního rozdělení s nulovou střední hodnotou a s kovariační maticí Σ. Rozměr matice je roven počtu úvěrů v portfoliu. Je-li σ_i rozptyl výnosů aktiv i-té firmy a ρ_{ij} koeficient korelace mezi firmami i, j, pak je matice Σ definována jako

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n & \rho_{3n}\sigma_3\sigma_n & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Pro určení koeficientů korelace každé dvojice firem by bylo nejlepší sledovat nějaký ukazatel hodnoty firem (např. celkovou hodnotu aktiv firmy, výnos z aktiv, popř. další ukazatele) po co nejdelší dobu N a vypočítat ji dle vzorce

$$\rho_{x,y} = \frac{N\sum_{k=1}^{N} x_k y_k - \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{N} y_k\right)}{\sqrt{\left(N\sum_{k=1}^{N} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2\right)\left(N\sum_{k=1}^{N} y_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{N} y_k\right)^2\right)}} \tag{3.5}$$

kde x, y jsou ukazatele hodnoty první a druhé firmy. Pro n firem v portfoliu by to ovšem znamenalo řádově n^2 časových řad délky N. Pro zjednodušení a kvůli nedostatku dat se proto firmy vztáhnou na index regionu a odvětví, ve kterém podnikají, a vypočtou se korelace pouze mezi těmito indexy. Korelace mezi konkrétními dlužníky se pak stanoví z vypočtené korelace mezi indexy, vynásobené koeficientem udávajícím závislost firmy na systematickém riziku. Zbytek rizika představuje jedinečné riziko firmy, které je se systematickým nekorelované. Podniká-li tedy např. česká firma A v oblasti sklářství a slovenská firma B v oblasti ocelářství a korelace mezi českým sklářským a slovenským ocelářským průmyslem je ρ, přičemž výše jedinečných rizik jsou ω_A a ω_B, pak je korelace mezi těmito firmami rovna

$$\rho_{AB} = \rho \cdot (1 - \omega_A) \cdot (1 - \omega_B)$$

Podrobnější odvození korelací mezi dlužníky, např. známe-li zvlášť korelace mezi odvětvími a regiony, je uvedeno ve výpočetní části. Model lze ještě zjednodušit, neboť můžeme předpokládat jednotkové rozptyly $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Pro objasnění si představme dva dlužníky ve stejné ratingové kategorii, kteří se liší volatilitou své hodnoty (ale mají stejné pravděpodobnosti přechodu do jednotlivých ratingů). Pak jeden bude mít více „roztáhlý“ graf distribuční funkce normálního rozdělení a bude mít od sebe dále prahové hodnoty ratingových přechodů, ale stejně tak se budou lišit výběry z jeho normálního rozdělení.[7] Proto můžeme uvažovat standardizované normální rozdělení.

Nyní použijeme již zmíněnou simulaci Monte Carlo. Z multinormálního rozdělení (nyní již se známými parametry $N(0, \Sigma)$) vybíráme vektory budoucího výnosu aktiv jednotlivých dlužníků a přiřazujeme jim ratingy dle zařazení do intervalů daných prahovými hodnotami. Z těchto ratingů určíme podle tabulky (3.1) diskontní míry a ze vzorce (3.2) vypočteme hodnotu každého dluhu na konci období. Hodnotu celého portfolia dostaneme součtem všech dluhů.

[7] Nebo si můžeme uvědomit, že ve vzorcích (3.4) prahové hodnoty rozptylem dělíme, tedy je jakoby „normujeme“.

3.3 Odhad charakteristik portfolia

Ze simulace Monte Carlo odvozujeme ratingové migrace jednotlivých dlužníků v portfoliu. Mějme celkem k simulačních běhů a portfolio čítající n úvěrů. Použijme vzorec (3.2) pro výpočet jejich hodnoty na konci časového horizontu FV_i^j, $i = 1 \dots n, j = 1 \dots k$, hodnotu celého portfolia pro j-tý scénář označme FV^j. Pak *střední hodnota* portfolia na konci časového horizontu je rovna

$$E[FV] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} FV^j$$

Další charakteristikou, která nás zajímá, je kvantil na určité pravděpodobnostní hladině. Pro jeho určení si seřadíme namodelované hodnoty portfolia dle velikosti

$$FV^1, FV^2, \dots, FV^k \rightarrow FV^{[1]}, FV^{[2]}, \dots FV^{[k]}$$

Zajímá-li nás 1%-ní kvantil, vezmeme hodnotu na $k/100$-tém místě. Neočekávaná ztráta na hladině 99% je pak rovna

$$VaR_{99\%} = E[FV] - FV^{[k/100]}$$

Všechny vypočtené hodnoty opět diskontujeme k počátku časového horizontu.

Kapitola 4

Vašíčkův model

4.1 Předpoklady modelu

Tento přístup nabízí analytický a tudíž velmi rychlý výpočet hodnoty v riziku.[1] Je ovšem třeba počítat s několika omezeními:

- jednotlivé úvěry jsou stejně vysoké
- pravděpodobnosti defaultu jsou pro všechny úvěry shodné
- korelace logaritmů hodnot aktiv každých dvou firem jsou rovněž shodné

4.2 Odvození modelu

Mějme n úvěrů ve stejné výši, s danou pravděpodobností defaultu PD a vzájemnou korelací logaritmů hodnot aktiv R, kde $0 < R < 1$. Naším cílem je spočítat pravděpodobnostní rozdělení procentní ztráty portfolia L; při defaultu k úvěrů je tato pravděpodobnost zřejmě rovna

$$P_{nk} = P\left(L = \frac{k}{n}\right)$$

Označme A_{it} hodnotu aktiv firmy $i = 1, \ldots, n$ v čase $t \geq 0$. Default firmy nastane tehdy, pokud hodnota závazků firmy (označme ji D_i) klesne pod hodnotu aktiv (v čase T).

Pro modelování vývoje hodnoty aktiv definujme pomocný náhodný proces $(Z_i(t), t \geq 0)$, $i = 1 \ldots n$. Mějme nejprve $n + 1$ nezávislých Wienerových

[1] Tento model lze nalézt v [2], [6].

procesů[2]

$$(X(t), t \geq 0), (\epsilon_1(t), t \geq 0) \ldots, (\epsilon_n(t), t \geq 0)$$

a definujme s jejich pomocí procesy

$$Z_i(t) = \sqrt{R}X(t) + \sqrt{1-R}\epsilon_i(t), \quad i = 1 \ldots n, \quad t \geq 0 \tag{4.1}$$

Z uvedené definice plyne

$$Corr(Z_i(t), Z_j(t)) = R, \quad i \neq j, \quad t \geq 0$$

navíc z vlastností Wienerova procesu dostáváme, že náhodné veličiny

$$\frac{Z_1(T)}{T}, \ldots, \frac{Z_n(T)}{T}, \frac{X(T)}{T}, \frac{\epsilon_1(T)}{T}, \ldots, \frac{\epsilon_n(T)}{T}$$

mají normované normální rozdělení $N(0,1)$.

Předpokládejme nyní, že hodnoty aktiv firmy se řídí stochastickou diferenciální rovnicí tvaru

$$dA_i = rA_i dt + \sigma_i A_i dZ_i(t) \tag{4.2}$$

Upravme nejprve tuto rovnici do tvaru

$$\ln A_i(t) = \ln A_i(0) + \left(r_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)t + \sigma_i Z_i(t) \tag{4.3}$$

Protože $\ln A_i(0)$ je konstanta, platí

$$Corr(\ln A_i(t), \ln A_j(t)) = R, \qquad i \neq j$$

Nyní již můžeme odvodit pravděpodobnost defaultu pro jeden úvěr

$$\begin{aligned} PD_i &= P(A_i(t) < D_i) = P\left(\ln A_i(0) + \left(r_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T + \sigma_i Z_i(T) < \ln D_i\right) \\ &= P\left(\frac{Z_i(T)}{\sqrt{T}} < \frac{1}{\sigma_i\sqrt{T}}\left(\ln D_i - \ln A_i(0) - \left(r_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T\right)\right) \\ &= N\left(\frac{1}{\sigma_i\sqrt{T}}\left(\ln D_i - \ln A_i(0) - \left(r_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T\right)\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

kde $N(x)$ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

[2]Více o Wienerových procesech např. v knize od prof. Mandla Pravděpodobnostní dynamické modely, Academia, 1985.

Pokračujme rozšířením našich úvah z jednoho úvěru k celému portfoliu. Pravděpodobnost, že úvěry $1, \ldots, k$ budou defaultovat, zatímco úvěry $k+1, \ldots, n$ nikoli, je s využitím vztahů (4.1) a (4.4) rovna

$$\begin{aligned}
&P\left(A_1(T) < D_1, \ldots, A_k(T) < D_k, A_{k+1}(T) \geq D_{k+1}, \ldots, A_n(T) \geq D_n\right) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\ldots \left| \frac{X(T)}{\sqrt{T}} = u\right.\right) dN(u) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{Z_1(T)}{\sqrt{T}} < N^{-1}(PD), \ldots, \frac{Z_n(T)}{\sqrt{T}} < N^{-1}(PD) \left| \frac{X(T)}{\sqrt{T}} = u\right.\right) dN(u) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{\sqrt{R}X(T) + \sqrt{1-R}\epsilon_1(T)}{\sqrt{T}} < N^{-1}(PD), \ldots,\right. \\
&\qquad \left. \ldots, \frac{\sqrt{R}X(T) + \sqrt{1-R}\epsilon_n(T)}{\sqrt{T}} < N^{-1}(PD) \left| \frac{X(T)}{\sqrt{T}} = u\right.\right) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{\epsilon_1(T)}{\sqrt{T}} < \frac{1}{\sqrt{1-R}}\left(N^{-1}(PD) - \sqrt{R}\frac{X(T)}{\sqrt{T}}\right), \ldots,\right. \\
&\qquad \left. \ldots, \frac{\epsilon_n(T)}{\sqrt{T}} < \frac{1}{\sqrt{1-R}}\left(N^{-1}(PD) - \sqrt{R}\frac{X(T)}{\sqrt{T}}\right) \left| \frac{X(T)}{\sqrt{T}} = u\right.\right) dN(u) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[N\left(\frac{1}{\sqrt{1-R}}\left(N^{-1}(PD) - \sqrt{R}u\right)\right)\right]^k \cdot \\
&\qquad \cdot \left[1 - N\left(\frac{1}{\sqrt{1-R}}\left(N^{-1}(PD) - \sqrt{R}u\right)\right)\right]^{n-k} dN(u)
\end{aligned}$$

Poslední rovnost dostaneme dosazením za u, díky nezávislost veličin $X(T), \epsilon_1(T), \ldots, \epsilon_n(T)$ a díky tomu, že $\frac{\epsilon_i(T)}{\sqrt{T}}$ mají standardizované normální rozdělení.

Výše uvedený výsledek vyjadřuje pravděpodobnost defaultu prvních k úvěrů. Chceme-li vyjádřit pravděpodobnost, že zdefaultuje libovolných k úvěrů, dostaneme po substituci

$$s = N\left(\frac{1}{\sqrt{1-R}}\left(N^{-1}(PD) - \sqrt{R}u\right)\right)$$

výraz tvaru

$$P_{nk} = \binom{n}{k} \int_0^1 s^k (1-s)^{n-k} \, dW(s)$$

kde

$$W(s) = N\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\left(\sqrt{1-R}N^{-1}(s) - N^{-1}(PD)\right)\right) \qquad \text{pro } 0 \leq s \leq 1 \quad (4.5)$$

Označme podíl defaultujících úvěrů v portfoliu C_n a jeho distribuční funkci

$$F_n(\theta) = P\left(C_n \leq \theta\right) = \sum_{k=0}^{[n\theta]} P_{nk}, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

Vypočtěme nyní limitu F_n. Pomocí zákona velkých čísel lze dokázat, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{[n\theta]} s^k \left(1-s\right)^{n-k} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad 0 \leq \theta < s \leq 1 \\ 1 & \text{pro} \quad 1 \geq \theta > s \geq 0 \end{cases}$$

Limita F_n tedy existuje a spočítáme ji jako

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \lim_{n\to\infty} F_n(\theta) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{[n\theta]} \binom{n}{k} s^k \left(1-s\right)^{n-k} \right) dW(s) \\ &= \int_0^\theta 1 dW(s) + \int_\theta^1 0\, dW(s) = W(\theta) \end{aligned}$$

F je distribuční funkce náhodné veličiny, vyjadřující pravděpodobnost, že zdefaultuje méně než $100 \cdot \theta\,\%$ úvěrů ve „velmi velkém“ portfoliu. Rozdělení náhodné veličiny s touto distribuční funkcí se nazývá *Vašíčkovo rozdělení*.[3]

4.3 Kapitálový požadavek

Dle konceptu BASEL II je očekávaná ztráta kryta opravnými položkami a neočekávaná ztráta (tedy nejvyšší ztráta na daném kvantilu ponížená o střední hodnotu ztráty) je kryta kapitálem banky (ve výši kapitálového požadavku). L je jako výše náhodná veličina, vyjadřující, vyjadřující ztrátu na portfoliu úvěrů. Pak definujeme

$$\text{kapitálový požadavek (pro hladinu 99.9\%)} \stackrel{def}{=} \text{(99.9\% kvantil L)} - E\left[L\right]$$

Celková ztráta způsobená defaulty je z předchozího rovna součinu $n \cdot C_n \cdot LGD \cdot EAD$ (v korunách). Průměrná ztráta z jednoho úvěru v procentech EAD je tedy $L_n = C_n \cdot LGD$, pro n jdoucí k nekonečnu $L = C \cdot LGD$. C je náhodná veličina s Vašíčkovým rozdělením s parametry PD a R, vyjadřující podíl defaultujících úvěrů v portfoliu, kterou spočteme s užitím

[3]Dodejme, že pokud $R = 0$, pak zřejmě $C \equiv PD$.

rovnice (4.5)

$$0.999 = N\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\left(\sqrt{1-R}N^{-1}(C) - N^{-1}(PD)\right)\right)$$

po úpravě

$$C = N\left(\sqrt{\frac{R}{1-R}}N^{-1}(0.999) + \frac{1}{\sqrt{1-R}}N^{-1}(PD)\right)$$

Dostáváme vzorec pro kapitálový požadavek na jeden úvěr v % EAD jako

$$KP = LGD \cdot N\left(\sqrt{\frac{R}{1-R}}N^{-1}(0.999) + \frac{1}{\sqrt{1-R}}N^{-1}(PD)\right) - LGD \cdot PD \tag{4.6}$$

Po přenásobení počtem úvěrů a EAD dostaneme celkový kapitálový požadavek. Ten bývá pro korporátní úvěry ještě doplněn členem zohledňujícím dobu do splatnosti.

Část II

Výpočetní část

Kapitola 5

Vstupní data

Pro praktickou ukázku modelu CreditMetrics a Vašíčkova modelu uvažujme portfolio $n := 1000$ úvěrů k datu $TodayDate := 30.9.2005$, z nichž nejdelší bude splacen do $Months := 96$ měsíců (8 let). Časový horizont je 1 rok, tedy modelujeme hodnotu portfolia k datu $FutureDate := 30.9.2006$.[1]

Vstupní data jsou následující:

- Reference – pořadí úvěru v portfoliu
- Čerpaná částka $X(0)$ – čerpaná část úvěru k 30.9.2005, neuvažuji nečerpanou část
- Datum splatnosti úvěru $EndDate$ – všechny úvěry končí k poslednímu dni v daném měsíci
- Typ splátkového kalendáře – J pro jednorázově splatné, P pro postupně splatné (dlužná částka se snižuje po měsících, vždy o stejnou částku)
- Rating Moody's – interní rating úvěrů namapovaný na škálu externí ratingové agentury
- Úroková sazba u – úroková sazba v procentech (z aktuální dlužné částky) stanovená na počátku úvěru. Úroky jsou splatné měsíčně (vždy poslední den v měsíci), u starších úvěrů lze vypozorovat úroky neodpovídající jejich dnešnímu tržnímu ocenění. Je to dáno jednak jinými tržními podmínkami v době otevření úvěru, jednak tím, že za dobu platnosti úvěru se mohl dlužník dostat do jiné ratingové kategorie.
- LGD – procento ztráty z dlužné částky, které banka nedostane zpět při defaultu dlužníka.

[1]Portfolio bylo vygenerováno na základě reálných znalostí o portfoliu Komerční banky.

- Region – region dlužníka $(1, \ldots, 6)$
- Odvětví – odvětví dlužníka $(1, \ldots, 16)$

Ref	Čerp.	Splatné	Typ	Rating	Úrok	LGD	Region	Odvětví
1	39 315	30.11.2005	J	Ba2	9.2%	30%	4	1
2	96 681	31.8.2006	J	Ba2	9.2%	60%	4	1
3	301 480	31.1.2008	J	Ba2	8.0%	52%	4	1
4	599 027	30.4.2007	J	C	8.4%	70%	4	1
5	135 451	31.8.2006	P	Ba3	7.0%	30%	4	1
6	286 127	31.7.2007	P	Ba3	7.3%	30%	4	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabulka 5.1: Ukázka vstupních dat

V tabulce (5.1) je ukázka vstupních dat, charakterizujících úvěry v portfoliu. Volba vstupních dat může mít vliv na výsledek, proto bychom si je měli více přiblížit pro lepší představu o složení portfolia. Kvůli velkému počtu úvěrů by bylo nepřehledné je všechny vypisovat, uveďme tedy alespoň některé jejich charakteristiky. Číselně jsou shrnuty v tabulce (5.2), graficky na obrázku (5.1). Všimněme si především LGD, které je ve většině případů rovno 0.3 nebo 0.7. Počet jednorázových úvěrů v portfoliu je 262, počet postupně splatných doplněk do tisíce, tedy 738.

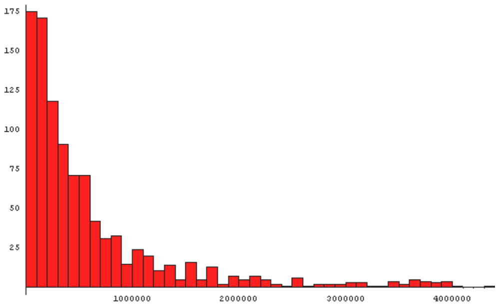
Charakteristika	Čerpaná částka	Délka trvání	Rating	LGD	Korelace
Stř. hodnota	613 233	7.7.2008	12 (Ba2)	0.53	0.26
Minimum	2593	30.11.2005	7 (A3	0.30	0.2
Maximum	4 303 430	8.8.2013	17 (C)	0.70	0.45
Medián	340 574	9.12.2007	11 (Ba1)	0.65	0.23
Rozptyl	769 933	—	—	0.18	0.06

Tabulka 5.2: Charakteristiky vstupních dat

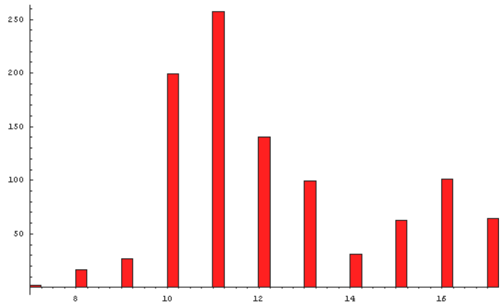
Dosud jsme si uvedli pouze veličiny popisující jednotlivé dlužníky. Dalším vstupním parametrem je bezriziková úroková míra. Užiji roční sazbu PRIBOR ve výši

$$Pribor := 1.57\%$$

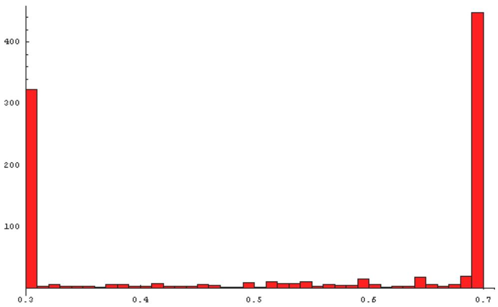
Zbývá ještě odhadnout matici ročních pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými ratingy (5.4), jež je vstupním parametrem pro metodu CreditMetrics, resp. její poslední sloupec (tzn. pravděpodobnosti defaultu), který je



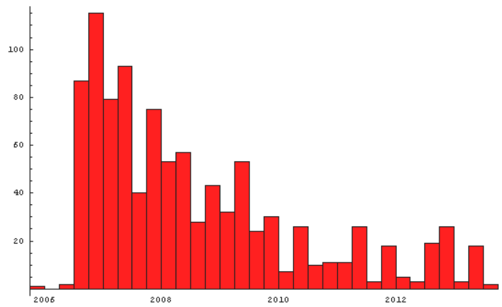
Rozložení čerpaných částek



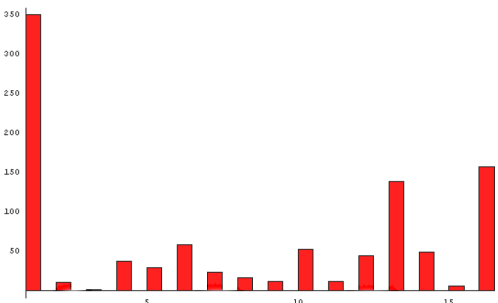
Rozložení ratingů dlužníků



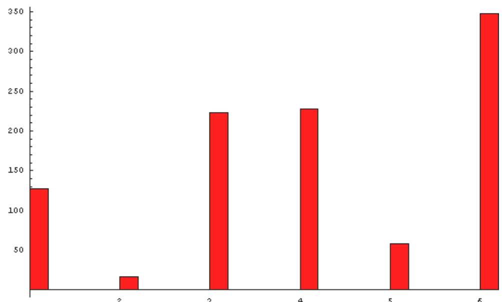
Rozložení *LGD*



Rozložení dob do splatnosti



Zařazení do odvětví



Zařazení do regionů

Obrázek 5.1: Grafické znázornění vstupních parametrů pro všechny úvěry v portfoliu.

vstupem pro Vašíčkovu metodu. Použijeme matici přechodu (5.4), převzatou z materiálu [4] a upravenou tak, aby splňovala podmínky uvedené v části (2.1.3). Jak je vidět, počet ratingových kategorií je 17 plus default. Z pravděpodobností defaultu odvodíme roční rizikové náklady, ke kterým přičteme sazbu $Pribor$, a dostaneme forwardové diskontní sazby i^r pro rating r (rozdílné hodnoty pro jednorázově splatné a postupně splatné úvěry), které užijeme při diskontování budoucích toků v metodě CreditMetrics. Jejich odvození viz příloha (A), hodnoty nalezneme v tabulce (5.3).[2]

Rating	**Pravděpodobnost defaultu**	**Riz. nákl. postupně splatné**	**Rizikové náklady jednorázové**
⋮	⋮	⋮	⋮
12	0.63	0.63	0.63
13	2.14	2.16	2.16
14	2.91	2.94	2.95
15	5.68	5.79	5.85
16	10.27	10.63	10.83
17	19.97	21.39	22.19

Tabulka 5.3: Srovnání rizikových nákladů a pravděpodobností defaultu dle ratingových tříd (v % – v neuvedených třídách jsou po zaokrouhlení na 4 desetinná míst hodnoty stejné).

Pro konkrétního dlužníka získáme diskontní sazbu tak, že vynásobíme jeho LGD velikostí rizikových nákladů, která odpovídá ratingové kategorii, ve které se nachází, a k tomuto přičteme bezrizikovou sazbu. Takto zahrneme do výpočtu skutečnost, že při defaultu dlužníka nepřijdeme o celou částku EAD, ale pouze o $EAD \cdot LGD$. Dále budeme předpokládat rovnoměrné rozdělení defaultů během celé doby do splatnosti úvěru, tedy rizikové náklady budou pro daný rating konstantní v čase.

Posledním vstupním parametrem je korelační matice. Jak jsme si uvedli v podkapitole (3.2), sledujeme pouze několik indexů, na které korelace firem navážeme. Budeme mít dvě vstupní tabulky, udávající korelace mezi odvětvími, ve kterých firma působí (tabulka (5.5)), a regionech, kde působí (tabulka (5.6)). Odvětví činností firem uvažujeme $x := 16$, regionů $y := 6$.

[2] Zde vzniká malá nepřesnost, způsobená měsíčním úročením vkladu, neboť v odvození rizikových nákladů se předpokládá spojité splácení úvěru.

	Aaa	Aa1	Aa2	Aa3	A1	A2	A3	Baa1	Baa2	Baa3	Ba1	Ba2	Ba3	B1	B2	B3	C	Def
Aaa	89.96	5.92	2.79	0.58	0.41	0.21	0.08	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Aa1	1.99	81.44	8.23	6.40	1.47	0.26	0.05	0.10	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Aa2	0.64	3.19	82.28	8.81	3.13	1.24	0.48	0.10	0.06	0.03	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Aa3	0.10	0.59	3.69	82.54	8.92	2.99	0.67	0.22	0.10	0.08	0.04	0.03	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
A1	0.05	0.20	0.46	5.58	81.22	7.88	2.89	0.70	0.20	0.30	0.25	0.07	0.03	0.07	0.05	0.04	0.00	0.00
A2	0.05	0.15	0.34	0.76	5.26	80.71	7.60	2.95	0.88	0.47	0.28	0.15	0.14	0.08	0.07	0.04	0.03	0.03
A3	0.05	0.12	0.17	0.22	1.83	6.82	77.99	6.89	3.37	1.26	0.45	0.23	0.15	0.17	0.12	0.05	0.07	0.03
Baa1	0.04	0.10	0.15	0.17	0.23	2.11	6.63	76.74	7.79	3.13	0.95	0.44	0.21	0.65	0.15	0.08	0.25	0.17
Baa2	0.04	0.07	0.13	0.16	0.22	0.62	3.46	5.74	77.80	7.08	1.72	0.82	0.68	0.52	0.23	0.12	0.36	0.22
Baa3	0.04	0.04	0.04	0.08	0.18	0.40	0.68	3.08	8.22	74.23	6.16	2.68	1.73	0.65	0.45	0.23	0.70	0.40
Ba1	0.00	0.03	0.04	0.03	0.15	0.21	0.54	0.96	3.12	8.62	71.59	5.14	4.62	1.59	1.14	0.81	0.90	0.50
Ba2	0.00	0.00	0.04	0.04	0.07	0.19	0.22	0.37	0.81	2.48	9.96	68.30	8.74	2.63	3.11	1.07	1.33	0.63
Ba3	0.00	0.00	0.02	0.03	0.06	0.14	0.17	0.30	0.42	0.67	2.59	5.77	70.76	6.70	5.13	2.83	2.26	2.14
B1	0.00	0.00	0.02	0.02	0.05	0.11	0.15	0.25	0.25	0.30	0.48	2.99	6.07	68.28	8.59	4.93	4.59	2.91
B2	0.00	0.00	0.03	0.03	0.04	0.09	0.12	0.22	0.24	0.25	0.34	0.74	1.83	7.20	62.26	10.59	10.33	5.68
B3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.08	0.08	0.12	0.12	0.15	0.12	0.38	0.65	3.46	5.77	60.87	17.88	10.27
C	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.24	0.43	0.77	1.06	4.26	73.26	19.97

Tabulka 5.4: Matice pravděpodobností přechodu

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0.27	0.20	0.15	0.15	0.15	0.10	0.13	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.13	0.13	0.16	0.13
2	0.20	0.27	0.15	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.12	0.10	0.10	0.13	0.13	0.16	0.13
3	0.15	0.15	0.27	0.10	0.10	0.18	0.15	0.10	0.10	0.10	0.20	0.17	0.13	0.13	0.16	0.13
4	0.15	0.10	0.10	0.27	0.15	0.10	0.10	0.10	0.10	0.11	0.10	0.10	0.13	0.13	0.16	0.13
5	0.15	0.10	0.10	0.15	0.27	0.10	0.10	0.10	0.10	0.11	0.15	0.10	0.13	0.13	0.16	0.13
6	0.10	0.10	0.18	0.10	0.10	0.27	0.20	0.15	0.10	0.11	0.20	0.15	0.13	0.13	0.16	0.13
7	0.13	0.10	0.15	0.10	0.10	0.20	0.27	0.15	0.15	0.13	0.15	0.15	0.13	0.13	0.16	0.13
8	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.15	0.15	0.27	0.15	0.11	0.15	0.15	0.13	0.13	0.16	0.13
9	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.15	0.15	0.27	0.16	0.15	0.15	0.13	0.13	0.16	0.13
10	0.10	0.12	0.10	0.11	0.11	0.11	0.13	0.11	0.16	0.27	0.15	0.15	0.13	0.13	0.16	0.13
11	0.10	0.10	0.20	0.10	0.15	0.20	0.15	0.15	0.15	0.15	0.27	0.18	0.13	0.13	0.16	0.13
12	0.10	0.10	0.17	0.10	0.10	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.18	0.27	0.13	0.13	0.16	0.13
13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.27	0.13	0.16	0.13
14	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.27	0.16	0.13
15	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.27	0.13
16	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.27

Tabulka 5.5: Korelační matice pro odvětví

	1	2	3	4	5	6
1	0.15	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
2	0.10	0.12	0.10	0.10	0.10	0.10
3	0.10	0.10	0.15	0.10	0.10	0.10
4	0.10	0.10	0.10	0.15	0.10	0.10
5	0.10	0.10	0.10	0.10	0.18	0.10
6	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.15

Tabulka 5.6: Korelační matice pro regiony

Kapitola 6

Aplikace modelů

Veškeré výpočty probíhaly v programu Mathematica, verze 4.2 od firmy Wolfram Research, Inc. Výpočet metodou CreditMetrics byl poměrně zdlouhavý, závislý především na počtu úvěrů v portfoliu a počtu generovaných scénářů.[1] Nejvíce procesorového času zabírá generování vektorů náhodných scénářů z korelační matice rozměru $n \times n$ a finální výpočet hodnoty portfolia na konci časového horizontu. První zpomalení lze výrazně redukovat tím, že Choleskyho rozklad matice, který Mathematica provádí při výběru náhodného vektoru, se provede pouze jednou.[2] Při tomto postupu se všechny vygenerované vektory ukládají do paměti, čímž je vyvážena rychlost této metody. Kvůli omezenému technickému vybavení jsem provedl „pouze“ 20 000 simulačních běhů, což by mělo stačit pro hladinu spolehlivost až 99,5% (viz následující kapitola). Výpočet dle Vašíčkovy metody je proveden téměř okamžitě.

6.1 CreditMetrics

Při programování metody CreditMetrics jsem vycházel z materiálu [5]. Navíc jsem přidal možnost vyjádřit zvlášť velikost kreditního rizika pro úvěry, které mají být splaceny před a po konci časového horizontu. To nám poslouží k důkladnější analýze výsledků. Z definic je zřejmé, že očekávaná ztráta se chová aditivně, neočekávaná ztráta nikoliv.

Do hodnoty portfolia za rok zahrnujeme rovněž všechny úroky a splátky úvěru, provedené během časového horizontu (úročené bezrizikovou mírou ke konci časového horizontu), popřípadě příslušné toky při defaultu. Problém

[1] Pro 1000 úvěrů a 20 000 scénářů trval výpočet metody CreditMetrics na počítači AMD Sempron 2,4GHz s pamětí 512MB přibližně 6 hodin.

[2] Více viz help programu Mathematica, heslo MultinormalDistribution.

področních splátek úvěru není v [5] diskutován, pouze je řečeno, že u področních úvěrů metoda zkoumá pouze pravděpodobnost defaultu, migrace mezi ratingy se neuvažují. To odpovídá tomu, že banku nezajímá, v jakém ratingu je dlužník v době, kdy splácí zbytek úvěru, pouze ji zajímá, zdali nezdefaultoval. My budeme postupovat stejně.

Úroky a splátky jistiny, které obdržíme před koncem časového horizontu, úročíme k jeho konci bezrizikovou úrokovou mírou. To nám zaručí nejen zahrnutí všech úvěrů s maturitou, která vyprší před koncem časového horizontu, ale i všech splátek úvěrů s pozdější maturitou během časového horizontu, a tedy rozumnější srovnání hodnoty PV a FV (diskontované k počátku časového horizontu). Při modelování področních pravděpodobností defaultu $\overline{PD}$ uvažujeme rovnoměrné rozdělení defaultů v čase ($TotNoDays$ viz vzorec (6.2))

$$\overline{PD} = \frac{TotNoDays}{365} PD \qquad PD \ldots \text{roční pravděpodobnost defaultu} \tag{6.1}$$

Tedy například pro úvěr splatný za měsíc s roční pravděpodobností defaultu 12% uvažujeme pouze (přibližně) 1%-tní pravděpodobnost defaultu. Ještě přidejme předpoklad, že pokud k defaultu během zkoumaného roku skutečně dojde, pak k němu dojde v polovině zbývající doby trvání úvěru (u področních úvěrů) resp. v polovině roku (u nadročních). Všechny defaultu předešlé splátky úroků a případných částí jistiny byly splaceny, následné nikoliv.

Nyní se dostáváme k samotnému výpočtu. Področní úročení úvěrů je jednoduché, nadroční složené, uvažovaný kalendář je $\frac{Actual}{365}$, neboli skutečný počet dní v měsíci a 365 dní v roce (včetně přestupných roků). Označme si $NoDaysInMth(i)$ počet dní v i-tém měsíci (od $TodayDate$), $NoDays(i)$ celkový počet dní, jak dlouho již úvěr trvá na konci i-tého měsíce (od $TodayDate$) a $TotNoDays$, resp. $NoMonths$ celkový počet dní, resp. měsíců, po které ještě bude úvěr trvat (rovněž od $TodayDate$).

$$\begin{aligned}
NoDaysInMth &:= \{31, 30, 31, 31, 28, ...\} \\
NoDays(i) &:= \min\left[\sum_{k=1}^{i} NoDaysInMth(k)\,;\, TotNoDays\right], \; i = 0, \ldots, Months \\
NoDays(0) &:= 0 \\
TotNoDays &:= EndDate - TodayDate
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Označme symbolem $X(i)$ dlužnou částku na konci i-tého měsíce. U jednorázově splatných úvěrů je zřejmě po celou dobu trvání úvěru rovna $X(0)$, u postupně splatných je jistina lineárně splácena dle vzorce

$$X(k) := X(0) \cdot \left(1 - \frac{NoDays(k)}{TotNoDays}\right), \quad k = 1, \ldots, Months$$

Dnešní hodnotu libovolného úvěru PV spočteme dle vzorce (6.3) jako

$$\begin{aligned} PV \;=\; & \sum_{k=1}^{\min[12\,;\,NoMonths]} \frac{u \cdot X(k-1) \cdot \frac{NoDays(k)-NoDays(k-1)}{365} + (X(k-1) - X(k))}{1 + \frac{NoDays(k)}{365} i_{LGD}^{r_0}} + \\ + & \sum_{k=13}^{NoMonths} \frac{u \cdot X(k-1) \cdot \frac{NoDays(k)-NoDays(k-1)}{365} + (X(k-1) - X(k))}{(1 + i_{LGD}^{r_0})^{\frac{NoDays(k)}{365}}} \end{aligned} \tag{6.3}$$

$i_{LGD}^{r_0}$ je diskontní míra odvozená dle přílohy (A) pro výchozí rating dlužníka r_0 a upravená dle velikosti LGD dle kapitoly (5) . Sečtením současných hodnot všech úvěrů v portfoliu dostaneme dnešní hodnotu portfolia.

Pro aplikaci metody Monte Carlo potřebujeme znát korelační matici rozměru $n \,\mathrm{x}\, n$, znázorňující vzájemné korelace mezi jednotlivými úvěry (dlužníky) v portfoliu. Ukážeme si nejprve, jak vypočteme korelaci mezi dvěma konkrétními dlužníky.[3] Každá firma je zařazena do libovolného (jednoho) regionu a jednoho odvětví, ve kterém podniká, korelace mezi regiony a odvětvími považujeme za nulové. Nechť první dlužník působí v zemi 1 a odvětví 1 a druhý v zemi 2 a odvětví 2. Pak z tabulek (5.5) a (5.6) dostáváme

$$\begin{pmatrix} \rho_1^{11} & \rho_1^{12} \\ \rho_1^{12} & \rho_1^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.27 & 0.20 \\ 0.20 & 0.27 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \rho_2^{11} & \rho_2^{12} \\ \rho_2^{12} & \rho_2^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.10 \\ 0.10 & 0.12 \end{pmatrix}$$

Nyní si sestavíme pomocnou čtvercovou matici rozměru 2+2+2 (obecně $x + y + n$, v tomto ukázkovém případě platí $x = 2$, $y = 2$, $n = 2$) tvaru

$$C = \begin{pmatrix} \rho_1^{11} & \rho_1^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_1^{12} & \rho_1^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2^{11} & \rho_2^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2^{12} & \rho_2^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{11} & \omega^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{21} & \omega^{22} \end{pmatrix}$$

Koeficienty ω udávají jedinečné riziko. Jelikož korelace mezi jedinečnými riziky dvou různých dlužníků považujeme za nulové, bude $\omega^{12} = \omega^{21} = 0$.

[3] Použijeme podobný postup jako v [5], str. 97-101.

Ostatní nuly v matici označují nezávislost jedinečných faktorů na regionech a odvětvích a regionech a odvětvích navzájem. Musí platit, že firma sama se sebou má korelaci rovnu jedné, proto můžeme ze vzorců (6.4) vypočítat jedinečná rizika obou dlužníků.

$$\omega^{11} = \sqrt{1 - \rho_1^{11} - \rho_2^{11}} = 0.76 \qquad \omega^{22} = \sqrt{1 - \rho_1^{22} - \rho_2^{22}} = 0.78 \qquad (6.4)$$

Dále sestrojíme vektor W rozměru $(x + y + n)\,\mathrm{x}\,n$, udávající, jak a na kterém indexu je konkrétní dlužník závislý. V našem případě bude mít tedy tvar

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.76 & 0 \\ 0 & 0.78 \end{pmatrix}$$

Výsledná korelační matice je

$$W^T.C.W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0.76 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0.78 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho_1^{11} & \rho_1^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_1^{12} & \rho_1^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2^{11} & \rho_2^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2^{12} & \rho_2^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{11} & \omega^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{21} & \omega^{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.76 & 0 \\ 0 & 0.78 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

Stejným postupem se získají korelace mezi všemi firmami v portfoliu a sestaví se výsledná korelační matici Σ.

Nyní je připraveno vše potřebné pro provedení simulace Monte Carlo. Jsou postupně vybírány náhodné vektory délky n z multinormálního rozdělení $N(0, \Sigma)$,[4] které modelují budoucí vývoj hodnoty firmy, a dle hodnot jejich složek je jednotlivým dlužníkům připisován rating (včetně defaultu) na konci časového horizontu. Počet simulačních běhů, vedoucí k nestrannému odhadu, je diskutován například v materiálu [7], str. 168-170. Shrňme, že pro hladinu spolehlivosti 99% postačuje 20 000 běhů, pro hladinu 99,9% je třeba alespoň 50 000 běhů.

[4] Ve skutečnosti nebylo pro toto rozdělení možno kvůli velmi malé hodnotě determinantu matice Σ provést Choleského rozklad matice, který Mathematica užívá při generování náhodných vektorů. Proto jsem výpočet upravil tak, aby byla data generována z rozdělení $N(0, 4 \cdot \Sigma)$.

Odhad hodnoty portfolia na konci časového horizontu sestává z určení hodnoty jednotlivých úvěrů a pravděpodobnosti této hodnoty. Pravděpodobnost každého běhu je dána převrácenou hodnotou jejich počtu, hodnotu úvěrů musíme vypočítat. U področních úvěrů, které nezdefaultovaly, ji určíme tak, že úročíme jednotlivé splátky úvěru (včetně úroků) ke konci časového horizontu. Pokud úvěr zdefaultoval (s upravenou pravděpodobností defaultu dle (6.1)), pak hodnotu na konci časového horizontu určíme součtem (bezrizikově úročených ke konci období) následujících částek($[\cdot]$ značí celou část, $\sum_{k=1}^{0} = 0$):

Jednorázově splatné

$$X(0) \cdot (1 - LGD) \quad \ldots \text{ část jistiny}$$

$$\frac{u \cdot X(0) \cdot TotNoDays}{2 \cdot 365} \quad \ldots \text{ část úrokových plateb do defaultu}$$

Postupně splatné

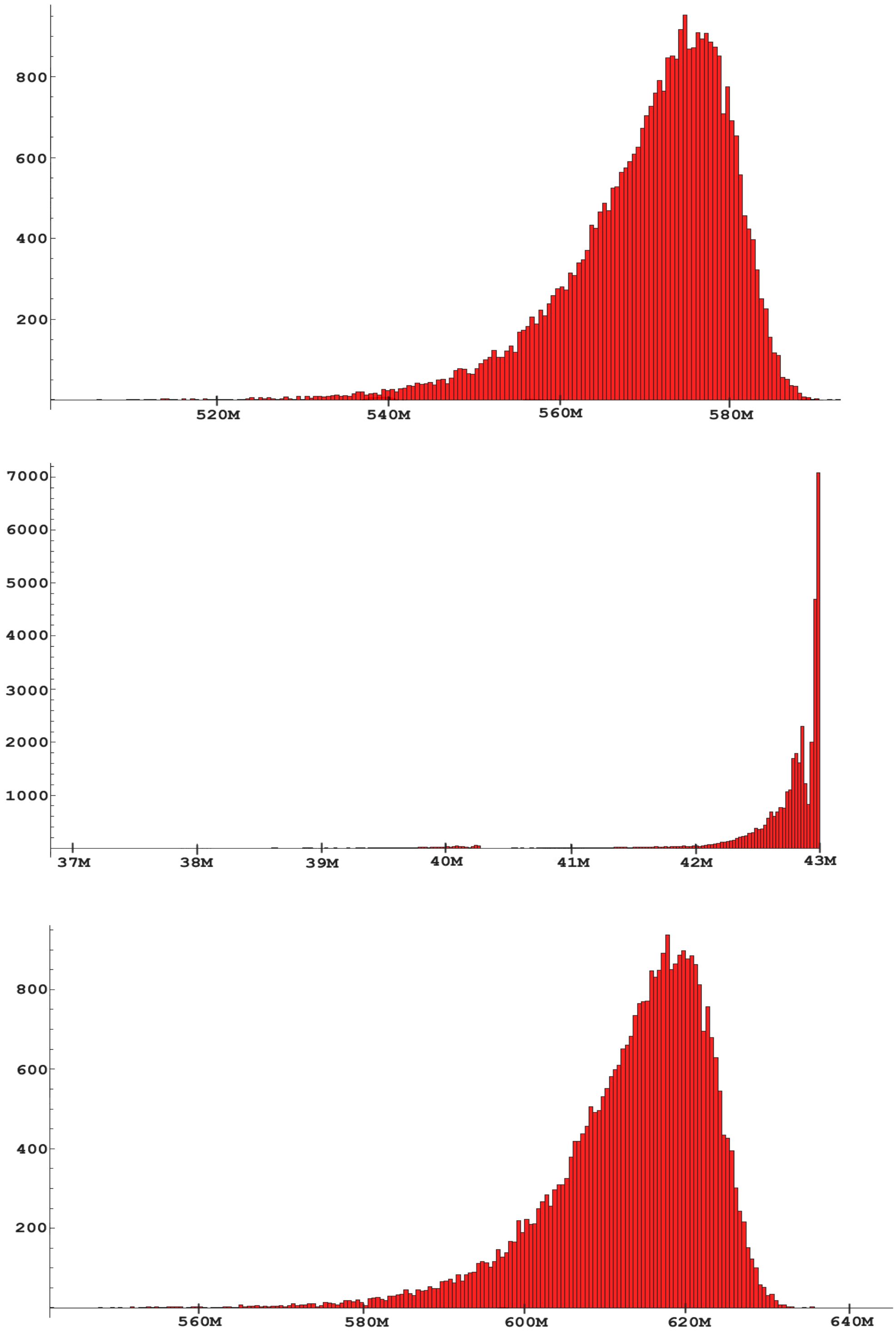
$$X(\left[\frac{NoMonths}{2}\right]) \cdot (1 - LGD) \quad \ldots \text{ část jistiny po def.}$$

$$X(0) - X(\left[\frac{NoMonths}{2}\right]) \quad \ldots \text{ část jistiny před def.}$$

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{NoMonths}{2}\right]} \frac{u \cdot X(k-1) \cdot (NoDays(k) - NoDays(k-1))}{365} \quad \ldots \text{ část úrokových plateb}$$

Nyní uvažujme nadroční úvěry. Hodnotu budoucích splátek úroků a jistiny dostaneme ze vzorce (6.3), kde pouze aktualizujeme hodnoty (počet měsíců $NoMonths$ snížíme o 12, počet dní $TotNoDays$ o 365 a jistinu $\acute{X}(k) := X(k + 12)$, $k = 0, \ldots, NoMonths - 12$). K tomu přičteme úroky a splátky během časového horizontu, úročené k jeho konci. Takto ovšem postupujeme pouze v případě, že dlužník nezdefaultuje. Při defaultu přičteme k průměrné dlužné částce během časového horizontu, vynásobené koeficientem $(1 - LGD)$, polovinu splacených úroků během časového horizontu a u postupně splatných úvěrů navíc část jistiny splacené během první poloviny časového horizontu (do defaultu). Hodnotu úročíme opět ke konci časového horizontu.[5] Nyní již máme hodnoty všech úvěrů z portfolia na konci časového horizontu. Prostým sečtením těchto hodnot získáme hodnotu celého portfolia na konci časového horizontu v daném scénáři. Tu diskontujeme o rok zpět sazbou *(1 + Pribor)*. Pokud takto spočítáme hodnotu pro všechny scénáře, lze z histogramu odvodit tvar distribuční funkce hodnoty portfolia na konci časového horizontu v dnešních cenách (viz obrázek (6.1)).

[5]Zde bychom výpočet mohli zpřesnit, kdybychom každou úrokovou platbu úročili zvlášť do konce časového horizontu dle skutečné zbývající doby.



Obrázek 6.1: Rozložení hodnoty portfolia na konci časového horizontu pro nadroční úvěry, področní a jejich součet. Lze pozorovat typickou šikmost rozdělení.

6.1.1 Očekávaná ztráta

Očekávanou ztrátu portfolia vypočteme ze vzorce (1.1). Výsledky zvlášť pro področní a nadroční úvěry shrnuje tabulka (6.1). Vidíme, že ztráta banky je kladná (zhruba ve výši 0.38%), přestože bychom očekávali, že kvůli ziskové a nákladové marži bude ztráta záporná, tedy banka bude realizovat zisk. Příčinou by mohla být skutečnost, že banka používá (nebo používala) při oceňování úvěrů matici pravděpodobností přechodu s vyššími sazbami pro zlepšení ratingu a nižšími sazbami pro zhoršení ratingu, než jaké má „naše" matice, a proto nastavila nižší úrokové sazby. Banka si tuto ztrátu musí kompenzovat jinými aktivitami (například vyššími poplatky za bankovní služby).

Za předpokladu, že rozložení dob splatnosti nově uzavíraných úvěrů se v čase nemění, dojdeme k závěru, že v balíku področních úvěrů jsou především starší úvěry, které byly uzavírány při vyšších úrokových sazbách na trhu. To by mohlo být důvodem, proč področní úvěry realizují mírný zisk (zhruba 0.03%).

	PV	**E[X]**	μ **v Kč**	μ **v % PV**
Nadroční úvěry	582 306 405	579 940 876	2 365 529	0.41%
Področní úvěry	42 717 252	42 728 778	-11 526	-0.03%
Celkem	625 023 657	622 669 654	2 354 003	0.38%

Tabulka 6.1: Očekávaná ztráta dle metody CreditMetrics

6.1.2 Neočekávaná ztráta

Velikost neočekávané ztráty určíme ze vzorce (1.2). Hodnota byla vypočtena pro více hladin spolehlivosti, dle poznámky výše jsou při 20 000 scénářích poměrně spolehlivé hodnoty pro hladiny 99% a 99.5%.

Hladina spolehlivosti	**Neočekávaná ztráta v Kč**	**Neočekávaná ztráta v % PV**
99%	45 670 927	7.31%
99.5%	55 201 584	8.83%
99.8%	72 772 819	11.64%
99.9%	84 046 020	13.45%

Tabulka 6.2: Neočekávaná ztráta dle metody CreditMetrics

Ještě v tabulce (6.3) uveďme výsledky na hladině 99% s rozepsáním neočekávané ztráty zvlášť pro področní a nadroční úvěry.

	Nadroční úvěry	**Področní úvěry**	**Celkem**
Dnešní hodnota (PV)	582 306 405	42 717 252	625 023 657
Neočekávaná ztráta v Kč	44 268 943	2 825 409	45 670 927
Neočekávaná ztráta v % PV	7.60%	6.61%	7.31%

Tabulka 6.3: Neočekávaná ztráta na hladině 99%

Vidíme, že na rozdíl od předchozí charakteristiky se nechová neočekávaná ztráta aditivně. Navíc procentní ztráta pro celé portfolio je nižší než pro nadroční část zvlášť, což může být způsobeno efektem diverzifikace.

6.1.3 Shortfall

Aplikací vzorce (1.3) dostáváme hodnoty z tabulky (6.4). I pro nejvyšší uvažovanou hladinu je shortfall pod 15% celkové hodnoty portfolia a je pro všechny uvažované hladiny spolehlivosti zhruba o 1% až 2% (z PV) vyšší než neočekávaná ztráta.

Hladina spolehlivosti	**Nadroční úvěry**	**Področní úvěry**	**Celkem**	**Shortfall v % PV**
99%	58 731 439	3 492 571	60 704 780	9.71%
99.5%	69 045 680	4 012 314	71 671 627	11.47%
99.8%	82 193 247	4 831 601	85 644 202	13.70%
99.9%	88 745 970	5 483 714	92 235 115	14.76%

Tabulka 6.4: Velikost průměrného překročení neočekávané ztráty

6.2 Vašíček

Nyní si ukážeme, jak spočítat kreditní riziko Vašíčkovou metodou. Jedna z jejích výhod spočívá v tom, že můžeme určit neočekávanou ztrátu pro každý úvěr zvlášť, neboť ve výpočtu je již zahrnuta korelace, a pak tyto ztráty jednoduše sečíst. Pro i-tý úvěr (kde $i = 1 \dots n$) potřebujeme znát čtyři veličiny – velikost dlužné částky v případě defaultu $EAD(i)$, pravděpodobnost defaultu $PD(i)$, koeficient korelace mezi dlužníkem a celým portfoliem $R(i)$ a procentní ztrátu dlužné částky při defaultu $LGD(i)$.

Nejprve určíme velikost dlužné částky v případě defaultu $EAD(i)$. Pokud bychom vzali přímo velikost dlužné částky na počátku časového horizontu, těžko bychom srovnávali obě metody, neboť u postupně splatných úvěrů můžeme obdržet část splátek jistiny dříve, než dlužník zdefaultuje. Použijeme tedy stejně jako u metody CreditMetrics předpoklad rovnoměrného rozdělení defaultů během časového horizontu. U jednorázově splatných úvěrů položíme $EAD(i)$ rovno $X(0)$, u nadročních postupně splatných úvěrů vezmeme aritmetický průměr z dlužné částky ze začátku a konce časového horizontu. U področních postupně splatných úvěrů vezmeme polovinu z $X(0)$.

Pravděpodobnosti defaultu upravíme opět s užitím předpokladu rovnoměrného rozdělení defaultů během časového horizontu podobně jako ve vzorci (6.1). Nechť $PD(i)$ značí roční pravděpodobnost defaultu i-tého dlužníka, pak pravděpodobnost defaultu, kterou použijeme ve Vašíčkově metodě, upravíme dle vztahu

$$\overline{PD(i)} = PD(i) \cdot \min\left[1\,;\ \frac{TotNoDays(i)}{365}\right] \quad i = 1 \ldots n$$

Dále je třeba určit koeficient korelace $R(i)$ pro i-tého dlužníka, který vypočteme jako aritmetický průměr korelací vzhledem k ostatním dlužníkům v portfoliu. Označíme-li $\rho_{i,j}$ korelaci mezi i-tým a j-tým úvěrem, pak $R(i)$ definujeme jako

$$R(i) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \rho_{i,j} \quad i = 1 \ldots n$$

Nakonec zbývá určit $LGD(i)$. Tato veličina je přímo ve vstupních datech a ponecháme ji beze změny.

6.2.1 Očekávaná ztráta

Ačkoliv Vašíčkova metoda není primárně určena pro odhad očekávané ztráty, můžeme ji zkusit také odhadnout. Užijeme k tomu vztah

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} EAD(i) \cdot LGD(i) \cdot \overline{PD(i)} = 10\ 030\ 086 \tag{6.5}$$

Takto odhadneme ztráty, které nám způsobí neobdržené části jistin od defaultujících dlužníků.

6.2.2 Neočekávaná ztráta

Neočekávanou ztrátu pro i-tý úvěr dostaneme ze vztahu (4.6). Celý vzorec v Mathematice, nesrovnatelně kratší než implementace CreditMetrics, vypadá například takto:

```
ND = NormalDistribution[0, 1];
Pom = CDF[ND,(Quantile[ND, 0.99] * Sqrt[R(i)] +
                              + Quantile[ND, PD(i)])/Sqrt[1 - R(i)]];
NeocekavanaZtrata = EAD(i) * (LGD(i) * Pom - LGD(i) * PD(i))
```

Uvedený vzorec je pro hladinu spolehlivost 99%, výpočet je okamžitý. Stačí vzorec aplikovat na každý úvěr v portfoliu a výsledky sečíst. V tabulce (6.5) jsou uvedeny hodnoty, ke kterým dospěla tato metoda.

Hladina spolehlivosti	**Neočekávaná ztráta**
99%	46 573 276
99.5%	55 211 654
99.8%	67 051 379
99.9%	76 256 765

Tabulka 6.5: Neočekávaná ztráta dle Vašíčkovy metody

6.3 Srovnání metod

Srovnejme nyní hodnoty kreditního rizika, jež nám poskytnou obě zkoumané metody. Provedeme ještě jeden výpočet metodou CreditMetrics s „tržními“ úroky, tedy takovými úroky, které bychom úvěrům přiřadili dnes (při uvažovaných pravděpodobnostech defaultu, pouze se zahrnutím bezrizikové úrokové míry a rizikové přirážky, tedy bez přirážek ziskových apod.). Tyto úroky jsou rovny součtu sazby *Pribor* a rizikových nákladů, upravených dle LGD jednotlivých dlužníků. Bude tedy platit, že tržní hodnota jednorázově splatných úvěrů bude po celou dobu jejich trvání při nezměněném ratingu konstantní (rovna $X(0)$) a tržní hodnota[6] postupně splatných úvěrů se bude snižovat přesně o $\frac{1}{NoMonths}$ každý měsíc až do doby celého splacení úvěru. Tímto u metody CreditMetrics eliminujeme vliv úroků, se kterými Vašíčkova metoda vůbec nepočítá, a srovnání obou metod by mělo být přesnější.

Srovnejme nejprve **očekávanou ztrátu**. U tržního ocenění úvěrů v metodě CreditMetrics vychází kladná (přibližně 0.45% z celkové hodnoty portfolia – viz tabulka (6.6)), teoreticky by měla záviset pouze na ratingových migracích, neboť ty nejsou do úrokových (a tedy ani diskontních) sazeb zahrnuty, a pokud bychom uvažovali pouze default, měla by vyjít nulová. A

[6]Myšleno tržní hodnota při spravedlivém ocenění dle výchozího ratingu a pravděpodobnosti defaultu.

skutečně - matice pravděpodobností migrace (5.4) není zcela symetrická, pravděpodobnost zhoršení ratingu je větší než jeho zlepšení. Zároveň pokles hodnoty je při zhoršení větší, než nárůst při zlepšení o stejný počet tříd.

Včetně úroků	**PV**	**E[X]**	**μ v Kč**	**μ v % PV**
CM s pův. úroky	625 023 657	622 669 654	2 354 003	0.38%
CM s trž. úroky	614 414 064	611 658 767	2 755 297	0.45%

Tabulka 6.6: Srovnání metod – očekávaná ztráta se zahrnutím úroků

Pokud bychom u metody CreditMetrics neuvažovali úrokové platby (stejně jako u Vašíčka) a chtěli bychom vypočítat očekávanou ztrátu (tedy kolik prostředků nedostaneme od dlužníků, kteří zdefaultovali), užili bychom vzorec (6.5) stejně jako u Vašíčkova modelu. Srovnání tohoto ukazatele kreditního rizika tedy nemá smysl.

Nyní se dostáváme ke srovnání **neočekávané kreditní ztráty**. Jak již bylo uvedeno, u metody CreditMetrics se neočekávaná ztráta odvozuje z hodnoty portfolia, metoda Vašíčkova ji počítá přímo. Z tabulky (6.7) vidíme, že když srovnáváme Vašíčkovu metody s metodou CreditMetrics s tržním oceněním úvěrů, je jejich relativní rozdíl na hladinách 99%, resp. 99.5% zhruba 3.13%, resp. 3.89%, tedy poměrně malý. Pro tuto situaci bychom tedy mohli metodu CreditMetrics nahradit Vašíčkovou metodou. Pro vyšší hladiny spolehlivosti se dostáváme na odchylku zhruba 12%. Tento již dosti velký rozdíl může být způsoben nedostatečným počtem simulačních běhů.

Všimněme si také toho, že neočekávaná ztráta vypočtená metodou CreditMetrics je vždy větší. To může být způsobeno tím, že narozdíl od Vašíčkovy metody přijdeme při defaultu nejen o část jistiny, ale také o část úrokových plateb.

Hladina spoleh.	**CM s pův. úroky**	**CM s trž. úroky**	**Vašíček**	**Relat. rozdíl**	**Relat. rozdíl**
99%	45 670 927	48 077 692	46 573 276	1.98%	3.13%
99.5%	55 201 584	57 444 559	55 211 654	0.02%	3.89%
99.8%	72 772 819	76 893 607	67 051 379	7.86%	12.80%
99.9%	84 046 020	86 392 919	76 256 765	9.27%	11.73%

Tabulka 6.7: Srovnání metod – neočekávaná ztráta

Podívejme se nyní na srovnání neočekávané ztráty pro původní výši úrokových sazeb. Na hladině spolehlivosti 99% je odchylka 1.98%, na hladině 99.5% je odchylka pouze 0.02%, tedy naprosto zanedbatelná![7] Další dvě vyšší

[7]Zhruba 10 000 Kč pro portfolio se současnou hodnotou přes 600 milionů Kč.

hladiny nedávají již tak podobné výsledky, nicméně relativní rozdíl pod 10% pro 20 000 běhů je také poměrně malý. Pro naše portfolio tedy vychází srovnání Vašíčkovy metody a metody CreditMetrics s původními úroky lépe než s tržními úroky. Tento rozdíl je ovšem zanedbatelný, jak ukazuje tabulka (6.8).

Hladina spoleh.	**CM s pův. úroky**	**CM s trž. úroky**	**Vašíček**
99%	7.31	7.69	7.45
99.5%	8.83	9.19	8.83
99.8%	11.64	12.30	10.73
99.9%	13.45	13.82	12.20

Tabulka 6.8: Srovnání metod – neočekávaná ztráta v % PV

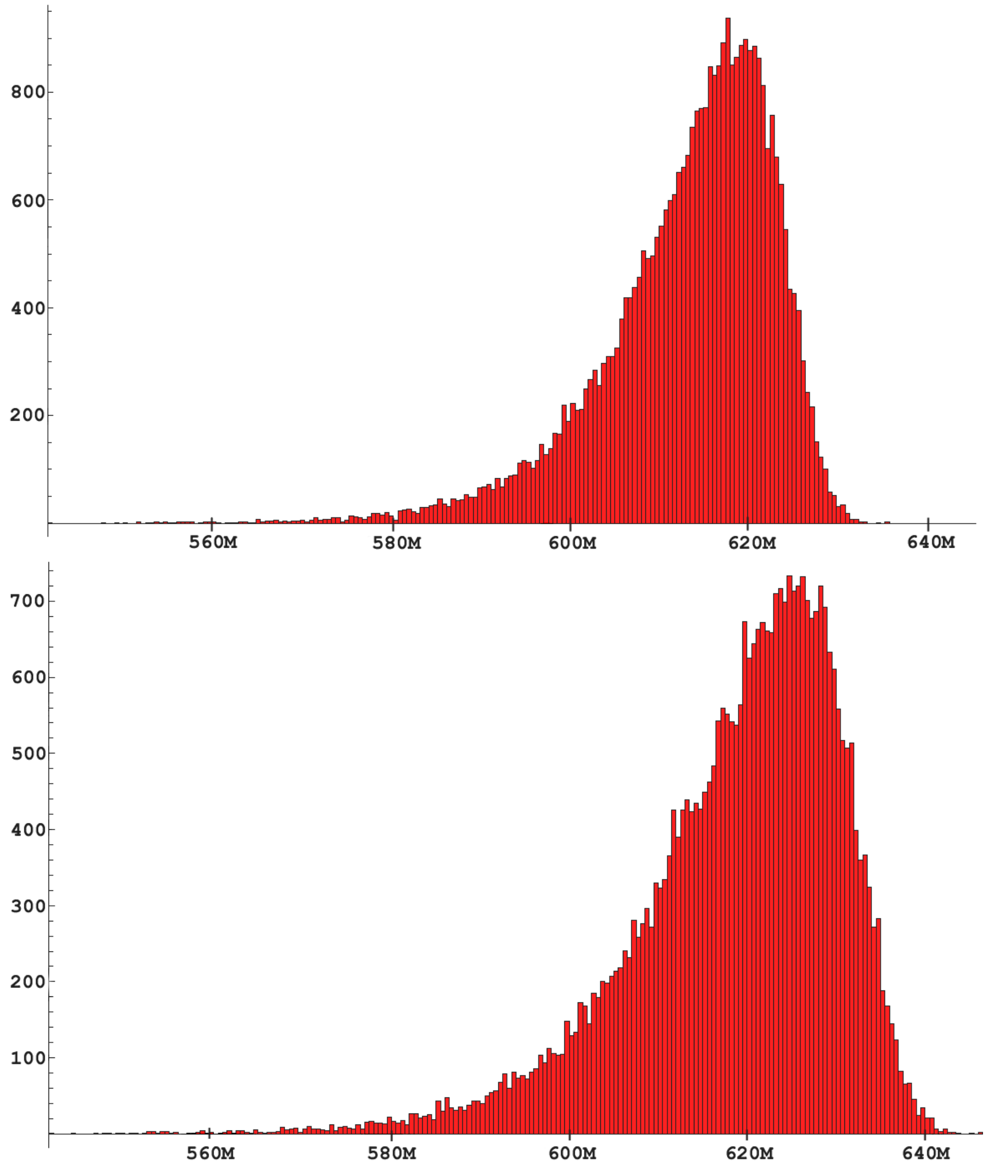
6.4 Práce s přiloženým CD

Součástí této diplomové práce je vložené CD, jehož obsah si nyní popíšeme. V souboru *Vstupní data.xls* v kořenovém adresáři jsou uvedena veškerá vstupní data obou modelů. Dále jsou zde adresáře *Vysledky* a *Vypocet*. V prvně jmenovaném jsou dva soubory, kde jsou vypočteny velikosti kreditního rizika obou modelů zvlášť pro původní ocenění a zvlášť pro tržní ocenění úvěrů. S těmito výsledky bylo v této kapitole pracováno. V druhém je soubor *Výpočet.nb*, který si popíšeme podrobněji. Spuštěním tohoto souboru pro 20 000 běhů vznikly soubory výsledků a může být užit pro výpočet kreditního rizika pro libovolné portfolio. Soubor je pro přehlednost rozdělen do několika částí.

První přichází na řadu metoda CreditMetrics (po části `Technické nastavení`, nezbytné pro správné fungování Mathematiky). V části `Nastavení modelu` se nastavuje počet úvěrů v portfoliu a počet simulačních běhů. Při tom je třeba pamatovat na délku výpočtu a jeho hardwarové nároky. Dále můžeme nastavit datum, ke kterému se portfolio počítá, a délku časového horizontu. Rovněž se nastavuje počet rizikových tříd; je možné jej změnit, ovšem zároveň s příslušnou změnou vstupní matice pravděpodobností přechodu.

V sekcích `Načtení portfolia` a `Načtení tabulek` jsou načtena vstupní data. Dle velikosti dluhů, úroků a typu splácení se vypočtou výše jednotlivých splátek (*Payments*), proměnné $NoDays$,$TotNoDays$ a $NoMonths$ a výše rizikových nákladů (RNj pro jednorázové, RNp pro postupně splatné). V další části se vypočte dnešní hodnota portfolia PV.

V sekci s názvem `Generování scénářů` jsou generovány vektory budoucích ratingů jednotlivých dlužníků na konci časového horizontu. Ty se užijí



Obrázek 6.2: Rozložení hodnoty portfolia s **původními úroky** (první graf) a **tržními úroky** (spodní graf) na konci časového horizontu, jak je spočítala metoda CreditMetrics. Vidíme, že druhý graf je více protáhlý směrem k vyšším hodnotám, pro nižší hodnoty jsou grafy téměř totožné.

v další sekci s názvem `Budoucí hodnota`, kde se provádí samotný výpočet budoucí hodnoty portfolia (tedy hodnoty na konci časového horizontu). V proměnné $FV1$ jsou uloženy hodnoty nadročních úvěrů, v proměnné $FV2$ hodnoty področních úvěrů. V této části jsou vypočtena všechna měřená kreditní rizika pro metodu CreditMetrics i s grafickým znázorněním výsledků.

U většiny časově náročnějších výpočtů je uvedena délka výpočtu pro lepší představu o času trvání jednotlivých kroků. U nejdelšího výpočtu (sčítání hodnot na konci časového horizontu dle ratingů pro všechny dlužníky a všechny simulační běhy) je vypisován průběh výpočtu (po dvacetinách). Výstup většiny mezivýsledků je potlačen, lze je však snadno zobrazit (odstraněním středníku).

Následuje aplikace Vašíčkova modelu se zřejmým pojmenováním všech proměnných. V poslední části jsou hodnoty kreditního rizika srovnány.

6.5 Hodnocení

Ve výpočetní části byl popsán způsob, jak aplikovat metodu CreditMetrics a Vašíčkovu metodu na reálné portfolio, a bylo provedeno srovnání obou metod.

Vašíčkův model nám může velmi dobře posloužit při odhadu očekávané ztráty, pokud jí rozumíme částky, které neobdržíme od defaultujících klientů. Při zahrnutí úroků, které klienti platí na pokrytí těchto ztrát, však musíme užít metodu CreditMetrics.

Další veličinou, která nás zajímala, byla neočekávaná ztráta, neboli maximální ztráta na dané hladině pravděpodobnosti. Pro velikosti úroků, které odpovídají dnešní rizikovosti úvěrů, i pro původní ocenění úvěrů jsou výsledky srovnatelné na hladinách spolehlivosti 99% a 99.5%. Pro vyšší hladiny by bylo třeba provést větší počet simulačních běhů na výkonnějších počítačích, avšak i pro provedený počet simulačních běhů je rozdíl mezi Vašíčkovou metodou a metodou CreditMetrics na nejvyšší zkoumané hladině o málo větší než 1% ze současné hodnoty portfolia.

Očekávané překročení maximální ztráty byla veličina, kterou jsme modelovali pouze metodou CreditMetrics. Tuto veličinu nepřekračuje na žádné hladině pravděpodobnosti neočekávaná ztráta vypočtená Vašíčkovou metodou, proto ji lze považovat za skutečnou maximální hodnotu neočekávané kreditní ztráty.

Uveďme si ještě možná zlepšení ukázané aplikace modelu CreditMetrics, která by ji ovšem ještě více časově a technicky znáročnila. Především bychom mohli do modelu implementovat nečerpanou část úvěru. Při změně ratingu se však mění i podíl této části a výše poplatků za ni. Museli bychom tedy uvažovat pro každého dlužníka a každý jeho možný rating na konci časového horizontu odlišnou dlužnou částku a tedy odlišnou výši splátek. To by model poměrně výrazně zpomalilo. Dále by mohla banka nahradit předpoklad rovnoměrného rozložení defaultů během časového horizontu vlastním rozdělením, vycházejícím z jejích zkušeností.

Kapitola 7

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo popsat problematiku modelování kreditního rizika, ukázat praktickou aplikaci vybraných modelů a modely srovnat.

V teoretické části byly ve zkratce uvedeny nejznámější kreditní modely a parametry, které musí být pro aplikaci většiny modelů známy. Dále byly pro srovnání vybrány a popsány modely CreditMetrics a Vašíčkův model, do kterých vstupují podobné parametry, závislé především na ekonomické situaci samotných dlužníků.

Slabinou CreditMetrics je to, že používaná matice přechodu mezi ratingy vychází z historických dat, a když je firmě připsán rating, již nás nezajímá hodnota jejích aktiv. Pro jednu ratingovou třídu je pouze jedna PD a jedny diskontní kreditní marže. Na druhou stranu přes diskontní míry vstupují do modelu aktuální tržní podmínky.

V teoretické rovině se modely liší především tím, že CreditMetrics lze užít pro libovolná portfolia, uvažují se i ratingové migrace a výsledkem je celá distribuční funkce hodnoty portfolia na konci časového horizontu, narozdíl od Vašíčkova modelu, kde ztráta vzniká pouze při defaultu. Výhody metody CreditMetrics jsou ovšem vyváženy v praktické aplikaci nesrovnatelně větší výpočetní náročností.

Nakolik se uvedené modely liší ve vypočtených velikostech kreditního rizika, bylo uvedeno ve výpočetní části. Bylo uvedeno, pro jaká data, za jakých předpokladů a pro jaké výstupní veličiny můžeme nahradit zdlouvahou metodu CreditMetrics metodou Vašíčkovou. Vždy je však třeba mít na paměti, s jakým portfoliem pracujeme. Významná odlišnost vstupních parametrů (vysoká tržní úroková míra, nízké LGD, výrazně nesymetrická matice přechodu a další) může vést k odlišným výsledkům a závěrům.

Příloha A

Rizikové náklady

Rizikovými náklady RN rozumíme náklady na sanaci nesplacených úvěrů, neboli takovou úrokovou míru, kterou musíme úvěr úročit, aby příjmy přesně pokryly ztráty plynoucí z defaultu klienta. Splňují tedy vztah

$$RN = \frac{\text{očekávané ztráty}}{\text{očekávané příjmy}} = \frac{\text{očekávané ztráty}}{\text{oček. zisk z nedef.} + \text{oček. zisk z def.}} \tag{A.1}$$

Nechť X je počáteční výše úvěru, $X(t)$ je výše nesplacené částky v čase t, pro niž platí

$$\begin{aligned} X(t) &= X, \quad t \in [0\,;\,1] && \ldots \text{pro jednorázově splatné úvěry} \\ X(t) &= X(1-t), \quad t \in [0\,;\,1] && \ldots \text{pro postupně splatné úvěry} \end{aligned}$$

Značí-li tedy jako dříve PD roční pravděpodobnost defaultu v určitém ratingu, $X(t)$ dluh v čase t a T je okamžik defaultu, pak vztah (A.1) přepíšeme jako

$$RN = \frac{E\left(\max\left[X(T)\,;\,0\right]\right)}{E\left(\int_0^{\min[t\,;\,1]} X(t)dt\right)} = \frac{E\left(\max\left[X(T)\,;\,0\right]\right)}{(1-PD)\cdot\int_0^1 X(t)dt + PD\cdot E\left(\int_0^T X(t)dt\,|T \le 1\right)} \tag{A.2}$$

Předpokládejme, že defaulty jsou rovnoměrně rozmístěny během roku. Dosazením do vztahu (A.2) vypočteme rizikové náklady pro jednorázově splatné úvěry

$$RN_j = \frac{PD\cdot X}{(1-PD)\cdot X + PD\cdot\frac{X}{2}} = \frac{PD}{1-\frac{PD}{2}} \tag{A.3}$$

a pro postupně splatné úvěry

$$RN_p = \frac{PD\cdot X\cdot E\left(1-T\,|T\le 1\right)}{\frac{X}{2}\cdot(1-PD) + PD\cdot X\cdot E\left(T-\frac{T^2}{2}\,|T\le 1\right)} = \frac{PD}{1-\frac{PD}{3}} \tag{A.4}$$

Příloha B

Subaditivita u VaR

Jak jsme si uvedli v sekci (1.2.2), hodnota v riziku není subaditivní veličina. Jako příklad uvažujme dva úvěry E_1, E_2 se stejným rozdělením ztrát

$$\begin{aligned} P\left(\text{ztráta}(E_i) = 0\right) &= 98\% \\ P\left(\text{ztráta}(E_i) = 1\right) &= 1\% \\ P\left(\text{ztráta}(E_i) = 100\right) &= 1\% \qquad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Sdružené rozdělení pravděpodobností ztrát budiž

$$\begin{aligned} P\left(\text{ztráta}(E_1) = 0 \wedge \text{ztráta}(E_2) = 0\right) &= 98\% \\ P\left(\text{ztráta}(E_1) = 1 \wedge \text{ztráta}(E_2) = 100\right) &= 1\% \\ P\left(\text{ztráta}(E_1) = 100 \wedge \text{ztráta}(E_2) = 1\right) &= 1\% \end{aligned}$$

Potom pro hodnotu v riziku na hladině 99% pro dvě portfolia P_1, P_2, která obsahují pouze riziko E_1 resp. E_2, platí

$$VaR(P_1) = VaR(P_2) = 1$$

Pro portfolio obsahující oba úvěry ale platí

$$VaR(P_1 \cup P_2) = 101 > 2 = VaR(P_1) + VaR(P_2)$$

Literatura

[1] Basle Cammittee on Banking Supervision: *Credit Risk Modelling,* 1999

[2] Benková, M.: *Vašíčkovo rozdělení,* prezentace, 2004

[3] Kadlčáková, N.: *Credit Risk and Bank Lending in the Czech Republic,* working paper, 2004

[4] Moody's Investors Service: *Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers, 1920-2004,* 2005

[5] Morgan, J. P.: *CreditMetrics - Technical Document,* working paper, 1997

[6] Vašíček, O. A.: *Probability of Loss on Loan Portfolio,* working paper, 1987

[7] Wehrspohn, U.: *Credit Risk Evaluation: Modeling – Analysis – Management,* disertační práce, 2002