Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

# DIPLOMOVÁ PRÁCE

Ondřej Kreml

# Osově symetrické proudění viskózní newtonovské tekutiny

Matematický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Milan Pokorný, PhD.

Studijní program: Matematika, Matematické a počítačové modelování ve fyzice a v technice

**Poděkování**

Děkuji vedoucímu své diplomové práce doktoru Milanu Pokornému za náměty, cenné rady a za ochotu, se kterou se mi věnoval při tvorbě tohoto textu. Děkuji Klárce za podporu při psaní a rodičům za podporu po celou dobu studia.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 21.4. 2006 Ondřej Kreml

# Obsah

**Název práce:** Osově symetrické proudění viskózní newtonovské tekutiny
**Autor:** Ondřej Kreml
**Katedra (ústav):** Matematický ústav Univerzity Karlovy
**Vedoucí diplomové práce:** Mgr. Milan Pokorný, PhD., MÚ UK
**e-mail vedoucího:** pokorny@karlin.mff.cuni.cz
**Abstrakt:** V této práci studujeme vlastnosti řešení nestacionárních Navierových-Stokesových rovnic v případě osově symetrického proudění. V první části se věnujeme proudění v celém $\mathbb{R}^3$ a případu $v_\varphi \neq 0$. Je známo, že pro $v_r$ splňující Prodi-Serrinovu podmínku je řešení regulární. Totéž ovšem neplatí pro úhlovou složku rychlosti $v_\varphi$, kde se zatím nepodařilo dosáhnout optimálních podmínek. V této práci vylepšíme dosud známé podmínky pro $t$ a $s$ tak, aby pro $v_\varphi \in L^{t,s}(\Omega_T)$ bylo již řešení regulární. Nedosáhneme však podmínek optimálních a tak tento problém zůstává nadále otevřený. Druhá část práce se věnuje případu proudění v omezené oblasti $\Omega$ a $v_\varphi = 0$. V tomto případě pomocí techniky seřezávací funkce dokážeme větu související s vnitřní regularitou řešení.
**Klíčová slova:** Navierovy-Stokesovy rovnice, osově symetrické proudění, regularita řešení

**Title:** Axisymmetric flow of a viscous newtonian fluid
**Author:** Ondřej Kreml
**Department:** Mathematical Institute of Charles University
**Supervisor:** Mgr. Milan Pokorný, PhD., MÚ UK
**Supervisor's e-mail address:** pokorny@karlin.mff.cuni.cz
**Abstract:** In this thesis we study properties of solutions to the non-stationary Navier-Stokes equations in the case of axisymmetric flow. In the first part we devote ourselves to the flow in the whole $\mathbb{R}^3$ and the case of $v_\varphi \neq 0$. It is known that if $v_r$ satisfies the so-called Prodi-Serrin condition then the solution is smooth. However, it is not known whether the same holds for $v_\varphi$ where the criteria are not optimal. In this thesis we improve the conditions for $t$, $s$ so that for $v_\varphi \in L^{t,s}(\Omega_T)$ the solution is smooth. However, we still don't achieve optimal conditions and therefore this problem remains open. In the second part we study the flow in a bounded domain $\Omega$ and the case $v_\varphi = 0$. Using the cut-off function technique we prove a theorem related to the interior regularity of solution.
**Keywords:** Navier-Stokes equations, axisymmetric flow, regularity of solution

# Úvod

Navierovy-Stokesovy rovnice jsou předmětem bádání již více než 150 let a ve dvacátém století se jimi zabývalo mnoho slavných matematiků. Odvodil je již v roce 1822 francouzský inženýr C.M.L.H. Navier, ovšem za tak nereálných předpokladů, že je tehdejší fyzikové odmítli přijmout. Teprve o 23 let později dospěl jiným postupem ke stejným rovnicím irský matematik a fyzik G. Stokes. Jako první se matematickou teorií těchto rovnic zabýval švédský matematik C. Oseen, na jeho práce pak navázal J. Leray, který dokázal existenci a jednoznačnost klasického řešení v $\mathbb{R}^2$. Ve třech dimenzích se mu to nepovedlo a dokázal pouze existenci tzv. turbulentního řešení, což je v dnešním jazyce vlastně slabé řešení splňující silnou energetickou nerovnost. Na práce Leraye navázal po druhé světové válce německý matematik E. Hopf, který rozšířil výsledky Leraye do omezených oblastí. Podle těchto dvou matematiků se slabému řešení někdy říká také řešení Leray-Hopfovo.

Od té doby se těmto rovnicím věnuje velké množství matematiků, z těch nejslavnějších jmenujme O. Ladyženskou, J.L. Lionse a jeho syna P.L. Lionse. V této práci se setkáme se jmény Prodiho a Serrina, kteří dokázali podmínku, za které je řešení jednoznačné (Prodi) a regulární. Velkým přínosem v teorii Navierových-Stokesových rovnic byl také článek Caffarelliho, Kohna a Nirenberga, v němž zavedli pojem tzv. vhodného slabého řešení. Systému Navierových-Stokesových rovnic se také věnuje či věnovala celá řada českých matematiků, především Jindřich Nečas, zakladatel oboru matematické modelování na MFF UK, dosáhl mnoha úspěchů.

Přes všechno snažení však stále zůstává otevřena otázka jednoznačnosti a regularity klasického řešení ve třech dimenzích pro libovolně velká data úlohy a pro libovolně dlouhý časový interval. Clayův matematický institut v Massachusetts dokonce v roce 2000 zařadil tento problém mezi tzv. sedm problému milénia, za jejichž vyřešení vyhlásil odměnu 1 000 000 dolarů. Navierovy-Stokesovy rovnice se tak ocitly mezi tak slavnými problémy, jako jsou Riemannova hypotéza, Poincarého hypotéza, či problém P- a NP-úplnosti.

Osově symetrické proudění je vhodným speciálním případem, který leží pomyslně někde mezi dvěma a třemi dimenzemi. Proto lze čekat, že bude mít lepší vlastnosti, než obecné 3D proudění. Jednou z těchto vlastností je i ta, které se budeme věnovat v první části této práce. Jde o problém regularity řešení v celém $\mathbb{R}^3$ za předpokladu, že jedna složka řešení má lepší než standardní vlastnosti. Ve druhé části se pak budeme věnovat speciálnímu případu osově symetrického proudění a proudění v omezené oblasti. Ukážeme, že v případě takového proudění se první singularita nevyskytne uvnitř oblasti.

# Kapitola 1

# Základní pojmy a značení

V této kapitole připomeneme základní pojmy týkající se Navierových-Stokesových rovnic a zavedeme značení používané v celém textu.

## 1.1 Navierovy-Stokesovy rovnice

Pohybové rovnice nestlačitelné viskózní (newtonovské) tekutiny se nazývají Navierovy-Stokesovy rovnice. Působí-li na tekutinu objemová síla $\mathbf{f}$, lze napsat Navierovy-Stokesovy rovnice v následujícím tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Veličina $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ je vektor rychlosti v bodě $\mathbf{x} \in \Omega$ a čase $t \in [0, T]$, $p$ je tlakové pole, $\nu > 0$ je viskozita. $\Omega$ pak značí příslušnou geometrickou oblast, ve které se tekutina nachází. K rovnicím (1.1) připojíme také počáteční podmínku:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{1.2}$$

Dále musíme uvažovat vhodné okrajové podmínky - tedy nějaký vztah pro rychlost nebo tlak na hranici oblasti $\Omega$. V praxi je volba vhodných okrajových podmínek často problémem, v tomto textu však použijeme pouze nulové okrajové podmínky

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}, t) = 0, \quad \mathbf{y} \in \partial\Omega, t > 0. \tag{1.3}$$

V případě, kdy $\Omega$ není omezená, uvažujeme $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \to 0$ pro $|\mathbf{x}| \to \infty$, ve smyslu, který upřesníme níže.

## 1.2 Prostory funkcí

Budeme používat obvyklé značení pro Lebesgueovy prostory $L^q(\Omega)$ a Sobolevovy prostory $W^{m,q}(\Omega)$, $1 \le q \le \infty, m = 0, 1, \ldots.$ Normu v prostoru $W^{m,q}(\Omega)$ budeme značit $\|\cdot\|_{m,q,\Omega}$, popřípadě pouze $\|\cdot\|_{m,q}$, pokud bude zřejmé, na jaké oblasti je příslušný prostor uvažován. Pro $m = 0$ je $W^{0,q} \equiv L^q$ a položíme $\|\cdot\|_{0,q} \equiv \|\cdot\|_q$. $C_0^\infty(\Omega)$ značí prostor všech nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem v $\Omega$. Prostor $W_0^{m,q}(\Omega)$ je pak uzávěr prostoru $C_0^\infty(\Omega)$ v normě $\|\cdot\|_{m,q,\Omega}$.

V textu budeme velmi často pracovat s vektorovými funkcemi, značením však nebudeme rozlišovat prostory skalárních funkcí od prostorů vektorových (nebo tenzorových) funkcí. Z kontextu bude vždy zřejmé, o jaký prostor se jedná.

Označíme $\Omega_T = \Omega \times [0, T)$ pro nějaké $T \in (0, \infty]$. Budeme používat prostory funkcí s nulovou divergencí, proto označíme

$$D(\Omega) = \{\mathbf{a} \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = 0 \text{ v } \Omega\}$$
$$D_T(\Omega) = \{\mathbf{b} \in C_0^\infty(\Omega_T) : \operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ v } \Omega_T\}$$

Dále označíme $H_q(\Omega)$ uzávěr $D(\Omega)$ v prostoru $L^q(\Omega)$ a $H_q^1$ uzávěr $D(\Omega)$ v prostoru $W^{1,q}(\Omega)$. Nejčastěji budeme používat $q = 2$, proto pro jednoduchost položíme $H_2(\Omega) = H(\Omega)$ a $H_2^1(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Zavedeme také následující značení. Jsou-li $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ vektorové funkce na $\Omega$, položíme

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \equiv \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{g},$$
$$(\nabla \mathbf{f}, \nabla \mathbf{g}) \equiv \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}.$$

Konečně budeme pracovat také s Bochnerovými prostory $L^q(a, b, X)$, kde $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je interval a $X$ je Banachův prostor, nejčastěji nějaký Lebesgueův nebo Sobolevův prostor. Pro jednoduchost budeme značit $L^{r,s}(\Omega_T) \equiv L^r(0, T, L^s(\Omega))$.

## 1.3 Slabé řešení

Předpokládejme, že $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t)$ je klasické řešení (1.1) - (1.3). Vynásobením (1.1) $\boldsymbol{\psi} \in D(\Omega)$ a integrováním $\int_0^t \int_\Omega$ dostaneme rovnost

$$\int_0^t -\nu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \boldsymbol{\psi}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})\, ds = -\int_0^t (\mathbf{f}, \boldsymbol{\psi})\, ds + (\mathbf{v}(t), \boldsymbol{\psi}) - (\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\psi}) \tag{1.4}$$

To nás motivuje k tomu, jak definovat slabé řešení Navierových-Stokesových rovnic.

**Definice 1.** Nechť $\mathbf{v}_0 \in H(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega_T)$. Měřitelnou funkci $\mathbf{v} : \Omega_T \to \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ nazveme *slabým řešením* problému (1.1) - (1.3) v $\Omega_T$, jestliže

- $\mathbf{v} \in V_T \equiv L^2(0,T,H^1) \cap L^\infty(0,T,H)$,
- $\mathbf{v}$ splňuje (1.4) pro všechna $t \in [0,T)$ a všechna $\boldsymbol{\psi} \in D(\Omega)$

V současnosti je dokázáno mnoho vět, týkajících se slabého řešení, ty nejdůležitější z nich zde zmíníme. Důkazy všech zde zmíněných vět lze nalézt např. v [1].

**Věta 1.3.1.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je libovolná oblast a nechť $T > 0$. Pak pro každé $\mathbf{v}_0 \in H(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega_T)$ existuje alespoň jedno slabé řešení problému (1.1) - (1.3). Toto řešení splňuje navíc energetickou nerovnost*

$$\|\mathbf{v}(t)\|_2^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}(\tau)\|_2^2 \, d\tau \leq 2 \int_0^t (\mathbf{v}(\tau), \mathbf{f}(\tau)) + \|\mathbf{v}_0\|_2^2 , \quad t \in [0,T]. \tag{1.5}$$

*Dále platí* $\lim_{t \to 0} \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0\|_2 = 0.$

**Věta 1.3.2.** *Nechť $\mathbf{v}$ je slabé řešení v $\Omega_T$. Nechť $\mathbf{v} \in L^{4,4}(\Omega_T)$. Potom $\mathbf{v}$ splňuje energetickou rovnost*

$$\|\mathbf{v}(t)\|_2^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}(\tau)\|_2^2 \, d\tau = 2 \int_0^t (\mathbf{v}(\tau), \mathbf{f}(\tau)) + \|\mathbf{v}_0\|_2^2 , \quad \forall t \in [0,T]. \tag{1.6}$$

**Věta 1.3.3.** *Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou dvě slabá řešení v $\Omega_T$ odpovídající stejným datům $\mathbf{v}_0, \mathbf{f}$. Nechť $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ splňují energetickou nerovnost (1.5). Nechť $\mathbf{v}$ splňuje navíc podmínku*

$\mathbf{v} \in L^{r,s}(\Omega_T)$, *pro nějaká $r, s$ splňující* $\dfrac{2}{r} + \dfrac{n}{s} \leq 1, \quad s \in [n, \infty],\ t \in [2, \infty]$

*Potom $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ skoro všude v $\Omega_T$.*

Podmínce (i) z věty 1.3.3 se často říká Prodi-Serrinova podmínka.

**Věta 1.3.4.** *Nechť $\Omega$ je stejnoměrně třídy $C^\infty$. Nechť $\mathbf{v}$ je slabé řešení v $\Omega_T$ odpovídající datům $\mathbf{f} \equiv 0$ a $\mathbf{v}_0 \in H(\Omega)$. Nechť navíc $\mathbf{v}$ splňuje alespoň jednu z následujících dvou podmínek*

*(i)* $\mathbf{v} \in L^{r,s}(\Omega_T)$, *pro nějaká $r, s$ splňující* $\dfrac{2}{r} + \dfrac{n}{s} \leq 1, \quad s \in (n, \infty]$

*(ii)* $\mathbf{v} \in C([0,T], L^n(\Omega))$

*Potom $\mathbf{v} \in C^\infty(\overline{\Omega} \times (0,T])$.*

V současnosti je regularita řešení dokázána i v případě $\mathbf{v} \in L^{\infty,3}$ pro $\Omega = \mathbb{R}^3$ nebo $\Omega$ je poloprostor.

**Věta 1.3.5.** *Nechť $\Omega$ je stejnoměrně třídy $C^2$. Pak pro každé $\mathbf{v}_0 \in H^1(\Omega)$ existuje $T > 0$ a nejméně jedno slabé řešení $\mathbf{v}$ v $\Omega_T$ takové, že*

$$\mathbf{v} \in L^\infty(0,T,H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T,W^{2,2}(\Omega)).$$

*Čas $T$ je omezen zdola konstantou, která závisí pouze na $\|\nabla \mathbf{v}_0\|_2$, vizkozitě $\nu$ a oblasti $\Omega$.*

Z věty 1.3.2 vyplývá, že každé slabé řešení v dimenzi 2 splňuje energetickou rovnost a patří do třídy $C([0,T), L^2(\Omega))$, neboť

$$\int_0^T \|\mathbf{v}(t)\|_4^4 \, dt \le C \int_0^T \|\mathbf{v}(t)\|_2^2 \, \|\nabla \mathbf{v}(t)\|_2^2 \, dt < \infty.$$

Podle věty 1.3.3 je pak slabé řešení v dimenzi 2 jednoznačné ve třídě všech slabých řešení a podle věty 1.3.4 je navíc hladké, pokud má oblast $\Omega$ hladkou hranici.

Naopak v dimenzi 3 je otázka jednoznačnosti a regularity slabého řešení stále otevřená, neboť z interpolačních nerovností dostaneme pouze

$$\mathbf{v} \in L^{8/3}(0,T,L^4(\Omega)) \text{ nebo } \mathbf{v} \in L^{10/3}(\Omega_T).$$

## 1.4 Osově symetrické proudění

Pro popis osově symetrického proudění je výhodné přejít z kartézských $(x_1, x_2, x_3)$ do válcových $(r, \varphi, z)$ souřadnic

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi \\ x_2 &= r\sin\varphi \\ x_3 &= z. \end{aligned}$$

Je-li $\mathbf{g}$ vektorová funkce, tak její válcové složky $(g_r, g_\varphi, g_z)$ jsou vyjádřeny pomocí kartézských složek $(g_1, g_2, g_3)$ jako

$$\begin{aligned} g_r &= g_1\cos\varphi + g_2\sin\varphi \\ g_\varphi &= -g_1\sin\varphi + g_2\cos\varphi \\ g_z &= g_3. \end{aligned}$$

**Definice 2.** Skalární funkce $h$ ve válcových souřadnicích je *osově symetrická*, jestliže nezávisí na souřadnici $\varphi$, tedy $h = h(r,z)$.

**Definice 3.** Vektorová funkce $\mathbf{g} = (g_r, g_\varphi, g_z)$ je *osově symetrická*, jestliže její složky jsou osově symetrické.

Gradient vyjádřený v kartézských souřadnicích budeme značit $Df$, zatímco $\nabla f$ bude značit gradient vyjádřený v souřadnicích válcových (v případě osově symetrické funkce $f$ je tvořen pouze derivacemi podle $r$ a $z$).

Navierovy-Stokesovy rovnice (1.1) ve válcových souřadnicích tvoří následující systém parciálních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{1}{r}v_\varphi^2 + \frac{\partial p}{\partial r} - \\
&\qquad - \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right] = f_r \\
&\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}v_\varphi v_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} - \\
&\qquad - \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right] = f_\varphi
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] = f_z$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Budeme se zabývat výhradně osově symetrickým prouděním. Budeme tedy předpokládat, že oblast $\Omega$ je osově symetrická a dále, že pravá strana $\mathbf{f}$ a počáteční podmínka $\mathbf{v}_0$ jsou osově symetrické funkce. Jak je ukázáno v [3] (pro případ $\Omega = \mathbb{R}^3$), řešení Navierových-Stokesových rovnic $\mathbf{v}$ je pak také osově symetrické a splňuje tedy poněkud jednodušší systém parciálních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{1}{r}v_\varphi^2 + \frac{\partial p}{\partial r} - \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2}\right] &= f_r \\
\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}v_\varphi v_r - \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{v_\varphi}{r^2}\right] &= f_\varphi \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] &= f_z \\
\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Členy, ve kterých se vyskytuje derivace podle souřadnice $\varphi$ už nepíšeme, protože víme, že jsou rovny nule. Nebudeme je psát ani v dalším textu.

V případě osově symetrického proudění je také výhodné pracovat s rotací rychlosti. Vektor rot $\mathbf{v}$ v kartézských souřadnicích označíme $\mathbf{w}$. Označíme také $(\omega_r, \omega_\varphi, \omega_z)$ válcové souřadnice vektoru rot $\mathbf{v}$. Platí tedy

$$\omega_r = -\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}, \quad \omega_\varphi = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad \omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\varphi).$$

Odvozením z rovnic (1.8) dostáváme, že tyto složky rotace rychlosti splňují

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial r}\omega_r - \frac{\partial v_r}{\partial z}\omega_z - \\ - \nu \left[ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left( r\frac{\partial \omega_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial z^2} - \frac{\omega_r}{r^2}\right] = -\frac{\partial f_\varphi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \omega_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial z} - \frac{v_r}{r}\omega_\varphi + \frac{2}{r}v_\varphi \omega_r - \\ - \nu \left[ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left( r\frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \omega_\varphi}{\partial z^2} - \frac{\omega_\varphi}{r^2}\right] = \frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r} \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial \omega_z}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\omega_z - \frac{\partial v_z}{\partial r}\omega_z - \\ - \nu \left[ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left( r\frac{\partial \omega_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r f_\varphi)$$

## 1.5 Používané nerovnosti

V důkazech vět v celém textu budeme používat velmi často následující - vesměs velmi známé - nerovnosti.

**Věta 1.5.1** (Hölderova nerovnost)**.** *Nechť* $p, q \in [1, \infty]$ *a* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(*$\frac{1}{\infty} = 0$*). Nechť* $f \in L^p(\Omega)$*,* $g \in L^q(\Omega)$*. Pak* $fg \in L^1(\Omega)$ *a platí*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

**Věta 1.5.2** (Youngova nerovnost)**.** *Nechť* $p, q \in (1, \infty)$ *a* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Nechť dále* $A, B > 0$*. Pak*

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

**Věta 1.5.3** (Hardyho nerovnost)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in L^p(a,b), p > 1$*. Pak*

$$\left\| \frac{1}{x-a}\int_a^x |f(\xi)|\, d\xi \right\|_{p,(a,b)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{p,(a,b)} .$$

**Věta 1.5.4** (Gronwallovo lemma)**.** *Nechť* $g(t) \in L^1((0,T))$ *je nezáporná funkce a nechť* $f$ *je nezáporná funkce, pro kterou platí*

$$f(t) \leq K + L\int_0^t f(s)g(s)ds$$

*pro* $0 \leq t \leq T$*, kde* $K, L$ *jsou kladné konstanty. Pak platí*

$$f(t) \leq K \exp\left(L \int_0^t g(s) ds\right)$$

*pro* $0 \leq t \leq T$.

**Věta 1.5.5** (o vnoření)**.** *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je oblast s lipschitzovskou hranicí,* $1 \leq p < n$ *a* $q \leq \frac{np}{n-p}$. *Nechť* $f \in W^{1,p}(\Omega)$. *Pak existuje konstanta* $C$ *nezávislá na* $f$ *taková, že*

$$\|f\|_q \leq C \|f\|_{1,p}.$$

**Věta 1.5.6** (Interpolační nerovnost)**.** *Nechť* $\Omega$ *je oblast,* $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$ *a* $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$. *Pak* $f \in L^q(\Omega)$ *a*

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_r^{1-\lambda}, \quad kde \ \frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}.$$

V celém textu se bude vyskytovat mnoho konstant. Budeme pro přehlednost většinu z nich značit $C$, hodnota konstanty $C$ se tedy může měnit a to i v jedné formuli.

# Kapitola 2

# Podmínka regularity pro $v_\varphi$

V této kapitole budeme pracovat v celém prostoru, tedy $\Omega = \mathbb{R}^3$. Navíc budeme uvažovat $\mathbf{f} \equiv 0$. Dokážeme zde větu, která formuluje podmínku, jakou musí splňovat úhlová složka rychlosti, aby celé řešení mělo vyšší regularitu. Již celkem dlouhou dobu je známo, že v případě, kdy je $v_\varphi \equiv 0$, je řešení regulární - důkaz podali Uchovskii a Yudovich v [9], témuž problému se věnovala také O. Ladyženská v [2] a jiný důkaz téhož tvrzení je v [3]. Připomeňme ještě jednou Prodi-Serrinovu podmínku. Ta říká, že je-li $\mathbf{v} \in L^{t,s}(\Omega_T)$ pro nějaká $t, s$ splňující $\dfrac{2}{t} + \dfrac{n}{s} \leq 1$, $t \in [2, \infty], s \in (n, \infty]$, pak je řešení regulární. V obecném případě je dokázáno, že pokud radiální složka rychlosti $v_r$ splňuje tuto podmínku, pak je řešení regulární, což formuluje následující věta, kterou využijeme a jejíž důkaz je uveden v [5].

**Věta 2.0.7.** *Nechť $(\mathbf{v}, p)$ je slabé řešení Navier-Stokesových rovnic (1.1) v $\mathbb{R}^3$ splňující energetickou nerovnost (1.5) a nechť pravá strana $\mathbf{f} \in L^2(0, T, W^{1,2}(\mathbb{R}^3))$ a počáteční podmínka $\mathbf{v}_0 \in W^{2,2}(\mathbb{R}^3)$ jsou osově symetrické. Nechť pravá strana $\mathbf{f}$ splňuje navíc $\frac{\mathbf{rot}\,\mathbf{f}}{r} \in L^{2,2}(\Omega_T)$ a nechť navíc $v_r \in L^{t,s}(\Omega_T)$ pro nějaká $t \in [2, \infty], s \in (3, \infty], 2/t + 3/s \leq 1$. Pak $\mathbf{v} \in L^2(0, T, W^{3,2}(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(0, T, W^{2,2}(\mathbb{R}^3))$ a $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \nabla p \in L^2(0, T, W^{1,2}(\mathbb{R}^3))$.*

Lze očekávat, že podobná věta bude platit i pro úhlovou složku rychlosti $v_\varphi$. Zatím se však taková věta nepodařila dokázat a podmínka na $v_\varphi$, za které je řešení regulární, je v současnosti slabší. M. Pokorný v [7] dokázal následující větu.

**Věta 2.0.8.** *Nechť $(\mathbf{v}, p)$ je slabé řešení Navier-Stokesových rovnic (1.1) v $\mathbb{R}^3$ splňující energetickou nerovnost (1.5) a nechť $\mathbf{f} \equiv 0$ a počáteční podmínka $\mathbf{v}_0 \in W^{2,2}(\mathbb{R}^3)$ taková, že $\nabla \mathbf{v}_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$ a $(v_0)_\varphi r \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, je osově symetrická. Nechť navíc $v_\varphi \in L^{t,s}(\Omega_T)$ pro nějaká $t \in (2, \infty], s \in (4, \infty], 2/t + 3/s < 1$. Pak $\mathbf{v} \in L^2(0, T, W^{3,2}(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(0, T, W^{2,2}(\mathbb{R}^3))$ a $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \nabla p \in L^2(0, T, W^{1,2}(\mathbb{R}^3))$.*

Zde toto kritérium lehce vylepšíme. Věta, kterou zde dokážeme, je následující.

**Věta 2.0.9.** *Nechť $(\mathbf{v}, p)$ je slabé řešení Navier-Stokesových rovnic (1.1) v $\mathbb{R}^3$ splňující energetickou nerovnost (1.5) a nechť $\mathbf{f} \equiv 0$ a počáteční podmínka $\mathbf{v}_0 \in W^{2,2}(\mathbb{R}^3)$ taková,* *že $\nabla \mathbf{v}_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$ a $(v_0)_\varphi r \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, je osově symetrická. Nechť navíc $v_\varphi \in L^{t,s}(\Omega_T)$ pro nějaká*

$$t \in \left(\frac{4s}{3s-10}, \infty\right], s \in \left(\frac{10}{3}, 4\right], \quad \frac{2}{t} + \frac{3}{s} < \frac{3}{2} - \frac{2}{s}.$$

*Pak $\mathbf{v} \in L^2(0, T, W^{3,2}(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(0, T, W^{2,2}(\mathbb{R}^3))$ a $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \nabla p \in L^2(0, T, W^{1,2}(\mathbb{R}^3))$.*

Předpoklady jsou tedy stejné jako v předchozí verzi kritéria, pouze podmínka na $v_\varphi$ je jiná. Parametr $s$ příslušící prostorovým proměnným se pohybuje v rozmezí od $\frac{10}{3}$ do 4 - to předchozí kriterium vůbec neumožňovalo. Případy $s > 4$ uspokojivě řeší právě věta 2.0.8, věta kterou zde dokážeme, řeší případy, kdy $s \in (\frac{10}{3}, 4]$. Nejdůležitější jsou zřejmě krajní případy, které zdůrazníme. Pokud tedy $v_\varphi \in L^{8+\varepsilon,4}(\Omega_T)$ nebo $v_\varphi \in L^{\infty,\frac{10}{3}+\varepsilon}(\Omega_T)$, je řešení regulární.

Důkaz, který je v mnoha směrech velmi podobný důkazu věty 2.0.8, rozdělíme pro přehlednost do několika kroků. Nejprve však uvedeme několik důležitých lemmat, o které se v důkazu naší věty opřeme, ale jejichž důkazy zde uvádět nebudeme.

## 2.1 Několik lemmat

**Lemma 2.1.1.** *Nechť $\mathbf{v}$ je dostatečně hladké vektorové pole. Pak existuje konstanta $C(p)$ nezávislá na $\mathbf{v}$ taková, že pro $1 < p < \infty$ platí*

$$\|D\mathbf{v}\|_p \leq C(p)(\|\mathbf{w}\|_p + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_p).$$

**Lemma 2.1.2.** *Nechť $\mathbf{v}$ je dostatečně hladké vektorové pole s nulovou divergencí. Pak existují konstanty $C_i(p), i = 1, 2$ a $C_j, j = 3, ..., 7$ takové, že pro $1 < p < \infty$ platí*

$$\|\nabla v_r\|_p + \left\|\frac{v_r}{r}\right\|_p \leq C_1(p) \|\omega_\varphi\|_p$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_r}{r}\right)\right\|_p \leq C_3 \left\|D^2\mathbf{v}\right\|_p$$

$$\|\nabla v_\varphi\|_p + \left\|\frac{v_\varphi}{r}\right\|_p \leq C_4 \|D\mathbf{v}\|_p$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\varphi}{r}\right)\right\|_p \leq C_5 \left\|D^2\mathbf{v}\right\|_p$$

$$C_2(p) \left\|D^2\mathbf{v}\right\|_p \leq \left\|\frac{\omega_r}{r}\right\|_p + \left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_p + \|\nabla\omega_r\|_p + \|\nabla\omega_\varphi\|_p + \|\nabla\omega_z\|_p \leq C_6 \left\|D^2\mathbf{v}\right\|_p$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\omega_\varphi}{r}\right)\right\|_p \leq C_7 \left\|D^3\mathbf{v}\right\|_p$$

**Lemma 2.1.3.** *Nechť $(\mathbf{v}, p)$ je osově symetrické hladké řešení Navier-Stokesových rovnic takové, že $(v_0)_\varphi r \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Pak také $v_\varphi \in L^\infty(\Omega_T)$.*

Důkazy těchto tří lemmat jsou uvedeny v [5].

**Lemma 2.1.4.** *Nechť $\mathbf{v}$ je dostatečně hladké osově symetrické vektorové pole. Pak pro každé $\varepsilon \in (0,1]$ a $1 < p < \infty$ existuje konstanta $C(\varepsilon)$ nezávislá na $\mathbf{v}$ tak, že*

$$\left\| \frac{|\omega_\varphi|^p}{r^{p+2-\varepsilon}} \right\|_1 \leq C(\varepsilon) \left( \left\| \frac{\omega_\varphi}{r} \right\|_p^p + \left\| \nabla \left( \left| \frac{\omega_\varphi}{r} \right|^{\frac{p}{2}} \right) \right\|_2^2 \right).$$

Důkaz tohoto lemmatu je založen na Hardyho nerovnosti a je uveden v [7].

**Lemma 2.1.5.** *Nechť $1 < p < \infty$ a $0 \leq q < \frac{2}{p}$. Pak existuje konstanta $C(p,q)$ taková, že*

$$\left\| \frac{v_r}{r^{1+q}} \right\|_p \leq C(p,q) \left\| \frac{\omega_\varphi}{r^q} \right\|_p .$$

Důkaz tohoto lemmatu je založen na teorii Muckenhouptových tříd. Příslušná teorie je uvedena v [8] a její využití v tomto konkrétním případě je naznačeno v [7].

**Lemma 2.1.6.** *Nechť $(\mathbf{v}, p)$ je osově symetrické hladké řešení Navier-Stokesových rovnic. Nechť navíc $D\mathbf{v}_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Pak $D\mathbf{v} \in L^{\infty,1}(\Omega_T)$ a $D^2\mathbf{v} \in L^{p,1}(\Omega_T), 1 \leq p < 2$.*

Důkaz je uveden v [4].

## 2.2 Důkaz - úvod

Vyjdeme z věty 1.3.5. Díky ní víme, že existuje čas $t_0 > 0$ takový, že řešení $\mathbf{v}$ je na $(0, t_0)$ regulární. Položíme tedy

$$t^* = \sup \{ t > 0; \text{na } (0,t) \text{ existuje osově symetrické regulární řešení rovnic (1.1)} \}$$

Pod pojmem regulární zde rozumíme to, že řešení má vlastnosti, které formuluje dokazovaná věta. Víme tedy, že $t^* > 0$. Nechť je tedy $(\mathbf{v}, p)$ slabé řešení jako v dokazované větě 2.0.9. Díky větě o jednoznačnosti řešení víme, že se toto slabé řešení shoduje s regulárním řešením na každém kompaktním podintervalu $[0, t^*)$. Nyní existují dvě možnosti. Buď je $t^* = \infty$ a máme tak regulární řešení na libovolném časovém intervalu, nebo je $t^* < \infty$. Tuto možnost však v důkazu vyloučíme, neboť ukážeme, že $v_r$ splňuje na $(0, t^*)$ předpoklady věty 2.0.7.

Uvažujme nyní $0 < \bar{t} < t^*$. Pak tedy na $(0, \bar{t})$ je $(\mathbf{v}, p)$ regulárním řešením Navier-Stokesových rovnic. V důkazu odvodíme odhady $\omega_\varphi$ a $\frac{\omega_\varphi}{r}$ v prostoru $L^{\infty,p}$ a z nich potom odhad pro $v_r$ v příslušném prostoru. Nechť je tedy $1 < p < 2$, vynásobme rovnici (1.9) pro $\omega_\varphi$ výrazem $\frac{\omega_\varphi}{|\omega_\varphi|^{2-p}}$ a integrujme (podle míry $rdrdz$). Budeme značit krátce $\int f \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty f r dr dz$) a dostaneme

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|\omega_\varphi\right\|_p^p+\nu\int\frac{|\omega_\varphi|^p}{r^2}+\frac{4(p-1)}{p^2}\nu\int\left|\nabla\left|\omega_\varphi\right|^{\frac{p}{2}}\right|^2=\int\frac{v_r}{r}\left|\omega_\varphi\right|^p+\int\frac{2}{r}v_\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\frac{\omega_\varphi}{\left|\omega_\varphi\right|^{2-p}}. \quad (2.1)$$

Pro $L^{\infty,p}$ odhad $\frac{\omega_\varphi}{r}$ vynásobíme stejnou rovnici výrazem $\psi(r)\left|\frac{\omega_\varphi}{r}\right|^{p-2}\frac{\omega_\varphi}{r}\frac{1}{r^{1-\delta}}$, kde $\psi(r)$ je seřezávací funkce, která je rovna nule poblíž bodu $r=0$. Danou rovnici integrujeme a posléze vezmeme limitu $\psi(r)\to 1$ (identická funkce) a nakonec $\delta\to 0$. Jak je ukázáno v [3], tak nemůžeme vzít přímo $\delta=0$, neboť by některé integrály nebyly konečné. Nakonec dostaneme

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_p^p+\frac{4(p-1)}{p^2}\nu\int\left|\nabla\left(\left|\frac{\omega_\varphi}{r}\right|^{\frac{p}{2}}\right)\right|^2\leq\left|\int\frac{2}{r}v_\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\frac{\omega_\varphi}{\left|\omega_\varphi\right|^{2-p}}\frac{1}{r^p}\right|. \quad (2.2)$$

Nyní sečteme (2.1) a (2.2) a v dalším postupu budeme odhadovat členy na pravé straně.

## 2.3 Důkaz - 1. člen

Nejprve odhadneme první člen na pravé straně, tedy člen $I_1=\int\frac{v_r}{r}\left|\omega_\varphi\right|^p$. Použitím Hölderovy nerovnosti dostaneme

$$I_1\leq\left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_{\frac{6p}{6-p}}\left\|v_r\right\|_6\left\|\left|\omega_\varphi\right|^{p-1}\right\|_{\frac{p}{p-1}}=\left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_{\frac{6p}{6-p}}\left\|v_r\right\|_6\left\|\omega_\varphi\right\|_p^{p-1}$$

Ověříme podmínku Hölderovy nerovnosti:

$$\frac{6-p}{6p}+\frac{1}{6}+\frac{p-1}{p}=1.$$

Dále použijeme interpolační nerovnost. Protože pro $p\in(1,2)$ je $\frac{6p}{6-p}\in(p,3p)$, platí

$$\left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_{\frac{6p}{6-p}}\leq\left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_p^{1-\frac{p}{4}}\left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_{3p}^{\frac{p}{4}},$$

neboť

$$\frac{1-\frac{p}{4}}{p}+\frac{\frac{p}{4}}{3p}=\frac{4-p}{4p}+\frac{p}{12p}=\frac{6-p}{6p}.$$

Z věty o vnoření je navíc $\left\|v_r\right\|_6\leq C\left\|\omega_\varphi\right\|_2$ a celkově tak dostáváme

$$I_1\leq\left\|\omega_\varphi\right\|_2\left\|\omega_\varphi\right\|_p^{p-1}\left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_p^{\frac{4-p}{4}}\left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_{3p}^{\frac{p}{4}}.$$

Nakonec použijeme opět vnoření

$$\left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_{3p}^{\frac{p}{4}}=\left\|\left|\frac{\omega_\varphi}{r}\right|^{\frac{p}{2}}\right\|_6^{\frac{1}{2}}\leq C\left\|\nabla\left(\left|\frac{\omega_\varphi}{r}\right|^{\frac{p}{2}}\right)\right\|_2^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

a dvakrát Youngovu nerovnost. Nejprve s koeficienty 4 a $\frac{4}{3}$:

$$I_1 \leq \delta \left\| \nabla \left( \left| \frac{\omega_\varphi}{r} \right|^{\frac{p}{2}} \right) \right\|_2^2 + C(\delta) \left\| \omega_\varphi \right\|_2^{\frac{4}{3}} \left\| \omega_\varphi \right\|_p^{\frac{4(p-1)}{3}} \left\| \frac{\omega_\varphi}{r} \right\|_p^{\frac{4-p}{3}},$$

a podruhé v pravém členu s koeficienty $\frac{3p}{4(p-1)}$ a $\frac{3p}{4-p}$:

$$I_1 \leq \delta \left\| \nabla \left( \left| \frac{\omega_\varphi}{r} \right|^{\frac{p}{2}} \right) \right\|_2^2 + C(\delta) \left\| \omega_\varphi \right\|_2^{\frac{4}{3}} \left( \left\| \omega_\varphi \right\|_p^p + \left\| \frac{\omega_\varphi}{r} \right\|_p^p \right).$$

První člen je možné začlenit do levé strany původní nerovnosti (proto je násoben koeficientem $\delta$). Pro odhad druhého členu lze použít Gronwallovo lemma. Připomeňme, že $\left\| \omega_\varphi \right\|_2 \leq C \left\| \mathbf{w} \right\|_2 \leq C \left\| D\mathbf{v} \right\|_2$ a z energetické nerovnosti (1.5) víme, že $D\mathbf{v} \in L^{2,2}(\Omega_T)$. Mocnina členu $\left\| \omega_\varphi \right\|_2$ je navíc menší než 2 a proto je jistě $\left\| \omega_\varphi \right\|_2^{\frac{4}{3}}(t) \in L^1((0,T))$.

## 2.4 Důkaz - 2. a 3. člen

Nyní se budeme věnovat členům $I_2$ a $I_3$, kde

$$I_2 = \left| \int \frac{2}{r} v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \frac{\omega_\varphi}{\left| \omega_\varphi \right|^{2-p}} \right| \text{ a}$$

$$I_3 = \left| \int \frac{2}{r} v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \frac{\omega_\varphi}{\left| \omega_\varphi \right|^{2-p}} \frac{1}{r^p} \right|.$$

Vzhledem k tomu, že hlavní problémy, se kterými se setkáváme, jsou v blízkosti osy, a navíc je $v_\varphi r \in L^\infty(\Omega_T)$, je $I_2$ člen lehčí - je odhadnutelný podobně jako $I_3$. Proto se budeme dále věnovat pouze členu $I_3$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a napíšeme $I_3$ v následujícím tvaru

$$I_3 = 2 \left| \int \left( \frac{\omega_\varphi^{p-1}}{r^X} \right) \left( \frac{v_\varphi^\alpha}{r^Y} \right) \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \frac{v_\varphi^{1-\alpha}}{r^Z} \right) \right|,$$

kde

$$\begin{aligned} X &= p + 1 - \frac{2}{p} - \varepsilon, \\ Y &= \left( \frac{1+\varepsilon}{2} + \frac{1}{p} \right)(2-p), \\ Z &= \frac{2}{p} + \varepsilon - Y, \\ \alpha &= 2 - p. \end{aligned}$$

Lehce ověříme, že $X + Y + Z = p + 1$. Nyní použijeme Youngovu nerovnost na tři uzávorkované výrazy a to postupně s koeficienty $\frac{p}{p-1}, \frac{2p}{2-p}, 2$. Dostaneme tak

$$I_3 \leq C\left(\int \frac{\omega_\varphi^p}{r^{\frac{pX}{p-1}}} + \int \frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)+2}} + \int \left|\frac{\partial}{\partial z}\left|\frac{v_\varphi^p}{r^{\frac{p(1+\varepsilon)}{2}}}\right|\right|^2\right).$$

V prvním členu je mocnina $r$ rovna $\frac{pX}{p-1} = p + 2 - \varepsilon\frac{p-1}{p}$. Můžeme tedy použít tvrzení lemmatu 2.1.4. Celkově tak dostaneme

$$I_3 \leq C\left(\int \left|\nabla\left(\left|\frac{\omega_\varphi}{r}\right|^{\frac{p}{2}}\right)\right|^2 + \int \left|\frac{\omega_\varphi}{r}\right|^p + \int \frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)+2}} + \int \left|\frac{\partial}{\partial z}\left|\frac{v_\varphi^p}{r^{\frac{p(1+\varepsilon)}{2}}}\right|\right|^2\right).$$

Dalším použitím Youngovy nerovnosti lehce dostaneme dostatečně malý násobek prvního členu, abychom jej mohli začlenit do levé strany. Použitím Gronwallova lemmatu navíc odhadneme i druhý člen a zbydou nám poslední dva členy. Po použití Gronwallova lemmatu totiž dostaneme následující nerovnost

$$\begin{aligned}\left(\|\omega_\varphi\|_2^2 + \left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_p^p\right)(t) + c\int_0^t \int \left(\frac{|\omega_\varphi|^p}{r^2} + \int \left|\nabla |\omega_\varphi|^{\frac{p}{2}}\right|^2 + \left|\nabla\left(\left|\frac{\omega_\varphi}{r}\right|^{\frac{p}{2}}\right)\right|^2\right) \leq \\ \leq C(\mathbf{v}_0) + C\left(\int_0^t \int \frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)+2}} + \int_0^t \int \left|\nabla\left|\frac{v_\varphi^p}{r^{\frac{p(1+\varepsilon)}{2}}}\right|\right|^2\right). \quad (2.4)\end{aligned}$$

Abychom mohli odhadnout poslední dva členy využijeme další rovnici. Tu dostaneme testováním rovnice pro $v_\varphi$ výrazem $\frac{|v_\varphi|^{2p-2}\, v_\varphi}{r^{p(1+\varepsilon)}}$. Dostáváme tuto rovnici

$$\begin{aligned}\frac{2}{p}\frac{d}{dt}\int \frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)}} + \frac{2p-1}{p^2}\nu \int \left|\nabla\left|\frac{v_\varphi^p}{r^{\frac{p(1+\varepsilon)}{2}}}\right|\right|^2 + \\ + \frac{(2p)^2 - p^2(1+\varepsilon)^2}{(2p)^2}\nu \int \frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)+2}} = \left(-1 - \frac{1+\varepsilon}{2}\right)\int \frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)}}\frac{v_r}{r}.\end{aligned}$$

Dohromady s (2.4) tak dostaneme tuto nerovnost

$$\begin{aligned}\left(\|\omega_\varphi\|_p^p + \left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_p^p + \int \frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)}}\right)(t) + \\ + c\int_0^t \int \left(\frac{|\omega_\varphi|^p}{r^2} + \int \left|\nabla |\omega_\varphi|^{\frac{p}{2}}\right|^2 + \left|\nabla\left(\left|\frac{\omega_\varphi}{r}\right|^{\frac{p}{2}}\right)\right|^2 + \left|\nabla\left|\frac{v_\varphi^p}{r^{\frac{p(1+\varepsilon)}{2}}}\right|\right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)+2}}\right) \leq C(\mathbf{v}_0) + C\int_0^t \int \frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)}}\frac{|v_r|}{r}. \quad (2.5)\end{aligned}$$

## 2.5 Důkaz - 4. člen

Označme $I_4$ integrál na pravé straně (2.5). Máme tedy

$$I_4 = \int \left(\frac{|v_r|}{r^{1+k}}\right) \left(\frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)}}\right)^\alpha \left(\frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)+2}}\right)^\beta \left(|v_\varphi|^2\right),$$

kde $k \in [0,1]$ zatím nespecifikujeme, $\alpha = 1 - \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1-k}{2}$ a $\beta = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1-k}{2}$.

Nechť $1 < a < \frac{2}{k}$ a $I_4$ odhadneme pomocí Hölderovy nerovnosti s koeficienty $a, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{a}{a(1-\alpha-\beta)-1}$. Dostaneme tak

$$I_4 \le \left\|\frac{v_r}{r^{1+k}}\right\|_a \left\|\frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)}}\right\|_1^\alpha \left\|\frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)+2}}\right\|_1^\beta \|v_\varphi\|^2_{\frac{2a}{a(1-\alpha-\beta)-1}}. \tag{2.6}$$

Věnujme nejdříve pozornost prvnímu členu v součinu na pravé straně (2.6). Protože $k < \frac{2}{a}$, lze tento člen odhadnout pomocí lemmatu 2.1.5

$$\left\|\frac{v_r}{r^{1+k}}\right\|_a \le C \left\|\frac{\omega_\varphi}{r^k}\right\|_a.$$

Připomeňme, že na levé straně nerovnosti (2.5) máme k dispozici odhady norem výrazů $\omega_\varphi$ a $\dfrac{\omega_\varphi}{r}$. Proto teď použijeme opět Hölderovu nerovnost tak, abychom získali z normy výrazu $\dfrac{\omega_\varphi}{r^k}$ součin norem, které máme k dispozici na levé straně. Tedy

$$\left\|\frac{\omega_\varphi}{r^k}\right\|_a = \left(\int \frac{|\omega_\varphi|^a}{r^{ka}}\right)^{\frac{1}{a}} = \left(\int \underbrace{\left|\frac{\omega_\varphi}{r}\right|^{ka}}_{g} \underbrace{\left|\omega_\varphi\right|^{(1-k)a}}_{f}\right)^{\frac{1}{a}} \le$$

$$\le \left(\|f\|_A \|g\|_{A'}\right)^{\frac{1}{a}} = \|\omega_\varphi\|^{1-k}_{Aa(1-k)} \left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|^k_{A'ak}, \tag{2.7}$$

kde $\dfrac{1}{A} + \dfrac{1}{A'} = 1$. Dostali jsme tak součin norem výrazů, které potřebujeme. Normy jsou však obecně v jiných prostorech, než potřebujeme, proto musíme použít interpolační nerovnosti. Nechť je $Aa(1-k) \in [p, 3p]$ a $A'ak \in [p, 3p]$. Pak platí

$$\|\omega_\varphi\|_{Aa(1-k)} \le \|\omega_\varphi\|_p^\lambda \|\omega_\varphi\|_{3p}^{1-\lambda} \quad \text{a} \tag{2.8}$$

$$\left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_{A'ak} \le \left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_p^\mu \left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_{3p}^{1-\mu}, \tag{2.9}$$

kde $\dfrac{1}{Aa(1-k)} = \dfrac{\lambda}{p} + \dfrac{1-\lambda}{3p}$ a tedy $\lambda = \dfrac{3p - Aa(1-k)}{2Aa(1-k)}$ a analogicky $\mu = \dfrac{3p - A'ak}{2A'ak}$. Dosazením odhadů (2.7), (2.8), (2.9) do (2.6) dostaneme

$$I_4 \le \|\omega_\varphi\|_p^{\lambda_1} \|\omega_\varphi\|_{3p}^{\lambda_2} \left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_p^{\lambda_3} \left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|_{3p}^{\lambda_4} \left\|\frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)}}\right\|_1^\alpha \left\|\frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)+2}}\right\|_1^\beta \|v_\varphi\|^2_{\frac{2a}{a(1-\alpha-\beta)-1}}, \tag{2.10}$$

kde

$$\lambda_1 = \frac{3p - Aa(1-k)}{2Aa}, \qquad \lambda_2 = \frac{3Aa(1-k) - 3p}{2Aa},$$
$$\lambda_3 = \frac{3p - A'ak}{2A'a}, \qquad \lambda_4 = \frac{3A'ak - 3p}{2A'a}.$$

V této chvíli máme k dispozici normy všech funkcí v těch správných prostorech. Můžeme tedy přejít k mocninám těchto norem a tedy k používání Youngovy nerovnosti. Tu použijeme na druhý, čtvrtý a šestý člen - druhý člen umocníme na $\frac{p}{\lambda_2}$ , čtvrtý člen na $\frac{p}{\lambda_4}$, šestý člen na $\frac{1}{\beta}$ a zbytek na $B$, kde

$$\frac{\lambda_2}{p} + \frac{\lambda_4}{p} + \beta + \frac{1}{B} = 1.$$

Odtud $B = \dfrac{p}{p - \beta p - \lambda_2 - \lambda_4}$. Celkově tak získáme

$$I_4 \leq \delta \left( \|\omega_\varphi\|_{3p}^p + \left\| \frac{\omega_\varphi}{r} \right\|_{3p}^p + \left\| \frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)+2}} \right\|_1 \right) +$$
$$+ C(\delta) \, \|v_\varphi\|^{2B}_{\frac{2a}{a(1-\alpha-\beta)-1}} \|\omega_\varphi\|_p^{\lambda_1 B} \left\| \frac{\omega_\varphi}{r} \right\|_p^{\lambda_3 B} \left\| \frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)}} \right\|_1^{\alpha B}. \quad (2.11)$$

V prvních dvou členech použijeme vnoření podobně jako v (2.3) a volbou dostatečně malého koeficientu $\delta$ zařídíme, že oba tyto členy a také člen třetí půjdou začlenit do levé strany (2.6). Nakonec použijeme ještě jednou Youngovu nerovnost a to na zbývající součin. První člen v součinu necháme, druhý člen umocníme na $\frac{p}{\lambda_1 B}$, třetí člen umocníme na $\frac{p}{\lambda_3 B}$ a poslední člen umocníme na $\frac{1}{\alpha B}$. Ověříme, že je splněna podmínka v Youngově nerovnosti:

$$B\left(\frac{\lambda_1}{p} + \frac{\lambda_3}{p} + \alpha\right) = \frac{\lambda_1 + \lambda_3 + \alpha p}{p - \beta p - \lambda_2 - \lambda_4} = \frac{\frac{3p-(1-k)Aa}{2Aa} + \frac{3p - kA'a}{2A'a} + \alpha p}{p - \beta p - \left(\frac{3Aa(1-k)-3p}{2Aa} + \frac{3A'ak-3p}{2A'a}\right)} =$$
$$= \frac{\frac{3p}{2a} - \frac{1}{2} + \alpha p}{p - \beta p - \left(\frac{3}{2} - \frac{3p}{2a}\right)} = \frac{\frac{3p}{2a} - \frac{1}{2} + \alpha p}{\frac{3p}{2a} - \frac{1}{2} + \alpha p} = 1,$$

protože $\alpha + \beta + \dfrac{1}{p} = 1$. Dostaneme tak

$$I_4 \leq \delta C \left( \left\| \nabla \left( |\omega_\varphi|^{\frac{p}{2}} \right) \right\|_2^2 + \left\| \nabla \left( \left| \frac{\omega_\varphi}{r} \right|^{\frac{p}{2}} \right) \right\|_2^2 + \left\| \frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)+2}} \right\|_1 \right) +$$
$$+ C(\delta) \, \|v_\varphi\|^{2B}_{\frac{2a}{a(1-\alpha-\beta)-1}} \left( \|\omega_\varphi\|_p^p + \left\| \frac{\omega_\varphi}{r} \right\|_p^p + \left\| \frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)}} \right\|_1 \right).$$

Položme nyní $t = 2B$ a $s = \frac{2a}{a(1-\alpha-\beta)-1}$. Je-li tedy $v_\varphi \in L^{t,s}(\Omega_T)$, můžeme použít Gronwallovo lemma a dostaneme tak konečně první finální odhad

$$\left( \|\omega_\varphi\|_p^p + \left\| \frac{\omega_\varphi}{r} \right\|_p^p + \int \frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)}} \right)(t) + \\ + c\int_0^t \int \left( \frac{|\omega_\varphi|^p}{r^2} + \int \left| \nabla |\omega_\varphi|^{\frac{p}{2}} \right|^2 + \left| \nabla \left( \left| \frac{\omega_\varphi}{r} \right|^{\frac{p}{2}} \right) \right|^2 + \right. \\ \left. + \left| \nabla \left| \frac{v_\varphi^p}{r^{\frac{p(1+\varepsilon)}{2}}} \right| \right|^2 + \frac{|v_\varphi|^{2p}}{r^{p(1+\varepsilon)+2}} \right) \le C(\mathbf{v}_0). \quad (2.12)$$

## 2.6 Důkaz - ještě jeden odhad

To ovšem ještě není vše. Chceme totiž ukázat, že $v_r$ splňuje Prodi-Serrinovu podmínku a to zatím nevíme. Ukážeme to však s pomocí toho, co už máme, konkrétně tedy s pomocí (2.12). Dokážeme, že $\omega_\varphi \in L^{\infty,\frac{3}{2}}$ a $\nabla |\omega_\varphi|^{\frac{3}{4}} \in L^{2,2}$, což znamená $\omega_\varphi \in L^{\frac{3}{2},\frac{9}{2}}$. Interpolací mezi $L^{\infty,\frac{3}{2}}$ a $L^{\frac{3}{2},\frac{9}{2}}$ (s koeficientem $\lambda = \frac{1}{2}$) dostaneme $\omega_\varphi \in L^{3,\frac{9}{4}}$. Nakonec použitím vnoření a lemmatu 2.1.2 získáme $v_r \in L^{3,9}$ a tedy $v_r$ splňuje Prodi-Serrinovu podmínku.

$$\|v_r\|_9 \le C \|\nabla v_r\|_{\frac{9}{4}} \le C \|\omega_\varphi\|_{\frac{9}{4}}$$

Uvědomme si, že toto nemůžeme získat z odhadu, který už máme k dispozici, pouhým dosazením $p = \frac{3}{2}$. Totiž zadaným hodnotám $t$ a $s$ odpovídá pevné $p$, které může být menší než $\frac{3}{2}$ (ve skutečnosti se hodnoty $p$ pohybují velmi blízko jedničky). Proto musíme tento odhad udělat zvlášť. Nicméně odhady členů na pravé straně už nebudou těžké.

Abychom tedy dostali náležitosti do příslušných prostorů, násobme rovnici pro $\omega_\varphi$ výrazem $|\omega_\varphi|^{-\frac{1}{2}} \omega_\varphi$. Dostaneme tak

$$\frac{2}{3}\frac{d}{dt} \|\omega_\varphi\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} + \nu \int \frac{|\omega_\varphi|^{\frac{3}{2}}}{r^2} + \frac{8}{9}\nu \int \left| \nabla \left( |\omega_\varphi|^{\frac{3}{4}} \right) \right|^2 \le \\ \le \left| \int \frac{v_r}{r} |\omega_\varphi|^{\frac{3}{2}} \right| + \left| \int \frac{2}{r} v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} |\omega_\varphi|^{-\frac{1}{2}} \omega_\varphi \right| \equiv I_5 + I_6 \quad (2.13)$$

Pro odhad $I_5$ použijeme faktu, že existuje $\eta_0 > 0$ takové, že $\frac{\omega_\varphi}{r}$ je omezené v $L^{\infty,1+\eta}$ a v $L^{1+\eta,3(1+\eta)}$ pro $0 < \eta \le \eta_0$. Použijeme Hölderovu nerovnost s koeficienty $3(1+\eta)$, $\frac{3(1+\eta)}{1+2\eta}$ a 3:

$$I_5 = \left| \int \left( \frac{\omega_\varphi}{r} \right) (v_r) (\omega_\varphi)^{\frac{1}{2}} \right| \le C \left\| \frac{\omega_\varphi}{r} \right\|_{3(1+\eta)} \|v_r\|_{\frac{3(1+\eta)}{1+2\eta}} \|\omega_\varphi\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}.$$

Prostřední člen budeme interpolovat mezi prostory $L^2$ a $L^3$ a použijeme vnoření $W^{1,\frac{3}{2}} \hookrightarrow L^3$

$$I_5 \le C \left\| \frac{\omega_\varphi}{r} \right\|_{3(1+\eta)} \|\omega_\varphi\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2} - \frac{2\eta}{1+\eta}} \|v_r\|_2^{\frac{2\eta}{1+\eta}}.$$

$I_5$ pak lze odhadnout pomocí Gronwallova lemmatu, můžeme totiž Youngovou nerovností zvýšit mocninu výrazu $\|\omega_\varphi\|_{\frac{3}{2}}$ na žádoucí $\frac{3}{2}$ a součin dvou zbývajících výrazů je jistě v $L^1$ v čase.

$$I_5 \le C \left\| \frac{\omega_\varphi}{r} \right\|_{3(1+\eta)} \|v_r\|_2^{\frac{2\eta}{1+\eta}} \left( \|\omega_\varphi\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} + 1 \right)$$

Podobně pro $I_6$ použijeme informaci z (2.12). Odtud totiž víme, že existuje $\eta_1 > 0$ takové, že pro $0 < \eta \le \eta_1$ je $\dfrac{|v_\varphi|^{1+\eta}}{r^{\frac{1+\eta}{2}(1+\varepsilon)}} \in L^{\infty,2}$ a gradient tohoto výrazu patří do $L^{2,2}$. Ve skutečnosti použijeme pouze slabší informace, a to tytéž informace pro výraz $\left|\dfrac{v_\varphi}{r^{\frac{1}{2}}}\right|^{1+\eta}$. Tyto informace jsou skutečně slabší, protože problémy jsou hlavně v okolí $r = 0$. Odhad opět začneme Hölderovou nerovností

$$I_6 = \left| \int \frac{2}{r} v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} |\omega_\varphi|^{-\frac{1}{2}} \omega_\varphi \right| \le C \left| \int |\omega_\varphi|^{\frac{1}{2}} \left( \frac{v_\varphi}{\sqrt{r}} \right)^{1-\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_\varphi}{\sqrt{r}} \right)^{1+\eta} \right| \le$$

$$\le C \|\omega_\varphi\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\| \left( \frac{v_\varphi}{\sqrt{r}} \right)^{6(1-\eta)} \right\|_1^{\frac{1}{6}} \left\| \nabla \left| \frac{v_\varphi}{\sqrt{r}} \right|^{1+\eta} \right\|_2 = C \|\omega_\varphi\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\| \left( \frac{v_\varphi}{\sqrt{r}} \right)^{1+\eta} \right\|_c^{\frac{c}{6}} \left\| \nabla \left| \frac{v_\varphi}{\sqrt{r}} \right|^{1+\eta} \right\|_2,$$

kde $c = 6\dfrac{1-\eta}{1+\eta} < 6$. Použitím vnoření $W^{1,2} \hookrightarrow L^c$ pak dostaneme

$$I_6 \le C \|\omega_\varphi\|_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\| \nabla \left| \frac{v_\varphi}{\sqrt{r}} \right|^{1+\eta} \right\|_2^{1+\frac{c}{6}}.$$

Podobně jako v odhadu předchozího integrálu $I_5$ vhodným použitím Youngovy nerovnosti dosáhneme zvýšení mocniny výrazu $\|\omega_\varphi\|_{\frac{3}{2}}$ na žádoucí $\frac{3}{2}$ a konečně použitím Gronwallova lemmatu dokončíme odhad tohoto členu.

## 2.7 Důkaz - závěr

Nejprve si vyjádříme $t$ a $s$ pomocí $p, k, a$ a $\varepsilon$.

$$s = \frac{2a}{a(1-\alpha-\beta)-1} = \frac{2ap}{a-p} \tag{2.14}$$

$$t = 2B = \frac{p}{p - \beta p - \lambda_2 - \lambda_4} = \frac{4ap}{2ap(1-\beta) - 3a + 3p}$$

Hlavně nás zajímá výraz

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 1 - \beta - \frac{3}{2p} + \frac{3}{2a} + \frac{3a-3p}{2ap} = 1 - \beta = \frac{1+k}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.15}$$

Připomeňme, že $a < \frac{2}{k}$. Funkce $s(a)$ z podmínky (2.14) je klesající pro libovolné přípustné hodnoty $p$ a $a$. Proto $s(\frac{2}{k}) < s(a)$ a tedy

$$s > \frac{\frac{4p}{k}}{\frac{2}{k} - p} = \frac{4p}{2 - kp}. \tag{2.16}$$

Naopak z podmínky (2.15) je

$$\frac{3}{s} \leq \frac{1+k}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad s \geq \frac{6}{1+k-\varepsilon} \tag{2.17}$$

Podmínky (2.16) a (2.17) musí platit zároveň a nás samozřejmě zajímají co nejnižší $s$, která tyto podmínky splňují. Funkce $s(k)$ z podmínky (2.16) je rostoucí na intervalu $[0,1]$ a funkce $s(k)$ z podmínky (2.17) je tamtéž klesající. Nejlepšího výsledku tedy dosáhneme, budou-li se funkční hodnoty rovnat.

$$\frac{4p}{2-kp} = \frac{6}{1+k-\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{6+2\varepsilon p - 2p}{5p}\text{, čemuž odpovídá } s > \frac{10p}{2+p-\varepsilon p}$$

Toto číslo je nejmenší, pokud $p \to 1$ a navíc $\varepsilon \to 0$. Tehdy dostáváme

$$s > \frac{10}{3}.$$

Z podmínky (2.16) vyjádříme $k$

$$k < \frac{2s-4p}{sp} = \frac{2}{p} - \frac{4}{s} < 2 - \frac{4}{s}$$

a dosadíme to do (2.15), čímž dostaneme konečně podmínku, která je formulovaná ve větě.

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{s} = \frac{1+k}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{s} = \frac{3}{2} - \frac{2}{s}.$$

Odtud také dostaneme

$$t > \frac{4s}{3s-10}.$$

Abychom důkaz mohli úplně uzavřít, zbývá ověřit ještě správnost použití interpolací (2.8) a (2.9) při odhadu integrálu $I_4$. Tam jsme totiž potřebovali, aby platilo

$$Aa(1-k) \in [p, 3p] \qquad \text{a} \qquad A^{'}ak \in [p, 3p].$$

Zatím nevíme, zda jsme schopni najít takovou dvojici $A, A^{'}$, která tyto podmínky splňuje. Už naopak víme, že nejlepší výsledky dosáhneme volbou parametru $p$ co nejblíže jedničce. Chceme proto, aby

$$Aa(1-k) \in (1, 3] \qquad \text{a} \qquad A^{'}ak \in (1, 3].$$

Z druhé podmínky můžeme usoudit, že potřebujeme, aby $A' \leq \frac{3}{2}$, protože $ak < 2$. Poněvadž $A$ a $A'$ jsou sdružené koeficienty, tak nám to dá i podmínku na $A$ - konkrétně $A \geq 3$. Zároveň však potřebujeme, aby $Aa(1-k) \in (1,3]$, proto nutně musí být

$$a(1-k) < 1$$

Odtud

$$a - ak < 1 \Rightarrow a < 1 + ak < 3 \Rightarrow k > \frac{2}{3}.$$

Zdá se, že jsme tak dostali další výrazné omezení, ale není tomu tak, jak se vzápětí přesvědčíme. Vzpomeňme na to, jaká je závislost $s(k)$. Máme

$$s > \frac{4p}{2-kp} \qquad \text{a} \qquad s \geq \frac{6}{1+k-\varepsilon},$$

zajímají nás pouze $s \in (\frac{10}{3}, 4]$ a nejlepší výsledky dostaneme, když $p$ je blízko jedničce. Z těchto dvou podmínek dostaneme, že pro $s \in (\frac{10}{3}, \frac{18}{5})$ jsou všechna přípustná $k > \frac{2}{3}$. Pro $s \in [\frac{18}{5}, 4]$ se už některá $k$ stanou nepřípustná. To však nevadí, protože malým hodnotám $k$ odpovídají velké hodnoty $t$. To platí, protože pro pevné $s$ je

$$t = \frac{2}{\frac{1+k}{2} - \frac{3}{s} - \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Je vidět, že čím vyšší uvažujeme $k$, tím menší je $t$ a tím kvalitnější informaci tak získáme - platí totiž následující jednoduché

**Lemma 2.7.1.** *Nechť* $\mathbf{v} \in L^{t_1,s}$ *pro nějaká* $t_1, s$ *taková, že*

$$\frac{D}{s} + \frac{2}{t_1} < C.$$

*Pak* $\mathbf{v} \in L^{t_2,s}$ *pro* $t_2, s$ *taková, že*

$$\frac{D}{s} + \frac{2}{t_2} = C.$$

*Důkaz.* Důkaz plyne z Hölderovy nerovnosti. Totiž

$$\left(\int_0^T \|\mathbf{v}\|_s^{t_2}\right)^{\frac{1}{t_2}} \leq \left(\int_0^T \|v\|_s^{t_1}\right)^{\frac{1}{t_1}} T^{\frac{t_1-t_2}{t_1 t_2}} < \infty$$

□

V našem případě toto lemma použijeme pro $D = 5$ a $C < \frac{3}{2}$, ale blízko tohoto čísla. Pak jistě budeme moci dosáhnout toho, aby použité $k$ bylo větší než $\frac{2}{3}$. Omezení $k > \frac{2}{3}$ tak vlastně žádným omezením není.

# Kapitola 3

# Vnitřní regularita pro $v_\varphi \equiv 0$

V této kapitole se budeme věnovat speciálnímu případu osově symetrického proudění, kdy $v_\varphi \equiv 0$. Pod pojmem osově symetrická vektorová funkce budeme v této kapitole rozumět právě takovou osově symetrickou funkci, jejíž úhlová složka je identicky rovna nule. V tomto speciálním případě se systém Navierových-Stokesových rovnic zapsaných ve válcových souřadnicích (1.8) ještě více zjednoduší na systém

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r} - \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right] &= f_r \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] &= f_z \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Opět s výhodou využijeme také rotace rychlosti. Tentokrát je nenulová pouze složka $\omega_\varphi \equiv \omega$ a rovnice, kterou tato složka splňuje je následující

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{v_r}{r}\omega - \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{\omega}{r^2} \right] = g, \tag{3.2}$$

kde $g = \frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r}$.

Oproti předchozí kapitole budeme tentokrát uvažovat omezenou oblast $\Omega$. Hlavním cílem této kapitoly je dokázat tuto větu.

**Věta 3.0.2.** *Nechť $\mathbf{v}_0 \in W^{1,2}(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0$ a $\mathbf{f} \in L^2(0, T, W^{1,2}(\Omega))$ tak, že $\frac{g}{r} \in L^{2,2}(\Omega_T)$. Nechť $\mathbf{v}_0, \mathbf{f}$ jsou osově symetrické. Nechť $\mathbf{v}$ je slabé řešení splňující energetickou nerovnost a nechť $t^*$ je první čas, ve kterém se objeví singularita (v níže uvedeném smyslu). Pak se tato singularita nevyskytne uvnitř oblasti $\Omega$.*

Vysvětlíme nejprve, co vlastně věta tvrdí. Víme, že řešení je na krátkém časovém intervalu regulární. Můžeme tedy definovat $t^*$ jako supremum z časů, na kterých je řešení regulární (níže přesně řekneme, co budeme chápat pod pojmem regulární řešení). Ukážeme, že řešení je na intervalu $(0,t^*]$ regulární uvnitř oblasti $\Omega$, jinými slovy je regulární na každé kompaktní (osově symetrické) podmnožině $\Omega$. To tedy znamená, že singularita, která se v čase $t^*$ objeví (pokud takový konečný čas existuje), se jistě objeví na hranici oblasti a ne uvnitř.

Pod pojmem regulární řešení na intervalu $(0,t)$ budeme chápat to, že platí

$$\mathbf{v} \in L^\infty(0,t,W^{1,2}(\Omega)) \cap L^2(0,t,W^{2,2}(\Omega)).$$

Pokud mluvíme o singularitě, pak tento pojem chápeme tak, že řešení není regulární.

V důkazu použijeme techniku seřezávací funkce. Samotné schema důkazu bude velmi podobné tomu, které jsme použili v předchozí kapitole k důkazu kriteria regularity pro $v_\varphi$. Opět vyjdeme z věty o regularitě pro malá data a dokážeme příslušné odhady týkající se rotace rychlosti $\omega$. V důkazu budeme také často používat některé nerovnosti uvedené ve druhé kapitole.

Nechť $K$ je tedy libovolná ale pevná kompaktní osově symetrická podmnožina $\Omega$. Označme $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus K$, tedy $\Omega = K \cup \Omega_\varepsilon$. Po celý důkaz budeme pracovat se seřezávací funkcí $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Tato funkce je rovná konstantní jedničce na $K$ a konstantní nule v $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, její nosič je také kompaktní osově symetrická množina. Samotná funkce $\zeta$ je pak také osově symetrická. Definujeme tedy

$$t^* = \sup\{t > 0; \mathbf{v} \text{ je regulární řešení na } (0,t)\}$$

Z věty o regularitě pro malá data víme, že $t^* > 0$. Platí tedy $\mathbf{v} \notin L^\infty(0,t^*,W^{1,2}(\Omega)) \cap L^2(0,t^*,W^{2,2}(\Omega))$. V dalším budeme tedy pracovat na časovém intervalu $(0,t)$, kde $t < t^*$.

## 3.1 Důkaz - první odhad

### 3.1.1 Úvod

Klíčovým krokem v důkazu je odhad normy $\left\| \frac{\omega(t)\zeta}{r} \right\|_2^2$ konstantou, která bude záviset pouze na počáteční podmínce $\mathbf{v}_0$ a pravé straně $\mathbf{f}$. Abychom toto získali, zvolíme $\varepsilon > 0$, vynásobíme rovnici (3.2) pro $\omega$ výrazem $\frac{\omega\zeta^2}{r^{2-\varepsilon}}$ a zintegrujeme přes $\Omega$. Budeme se věnovat jednotlivým členům zvlášť a opět symbolem $\int f$ budeme rozumět $\int_\Omega f r dr dz$

*Časová derivace:*

$$\int \frac{\partial\omega}{\partial t}\omega\zeta^2 \frac{1}{r^{2-\varepsilon}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \left| \frac{\omega\zeta}{r^{1-\varepsilon/2}} \right|^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\| \frac{\omega\zeta}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_2^2$$

*Konvektivní člen:*

$$\int \left( v_r \frac{\partial\omega}{\partial r} + v_z \frac{\partial\omega}{\partial z} - \frac{v_r}{r}\omega \right) \frac{\omega\zeta^2}{r^{2-\varepsilon}} = \int \left( \frac{v_r}{2}\frac{\partial\omega^2}{\partial r}\frac{\zeta^2}{r^{1-\varepsilon}} + \frac{v_z}{2}\frac{\partial\omega^2}{\partial z}\frac{\zeta^2}{r^{1-\varepsilon}} - \frac{v_r}{r}\frac{\omega^2\zeta^2}{r^{1-\varepsilon}} \right) drdz =$$

$$= \int \left( -\frac{\omega^2}{2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_r \zeta^2}{r^{1-\varepsilon}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_z \zeta^2}{r^{1-\varepsilon}} \right) \right) - \frac{v_r}{r} \frac{\omega^2 \zeta^2}{r^{1-\varepsilon}} \right) drdz =$$

$$= \int \left( -\frac{\omega^2}{2} \frac{\zeta^2}{r^{1-\varepsilon}} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\omega^2}{2} \frac{v_r}{r^{1-\varepsilon}} \frac{\partial \zeta^2}{\partial r} + \frac{1-\varepsilon}{2} \frac{\omega^2 v_r \zeta^2}{r^{2-\varepsilon}} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\zeta^2}{r^{1-\varepsilon}} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\omega^2}{2} \frac{v_z}{r^{1-\varepsilon}} \frac{\partial \zeta^2}{\partial z} - \frac{v_r}{r} \frac{\omega^2 \zeta^2}{r^{1-\varepsilon}} \right) drdz =$$

$$= \int \left( -\frac{\omega^2}{2} \frac{\zeta^2}{r^{1-\varepsilon}} \left( \underbrace{\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r}}_{=0} \right) - \frac{\omega^2}{2} \frac{1}{r^{1-\varepsilon}} \left( v_r \frac{\partial \zeta^2}{\partial r} + v_z \frac{\partial \zeta^2}{\partial z} \right) - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\omega^2 v_r \zeta^2}{r^{2-\varepsilon}} \right) drdz =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{\omega^2}{r^{2-\varepsilon}} \left( v_r \frac{\partial \zeta^2}{\partial r} + v_z \frac{\partial \zeta^2}{\partial z} \right) + \varepsilon \frac{\omega^2}{r^{2-\varepsilon}} \frac{v_r}{r} \zeta^2$$

*Eliptický člen:* Nejprve pro přehlednost zavedeme následující značení

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\omega \zeta}{r^{1-\varepsilon/2}} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\zeta}{r^{1-\varepsilon/2}} + \frac{\partial \zeta}{\partial r} \frac{\omega}{r^{1-\varepsilon/2}} + \left( \frac{\varepsilon}{2} - 1 \right) \frac{\omega \zeta}{r^{2-\varepsilon/2}}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\omega \zeta}{r^{1-\varepsilon/2}} \right) \right)^2 = \underbrace{\left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \frac{\zeta^2}{r^{2-\varepsilon}}}_{A} + \underbrace{\left( \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right)^2 \frac{\omega^2}{r^{2-\varepsilon}}}_{B} + \underbrace{\left( \frac{\varepsilon}{2} - 1 \right)^2 \frac{\omega^2 \zeta^2}{r^{4-\varepsilon}}}_{C} + \underbrace{2\omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial r} \frac{1}{r^{2-\varepsilon}}}_{D} +$$

$$+ \underbrace{(\varepsilon - 2)\omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\zeta^2}{r^{3-\varepsilon}}}_{E} + \underbrace{(\varepsilon - 2)\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial r} \frac{\omega^2}{r^{3-\varepsilon}}}_{F}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\omega \zeta}{r^{1-\varepsilon/2}} \right) = \frac{1}{r^{1-\varepsilon/2}} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \zeta + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\omega \zeta}{r^{1-\varepsilon/2}} \right) \right)^2 = \underbrace{\frac{1}{r^{2-\varepsilon}} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \zeta^2}_{G} + \underbrace{\frac{2}{r^{2-\varepsilon}} \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial z}}_{H} + \underbrace{\frac{1}{r^{2-\varepsilon}} \omega^2 \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2}_{I}$$

Teprve nyní se věnujme samotnému eliptickému členu

$$
\begin{aligned}
&-\nu\int_\Omega\left(\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{\omega}{r^2}\right)\frac{\omega\zeta^2}{r^{2-\varepsilon}}\right)rdrdz=\\
&\qquad=\nu\int_\Omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\omega\zeta^2}{r^{1-\varepsilon}}\right)+\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\omega\zeta^2}{r^{1-\varepsilon}}\right)-\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\omega\zeta^2}{r^{2-\varepsilon}}+\frac{\omega^2\zeta^2}{r^{3-\varepsilon}}\right)drdz=\\
&\quad=\nu\int_\Omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\zeta^2}{r^{2-\varepsilon}}+\frac{\partial\zeta^2}{\partial r}\frac{\omega}{r^{2-\varepsilon}}+(\varepsilon-1)\frac{\omega\zeta^2}{r^{3-\varepsilon}}\right)+\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{1}{r^{2-\varepsilon}}\left(\omega\frac{\partial\zeta^2}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\zeta^2\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\omega\zeta^2}{r^{3-\varepsilon}}+\frac{\omega^2\zeta^2}{r^{4-\varepsilon}}rdrdz=\nu\int_\Omega A+D+E+G+H+\frac{\omega^2\zeta^2}{r^{4-\varepsilon}}\right)rdrdz=\\
&=\nu\int_\Omega\left(A+D+E+G+H+C+\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}-1\right)^2\right)\frac{\omega^2\zeta^2}{r^{4-\varepsilon}}+B+F+I-B-F-I\right)rdrdz=\\
&=\int_\Omega\left(\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\omega\zeta}{r^{1-\varepsilon/2}}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\omega\zeta}{r^{1-\varepsilon/2}}\right)\right)^2-\frac{\omega^2}{r^{2-\varepsilon}}\left(\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta^2}{\partial r}\right)-\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\zeta^2}{\partial r}\frac{\omega^2}{r^{3-\varepsilon}}+\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\frac{\omega^2\zeta^2}{r^{4-\varepsilon}}\right)rdrdz
\end{aligned}
$$

První dva členy a také poslední člen ponecháme na levé straně (mají kladné znaménko), ostatní převedeme na pravou stranu a bude potřeba je odhadnout.

Dohromady dostáváme rovnici

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\left|\frac{\omega\zeta}{r^{1-\varepsilon/2}}\right|^2+\nu\int\left|\nabla\left(\frac{\omega\zeta}{r^{1-\varepsilon/2}}\right)\right|^2+\nu\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\int\frac{\omega^2\zeta^2}{r^{4-\varepsilon}}=\int\frac{g\zeta^2\omega}{r^{2-\varepsilon}}+\\
&+\frac{\varepsilon}{2}\int\frac{\omega^2\zeta^2}{r^{2-\varepsilon}}\frac{v_r}{r}+\nu\frac{\varepsilon}{2}\int\frac{\omega^2}{r^{3-\varepsilon}}\frac{\partial\zeta^2}{\partial r}+\int\frac{\omega^2}{r^{2-\varepsilon}}\left(\frac{v_r}{2}\frac{\partial\zeta^2}{\partial r}+\frac{v_z}{2}\frac{\partial\zeta^2}{\partial z}+\nu\left(\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta^2}{\partial r}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Členy na pravé straně budeme odhadovat postupně.

### 3.1.2 První člen

První člen odhadneme za pomocí předpokladů na pravou stranu rovnice. Dostaneme tak

$$
\int\frac{g\zeta^2\omega}{r^{2-\varepsilon}}=\int\frac{g}{r}\frac{\omega\zeta}{r^{1-\varepsilon/2}}\zeta r^{\frac{\varepsilon}{2}}\le C\left\|\frac{g}{r}\right\|_2\left\|\frac{\omega\zeta}{r^{1-\varepsilon/2}}\right\|_2\le C\left\|\frac{g}{r}\right\|_2^2+\left\|\frac{\omega\zeta}{r^{1-\varepsilon/2}}\right\|_2^2
$$

Po zintegrování $\int_0^t$ pak využijeme Gronwallovo lemma.

### 3.1.3 Druhý člen

$$\frac{\varepsilon}{2}\int \frac{\omega^2\zeta^2}{r^{2-\varepsilon}}\frac{v_r}{r} \leq \varepsilon \left\|v_r\right\|_\infty \left\|\frac{\omega\zeta}{r^{2-\varepsilon/2}}\right\|_2 \left\|\frac{\omega\zeta}{r^{1-\varepsilon/2}}\right\|_2 \leq$$
$$\leq c\left\|\frac{\omega\zeta}{r^{2-\varepsilon/2}}\right\|_2^2 + C\varepsilon\left\|\nabla\mathbf{v}\right\|_2\left\|D^2\mathbf{v}\right\|_2\left\|\frac{\omega\zeta}{r^{1-\varepsilon/2}}\right\|_2^2 \leq c\left\|\frac{\omega\zeta}{r^{2-\varepsilon/2}}\right\|_2^2 + C\varepsilon\left\|D^2\mathbf{v}\right\|_2^2\left\|\frac{\omega\zeta}{r^{1-\varepsilon/2}}\right\|_2^2$$

Zde jsme využili následující nerovnost

$$\|z\|_\infty \leq C\left\|\nabla z\right\|_2^{\frac{1}{2}}\left\|D^2 z\right\|_2^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3}$$

která je dokázána v [6]. První člen můžeme zahrnout do levé strany. Protože se pohybujeme na krátkém časovém intervalu, je $\mathbf{v} \in L^2(0,t,W^{2,2})$ a na druhý člen můžeme použít Gronwallovo lemma.

### 3.1.4 Třetí člen

$$\nu\frac{\varepsilon}{2}\int \frac{\omega^2}{r^{3-\varepsilon}}\frac{\partial\zeta^2}{\partial r} = \nu\varepsilon\int \frac{\omega\zeta}{r^{2-\varepsilon/2}}\omega\frac{\partial\zeta}{\partial r}\frac{1}{r^{1-\varepsilon/2}}$$

Uvědomme si nejprve, že tento výraz je nulový na $K$ a nenulový pouze na $\Omega_\varepsilon$. Budeme chtít použít Hölderovu nerovnost s koeficienty 2, 2 a $\infty$. Zaměřme se na výraz, který chceme odhadnout v $L^\infty$, tedy $\frac{\partial\zeta}{\partial r}\frac{1}{r^{1-\varepsilon/2}}$. Derivace seřezávací funkce je omezená v každém bodě, ale mocnina $r$ ve jmenovateli je problémem v okolí osy, tedy v okolí bodů $r=0$. Na okolí osy však můžeme použít Taylorův rozvoj derivace seřezávací funkce. Označíme-li $\bar{\zeta}$ parciální funkci $\zeta$ závislou pouze na $r$ (a tedy s konstantím $z$), platí

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial r}(r) = \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial r}(0) + r\frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial r^2}(\tilde{r}), \qquad \tilde{r} \in (0,r)$$

Protože jsou $\Omega$ a $K$ osově symetrické množiny, je také $\zeta$ osově symetrická funkce. Ta je navíc hladká, proto nutně musí být $\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial r}(0) = 0$. Tedy daleko od osy (pro $r \in [\eta,\infty)$ pro pevné $\eta > 0$) je výraz $\frac{\partial\zeta}{\partial r}\frac{1}{r^{1-\varepsilon/2}}$ omezený a blízko osy (pro $r \in (0,\eta)$) nám pomůže Taylorův rozvoj a dostaneme tak $\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}r^{\frac{\varepsilon}{2}}$, což je též omezené.

Hölderova a Youngova nerovnost tedy vede na

$$\nu\varepsilon\int \frac{\omega\zeta}{r^{2-\varepsilon/2}}\omega\frac{\partial\zeta}{\partial r}\frac{1}{r^{1-\varepsilon/2}} \leq c\nu\varepsilon\left\|\frac{\omega\zeta}{r^{2-\varepsilon/2}}\right\|_2^2 + C\left\|\omega\right\|_2^2.$$

První člen můžeme začlenit do levé strany, zatímco druhý člen lze odhadnout normou gradientu rychlosti v $L^2$ a po zintegrování v čase využitím energetické nerovnosti odhadnout konstantou, která závisí pouze na počáteční podmínce a pravé straně.

### 3.1.5 Čtvrtý a pátý člen

Oba členy budeme odhadovat stejným postupem, ten stačí ukázat na jednom z nich. Aby se nám podařilo tento člen odhadnout, musíme položit $\zeta = \xi^9$. Po tomto dosazení si získaný výraz rozdělíme takto

$$I = \int \frac{\omega^2}{r^{2-\varepsilon}} \frac{v_r}{2} \frac{\partial \zeta^2}{\partial r} = \int \left( \frac{\omega \xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right) (v_r) \left( \frac{\omega^{\frac{8}{9}} \xi^8}{r^{\frac{8}{9}(1-\varepsilon/2)}} \right) \left( \omega^{\frac{1}{9}} \right) \left( \frac{1}{r^{\frac{1}{9} - \frac{\varepsilon}{18}}} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)$$

Použijeme Hölderovu nerovnost s koeficienty 2, 6, $\frac{27}{4}$, 18, $\frac{54}{7}$ a $\infty$. Dostaneme tak

$$I \leq \left\| \frac{\omega \xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_2 \|v_r\|_6 \left\| \frac{\omega \xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_6^{\frac{8}{9}} \|\omega\|_2^{\frac{1}{9}} \left\| \frac{1}{r^{\frac{1}{9} - \frac{\varepsilon}{18}}} \right\|_{\frac{54}{7}} \left\| \frac{\partial \xi}{\partial r} \right\|_\infty .$$

Protože se pohybujeme na oblasti odražené od nekonečna (pokud není přímo $\Omega$ omezená, lze jistě volit $\zeta$ s kompaktním nosičem), lze předposlední člen odhadnout konstantou, která závisí pouze na nosiči $\zeta$. Poslední člen lze také odhadnout konstantou. Použijeme-li navíc ekvivalenci norem $\omega$ a $\nabla \mathbf{v}$ a vnoření dostaneme

$$I \leq C \left\| \frac{\omega \xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_2 \left\| \nabla \left( \frac{\omega \xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right) \right\|_2^{\frac{8}{9}} \|\nabla \mathbf{v}\|_2^{\frac{10}{9}} .$$

Youngovou nerovností dále dosáhneme

$$I \leq c \left\| \nabla \left( \frac{\omega \xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right) \right\|_2^2 + C \left\| \frac{\omega \xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_2^{\frac{9}{5}} \|\nabla \mathbf{v}\|_2^2 \leq$$

$$\leq c \left\| \nabla \left( \frac{\omega \zeta}{r^{1-\varepsilon/2}} \right) \right\|_2^2 + C \|\nabla \mathbf{v}\|_2^2 + C \left\| \frac{\omega \zeta}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_2^2 \|\nabla \mathbf{v}\|_2^2$$

První člen lze zahrnout do levé strany, druhý člen po zintegrování v čase odhadnout konstantou a na poslední součin lze aplikovat Gronwallovo lemma.

### 3.1.6 Šestý a sedmý člen

Tyto dva členy se stejně jako v předchozím případě odhadnou naprosto stejným postupem a ukážeme jej pouze na prvním z nich. Postupovat budeme velmi podobně, jako v předchozím případě. Máme tak

$$J = \nu \int \frac{\omega^2}{r^{2-\varepsilon}} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right)^2 = \nu \int \left( \frac{\omega \xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right) \left( \frac{\omega^{\frac{7}{9}} \xi^7}{r^{\frac{7}{9}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}} \right) \left( \omega^{\frac{2}{9}} \right) \left( \frac{1}{r^{\frac{2}{9}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2$$

Daný výraz odhadneme pomocí Hölderovy nerovnosti s koeficienty 2, $\frac{54}{7}$, 9, $\frac{27}{7}$ a $\infty$. Získáme tak

$$J \leq C \left\| \frac{\omega \xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_2 \left\| \frac{\omega \xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_6^{\frac{7}{9}} \|\omega\|_2^{\frac{2}{9}} \left\| \frac{1}{r^{\frac{2}{9}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}} \right\|_{\frac{27}{7}} \left\| \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 \right\|_\infty$$

Naprosto stejným argumentem jako v předchozím případě lze zdůvodnit odhadnutí posledních dvou členů konstantou. Stejně použijeme také vnoření a ekvivalenci norem a dostaneme tak

$$J \leq C \left\| \frac{\omega\xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_2 \left\| \nabla \left( \frac{\omega\xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right) \right\|_2^{\frac{7}{9}} \|\nabla \mathbf{v}\|_2^{\frac{2}{9}}$$

Youngovou nerovností s koeficienty $\frac{18}{7}$ a $\frac{18}{11}$ a druhým použitím této nerovnosti s koeficienty $\frac{11}{9}$ a $\frac{11}{2}$ dostaneme

$$J \leq c \left\| \nabla \left( \frac{\omega\xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right) \right\|_2^2 + C \left\| \frac{\omega\xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_2^{\frac{18}{11}} \|\nabla \mathbf{v}\|_2^{\frac{4}{11}} \leq c \left\| \nabla \left( \frac{\omega\xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right) \right\|_2^2 + C \left\| \frac{\omega\xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_2^2 + C \|\nabla \mathbf{v}\|_2^2$$

První člen lze zahrnout do levé strany, druhý odhadnout pomocí Gronwallova lemmatu a třetí po zintegrování v čase odhadnout konstantou.

### 3.1.7 Osmý člen

Pro odhad posledního členu použijeme podobný postup jako v předcházejících členech a přidáme také myšlenku ze členu třetího. Chceme tedy odhadnout člen

$$K = -\nu \int \frac{\omega^2}{r^{2-\varepsilon}} \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta^2}{\partial r}$$

Rozdíl oproti třetímu členu je v tom, že nemáme k dispozici žádné $\varepsilon$ a protože budeme s $\varepsilon$ vzápětí konvergovat k nule, nemůžeme jej tam ani žádným trikem dostat, aniž by se nám jinde nevyskytla konstanta závisející právě na $\varepsilon$. Proto musíme pracovat jinak - konkrétně podobně jako v pátém členu.

$$K \leq C \int \left( \frac{\omega\xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right) \left( \frac{\omega^{\frac{8}{9}}\xi^8}{r^{\frac{8}{9}(1-\varepsilon/2)}} \right) \left( \omega^{\frac{1}{9}} \right) \left( \frac{1}{r^{\frac{1}{9}-\frac{\varepsilon}{18}}} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{1}{r} \right)$$

Hölderovu nerovnost použijeme s koeficienty 2, $\frac{27}{4}$, 18, $\frac{27}{8}$ a $\infty$. Důvod, proč můžeme odhadnout normu posledního členu v $L^\infty$, je stejný jako ve třetím členu. Stejně tak předposlední člen opět odhadneme konstantou. Dostaneme tak

$$K \leq C \left\| \frac{\omega\xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_2 \left\| \frac{\omega\xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_6^{\frac{8}{9}} \|\omega\|_2^{\frac{1}{9}} .$$

Analogicky jako dříve dokončíme odhad vnořením, ekvivalencí norem a Youngovou nerovností.

$$K \leq c \left\| \nabla \left( \frac{\omega\xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right) \right\|_2^2 + C \left\| \frac{\omega\xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_2^{\frac{9}{5}} \|\nabla \mathbf{v}\|_2^{\frac{1}{5}} \leq c \left\| \nabla \left( \frac{\omega\xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right) \right\|_2^2 + C \left\| \frac{\omega\xi^9}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_2^2 + C \|\nabla \mathbf{v}\|_2^2 .$$

### 3.1.8 Závěr

Použitím všech výše uvedených odhadů a integrováním v čase dostaneme pro všechna $\tau \in (0, t)$

$$\left\| \frac{\omega\zeta(\tau)}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_2^2 \leq C(\mathbf{v}_0, \mathbf{f}) + \varepsilon \int_0^\tau \|\nabla \mathbf{v}\|_{1,2}^2 \left\| \frac{\omega\zeta(s)}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_2^2 ds$$

a z Gronwallova lemmatu pak

$$\left\| \frac{\omega\zeta(t)}{r^{1-\varepsilon/2}} \right\|_2^2 \leq C(\mathbf{v}_0, \mathbf{f}) \exp\left( \varepsilon \int_0^t \left\| D^2 \mathbf{v}(\tau) \right\|_2^2 d\tau \right).$$

Pravá strana je omezená, takže zde můžeme provést limitu $\varepsilon \to 0$. Na levé straně je $\left|\frac{\omega\zeta}{r^{1-\varepsilon/2}}\right|$ omezené výrazem $\left|\frac{\omega\zeta}{r}\right|$ pro $r \in (0, 1)$ a výrazem $|\omega\zeta|$ pro $r \geq 1$. Proto můžeme nechat $\varepsilon$ konvergovat k nule na levé straně. Z Lebesgueovy věty pak dostaneme

$$\left\| \frac{\omega\zeta(t)}{r} \right\|_2^2 \leq C(\mathbf{v}_0, \mathbf{f}). \tag{3.4}$$

## 3.2 Důkaz - druhý odhad

Druhý potřebný odhad získáme násobením rovnice pro $\omega$ (3.2) výrazem $\omega\zeta^2$ a integrováním. Zase se budeme věnovat pro přehlednost jednotlivým částem rovnice zvlášť.

*Časová derivace:*

$$\int \frac{\partial \omega}{\partial t} \omega \zeta^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\omega\zeta\|_2^2$$

Tento výraz ponecháme na levé straně.

*Konvektivní člen:*

$$\int v_r \frac{\partial \omega}{\partial r} \omega\zeta^2 + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} \omega\zeta^2 - \frac{v_r}{r} \omega^2 \zeta^2 r dr dz = \int \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\omega^2}{2} \right) v_r \zeta^2 r + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\omega^2}{2} \right) v_z \zeta^2 r -$$
$$v_r \omega^2 \zeta^2 dr dz = - \int \frac{\omega^2}{2} \left( v_r \zeta^2 + r \frac{\partial v_r}{\partial r} \zeta^2 + r v_r \frac{\partial \zeta^2}{\partial r} + r \frac{\partial v_z}{\partial z} \zeta^2 + r v_z \frac{\partial \zeta^2}{\partial z} + 2 v_r \zeta^2 \right) dr dz =$$
$$= - \int \frac{\omega^2}{2} \left( v_r \frac{\partial \zeta^2}{\partial r} + v_z \frac{\partial \zeta^2}{\partial z} \right) + \frac{v_r}{r} \omega^2 \zeta^2 r dr dz$$

Všechny výrazy budeme odhadovat na pravé straně.

*Eliptický člen:*

$$
\begin{aligned}
-\nu \int \frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}\omega\zeta^2 + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\omega\zeta^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\omega\zeta^2 - \frac{\omega^2\zeta^2}{r^2} r dr dz = \\
= \nu \int \frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\omega\zeta^2\right) + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(r\omega\zeta^2\right) - \frac{\partial\omega}{\partial r}\omega\zeta^2 + \frac{\omega^2\zeta^2}{r} dr dz = \\
= \nu \int \left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2\zeta^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\zeta^2 + \frac{\omega^2\zeta^2}{r^2} + \omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial\zeta^2}{\partial r} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial\zeta^2}{\partial z}\right) r dr dz = \\
= \nu \int \frac{\omega^2\zeta^2}{r^2} + \left(\frac{\partial}{\partial r}(\omega\zeta)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}(\omega\zeta)\right)^2 - \omega^2\left(\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

První tři členy mají dobré znaménko a necháme je na levé straně, zbylý výraz odhadneme na pravé straně. Dohromady tak dostáváme rovnici

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\omega\zeta\right\|_2^2 + \nu\left(\left\|\frac{\omega\zeta}{r}\right\|_2^2 + \left\|\nabla(\omega\zeta)\right\|_2^2\right) = \\
= \int g\omega\zeta^2 + \nu\int\omega^2\left(\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2\right) + \int\frac{\omega^2}{2}\left(v_r\frac{\partial\zeta^2}{\partial r} + v_z\frac{\partial\zeta^2}{\partial z}\right) + \frac{v_r}{r}\omega^2\zeta^2
\end{aligned}
$$

Členy na pravé straně budeme odhadovat postupně, ale zde už to nebude tak obtížné, jako v prvním odhadu. Tedy

$$
\int g\omega\zeta^2 \leq \left\|g\zeta\right\|_2^2 + \left\|\omega\zeta\right\|_2^2 \leq \left\|g\right\|_2^2 + \left\|\omega\zeta\right\|_2^2
$$

První člen je po zintegrování v čase z předpokladů omezený a druhý lze odhanout Gronwallovým lemmatem.

$$
\int\omega^2\left(\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2\right) \leq \left\|\omega\right\|_2^2\left\|\nabla\zeta\right\|_\infty^2 \leq C\left\|\nabla\mathbf{v}\right\|_2^2
$$

Gradient seřezávací funkce odhadneme konstantou, použijeme ekvivalenci norem a pro odhad gradientu rychlosti po zintegrování v čase stačí energetická nerovnost.

Další dva členy se odhadnou podobně, proto ukážeme postup jen na jednom z nich. Položíme opět $\zeta = \xi^9$.

$$
I = \int\omega^2 v_r\frac{\partial\zeta^2}{\partial r} = \int\left(\omega\xi^9\right)\left(\omega^{\frac{1}{2}}\xi^{\frac{9}{2}}\right)\left(\omega^{\frac{1}{2}}\right)(v_r)\left(\xi^{\frac{7}{2}}\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)
$$

Použijeme Hölderovu nerovnost s koeficienty 2, 12, 4, 6 a $\infty$. Dostaneme tak

$$
I \leq C\left\|\omega\zeta\right\|_2\left\|\omega\zeta\right\|_6^{\frac{1}{2}}\left\|\omega\right\|_2^{\frac{1}{2}}\left\|v_r\right\|_6,
$$

protože norma derivace seřezávací funkce v $L^\infty$ je omezená konstantou. Dále použijeme standardně vnoření a ekvivalenci norem. Dostáváme

$$I \leq C \|\omega\zeta\|_2 \|\nabla(\omega\zeta)\|_2^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{v}\|_2^{\frac{3}{2}}.$$

Konečně Youngovou nerovností dostaneme příslušné mocniny norem

$$I \leq c \|\nabla(\omega\zeta)\|_2^2 + C\|\omega\zeta\|_2^{\frac{4}{3}} \|\nabla \mathbf{v}\|_2^2 \leq c\|\nabla(\omega\zeta)\|_2^2 + C\|\omega\zeta\|_2^2 \|\nabla \mathbf{v}\|_2^2 + C\|\nabla \mathbf{v}\|_2^2.$$

První člen lze zahrnout do levé strany a další dva odhadneme Gronwallovým lemmatem.

Nakonec odhadneme poslední zbývající člen

$$J = \int \left(\frac{\omega\zeta}{r}\right)(v_r\zeta)(\omega).$$

Zde použijeme opět Hölderovu nerovnost s koeficienty 2, $\infty$, 2. Pro odhad normy v $L^\infty$ pak použijeme již jednou výše zmíněnou nerovnost (3.3). Máme tak

$$J \leq \left\|\frac{\omega\zeta}{r}\right\|_2 \|\nabla(\mathbf{v}\zeta)\|_2^{\frac{1}{2}} \left\|D^2(\mathbf{v}\zeta)\right\|_2^{\frac{1}{2}} \|\omega\|_2.$$

O první normě víme, že lze odhadnout konstantou. Dále se tak můžeme věnovat gradientům z výrazu $\mathbf{v}\zeta$. Platí

$$\nabla(\mathbf{v}\zeta) = \nabla\mathbf{v}\zeta + \mathbf{v} \otimes \nabla\zeta.$$

Normu tohoto výrazu proto můžeme lehce odhadnout násobkem normy $\nabla\mathbf{v}$, protože $\zeta$ i její gradient jsou omezené funkce. Použitím této úvahy a Youngovy nerovnosti dostáváme

$$J \leq C \left\|D^2(\mathbf{v}\zeta)\right\|_2^{\frac{1}{2}} \|\nabla\mathbf{v}\|_2^{\frac{3}{2}} \leq c\left\|D^2(\mathbf{v}\zeta)\right\|_2^2 + C\|\nabla\mathbf{v}\|_2^2$$

Na levé straně nemáme k dispozici plný druhý gradient výrazu $\mathbf{v}\zeta$, takže budeme muset ještě použít další odhady, abychom konečně dostali to, co potřebujeme. K tomu nám poslouží lemma, které je podobné 2.1.1, jen pracuje s druhými derivacemi. Platí totiž

$$\left\|D^2(\mathbf{v}\zeta)\right\|_2 \leq C\left(\|D(\mathrm{rot}\ (\mathbf{v}\zeta))\|_2 + \|D(\mathrm{div}\ (\mathbf{v}\zeta))\|_2\right).$$

Důkaz této nerovnosti přímo plyne z důkazu podobné nerovnosti (pro případ funkce s nulovou divergencí) uvedeného v [3]. Jednoduchým rozderivováním druhého členu a odhadnutím derivací seřezávací funkce konstantou nakonec dostaneme odhad

$$\left\|D^2(\mathbf{v}\zeta)\right\|_2 \leq C\left(\|D(\mathrm{rot}\,(\mathbf{v})\zeta)\|_2 + \|\nabla\mathbf{v}\|_2 + \|\mathbf{v}\|_2\right).$$

Dále využijeme další lemma, dokázané v [3].

**Lemma 3.2.1.** *Existují konstanty $K_1, K_2$ takové, že pro každý osově symetrický vektor $\mathbf{u}$ a každý bod $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} > 0$ je*

$$K_1 |D(\mathrm{rot}\,\mathbf{u}(\mathbf{a}))| \leq \left|\frac{\partial\sigma(\mathbf{a})}{\partial r}\right| + \left|\frac{\partial\sigma(\mathbf{a})}{\partial z}\right| + \left|\frac{\sigma(\mathbf{a})}{r}\right|,$$

$$K_2 |\mathrm{rot}\,\mathbf{u}(\mathbf{a})| \leq |\sigma(\mathbf{a})|$$

*kde $\sigma$ je jediná nenulová složka rotace $\mathbf{u}$ vyjádřené ve válcových souřadnicích.*

Označíme-li $\bar{\omega}$ jedinou nenulovou složku vektoru $\mathrm{rot}\,(\mathbf{v}\zeta)$ vyjádřeného ve válcových souřadnicích, můžeme díky tomuto lemmatu napsat

$$\left\|D^2(\mathbf{v}\zeta)\right\|_2 \leq C\left(\|\nabla\bar{\omega}\|_2 + \left\|\frac{\bar{\omega}}{r}\right\|_2 + \|\nabla\mathbf{v}\|_2 + \|\mathbf{v}\|_2\right).$$

Zbývá tak poslední věc a tou je přejít od norem $\bar{\omega}$ k normám $\omega\zeta$. K tomu stačí rozderivovat $\mathrm{rot}\,(\mathbf{v}\zeta)$. Tím dostaneme dva členy, z nichž jeden je $\omega\zeta$ a druhý obsahuje derivaci seřezávací funkce. Zatímco ve členu $\nabla\bar{\omega}$ lehce odhadneme derivaci seřezávací funkce konstantou, se druhým členem budeme muset pracovat složitěji. Zatím tedy máme

$$\left\|D^2(\mathbf{v}\zeta)\right\|_2 \leq C\left(\|\nabla(\omega\zeta)\|_2 + \left\|\frac{\omega\zeta}{r}\right\|_2 + \left\|\frac{v_r}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{v_z}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right\|_2 + \|\nabla\mathbf{v}\|_2 + \|\mathbf{v}\|_2\right).$$

Na odhad prostředního členu použijeme Taylorův rozvoj, podobně jako už jednou výše. Takto lze odhadnout normu $\left\|\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right\|_\infty$ konstantou. Konečně podobný argument použijeme na radiální složku rychlosti $v_r$. Je totiž $v_r(0,z) = 0$ a tak poblíž osy lze odhadnout normu $\left\|\frac{v_r}{r}\right\|_2$ gradientem rychlosti v $L^2$, zatímco daleko od osy je $\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial z}$ omezené konstantou. Tím jsme vyřešili v této části poslední problém, protože jsme dostali

$$\left\|D^2(\mathbf{v}\zeta)\right\|_2 \leq C\left(\|\nabla(\omega\zeta)\|_2 + \left\|\frac{\omega\zeta}{r}\right\|_2 + \|\nabla\mathbf{v}\|_2 + \|\mathbf{v}\|_2\right).$$

Připomeňme, že máme

$$J \leq c\left\|D^2(\mathbf{v}\zeta)\right\|_2^2 + C\,\|\nabla\mathbf{v}\|_2^2.$$

Konstantu $c$ můžeme volit libovolně malou, takže ji zvolíme takovou, abychom po dosazení odhadu druhého gradientu $\mathbf{v}\zeta$ mohli příslušný člen zahrnout do levé strany. Zbylé členy po zintegrování v čase odhadneme konstantou.

Když vše výše uvedené provedeme a integrujeme $\int_0^t$, dostaneme nakonec

$$\|\omega\zeta(t)\|_2^2 + \int_0^t \left\|\frac{\omega\zeta}{r}(\tau)\right\|_2^2 + \|\nabla\left(\omega\zeta\right)(\tau)\|_2^2\,d\tau \leq C(\mathbf{f},\mathbf{v}_0).$$

## 3.3 Důkaz - závěr

Nakonec stejným postupem jako při odhadování posledího členu ukážeme, že ze získané nerovnosti plyne závěr dokazované věty. Dostaneme tak

$$\|\omega\zeta(t)\|_2^2 + \int_0^t \left\|D^2(\mathbf{v}\zeta)(\tau)\right\|_2^2 d\tau \leq C(\mathbf{f},\mathbf{v}_0).$$

Podobně se vypořádáme s prvním členem, podle lemmatu 2.1.1 je

$$\|D(\mathbf{v}\zeta)\|_2 \leq C(\|\mathrm{rot}\,(\mathbf{v}\zeta)\|_2 + \|\mathrm{div}\,(\mathbf{v}\zeta)\|_2) \leq C(\|\bar{\omega}\|_2 + \|\mathbf{v}\|_2),$$

kde jsme použili jednak div $\mathbf{v} = 0$, jednak odhad derivace seřezávací funkce konstantou a také lemma 3.2.1. Nakonec přejdeme od $\bar{\omega}$ k $\omega$, což se projeví pouze dalším zvětšením konstanty $C$. Tím skončíme s nerovností

$$\|D(\mathbf{v}\zeta)\|_2 \leq C(\|\bar{\omega}\|_2 + \|\mathbf{v}\|_2) \leq C(\|\omega\zeta\|_2 + \|\mathbf{v}\|_2).$$

Použitím této nerovnosti nakonec dostaneme požadovaný výsledek

$$\|D(\mathbf{v}\zeta)\|_2^2 + \int_0^t \left\|D^2(\mathbf{v}\zeta)(\tau)\right\|_2^2 d\tau \leq C(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0),$$

Na levé straně přejdeme k lim sup a dostaneme

$$\limsup_{t \to t^*-} \|\mathbf{v}\zeta(t)\|_{1,2}^2 + \int_0^t \|\mathbf{v}\|_{2,2}^2 < \infty.$$

Tím jsme tedy ukázali

$$\mathbf{v}\zeta \in L^\infty(0, t^*, W^{1,2}(\Omega)) \cap L^2(0, t^*, W^{2,2}(\Omega))$$

a tím je věta dokázána, protože víme, že se v čase $t^*$ objeví singularita a zároveň jsme ukázali, že uvnitř oblasti řešení zůstane regulární.

*Poznámka.* V souvislosti s právě dokázanou větou se nabízí otázka, zdali je řešení uvnitř oblasti $\Omega$ regulární na libovolném časovém intervalu. Na tuto otázku odpověď nedáme, ale zmíníme se o jistém speciálně zkonstruovaném řešení. Uvažujme systém dif. rovnic

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \varepsilon \Delta^2 \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f},$$
$$\text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Tedy Navierovy-Stokesovy rovnice zregularizujeme použitím biharmonického operátoru. K těmto rovnicím je třeba přidat další okrajovou podmínku, například $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} = 0$. Řešením tohoto systému je funkce s lepšími vlastnostmi, než které má řešení obyčejných Navierových-Stokesových rovnic (je jednoznačné a regulární) - samozřejmě toto řešení bude záviset na $\varepsilon$. Budeme-li pak s $\varepsilon$ konvergovat k nule, dostaneme speciální řešení Navierových-Stokesových rovnic. Takto zkonstruované řešení je regulární uvnitř oblasti na libovolném časovém intervalu. Důkaz tohoto tvrzení by probíhal velmi podobně jako důkaz, kterému jsme se teď věnovali, neboť člen $\varepsilon \Delta^2 \mathbf{v}$ by v odhadech nedělal žádné potíže.

# Literatura

[1] Galdi G.P. *An Introduction to the Navier-Stokes Initial Boundary Value Problem*, In: **Fundamental directions in Mathematical Fluid Mechanics**, editors: G.P. Galdi, J.G. Heywood, R. Ranacher, Birkhäuser Verlag (2000)

[2] Ladzyhenskaya O.A. *On the unique global solvability of the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations in the presence of the axial symmetry*, Zap. Nauch. Sem. LOMI **7** (1968) 155-177 (in Russian)

[3] Leonardi S., Málek J., Nečas J., Pokorný M. *On axially symmetric flows in* $\mathbb{R}^3$, ZAA **18** (1999) 639-649

[4] Lions P.-L. **Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Volume I: Incompressible Models**, Clarendon Press, Oxford (1996)

[5] Neustupa J., Pokorný M. *Axisymmetric flow of Navier-Stokes fluid in the whole space with non-zero angular velocity component*, Math. Boh. **126**, No. 2 (2001)

[6] Maremonti P., *Some interpolation inequalities involving Stokes operator and first order derivatives*, preprint University of Potenza (1996), Annali Mat. Pura Appl. IV Ser.175 (1998) 59–91

[7] Pokorný M. *A regularity criterion for the angular velocity component in the case of axisymmetric Navier-Stokes equations*, Proceedings of the 4th European Congress on Elliptic and Parabolic Problems, Rolduc and Gaeta 2001, World Scientific (2002) 233-242

[8] Turesson B.O. **Nonlinear Potential Theory and Weighted Sobolev Spaces**, Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics (2000)

[9] Uchovskii M.R., Yudovich B.I. *Axially symmetric flows of an ideal and viscous fluid in the whole space* (in Russian, also J. Appl. Math. Mech, **32**, 1968, 52-61), Prikladnaya matematika i mechanika **32** (1968), 59-69.