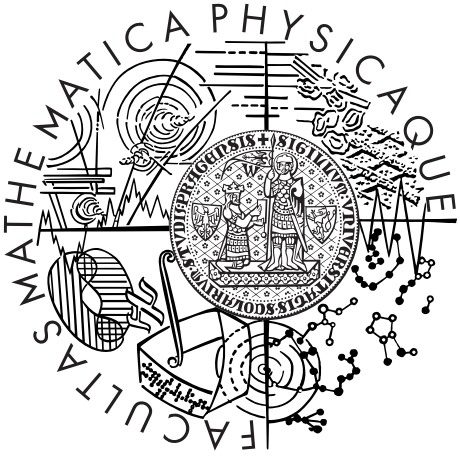
Nelineární analýza časových řad a její aplikace ve financích

Diplomová práce



Martina Jírů

Vedoucí:

RNDr. Jitka Zichová, Dr.

KPMS MFF UK

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha, 2006

Poděkování

Chtěla bych na tomto místě poděkovat RNDr. Jitce Zichové, Dr. za cenné rady a konzultace při vzniku této diplomové práce.

Dále bych ráda poděkovala své rodině a snoubenci Tomášovi, za jejich materiální, morální a psychickou podporu, bez níž by tato práce nemohla nikdy vzniknout.

A v neposlední řadě musím poděkovat našemu psímu děťátku Atreyovi, který mi dokáže zvednout náladu vždy, když to nejvíce potřebuji.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 21.4.2006

.....

Martina Jírů

Obsah

1 Úvod **1**

2 Některé nelineární modely **3**
2.1 ARCH 3
2.2 GARCH 6
2.3 Bilineární modely 8
2.4 EXPAR 11
2.5 Prahové modely 13
2.6 CHARN 14

3 Odhad modelu **15**
3.1 Modely ARCH a GARCH 15
3.2 Bilineární modely 21
3.3 Model EXPAR 23
3.4 Model SETAR 27
3.5 Model CHARN 32

4 Testy linearity **34**
4.1 Test proti obecné nelineární alternativě 34
4.2 Test proti podmíněné heteroskedasticitě 35
4.3 Test proti prahovým alternativám 35
4.4 Simulace 38

5 Aplikace na reálná data **40**
5.1 Popis dat a testy linearity 40
5.2 Aplikace zkoumaných nelineárních modelů 41

Literatura **51**

Název práce: Nelineární analýza časových řad a její aplikace ve financích
Autor: Martina Jírů
Katedra (ústav): KPMS MFF UK
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.
E-mail vedoucího: zichova@karlin.mff.cuni.cz
Abstrakt: V této práci se věnujeme nelineárním modelům, které nacházejí uplatnění ve finanční matematice. Zvláštní pozornost je věnována modelům (G)ARCH, bilineárním modelům, modelům EXPAR a SETAR a neparametrickému modelu CHARN. Tyto modely jsou určitým výběrem z velkého množství nelineárních modelů časových řad. Některé další uvádí například Tong [23]. Nadarayova-Watsonova metoda jádrového odhadu podmíněné střední hodnoty $\mathsf{E}(X_t \,|\, X_{t-1})$ a podmíněného rozptylu $\mathsf{Var}(X_t \,|\, X_{t-1})$, kterou zmiňuje Hafner [12], je použita pro neparametrický model CHARN. Metody odhadu parametrů ostatních zkoumaných modelů jsou především metoda nejmenších čtverců a metoda opírající se o maximalizaci pseudověrohodnostní funkce. Uvedené postupy v literatuře zmiňují Hafner [12] nebo Gouriéroux [8]. Přesnost jednotlivých odhadů je ověřena experimentem se simulovanými daty. Jsou prezentovány tři z literatury převzaté testy hypotézy, že data pocházejí z lineárního modelu AR(p), proti různým speciálním alternativám. Některé další podrobnosti o těchto testech uvádí Tong [23]. Citlivost jednotlivých testů je demonstrována na simulovaných datech. Na závěr jsou všechny zkoumané modely aplikovány na reálná data, jimiž jsou kurzy britské libry (GBP) vůči české koruně (Kč) pozorované ve všední dny roku 2005. Data byla získána z webové stránky ČNB.
Klíčová slova: nelineární časové řady, podmíněná heteroskedasticita, neparametrické odhady

Title: Nonlinear time series analysis and its application in finance
Author: Martina Jírů
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Jitka Zichová, Dr.
Supervisor's e-mail address: zichova@karlin.mff.cuni.cz
Abstract: We are concerned with nonlinear time series models that play ever more important role in finance. In particular we deal with (G)ARCH models, bilinear models, EXPAR and SETAR models and nonparametric CHARN model. The mentioned models are a sample of nonlinear time series models presented in literature, see e.g. Tong [23]. Nadaraya-Watson kernel estimator of the conditional mean $\mathsf{E}(X_t \,|\, X_{t-1})$ and the conditional variance $\mathsf{Var}(X_t \,|\, X_{t-1})$, is taken from Hafner [12] in the case of the CHARN model. Least squares estimates and maximum pseudo-likelihood method are used in the other models. This methods are presented e.g. by Hafner [12] or by Gouriéroux [8]. Accuracy of mentioned estimation methods is verified by small simulation study. We also describe three tests of the linearity hypothesis against different alternatives. Their sensitivity is verified again by simulations. The models and methods are applied to the real data set of exchange rates GBP/CZK from the year 2005 that is presented by website of CNB.
Keywords: nonlinear time series, conditional heteroskedasticity, nonparametric estimation

Kapitola 1

Úvod

Modely časových řad byly rozvíjeny především za účelem popisu a případné predikce různých přírodních či ekonomických dějů, jejichž pravděpodobnostní charakteristiky se v čase určitým způsobem vyvíjí. Vedle modelů s deterministickým trendem a náhodných patřily v minulosti k nejpoužívanějším lineární modely ARMA (AutoRegressive-Moving Average). Základním předpokladem takového modelu byla existence nezáporných celočíselných konstant p, q, reálných parametrů $a_1, \ldots, a_p$ a $b_1, \ldots, b_q$ a posloupnosti $\{\varepsilon_t\}$ nezávislých (někdy pouze nekorelovaných) náhodných veličin tak, že zkoumaná časová řada $\{X_t\}$ vyhovuje rovnici

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{t-q}.$$

Tento model byl v literatuře velmi podrobně popsán a zkoumán. Z mnoha monografií zmiňme například Box and Jenkins [4]. Nejčastěji se předpokládalo, že veličiny ε_t mají normální rozdělení. Takový model je nazýván gaussovský. Většina analýz se pak omezovala pouze na třídu stacionárních ARMA modelů. Přes mnoho úspěšných aplikací má tento model i jistá omezení, která ve svém důsledku přispěla k rozvoji teorie nelineárních modelů časových řad. Některá z těchto omezení zmiňuje například Tong [23] v úvodní pasáži monografie věnované přehledu nelineárních modelů a nejdůležitejším do té doby dosaženým výsledkům z této oblasti. Za všechny je možné jmenovat následující.

- Stacionární gaussovské ARMA modely, které jsou užívány nejčastěji, nejsou příliš vhodné k modelování dat, která vykazují značnou nesymetrii, jako například většina hydrologických pozorování a další.
- Stacionární gaussovské ARMA modely se obvykle nehodí ani k modelování časových řad, ve kterých dochází v nepravidelných časových obdobích k náhlému prudkému zvýšení pozorovaných hodnot, tzv. náhlým vzplanutím.
- Některé časové řady vykazují autokovarianční strukturu, která neodpovídá modelům z třídy stacionárních gaussovských ARMA.

Tyto a mnoho dalších důvodů vedly ke zvýšenému zájmu o modely, které jsou nelineární, nestacionární nebo nejsou gaussovské.

V této práci se věnujeme nelineárním modelům, které nacházejí uplatnění ve finanční matematice, kde je jejich použití velice často vhodnější než aplikace modelů lineárních. Zvláštní pozornost je věnována (zobecněným) autoregresním modelům s podmíněnou heteroskedasticitou (ARCH/GARCH), bilineárním modelům (BL), exponenciálním autoregresním modelům (EXPAR), prahovým autoregresním modelům (SETAR) a neparametrickému modelu CHARN. Jejich definice a základní vlastnosti jako například stacionarita, autokovarianční struktura, či některé momenty, jsou shrnuty v kapitole 2. Tyto modely jsou určitým výběrem z velkého množství nelineárních modelů časových řad. Některé další uvádí například Tong [23].

Část 3.5 popisuje Nadarayovu-Watsonovu metodu jádrového odhadu podmíněné střední hodnoty $\mathsf{E}(X_t \mid X_{t-1})$ a podmíněného rozptylu $\mathsf{Var}(X_t \mid X_{t-1})$ v neparametrickém modelu CHARN. Metody odhadu parametrů ostatních zkoumaných modelů shrnují části 3.1-3.4. Zde jsou nejvíce využívány metoda nejmenších čtverců a metoda opírající se o maximalizaci pseudověrohodnostní funkce. Uvedené postupy v literatuře zmiňují Hafner [12] nebo Gouriéroux [8]. Přesnost jednotlivých odhadů je ověřena experimentem se simulovanými daty.

Kapitola 4 prezentuje tři testy hypotézy, že data pocházejí z lineárního modelu AR(p), proti různým speciálním alternativám. Některé další podrobnosti o těchto testech uvádí Tong [23]. Citlivost jednotlivých testů je i tentokrát demonstrována na simulovaných datech.

Na závěr jsou všechny zkoumané modely aplikovány na reálná data, jimiž jsou kurzy britské libry (GBP) vůči české koruně (Kč) pozorované ve všední dny roku 2005. Data byla získána z webové stránky ČNB a zpracována pomocí programů Mathematica 4 a XploRe. Výsledky jsou prezentovány kromě jiného formou grafů a tabulek.

Kapitola 2

Některé nelineární modely

2.1 ARCH

Model ARCH (AutoRegressive Conditionally Heteroscedastic) zavedl Engle [6] a od té doby je v literatuře často citován a zkoumán. Monografie zabývající se modelem ARCH a jeho využitím ve finančnictví je Gouriéroux [8].

Definice 2.1.1. Nechť $\{\varepsilon_t\}$ je striktní bílý šum s nulovou střední hodnotou a s nenulovým konečným rozptylem σ_ε^2 a $p \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_t\}$ vyhovuje modelu ARCH(p), jestliže pro každé t platí

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{a_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \cdots + a_p X_{t-p}^2}, \tag{2.1}$$

kde $a_0 > 0$, a $a_i \geq 0$, pro $i = 1, \ldots, p$.

Z definice 2.1.1 je vidět, že pokud $\{X_t\}$ vyhovuje modelu ARCH(p), pak $\{X_t^2\}$ vyhovuje bilineárnímu modelu, který zavádíme v definici 2.3.1. Podobně jako například v případě lineárních modelů i zde existuje určitá nejednoznačnost, neboť model ARCH lze zapsat ve tvaru

$$X_t = \sqrt{a_0}\varepsilon_t \sqrt{1 + \frac{a_1}{a_0} X_{t-1}^2 + \cdots + \frac{a_p}{a_0} X_{t-p}^2}.$$

Volbou

$$\{\varepsilon_t^*\} = \{\sqrt{a_0}\varepsilon_t\}, \quad a_0^* = 1 \quad \text{a} \quad a_i^* = \frac{a_i}{a_0}, \text{ pro } i = 1 \ldots, p,$$

dostaneme model, který je ekvivalentní původnímu. Je tedy možné beze ztráty na obecnosti předpokládat například $a_0 = 1$ nebo $\sigma_\varepsilon^2 = 1$. V souladu s literaturou, např. Gouriéroux [8] nebo Hafner [12], budeme zde dále předpokládat $\sigma_\varepsilon^2 = 1$.

Podmínku pro slabou stacionaritu můžeme odvodit opakovaným použitím vzorce (2.1).

Dostáváme

$$X_t^2 = a_0\varepsilon_t^2 + a_0\varepsilon_t^2 \sum_{i_1=1}^{p} a_{i_1}\varepsilon_{t-i_1}^2 + a_0\varepsilon_t^2 \sum_{i_1=1}^{p}\sum_{i_2=1}^{p} a_{i_1}a_{i_2}\varepsilon_{t-i_1}^2\varepsilon_{t-i_1-i_2}^2 + \dots$$
$$\dots + a_0\varepsilon_t^2 \sum_{i_1=1}^{p}\cdots\sum_{i_n=1}^{p} a_{i_1}\dots a_{i_n}\varepsilon_{t-i_1}^2\dots\varepsilon_{t-i_1-\dots-i_n}^2 +$$
$$+ a_0\varepsilon_t^2 \sum_{i_1=1}^{p}\cdots\sum_{i_{n+1}=1}^{p} a_{i_1}\dots a_{i_{n+1}}X_{t-i_1}^2\dots X_{t-i_1-\dots-i_{n+1}}^2.$$

Označíme-li

$$c = \sum_{i=1}^{p} a_i,$$

pak je vidět, že

$$\sigma_X^2 = a_0 \sum_{i=0}^{\infty} c^i$$

a proces ARCH(p) definovaný vzorcem (2.1) je tedy slabě stacionární, jestliže $c < 1$, tj. musí platit

$$\sum_{i=1}^{p} a_i < 1.$$

Střední hodnota procesu $\{X_t\}$ je 0, označme σ_X^2 jeho rozptyl. Pokud je proces $\{X_t\}$ slabě stacionární, pak ze vzorce (2.1) plyne

$$\sigma_X^2 = a_0 + \sigma_X^2 \sum_{i=1}^{p} a_i.$$

Odtud pak úpravou dostaneme

$$\sigma_X^2 = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} a_i}.$$

Označme

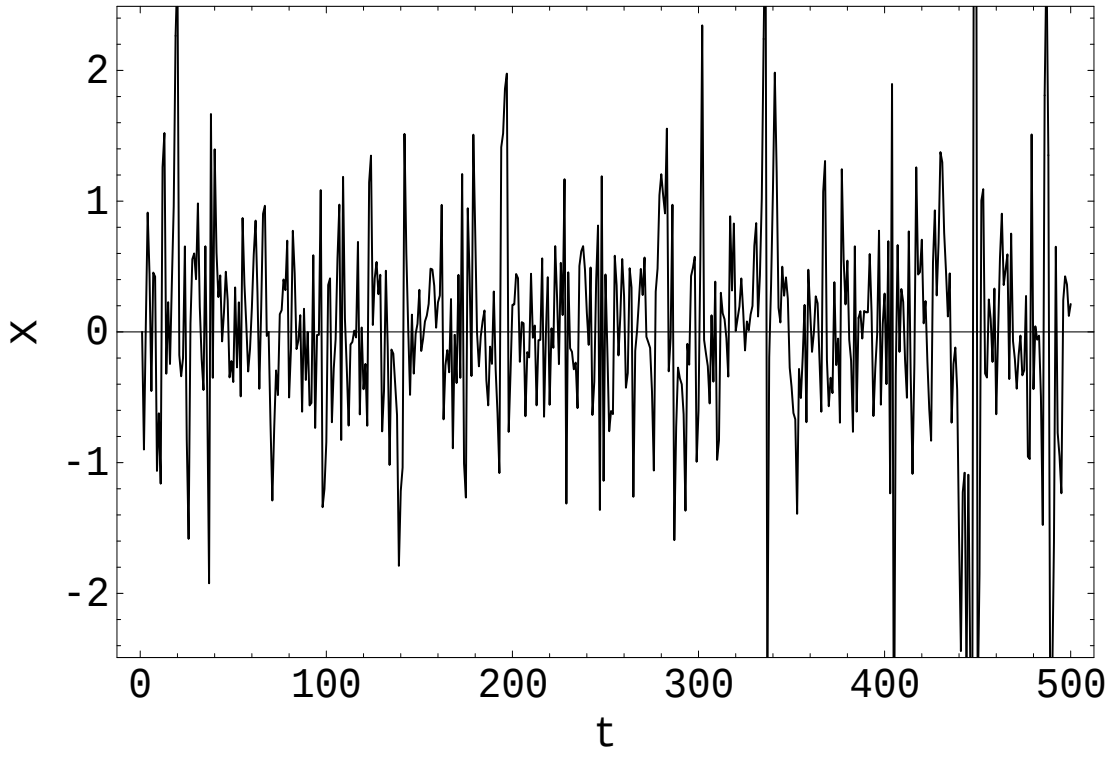
$$\mathsf{E}(\,\cdot\,|\underline{X_t}) = \mathsf{E}(\,\cdot\,|X_t, X_{t-1}, \dots).$$

Pomocí vzorce (2.1) snadno zjistíme

$$\mathsf{E}(X_t|\underline{X_{t-1}}) = 0,$$
$$\mathsf{E}(X_t^2|\underline{X_{t-1}}) = a_0 + a_1X_{t-1}^2 + \dots + a_pX_{t-p}^2.$$

Další vlastností procesu $\{X_t\}$ je nekorelovanost, neboť pro $h > 0$

$$\mathsf{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathsf{E}\,\varepsilon_{t+h}\,\mathsf{E}\,X_t\sqrt{a_0 + a_1X_{t+h-1}^2 + \dots + a_pX_{t+h-p}^2} = 0.$$



Obrázek 2.1: Realizace modelu ARCH(1) daného vzorcem $X_t = \varepsilon_t \sqrt{0.2 + 0.8X_{t-1}^2}$, kde $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}(0,1)$ a $t = 1, 2, \ldots, 500$.

Díky této vlastnosti se proces ARCH často používá místo klasického bílého šumu v linárních autoregresních modelech v případech, kdy je důvod se domnívat, že podmíněný rozptyl šumu je v čase proměnlivý a závisí na několika svých posledních hodnotách.

Příklad 2.1.2. Jako příklad uveďme model ARCH(1) daný vzorcem

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{a_0 + a_1 X_{t-1}^2},$$

kde $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}(0,1)$, $a_0 > 0$ a $0 < a_1 < 1$. Tento model je slabě stacionární, má nulovou střední hodnotu a rozptyl

$$\sigma_X^2 = \frac{a_0}{1 - a_1}.$$

Šikmost $\alpha_3 = 0$. Špičatost α_4 procesu $\{X_t\}$ můžeme vypočítat podobně jako rozptyl. Pokud je $3a_1^2 < 1$, pak platí

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\, X_t^4 &= \mathsf{E}\, \varepsilon_t^4\, \mathsf{E}\left(a_0^2 + 2a_0 a_1 X_{t-1}^2 + a_1^2 X_{t-1}^4\right) \\ &= 3\left(a_0^2 + \frac{2a_0^2 a_1}{1 - a_1} + a_1^2\, \mathsf{E}\, X_{t-1}^4\right) \end{aligned}$$

$$= 3a_1^2 \,\mathsf{E}\, X_{t-1}^4 + \frac{3a_0^2(1+a_1)}{1-a_1}.$$

Odtud vypočteme $\mathsf{E}\, X_t^4$ jako

$$\mathsf{E}\, X_t^4 = \frac{3a_0^2(1+a_1)}{(1-a_1)\,(1-3a_1^2)}$$

a špičatost α_4 pak dostaneme podle vzorce

$$\alpha_4 = \frac{\mathsf{E}\, X_t^4}{\left(\sigma_X^2\right)^2} = \frac{3\,(1-a_1^2)}{1-3a_1^2}.$$

Je vidět, že $\alpha_4 > 3$, takže veličiny X_t mají vyšší špičatost než původní normálně rozdělený bílý šum $\{\varepsilon_t\}$. ♢

2.2 GARCH

Zobecněním modelu ARCH je model GARCH (Generalized AutoRegressive Conditionally Heteroscedastic). Toto zobecnění zavedl Bollerslev [2]. Od základního modelu ARCH se liší přidáním autoregresních členů do vyjádření podmíněného rozptylu $\sigma_t^2 = \mathsf{E}(X_t^2|\underline{X_{t-1}})$.

Definice 2.2.1. Nechť $\{\varepsilon_t\}$ je striktní bílý šum s nulovou střední hodnotou a s nenulovým konečným rozptylem σ_ε^2 a $p, q \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_t\}$ vyhovuje modelu GARCH(p, q), jestliže pro každé t platí

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{V_t},$$

kde

$$V_t = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} b_j V_{t-j},$$

$b_j \geq 0$ pro $j = 1, \ldots, p$, $a_0 > 0$, a $a_i \geq 0$, pro $i = 1, \ldots, q$.

Ze stejných důvodů jako u modelu ARCH, budeme i v tomto odstavci dále předpokládat, že $\sigma_\varepsilon^2 = 1$.

Střední hodnota procesu $\{X_t\}$ je i v tomto případě nulová. Podobně jako u modelu ARCH lze odvodit, že model GARCH(p, q) je slabě stacionární, pokud platí

$$\sum_{i=1}^{q} a_i + \sum_{j=1}^{p} b_j < 1$$

a rozptyl σ_X^2 se pak rovná

$$\sigma_X^2 = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^{q} a_i - \sum_{j=1}^{p} b_j}.$$

Dále platí

$$\mathsf{E}(X_t|\underline{X_{t-1}}) = 0,$$
$$\mathsf{E}(X_t^2|\underline{X_{t-1}}) = V_t = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} b_j V_{t-j}.$$

Proces $\{X_t\}$ je nekorelovaný a jeho praktické využití je podobné jako u modelu ARCH. Pokud všechny kořeny polynomu

$$1 - \sum_{j=1}^{p} b_j z^j$$

leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině, pak může být model GARCH(p, q) zapsán též jako ARCH(∞). Položíme-li

$$\xi_t = X_t^2 - V_t,$$

lze model GARCH(p, q) interpretovat také jako ARMA(m, p) pro posloupnosti $\{X_t^2\}$ a $\{\xi_t\}$, neboť

$$X_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{m} (a_i + b_i) X_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^{p} b_j \xi_{t-j} + \xi_t,$$

kde $m = \max\{p; q\}$, $a_i = 0$ pro $i > q$ a $b_j = 0$ pro $j > p$. Zde zmíněný model ARMA(m, p) má podmíněně heteroskedastický šum $\{\xi_t\}$.

Příklad 2.2.2. Jako příklad uvažujme model GARCH(1,1) definovaný předpisem

$$X_t^2 = \varepsilon_t^2 V_t,$$
$$V_t = a_0 + a_1 X_{t-1}^2 + b_1 V_{t-1},$$

kde $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}(0, 1)$. Pokud je $a_1 + b_1 < 1$, pak je model slabě stacionární a platí

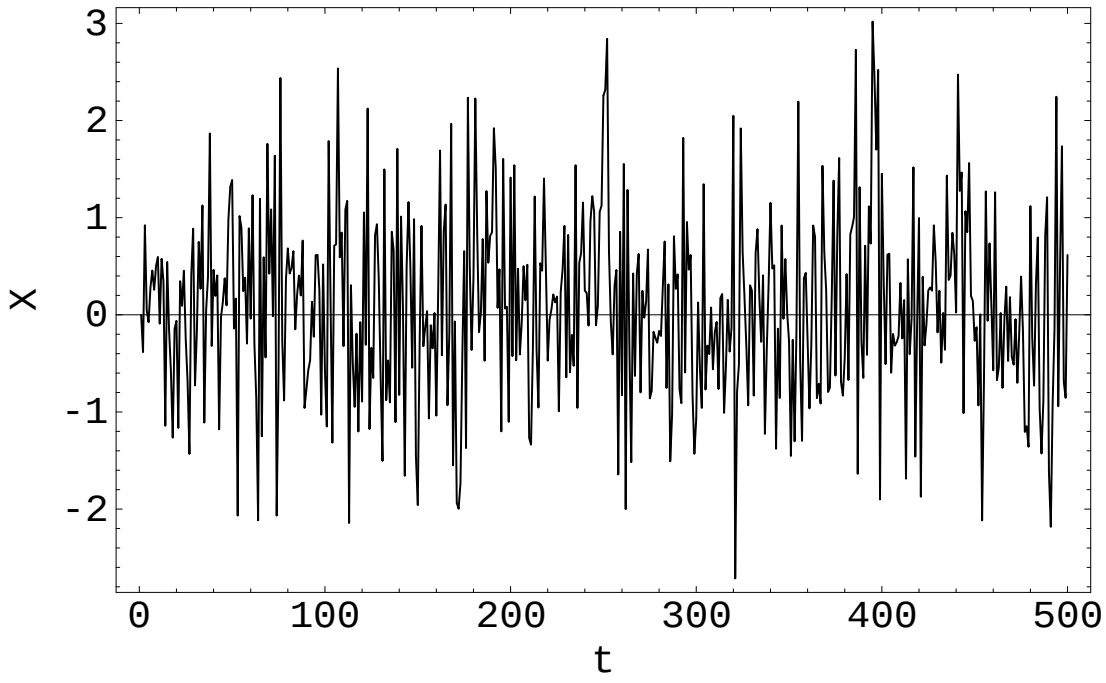
$$\sigma_X^2 = \mathsf{E}\,\varepsilon_t^2\,\mathsf{E}\,V_t = \frac{a_0}{1 - a_1 - b_1}.$$

Šikmost $\alpha_3 = 0$. Označme $\mu_4 = \mathsf{E}\,X_t^4$. Pokud je $3a_1^2 + 2a_1 b_1 + b_1^2 < 1$, pak platí

$$\begin{aligned}\mu_4 &= \mathsf{E}\,\varepsilon_t^4\,\mathsf{E}\,V_t^2 = 3\,\mathsf{E}\,V_t^2 \\ &= 3\,\mathsf{E}\left(a_0^2 + a_1^2 X_{t-1}^4 + b_1^2 V_{t-1}^2 + 2a_0 b_1 V_{t-1} + 2a_0 a_1 X_{t-1}^2 + 2a_1 b_1 X_{t-1}^2 V_{t-1}\right) \\ &= 3\left(a_0^2 + a_1^2 \mu_4 + \frac{1}{3}\mu_4 b_1^2 + 2a_0 b_1 \sigma_X^2 + 2a_0 a_1 \sigma_X^2 + \frac{2}{3} a_1 b_1 \mu_4\right)\end{aligned}$$

Čtvrtý moment veličin X_t odtud vyjádříme jako

$$\mu_4 = \frac{3a_0^2(1 + a_1 + b_1)}{(1 - a_1 - b_1)(1 - 3a_1^2 - 2a_1 b_1 - b_1^2)}$$



Obrázek 2.2: Realizace procesu GARCH(1,1) daného vzorcem $X_t = \varepsilon_t\sqrt{V_t}$, kde $V_t = 0.1 + 0.1X_{t-1}^2 + 0.8V_{t-1}$, přičemž $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}(0,1)$ a $t = 1, 2, \ldots, 500$.

a špičatost α_4 pak dostaneme podle vzorce

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{(\sigma_X^2)^2} = \frac{3\left[1-(a_1+b_1)^2\right]}{1-3a_1^2-2a_1b_1-b_1^2} = 3 + \frac{6a_1^2}{1-3a_1^2-2a_1b_1-b_1^2}.$$

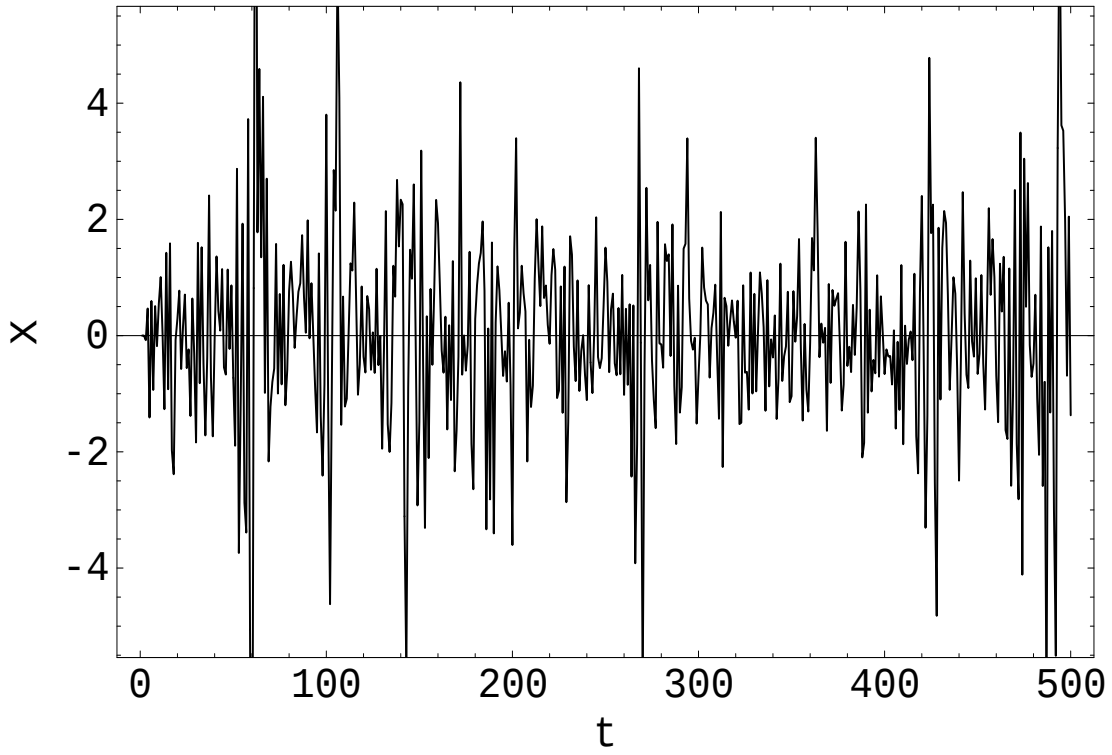
Je vidět, že i tentokrát je $\alpha_4 > 3$, takže veličiny X_t mají vyšší špičatost než původní normálně rozdělený bílý šum $\{\varepsilon_t\}$. ♢

2.3 Bilineární modely

Bilineární modely jsou jako mnoho jiných nelineárních modelů zobecněním lineárních ARMA modelů. Toto zobecnění, které zavedli Granger and Andersen [11], spočívá v přidání součinů $X_{t-i}\varepsilon_{t-j}$ do modelu.

Definice 2.3.1. Nechť $\{\varepsilon_t\}$ je striktní bílý šum s nulovou střední hodnotou a s nenulovým konečným rozptylem σ_ε^2 a $p, q, r, s \in \mathbb{N}_0$. Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_t\}$ vyhovuje modelu BL(p, q, r, s), jestliže pro každé t a pevné reálné koeficienty a_i, b_j a $c_{i,j}$ platí

$$X_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} c_{i,j} X_{t-i}\varepsilon_{t-j}.$$



Obrázek 2.3: Realizace modelu BL(0,0,2,1) daného vzorcem $X_t = \varepsilon_t + 0.9X_{t-2}\varepsilon_{t-1}$, kde $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}(0,1)$ a $t = 1, 2, \ldots, 500$.

Bilineární se modelu říká proto, že při daných $\varepsilon_{t-j}, j = 1, \ldots, \max\{q; s\}$ je X_t lineární kombinací $X_{t-i}, i = 1, \ldots, \max\{p; r\}$ a naopak při daných $X_{t-i}, i = 1, \ldots, \max\{p; r\}$ je X_t lineární kombinací $\varepsilon_{t-j}, j = 1, \ldots, \max\{q; s\}$. Pokud je $c_{i,j} = 0$ pro všechna $i \geq j$, nazývá se takový model v literatuře subdiagonální, někdy též markovský.

Příklad 2.3.2. Jako příklad uvažujme jednoduchý bilineární model $\mathrm{BL}(0, 0, r, s)$ určený vzorcem

$$X_t = c_{r,s} X_{t-r}\varepsilon_{t-s} + \varepsilon_t, \tag{2.2}$$

kde $r, s > 0$, $c_{r,s} \neq 0$, $c_{i,j} = 0$, pro $i < r$ nebo $j < s$, a kde rozdělení bílého šumu ε_t je $\mathsf{N}(0,1)$. Model je subdiagonální, pokud $r < s$, diagonální, když $r = s$, a superdiagonální, jestliže $r > s$. Zde se věnujme pouze případům, kde $r \geq s$. Iterováním vzorce (2.2) dostaneme pro $n > 1$

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{n-1} c_{r,s}^k \varepsilon_{t-kr} \prod_{j=0}^{k-1} \varepsilon_{t-jr-s} + c_{r,s}^n X_{t-nr} \prod_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{t-jr-s}.$$

Odtud je vidět, že nutná a postačující podmínka stacionarity je $|c_{r,s}| < 1$. Pro stacionární model pak platí

$$\mathsf{E}\, X_t^2 = \mathsf{E}\left(c_{r,s}^2 X_{t-r}^2 \varepsilon_{t-s}^2 + \varepsilon_t^2 + 2c_{r,s}\varepsilon_t X_{t-r}\varepsilon_{t-s}\right) = c_{r,s}^2\, \mathsf{E}\, X_t^2 \varepsilon_{t-(s-r)}^2 + 1.$$

Označme

$$d_{r,s}^2 = \mathsf{E}\, X_t^2 \varepsilon_{t-(s-r)}^2.$$

Pro $r > s$ je $\mathsf{E}\, X_t = 0$ a tedy $d_{r,s}^2 = \sigma_X^2$, takže

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{1 - c_{r,s}^2}.$$

Pro $k > 0$ platí

$$\mathsf{E}\, X_t X_{t-k} = c_{r,s}\, \mathsf{E}\, X_{t-r}\varepsilon_{t-s}\varepsilon_{t-k} + c_{r,s}^2\, \mathsf{E}\, X_{t-r}X_{t-k-r}\varepsilon_{t-s}\varepsilon_{t-k-s}.$$

Protože $s < r$, $k > 0$ a $\mathsf{E}\, X_t = 0$, je i $\mathsf{E}\, X_t X_{t-k} = 0$ a tedy autokovarianční funkce posloupnosti $\{X_t\}$ je stejného typu jako autokovarianční funkce bílého šumu.

Pro $r = s$ je

$$\mathsf{E}\, X_t = c_{r,r}\, \mathsf{E}\, X_{t-r}\varepsilon_{t-r} = c_{r,r}\, \mathsf{E}\left(\varepsilon_{t-r} + c_{r,r} X_{t-2r}\varepsilon_{t-2r}\right)\varepsilon_{t-r} = c_{r,r}$$

a dále platí

$$d_{r,r}^2 = c_{r,r}^2 d_{r,r}^2 + 3,$$

tudíž

$$d_{r,r}^2 = \frac{3}{1 - c_{r,r}^2}.$$

Dosazením pak dostaneme

$$\mathsf{E}\, X_t^2 = \frac{3c_{r,r}^2}{1 - c_{r,r}^2} + 1 = \frac{1 + 2c_{r,r}^2}{1 - c_{r,r}^2}$$

a

$$\sigma_X^2 = \frac{1 + c_{r,r}^2 + c_{r,r}^4}{1 - c_{r,r}^2}.$$

Pro $k > r$ platí

$$\mathsf{E}\, X_t X_{t-k} = c_{r,r}\, \mathsf{E}\, X_{t-r}X_{t-k}\varepsilon_{t-r} = c_{r,r}\, \mathsf{E}\, \varepsilon_{t-r}^2\, \mathsf{E}\, X_{t-k} + c_{r,r}^2\, \mathsf{E}\, \varepsilon_{t-r}\, \mathsf{E}\, X_{t-k}X_{t-2r}\varepsilon_{t-2r} = c_{r,r}^2.$$

Podobně i pro $1 \le k < r$ platí

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\, X_t X_{t-k} &= c_{r,r}\, \mathsf{E}\, X_{t-r}X_{t-k}\varepsilon_{t-r} \\
&= c_{r,r}^2\, \mathsf{E}\, X_{t-r}X_{t-k-r}\varepsilon_{t-r}\varepsilon_{t-k-r} \\
&= c_{r,r}^2\, \mathsf{E}\, \varepsilon_{t-r}^2\, \mathsf{E}\, X_{t-k-r}\varepsilon_{t-k-r} + c_{r,r}^3\, \mathsf{E}\, \varepsilon_{t-r}\, \mathsf{E}\, X_{t-k-r}X_{t-2r}\varepsilon_{t-k-r}\varepsilon_{t-2r} \\
&= c_{r,r}^2,
\end{aligned}$$

protože $\mathsf{E}\, X_{t-k-r}\varepsilon_{t-k-r} = 1$. Odlišně vyjde pouze případ $k = r$, kde

$$\mathsf{E}\, X_t X_{t-r} = c_{r,r}\, \mathsf{E}\, X_{t-r}^2\varepsilon_{t-r}.$$

Zde platí

$$\mathsf{E}\, X_{t-r}^2 \varepsilon_{t-r} = \mathsf{E}\, \varepsilon_{t-r}^3 + c_{r,r}^2\, \mathsf{E}\, \varepsilon_{t-r}\, \mathsf{E}\, X_{t-2r}^2 \varepsilon_{t-2r}^2 + 2c_{r,r}\, \mathsf{E}\, \varepsilon_{t-r}^2\, \mathsf{E}\, X_{t-2r}\varepsilon_{t-2r} = 2c_{r,r},$$

a tedy $\mathsf{E}\, X_t X_{t-r} = 2c_{r,r}^2$. Pro autokovarianční funkci pak dostaneme

$$\mathsf{Cov}(X_t, X_{t-k}) = \begin{cases} c_{r,r}^2, & \text{pro } |k| = r; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

♢

Jak je vidět z příkladu 2.3.2, některé bilineární modely mají stejnou kovarianční strukturu jako lineární modely nebo dříve zmíněné modely ARCH a GARCH. Jejich využití proto může být někdy podobné. Jde o velmi širokou třídu modelů, na něž je v literatuře mnoho odkazů. Všeobecné informace jakými jsou podmínky pro stacionaritu a invertibilitu, vícerozměrnou markovskou reprezentaci a další podává například Tong [23] nebo Cipra [5]. Rozdělení veličiny X_t a její marginální hustotu, která často bývá neomezená, studovali Wang, An and Tong [26]. Díky vlastnosti tzv. "náhlého vzplanutí" je zajímavé rozdělení extrémů bilineárních časových řad. Tuto problematiku lze podrobněji nalézt například u Turkman and Turkman [25].

2.4 EXPAR

Exponenciální autoregresní model (EXPonencial AutoRegressive model) jako první navrhl Jones [16]. Obecnější definice modelu ve tvaru (2.3) pochází z Haggan and Ozaki [13].

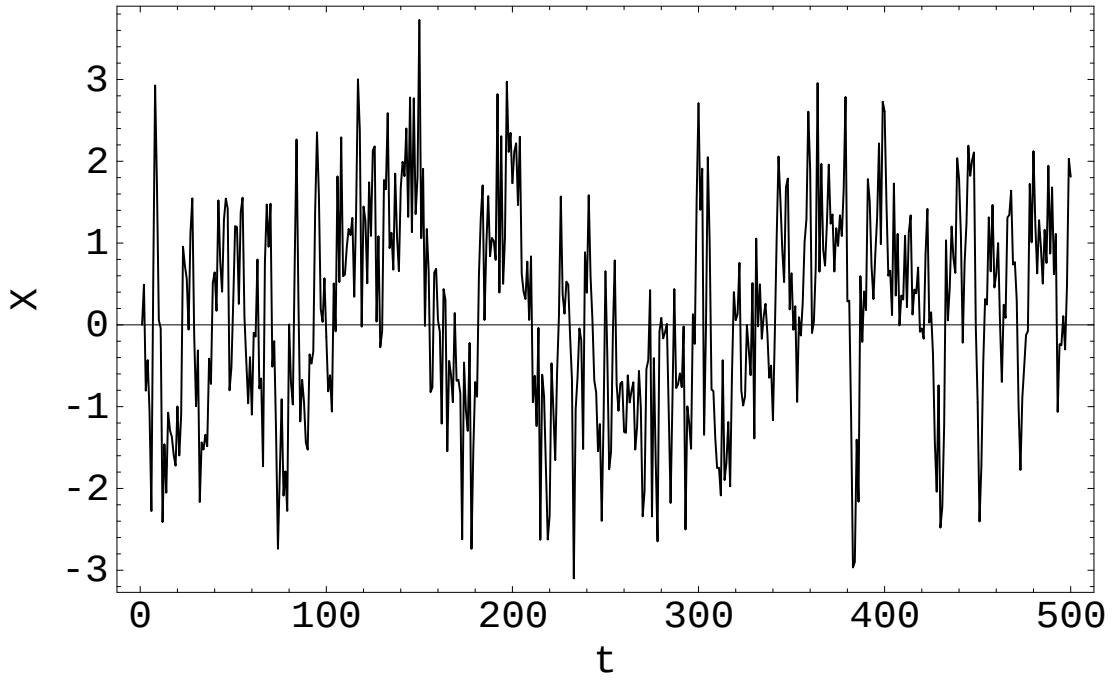
Definice 2.4.1. Nechť $\{\varepsilon_t\}$ je striktní bílý šum. Řekneme, že proces $\{X_t\}$ vyhovuje modelu EXPAR(p), pokud existují konstanty $d \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ a $c_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, p$, tak, že pro každé t platí

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \left(a_i + b_i \exp\{-c_i X_{t-d}^2\}\right) X_{t-i} + \varepsilon_t. \tag{2.3}$$

Tento model dokáže vystihnout některé efekty, které jsou u nelineárních časových řad často pozorovány. Nejvýraznějším rysem tohoto modelu je závislost autoregresních koeficientů v čase t na amplitudě řady v čase $t - d$. Při velké $|X_{t-d}|$ se tyto koeficienty blíží hodnotám a_i, při malé $|X_{t-d}|$ hodnotám $a_i + b_i$, tento efekt způsobuje podobné chování jako vykazují prahové modely popisované v části 2.5, zde však přechod mezi extrémními hodnotami autoregresních parametrů není skokovitý, ale spojitý. Díky této vlastnosti se modely EXPAR používají pro modelování periodických řad, u nichž frekvence závisí na amplitudě.

Často se u nelineárních modelů zkoumá existence tzv. limitního cyklu. Například pro zde zmíněný model EXPAR(p) je to ve dvojrozměrném případě uzavřená křivka nebo množina bodů v rovině, ke které se limitně blíží body $\boldsymbol{y}_t = (y_t, y_{t-1})^T$ vypočtené podle vzorce

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} \left(a_i + b_i \exp\{-c_i y_{t-d}^2\}\right) y_{t-i}$$



Obrázek 2.4: Realizace exponenciálního autoregresního procesu EXPAR(1), který je dán vzorcem $X_t = \left(0.5 + \exp\{-X_{t-1}^2\}\right) X_{t-1} + \varepsilon_t$, kde $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}(0,1)$ a $t = 1, 2, \ldots, 500$.

při vhodně zvolených počátečních hodnotách $y_1, \ldots, y_d$. Obecně nemusí mít nelineární modely žádný limitní cyklus nebo jich naopak mohou mít více. Konvergence hodnot $\boldsymbol{y}_t$ pak závisí na volbě počátečních hodnot, podle toho se pak $\mathbb{R}^d$ rozděluje na oblasti, které se v anglicky psané literatuře nejčastěji nazývají "domains of attraction". Další podrobnosti uvádí například Tong [23].

Haggan and Ozaki [13] publikovali nutnou podmínku pro výskyt limitního cyklu u speciálního případu modelu EXPAR(p) s parametry $d = 1$ a $c_1 = c_2 = \cdots = c_p = c$. Aby za těchto podmínek existoval limitní cyklus, musí být zároveň splněny následující podmínky

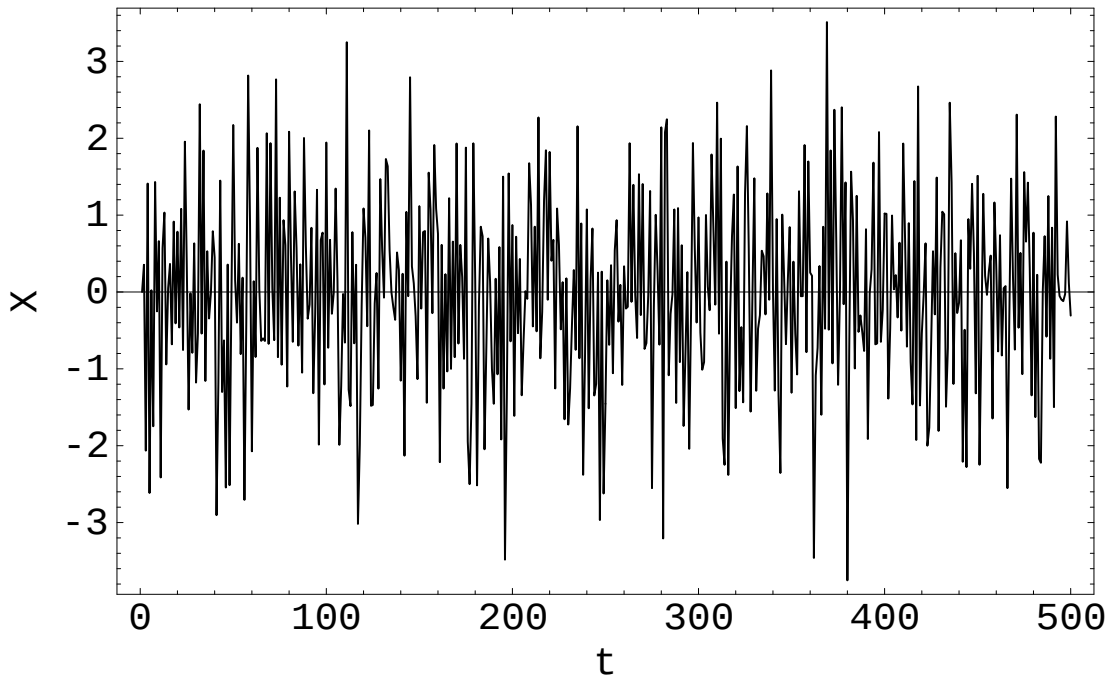
- alespoň jeden kořen polynomu $z^p - (a_1 + b_1)z^{p-1} - \cdots - (a_p + b_p)$ leží vně jednotkového kruhu;
- všechny kořeny polynomu $z^p - a_1 z^{p-1} - \cdots - a_p$ leží uvnitř jednotkového kruhu;
- platí

$$\frac{1 - \sum_{i=1}^{p} a_i}{\sum_{i=1}^{p} b_i} \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty).$$

Aplikaci na ekonomicky motivovaná data provedl například Tong [23].

2.5 Prahové modely

Prahové modely se pokoušejí vystihnout nelinearitu časové řady pomocí střídání několika různých režimů, a to nejčastěji v závislosti na dříve pozorovaných hodnotách téže časové řady, tzv. samobudicí (self-exciting) modely. Zde se budeme zabývat především prahovými autoregresními modely TAR (Threshold AutoRegressive), přesněji SETAR (Self-Excited Threshold AutoRegressive). Touto problematikou se zabývá například Tong [22] nebo Tong and Lim [24].



Obrázek 2.5: Realizace modelu SETAR(2,1,1) daného vzorci $X_t = 1 + 0.6X_{t-1} + \varepsilon_t$, když $X_{t-1} \leq 0$ a $X_t = -1 + 0.4X_{t-1} + \varepsilon_t$, když $X_{t-1} > 0$, přičemž $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}(0,1)$ a $t = 1, 2, \ldots, 500$.

Definice 2.5.1. Nechť $K \in \mathbb{N}$, nechť pro každé $i = 1, \ldots, K$ je posloupnost $\{\varepsilon_t^{(i)}\}$ striktní bílý šum a nechť pro libovolné t jsou systémy podposloupností

$$\left\{\{\varepsilon_{t+s}^{(i)}\}_{s\geq 0};\ i = 1, \ldots, K\right\} \text{ a } \left\{\{\varepsilon_{t-s}^{(i)}\}_{s>0};\ i = 1, \ldots, K\right\}$$

vzájemně nezávislé. Řekneme, že proces X_t vyhovuje modelu SETAR$(K, p_1, \ldots, p_K)$, pokud existuje posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $\{J_t\}$, s hodnotami v množině $\{1; 2; \ldots; K\}$, kde každá J_t je měřitelná vzhledem k σ-algebře generované veličinami X_s, $s < t$, a jestliže pro každé $i = 1, \ldots, K$ existují reálné konstanty $a_0^{(i)}, \ldots, a_{p_i}^{(i)}$ tak, že pro každé t platí

$$X_t = a_0^{(J_t)} + a_1^{(J_t)} X_{t-1} + \cdots + a_{p_i}^{(J_t)} X_{t-p_i} + \varepsilon_t^{(J_t)}.$$

Model SETAR$(K, p_1, \ldots, p_K)$ lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$X_t = \sum_{i=1}^{K} \left(a_0^{(i)} + \sum_{j=1}^{p_i} a_j^{(i)} X_{t-j} \right) I_{[J_t=i]},$$

kde $I_{[J_t=i]}$ je indikátor jevu $[J_t = i]$. Nejčastěji se užívají modely, kde je reálná přímka rozdělena na K podmnožin $S_1, \ldots, S_K$, nejčastěji intervalů, a

$$J_t = i \quad \Longleftrightarrow \quad X_{t-d} \in S_i, \text{ pro } i = 1, \ldots, K.$$

Parametr zpoždění $d > 0$ se v literatuře nazývá "treshold lag delay parameter".

Indikátor je nespojitý, proto se někdy nahrazuje vhodnými dostatečně hladkými spojitými funkcemi $W_i : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $i = 1, \ldots, K$, které na základě některého z předchozích pozorování určují váhy jednotlivých režimů. Takové modely se pak nazývají STAR (Smooth Threshold AutoRegressive), neboť vhodnou volbou váhových funkcí lze zajistit spojitý přechod mezi jednotlivými režimy.

2.6 CHARN

Model CHARN (Conditionally Heteroscedastic Autoregressive Non-linear) je neparametrický model předpokládající, že střední hodnota procesu a rozptyl chyb v čase t jsou časově neměnnou deterministickou funkcí pozorování z času $t - 1$. V literatuře se tímto modelem zabývají např. Bossaerts, Härdle and Hafner [3].

Definice 2.6.1. Nechť $\{\varepsilon_t\}$ je striktní bílý šum s nulovou střední hodnotou a rozptylem jedna a nechť $f(\cdot)$ a $\sigma(\cdot)$ jsou reálné funkce jedné proměnné. Řekneme, že proces $\{X_t\}$ vyhovuje modelu CHARN, jestliže pro každé t platí

$$X_t = f(X_{t-1}) + \sigma(X_{t-1})\varepsilon_t.$$

Je vidět, že $f(x)$ má význam podmíněné střední hodnoty $\mathsf{E}(X_t|X_{t-1} = x)$ a $\sigma^2(x)$ podmíněného rozptylu $\mathsf{Var}(X_t|X_{t-1} = x)$.

Kapitola 3

Odhad modelu

S výjimkou neparametrického modelu CHARN je třeba u ostatních modelů odhadnout neznámé parametry. Postupy jejich odhadu, které se nejčastěji používají, jsou především různé modifikace metody maximální věrohodnosti, metody nejmenších čtverců a také některé momentové odhady. V této práci budeme využívat především dvě prvně jmenované metody. Metody založené na věrohodnostní funkci bývají nejvíce eficientní, často však jejich použití bývá omezeno výpočetními možnostmi.

Dalším problémem, který se často řeší v souvislosti s odhadem modelu je výběr nejvhodnějšího modelu z předem dané třídy. K tomuto účelu zde budeme nejčastěji používat metodu minimalizace tzv. Akaikeho informačního kritéria (AIC), které hledá optimální model pomocí logaritmu věrohodnosti vypočtené v jednotlivých přípustných modelech penalizované počtem odhadovaných parametrů. Obecně jej lze popsat vztahem

$$AIC = -2\log(\text{ max. věrohodnostní funkce vzhledem k neznámým parametrům })+ \\ +2(\text{ počet odhadovaných parametrů }).$$

Kromě tohoto kritéria existují v literatuře i další, jejichž soupis uvádí například Tong [23].

3.1 Modely ARCH a GARCH

Modely ARCH a GARCH se v praxi nejčastěji používají k modelování heteroskedastických náhodných chyb v jiných běžně užívaných modelech jako jsou AR, MA, ARMA a další. Proto se budeme nejprve věnovat odhadu parametrů modelu AR(p) s chybami, které vyhovují modelu ARCH(q). Takovýto model budeme zkráceně značit AR(p)-ARCH(q). Přesněji řečeno předpokládáme, že máme pozorování $Y_1, \ldots, Y_N$ modelu AR(p) daného vzorcem

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + X_t,$$

kde proces $\{X_t\}$ je ARCH(q) vyhovující vztahu (2.1), tj.

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{a_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \cdots + a_q X_{t-q}^2},$$

přičemž $\{\varepsilon_t\}$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $\mathsf{N}(0,1)$.

Označme

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 X_{t-1}^2 + \cdots + a_q X_{t-q}^2. \tag{3.1}$$

Podmíněná hustota X_t při známé minulosti $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$ je normální a použijeme-li značení z části 2.1, je možné ji zapsat ve tvaru

$$f\left(x \,|\, \underline{X_{t-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_t^2}\right\}. \tag{3.2}$$

Označme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{\theta}_1 &= (\mu, \phi_1, \ldots, \phi_p)^T \\
\boldsymbol{\theta}_2 &= (a_0, a_1, \ldots, a_p)^T.
\end{aligned}$$

Pozorování $Y_1, \ldots, Y_N$ nejsou nezávislá a neznáme jejich sdruženou hustotu, nemůžeme proto použít klasickou metodu maximální věrohodnosti, která bývá nejvíce eficientní. Můžeme však využít alespoň znalosti podmíněné hustoty (3.2) a vzhledem k parametrům $\boldsymbol{\theta}$ maximalizovat pseudověrohodnostní funkci

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^{n} l_t(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^{n} \log f\left(X_t \,|\, \underline{X_{t-1}}; \boldsymbol{\theta}\right) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} \log \sigma_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t^2}{\sigma_t^2}. \tag{3.3}$$

Protože $X_t = Y_t - \mu - \phi_1 Y_{t-1} - \cdots - \phi_p Y_{t-p}$, platí

$$\frac{\partial X_t}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} = -\boldsymbol{Y}_t = (-1, -Y_{t-1}, \ldots, -Y_{t-p})^T, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial X_t}{\partial \boldsymbol{\theta}_2} = \mathbf{0}. \tag{3.5}$$

Použijeme-li navíc vzorec (3.1), dostaneme

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} = 2\sum_{j=1}^{q} a_j X_{t-j} \frac{\partial X_{t-j}}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} = -2\sum_{j=1}^{q} a_j X_{t-j} \boldsymbol{Y}_{t-j}, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \boldsymbol{\theta}_2} = \boldsymbol{Z}_t = (1, X_{t-1}^2, \ldots, X_{t-q}^2)^T. \tag{3.7}$$

Derivace t-tého sčítance v pseudověrohodnostní funkci (3.3) potom lze zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial l_t}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} = \frac{X_t \boldsymbol{Y}_t}{\sigma_t^2} - \frac{1}{\sigma_t^2}\left(\frac{X_t^2}{\sigma_t^2} - 1\right)\sum_{j=1}^{q} a_j X_{t-j} \boldsymbol{Y}_{t-j}, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial l_t}{\partial \boldsymbol{\theta}_2} = \frac{\boldsymbol{Z}_t}{2\sigma_t^2}\left(\frac{X_t^2}{\sigma_t^2} - 1\right). \tag{3.9}$$

S využitím derivací (3.8) a (3.9) je možné použít k hledání maxima pseudověrohodnostní funkce (3.3) různé iterativní algoritmy. Hafner [12] doporučuje algoritmus, který podrobně popisují Berndt, Hall, Hall and Hausman [1]. Označíme-li $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$ odhad neznámých parametrů $\boldsymbol{\theta}$ po i-té iteraci, pak $\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}$ se vypočítá podle vzorce

$$\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(i)} + \lambda_i \left[\sum_{t=1}^{N} \frac{\partial l_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\boldsymbol{\theta}^{(i)} \right) \frac{\partial l_t}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \left(\boldsymbol{\theta}^{(i)} \right) \right]^{-1} \sum_{t=1}^{N} \frac{\partial l_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\boldsymbol{\theta}^{(i)} \right),$$

kde λ_i je délka kroku.

Za předpokladu splnění jistých podmínek regularity, které ve svých pracích formulují například White [29], Gouriéroux, Monfort and Trognon [10] nebo Gouriéroux and Monfort [9], je maximálně pseudověrohodný odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ parametrů $\boldsymbol{\theta}$ silně konzistentní a asymptoticky normální. Označíme-li $\boldsymbol{\theta}_0$ skutečnou hodnotu neznámých parametrů, pak asymptotická varianční matice náhodného vektoru $\sqrt{N}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0\right)$, když $N \to \infty$, je rovna $\boldsymbol{J}^{-1}$, kde

$$\boldsymbol{J} = -\,\mathsf{E}\left[\frac{\partial^2 l_t}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \left(\boldsymbol{\theta}_0 \right) \right]$$

je Fisherova informační matice. Konzistence i asymptotická normalita tohoto maximálně pseudověrohodného odhadu je zachována i když skutečná podmíněná hustota $f\left(x \,|\, \underline{X_{t-1}}\right)$ není gaussovská. Weiss [28] ukázal, že asyptotická varianční matice náhodného vektoru $\sqrt{N}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0\right)$, když $N \to \infty$, se pak změní na $\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{J}^{-1}$, přičemž

$$\boldsymbol{I} = \mathsf{E}\left[\frac{\partial l_t}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\boldsymbol{\theta}_0 \right) \frac{\partial l_t}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \left(\boldsymbol{\theta}_0 \right) \right].$$

Engle and Gonzales-Rivera [7] však ukázali, že relativní eficience odhadů vypočtených při chybném předpokladu normality hustoty $f\left(x \,|\, \underline{X_{t-1}}\right)$ ve srovnání s odhady vypočtenými pomocí správné $f\left(x \,|\, \underline{X_{t-1}}\right)$ může být libovolně malá. Hafner [12] uvádí odvození vzorců pro výpočet $\partial l_t / \partial \boldsymbol{\theta}$ v případě, že skutečná podmíněná hustota $f\left(x \,|\, \underline{X_{t-1}}\right)$ je hustota Studentova rozdělení s $\nu > 2$ stupni volnosti. Engle and Gonzales-Rivera [7] navrhli neparametrickou proceduru odhadu hustoty $f\left(x \,|\, \underline{X_{t-1}}\right)$.

Podobným způsobem je možné postupovat i v případě, že X_t budou vyhovovat modelu GARCH(r, q), tj.

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{\sigma_t^2},$$

kde

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{r} b_j \sigma_{t-j}^2.$$

Takový model zde budeme nazývat AR(p)-GARCH(r, q). Vzorce (3.4) a (3.5) zůstanou nezměněny, vzorce (3.6) a (3.7) se změní na

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} = -2 \sum_{j=1}^{q} a_j X_{t-j} \boldsymbol{Y}_{t-j} + \sum_{j=1}^{r} b_j \frac{\partial \sigma_{t-j}^2}{\partial \boldsymbol{\theta}_1},$$
$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \boldsymbol{\theta}_2} = \boldsymbol{Z}_t^* + \sum_{j=1}^{r} b_j \frac{\partial \sigma_{t-j}^2}{\partial \boldsymbol{\theta}_2},$$

kde $\boldsymbol{Z}_t^* = (1, X_{t-1}^2, \ldots, X_{t-q}^2, \sigma_{t-1}^2, \ldots, \sigma_{t-r}^2)^T$. Po dosazení se pak odpovídajícím způsobem změní i vyjádření $\partial l_t / \partial \boldsymbol{\theta}$

$$\frac{\partial l_t}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} = \frac{X_t \boldsymbol{Y}_t}{\sigma_t^2} - \frac{1}{\sigma_t^2} \left(\frac{X_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \left(\sum_{j=1}^{q} a_j X_{t-j} \boldsymbol{Y}_{t-j} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} b_j \frac{\partial \sigma_{t-j}^2}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} \right),$$
$$\frac{\partial l_t}{\partial \boldsymbol{\theta}_2} = \frac{1}{2\sigma_t^2} \left(\boldsymbol{Z}_t^* + \sum_{j=1}^{r} b_j \frac{\partial \sigma_{t-j}^2}{\partial \boldsymbol{\theta}_2} \right) \left(\frac{X_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right).$$

Dále je při maximalizaci pseudověrohodnostní funkce (3.3) možné postupovat stejně jako u modelu AR(p)-ARCH(q). V obou případech je k provedení výpočtu na začátku nutné zvolit několik počátečních hodnot potřebných neznámých veličin. Získané maximálně pseudověrohodné odhady jsou pak konzistentní a asymptoticky normální se stejnými vlastnostmi jako u modelu AR(p)-ARCH(q).

Příklad 3.1.1. Jako příklad bylo simulováno několik modelů ARCH a GARCH a pomocí programového systému XploRe byly odhadnuty jejich parametry. Vzhledem k možnostem použitého programu XploRe byly simulované a posléze odhadované modely typu ARCH, resp. GARCH, nikoliv AR-ARCH nebo AR-GARCH. Každý uvažovaný model byl simulován 100-krát, délka každé simulace byla 500 pozorování. V tabulce 3.1 jsou uvedeny skutečné parametry jednotlivých modelů, v tabulce 3.2 jsou uvedeny průměry, směrodatné odchylky a mediány odhadů jednotlivých parametrů postupně pro všechny modely. Všude uvažujeme $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}(0, 1)$. ♢

Tabulka 3.1: Skutečné hodnoty parametrů jednotlivých simulovaných modelů, jejichž odhady jsou uvedeny v tabulce 3.2

		Parametry				
Model č.	Typ modelu	a_0	a_1	a_2	b_1	b_2
1	ARCH(1)	0.2	0.8	-	-	-
2	ARCH(1)	1.0	0.2	-	-	-
3	ARCH(2)	0.1	0.3	0.5	-	-
4	ARCH(2)	1.0	0.1	0.1	-	-
5	GARCH(1,1)	0.2	0.7	-	0.2	-
6	GARCH(1,1)	1.0	0.4	-	0.4	-
7	GARCH(2,1)	0.1	0.3	0.2	0.1	-
8	GARCH(2,1)	1.0	0.2	0.4	0.3	-
9	GARCH(2,2)	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
10	GARCH(2,2)	1.0	0.1	0.2	0.1	0.2
11	GARCH(1,2)	0.1	0.5	-	0.2	0.2
12	GARCH(1,2)	1.0	0.2	-	0.4	0.2

Tabulka 3.2: Průměry, směrodatné odchylky a mediány odhadů jednotlivých parametrů pro všechny modely, které jsou uvedeny v tabulce 3.1

Model č.		Parametry				
		a_0	a_1	a_2	b_1	b_2
1	odh.	0.1974	0.7828	-	-	-
	std.	0.0218	0.0992	-	-	-
	med.	0.1956	0.7863	-	-	-
2	odh.	0.8931	0.1739	-	-	-
	std.	0.1769	0.0701	-	-	-
	med.	0.9254	0.1765	-	-	-
3	odh.	0.0735	0.3874	0.4240	-	-
	std.	0.1015	0.1343	0.1184	-	-
	med.	0.0543	0.4125	0.4437	-	-
4	odh.	0.5875	0.1217	0.3549	-	-
	std.	0.2693	0.0582	0.1885	-	-
	med.	0.5614	0.1188	0.3540	-	-
5	odh.	0.2083	0.6856	-	0.1915	-
	std.	0.0422	0.0905	-	0.0645	-
	med.	0.2046	0.6765	-	0.1897	-
6	odh.	1.0446	0.3999	-	0.3892	-
	std.	0.3271	0.0789	-	0.1023	-
	med.	1.0232	0.3961	-	0.3799	-
7	odh.	0.0717	0.3242	0.3577	0.0375	-
	std.	0.0296	0.0963	0.1241	0.0862	-
	med.	0.0652	0.3271	0.3727	0.0003	-
8	odh.	0.8487	0.3535	0.5008	0.0317	-
	std.	0.5327	0.1057	0.1384	0.0761	-
	med.	0.6791	0.3540	0.5326	0.0000	-
9	odh.	0.4528	0.1521	0.1629	0.1913	0.1625
	std.	0.4077	0.0719	0.0873	0.1483	0.1040
	med.	0.2131	0.1481	0.1499	0.1596	0.1662
10	odh.	1.0478	0.1025	0.1651	0.1567	0.1453
	std.	0.2880	0.0607	0.0723	0.1091	0.1174
	med.	1.0768	0.0974	0.1681	0.1557	0.1258
11	odh.	0.1338	0.4129	-	0.0295	0.4179
	std.	0.1625	0.1222	-	0.0682	0.1216
	med.	0.0989	0.4247	-	0.0004	0.4412
12	odh.	1.8054	0.1752	-	0.0632	0.3971
	std.	1.0303	0.0688	-	0.0754	0.2525
	med.	1.6878	0.1753	-	0.0274	0.4253

3.2 Bilineární modely

Uvažujme bilineární model typu BL$(p, 0, r, s)$, tj. bez MA části, který je podle definice 2.3.1 daný vzorcem

$$X_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} c_{i,j} X_{t-i}\varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t, \tag{3.10}$$

s normálně rozděleným bílým šumem $\varepsilon \sim \mathsf{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Předpokládejme navíc, že již známe správný řád modelu, tj. že známe nebo máme odhadnuté konstanty p, r a s. K odhadu neznámých parametrů modelu použijeme postup, který uvádí Priestley [19] a který je založen na metodě maximální věrohodnosti.

Mějme k dispozici pozorování $X_1, \ldots, X_N$, označme $M = \max\{p, r, s\}$. Dále označme $\boldsymbol{\theta}$ vektor neznámých parametrů

$$\boldsymbol{\theta} = (a_0, a_1, \ldots, a_p, c_{1,1}, c_{1,2}, \ldots, c_{r,s})^T,$$

pro zjednodušení budeme prvky vektoru $\boldsymbol{\theta}$ nazývat $\theta_1, \ldots, \theta_K$ a to v pořadí, v jakém jsou seřazeny ve vektoru $\boldsymbol{\theta}$ dimenze $K = p + rs + 1$. Sdružená hustota vektoru $(\varepsilon_{M+1}, \ldots, \varepsilon_N)^T$, která zároveň reprezentuje hodnotu věrohodnostní funkce příslušející pevné hodnotě parametrického vektoru $\boldsymbol{\theta}$, je rovna

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right)^{-\frac{N-M}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=M+1}^{N}\varepsilon_t^2\right\}. \tag{3.11}$$

Protože je k výpočtu $L(\boldsymbol{\theta})$ nutno znát nebo zvolit i několik počátečních hodnot e_M, $e_{M-1}, \ldots, e_{M+1-s}$ bílého šumu $\varepsilon_M, \varepsilon_{M-1}, \ldots, \varepsilon_{M+1-s}$, nazývá se v literatuře tato metoda nejčastěji podmíněná metoda maximální věrohodnosti. Není-li uvažovaný model invertibilní, je třeba $e_M, e_{M-1}, \ldots, e_{M+1-s}$ zahrnout mezi neznámé parametry a prováděr maximalizaci funkce $L(\boldsymbol{\theta})$ i vzhledem k těmto novým parametrům. Ověření invertibility bilineárního modelu je komplikované a některé postačující podmínky, které musí model splňovat uvádí například Tong [23].

Dále předpokládejme, že uvažovaný model (3.10) je invertibilní. Funkce $L(\boldsymbol{\theta})$ nabývá maxima, pokud je součet

$$S(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=M+1}^{N}\varepsilon_t^2$$

minimální. K minimalizaci $S(\boldsymbol{\theta})$ lze použít standardní numerické minimalizační procedury, jejichž aplikaci na odhad parametrů bilineárního modelu uvádí Subba Rao [21] nebo Priestley [19]. Doporučován je Newtonův-Raphsonův iterativní algoritmus, ve kterém je

$$\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(i)} - \boldsymbol{H}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}^{(i)}\right)\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{\theta}^{(i)}\right),$$

přičemž

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\theta}},$$
$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial^2 S}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T}.$$

Označíme-li

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} S(\boldsymbol{\theta}),$$

pak odhad $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ rozptylu bílého šumu σ_ε^2 definujeme jako

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N-M} S(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{N-M} \sum_{t=M+1}^{N} \hat{e}_t^2,$$

kde $\hat{e}_t$ jsou rezidua vypočtená z hodnot $X_1, \ldots, X_N$ a $e_M, e_{M-1}, \ldots, e_{M+1-s}$ pomocí odhadnutých parametrů $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Při volbě neznámého řádu modelu většina používaných kritérií zohledňuje reziduální součet čtverců $S(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ a počet parametrů modelu, které je nutno odhadovat. Asi nejpoužívanější je Akaikeho informační kritérium (AIC), jehož hodnota pro výše uvedený odhadnutý bilineární model $\mathrm{BL}(p, 0, r, s)$ je

$$AIC = (N - M) \log \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + 2K,$$

kde $K = p + rs + 1$. Pokud je uvažovaný řád modelu malý, je možné projít všechny přípustné kombinace p, r a s, pro každou odhadnout parametry a vypočítat hodnotu AIC. Za optimální model pak považujeme ten, pro nejž nabývá AIC svého minima.

Příklad 3.2.1. Jako příklad byl simulován model (2.2) z příkladu 2.3.2 s $r = 2$ a $s = 1$, tj.

$$X_t = \varepsilon_t + c_{2,1} X_{t-2} \varepsilon_{t-1},$$

kde $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}(0, 1)$. Pro každou z devíti různých hodnot parametru $c_{2,1}$ bylo provedeno 100 simulací časové řady X_t dlouhých vždy $N = 500$ pozorování. Pro každou ze simulovaných řad byl za předpokladu, že známe skutečný tvar modelu, vypočten odhad $\hat{c}_{2,1}$ neznámého parametru $c_{2,1}$ a odhad $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ rozptylu bílého šumu σ_ε^2. Věrohodnostní funkce byla maximalizována přes

$$c_{2,1} \in \left\{ \frac{k}{100} \,:\, 0 \le k \le 100 \right\}.$$

Průměry, směrodatné odchylky a mediány těchto odhadů jsou uvedeny v tabulce 3.3. Z tabulky vidět, že přesnost odhadů se výrazně snižuje, když se skutečná hodnota parametru blíží k jedničce. Tento jev je nejspíš způsoben výpočtem e_t při nepřesných počátečních hodnotách, kdy vliv počáteční chyby je tím slabší, čím menší je absolutní hodnota parametru $c_{2,1}$. ♢

Tabulka 3.3: Skutečné hodnoty parametru $c_{2,1}$, průměry, směrodatné odchylky a mediány jeho odhadů a odhadů rozptylu bílého šumu pro model $X_t = \varepsilon_t + c_{2,1}X_{t-2}\varepsilon_{t-1}$, kde $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}(0,1)$.

Skut. par.						
$c_{2,1}$	$\hat{c}_{2,1}$	std.	med.	$\hat{\sigma}^2_\varepsilon$	std.	med.
0.1	0.1046	0.0434	0.105	0.9966	0.0614	0.9968
0.2	0.1928	0.0410	0.190	0.9970	0.0634	1.0009
0.3	0.2990	0.0351	0.300	0.9899	0.0565	0.9865
0.4	0.4027	0.0329	0.400	0.9858	0.0651	0.9841
0.5	0.4960	0.0343	0.500	1.0045	0.0569	1.0019
0.6	0.5944	0.0519	0.600	1.0018	0.1302	0.9887
0.7	0.6814	0.0748	0.700	1.0261	0.1128	1.0006
0.8	0.7406	0.1813	0.800	1.1946	0.6462	1.0178
0.9	0.6029	0.3923	0.900	6.2916	16.9163	1.0903

3.3 Model EXPAR

Uvažujme poněkud zjednodušený model EXPAR(p) předem známého řádu p, kde oproti vzorci (2.3) z definice 2.4.1 je $d = 1$ a $c_i = c$ pro všechna i, tj.

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \left(a_i + b_i \exp\{-cX_{t-1}^2\}\right) X_{t-i} + \varepsilon_t. \tag{3.12}$$

Mějme k dispozici pozorování $X_1, \ldots, X_N$. Nejprve podle dostupných výpočetních možností a požadované přesnosti odhadu určíme přiměřené $K \in \mathbb{N}$ a zvolíme síť přípustných hodnot

$$C = \{c^{(k)} \,:\, k = 1, \ldots, K\}$$

parametru c tak, aby hodnoty $\exp\{-c^{(k)}X_t^2\}$ co nejlépe pokrývaly interval (0,1). Pro každé pevně zvolené $c^{(i)} \in C$ provedeme regeresi X_t na regresory

$$\boldsymbol{Y}_t = \left(X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}, X_{t-1}\exp\{-c^{(k)}X_{t-1}^2\}, \ldots, X_{t-p}\exp\{-c^{(k)}X_{t-1}^2\}\right).$$

Označíme $\boldsymbol{X} = (X_{p+1}, X_{p+2}, \ldots, X_N)^T$ a regresní matici

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_{p+1} \\ \boldsymbol{Y}_{p+2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Y}_N \end{pmatrix}$$

a vypočteme rezidua modelu podle vzorce

$$\boldsymbol{e}^{(k)} = \begin{pmatrix} e_{p+1}^{(k)} \\ e_{p+2}^{(k)} \\ \vdots \\ e_{N}^{(k)} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{I}_{N-p} - \boldsymbol{P}_Y)\, \boldsymbol{X},$$

kde $\boldsymbol{I}_{N-p}$ je jednotková matice řádu $N-p$ a $\boldsymbol{P}_Y$ je projekční matice

$$\boldsymbol{P}_Y = \boldsymbol{Y} \left(\boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{Y}\right)^{-1} \boldsymbol{Y}^T.$$

Pomocí vypočtených reziduí dostaneme odhad rozptylu bílého šumu

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N-p} \sum_{t=p+1}^{N} {e_t^{(k)}}^2$$

a získáme i hodnotu Akaikeho informačního kritéria příslušející parametru $c^{(k)}$ jako

$$AIC(k) = (N-p) \log \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + 4p.$$

Jako odhad $\hat{c}$ vybereme

$$\hat{c} = \arg \min_{c^{(k)} \in C} AIC(k)$$

a odhady ostatních parametrů $\hat{\boldsymbol{a}} = (a_1, \ldots, a_p)^T$ a $\hat{\boldsymbol{b}} = (b_1, \ldots, b_p)^T$ jsou dány vzorcem

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{a}} \\ \hat{\boldsymbol{b}} \end{pmatrix} = \left(\hat{\boldsymbol{Y}}^T \hat{\boldsymbol{Y}}\right)^{-1} \hat{\boldsymbol{Y}}^T \boldsymbol{X},$$

kde v matici $\hat{\boldsymbol{Y}}$ je použit odhad $\hat{c}$ parametru c. Postup výběru optimálního modelu pomocí AIC lze rozšířit i na výběr optimálního řádu $\hat{p}$, případně i na odhad parametru d, úlohu to však značně výpočetně komplikuje.

Příklad 3.3.1. Jako příklad byl simulován model EXPAR(1) daný vzorcem

$$X_t = \left(a + b \exp\{-cX_{t-1}^2\}\right) X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

kde $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}(0,1)$. Pro každou z dvaceti různých dvojic hodnot parametrů (a, b) bylo provedeno 100 simulací časové řady X_t o délce $N = 450$ pozorování. Pro každou ze simulovaných řad byl za předpokladu, že známe skutečný tvar modelu, vypočten odhad $\hat{c}$ neznámého parametru c. Množina C byla zvolena jako

$$C = \left\{ \frac{k}{10} \,:\, 5 \le k \le 15 \right\}.$$

Pro optimální hodnotu $\hat{c}$ byly pak vypočteny odhady $\hat{a}$ a $\hat{b}$ parametrů a a b a odhad $\hat{\sigma}^2_\varepsilon$ rozptylu bílého šumu σ^2_ε. Průměry, směrodatné odchylky a mediány těchto odhadů jsou uvedeny v tabulce 3.4. Z tabulky vidět, že přesnost odhadů je velice uspokojivá u $\hat{a}$ a $\hat{\sigma^2_\varepsilon}$, odhady zbylých dvou parametrů vykazují o něco vyšší variabilitu, průměry a mediány vycházejí blízko skutečných hodnot. ♢

Tabulka 3.4: Skutečné hodnoty parametrů a a b průměry, směrodatné odchylky a mediány jejich odhadů a odhadů rozptylu bílého šumu pro model $X_t = \left(a + b\exp\{-cX^2_{t-1}\}\right) X_{t-1} + \varepsilon_t$, kde $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}(0,1)$. Parametr $c = 1$ ve všech zkoumaných modelech.

Skut. par.							
a	b	$\hat{c}$	std.	med.	$\hat{a}$	std.	med.
-0.9	-0.2	0.956	0.4091	0.90	-0.8929	0.0240	-0.8954
-0.9	-1.0	1.007	0.3261	0.95	-0.8930	0.0187	-0.8920
-0.9	-1.5	0.962	0.2681	0.90	-0.8946	0.0212	-0.8943
-0.5	-0.6	1.007	0.3796	0.90	-0.4823	0.0462	-0.4841
-0.5	-1.0	1.028	0.3318	1.00	-0.4887	0.0501	-0.4889
-0.5	-1.5	1.008	0.2541	0.90	-0.4889	0.0531	-0.4966
-0.1	-1.0	1.038	0.3504	1.00	-0.0833	0.0690	-0.0909
-0.1	-1.5	1.006	0.2550	1.00	-0.0827	0.0684	-0.0817
-0.1	-2.0	1.0	0.2137	1.00	-0.0890	0.0672	-0.0840
0.1	0.1	0.953	0.4455	0.80	0.0888	0.0728	0.0825
0.1	0.5	0.984	0.4366	0.90	0.0829	0.0751	0.0865
0.1	0.9	1.03	0.3317	1.00	0.0945	0.0682	0.0972
0.5	-2.0	1.046	0.1940	1.05	0.4880	0.0670	0.4935
0.5	0.1	1.056	0.4672	1.30	0.4942	0.0543	0.5052
0.5	0.5	1.016	0.4133	0.90	0.4908	0.0523	0.4893
0.5	0.9	1.017	0.3402	1.00	0.4819	0.0499	0.4848
0.9	0.1	0.94	0.4533	0.80	0.8943	0.0239	0.8958
0.9	0.5	1.011	0.3990	1.00	0.8916	0.0229	0.8926
0.9	0.9	0.938	0.3518	0.85	0.8939	0.0230	0.8946
0.9	-2.0	1.041	0.1902	1.00	0.8926	0.0314	0.8974

Tabulka 3.4–pokračování.

Skut. par.							
a	b	$\hat{b}$	std.	med.	$\hat{\sigma_\varepsilon^2}$	std.	med.
-0.9	-0.2	-0.2497	0.2745	-0.2259	0.9878	0.0554	0.9801
-0.9	-1.0	-1.0143	0.3132	-0.9566	0.9782	0.0644	0.9800
-0.9	-1.5	-1.4360	0.4099	-1.4504	0.9911	0.0661	0.9863
-0.5	-0.6	-0.7010	0.2500	-0.7032	0.9940	0.0624	0.9973
-0.5	-1.0	-1.0199	0.2767	-1.0059	0.9843	0.0635	0.9894
-0.5	-1.5	-1.4977	0.2664	-1.4770	1.0057	0.0720	1.0095
-0.1	-1.0	-1.0393	0.2168	-1.0347	0.9933	0.0688	0.9816
-0.1	-1.5	-1.5417	0.2707	-1.5682	0.9818	0.0722	0.9782
-0.1	-2.0	-2.0213	0.2689	-2.0011	0.9865	0.0626	0.9856
0.1	0.1	0.1176	0.2561	0.1428	0.9999	0.0629	0.9973
0.1	0.5	0.5153	0.2045	0.5084	1.0089	0.0679	1.0072
0.1	0.9	0.9339	0.2201	0.9048	0.9882	0.0686	0.9776
0.5	-2.0	-2.0398	0.2612	-2.0316	1.0035	0.0680	0.9987
0.5	0.1	0.1231	0.2230	0.1287	0.9892	0.0800	0.9894
0.5	0.5	0.5070	0.2128	0.4947	0.9984	0.0593	0.9918
0.5	0.9	0.9435	0.2331	0.9459	1.0000	0.0652	0.9980
0.9	0.1	0.1261	0.2472	0.1410	0.9940	0.0736	0.9917
0.9	0.5	0.5655	0.2836	0.5581	0.9980	0.0684	0.9975
0.9	0.9	0.9159	0.3596	0.8415	1.0007	0.0650	0.9999
0.9	-2.0	-2.0341	0.2974	-2.0544	0.9931	0.0704	0.9873

3.4 Model SETAR

Předpokládejme, že máme dána pozorování $X_1, \ldots, X_N$ časové řady vyhovující modelu SETAR(2,p_1, p_2) určeného vzorcem

$$X_t = \begin{cases} a_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{p_1} a_i^{(1)} X_{t-i} + \varepsilon_t, & \text{když } X_{t-d} > c; \\ a_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{p_2} a_i^{(2)} X_{t-i} + \varepsilon_t, & \text{když } X_{t-d} \leq c. \end{cases} \tag{3.13}$$

Určíme $D \in \mathbb{N}$, maximální zkoumanou velikost parametru časového zpoždění d. Podle dostupných výpočetních možností a požadované přesnosti odhadu určíme přiměřené $K \in \mathbb{N}$ a pevně zvolíme množinu možných prahů $C = \{c_1, \ldots, c_K\}$, nejčastěji se jako prvky množiny C volí některé výběrové percentily posloupnosti $\{X_t\}$. Dále určíme maximální zkoumaný řád autoregrese P. Pro každý pevně zvolený parametr časového posunu $d \in \{1, 2, \ldots, D\}$, každou pevně zvolenou hodnota prahu $c \in C$ zvlášť v každé podskupině najdeme pomocí Akaikeho informačního kritéria optimální řády $\hat{p}_1$ a $\hat{p}_2$ obou autoregresních podmodelů. Optimální hodnoty AIC označme $AIC(\hat{p}_1)$ a $AIC(\hat{p}_2)$. Položíme

$$AIC(d, c) = AIC(\hat{p}_1) + AIC(\hat{p}_2) = (N - p^*) \log \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + 2(\hat{p}_1 + \hat{p}_2),$$

přičemž $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ je odhad rozptylu šumu vypočtený pomocí reziduí odhadnutého modelu a $N - p^*$ je počet reziduí, která je možné vypočítat. Platí $d \leq p^*$ a $p^* \leq \max\{d, \hat{p}_1, \hat{p}_2\}$, přesná hodnota p^* závisí na aktuálním rozčlenění počátečních pozorování do skupin odpovídajících jednotlivým podmodelům. Dále definujeme

$$\hat{c} = \arg\min_{c \in C} AIC(d, c)$$

a položíme

$$AIC(d) = AIC(d, \hat{c}).$$

V posledním kroku pak definujeme odhad parametru časového posunu

$$\hat{d} = \arg\min_{d \in \{1,2,\ldots,D\}} AIC(d).$$

Příklad 3.4.1. Jako příklad byl simulován model SETAR(2,1,1) daný vzorcem

$$X_t = \begin{cases} a_0^{(1)} + a_1^{(1)} X_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{když } X_{t-1} \leq c; \\ a_0^{(2)} + a_1^{(2)} X_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{když } X_{t-1} > c. \end{cases} \tag{3.14}$$

kde $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}(0, 1)$ a $c = 0$. Pro každou z 36 různých pevně zvolených čtveřic hodnot parametrů $\left(a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, a_0^{(2)}, a_1^{(2)}\right)$ bylo provedeno 100 simulací časové řady X_t dlouhých vždy $N = 500$ pozorování. Pro každou ze simulovaných řad byl za předpokladu, že známe

skutečný řád obou podmodelů, vypočten odhad $\hat{c}$ neznámého parametru c. Množina C byla zvolena jako

$$C = \left\{ \frac{1}{2} \left(X_{(25k)} + X_{(25k+1)} \right) \, : \, 1 \leq k \leq 20 \right\},$$

kde $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(500)}$ jsou podle velikosti seřazené hodnoty vygenerované řady. Pro optimální hodnotu $\hat{c}$ pak byly metodou nejmenších čtverců vypočteny odhady $\hat{a}_0^{(1)}$, $\hat{a}_1^{(1)}$, $\hat{a}_0^{(2)}$ a $\hat{a}_1^{(2)}$, parametrů $a_0^{(1)}$, $a_1^{(1)}$, $a_0^{(2)}$ a $a_1^{(2)}$ a odhad $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ rozptylu bílého šumu σ_ε^2. Průměry, směrodatné odchylky a mediány těchto odhadů jsou uvedeny v tabulce 3.5. $\diamondsuit$

Tabulka 3.5: Skutečné hodnoty parametrů $a_0^{(1)}$, $a_1^{(1)}$, $a_0^{(2)}$ a $a_1^{(2)}$, průměry, směrodatné odchylky a mediány jejich odhadů a odhadů rozptylu bílého šumu pro model SETAR(2,1,1) daný vzorcem (3.14). Prahový parametr je u všech zkoumaných modelů $c = 0$.

Skut. par.									
$a_0^{(1)}$	$a_1^{(1)}$	$a_0^{(2)}$	$a_1^{(2)}$	$\hat{a}_0^{(1)}$	std.	med.	$\hat{a}_1^{(1)}$	std.	med.
1	0.75	1	0.7	1.0369	0.1984	1.0316	0.7052	0.1872	0.7025
1	0.75	1	-0.2	0.9147	0.2922	0.9037	0.6703	0.2492	0.6873
1	0.75	1	-0.9	0.9800	0.1460	0.9615	0.7385	0.1192	0.9616
1	0.2	1	0.7	1.1283	0.2370	1.0837	0.5623	0.2620	0.6731
1	0.2	1	-0.2	0.9726	0.5353	0.9231	0.1671	0.4090	0.1065
1	0.2	1	-0.9	0.9780	0.1452	0.9777	0.1975	0.1215	0.1990
1	-0.75	1	0.7	1.2332	0.2494	1.2228	0.4255	0.4176	0.5707
1	-0.75	1	-0.2	1.0216	0.4135	1.0703	-0.6921	0.4032	-0.6342
1	-0.75	1	-0.9	0.9233	0.4541	0.9208	-0.7855	0.1550	-0.7977
1	0.75	-1	0.7	0.9574	0.1327	0.9615	0.7159	0.1140	0.7050
1	0.75	-1	-0.2	0.9512	0.1390	0.9360	0.7150	0.0853	0.7111
1	0.75	-1	-0.9	0.9822	0.1058	0.9874	0.7476	0.0568	0.7477
1	0.2	-1	0.7	0.9010	0.1581	0.8951	0.1224	0.1227	0.1347
1	0.2	-1	-0.2	0.8890	0.1327	0.8786	0.1364	0.0855	0.1347
1	0.2	-1	-0.9	0.9827	0.1275	0.9927	0.1913	0.0552	0.1929
1	-0.75	-1	0.7	0.9666	0.1498	0.9921	-0.7710	0.1313	-0.7641
1	-0.75	-1	-0.2	0.8053	0.1357	0.8172	-0.8484	0.0711	-0.8566
1	-0.75	-1	-0.9	1.0302	0.2285	1.0266	-0.7426	0.0415	-0.7447
-1	0.75	1	0.7	-0.9696	1.3153	-0.9251	0.7572	0.1954	0.7601
-1	0.75	1	-0.2	-1.4234	1.4979	-1.0779	0.6842	0.2128	0.7328
-1	0.75	1	-0.9	-1.3172	1.3026	-1.0935	0.6954	0.1958	0.7252
-1	0.2	1	0.7	-0.0779	0.8989	0.0417	0.6066	0.4452	0.6310
-1	0.2	1	-0.2	-0.9497	0.1207	-0.9479	0.2276	0.0738	0.2340
-1	0.2	1	-0.9	-0.9691	0.1270	-0.9896	0.2134	0.0722	0.2122
-1	-0.75	1	0.7	0.7089	0.4343	0.7891	0.5933	0.3777	0.6990
-1	-0.75	1	-0.2	-0.9207	0.1615	-0.9281	-0.6973	0.1317	-0.7118
-1	-0.75	1	-0.9	-0.9313	0.1295	-0.9434	-0.6912	0.1081	-0.6933
-1	0.75	-1	0.7	-1.6537	2.2135	-1.0830	0.6483	0.3161	0.7272
-1	0.75	-1	-0.2	-1.2033	1.8560	-1.1370	0.7142	0.2655	0.7256
-1	0.75	-1	-0.9	-1.1922	1.2978	-1.1199	0.7106	0.1912	0.7228
-1	0.2	-1	0.7	-0.8277	0.6529	-0.8829	0.2595	0.2064	0.2525
-1	0.2	-1	-0.2	-1.1117	1.2523	-1.0740	0.1616	0.3846	0.1702
-1	0.2	-1	-0.9	-0.9707	0.5428	-1.0179	0.2039	0.1748	0.1904
-1	-0.75	-1	0.7	-0.9543	0.1271	-0.9618	-0.7117	0.0971	-0.7054
-1	-0.75	-1	-0.2	-0.9581	0.1902	-0.9605	-0.7310	0.1063	-0.7319
-1	-0.75	-1	-0.9	-1.0514	0.7560	-1.0395	-0.7683	0.1962	-0.7656

Tabulka 3.5–pokračování.

Skut. par.									
$a_0^{(1)}$	$a_1^{(1)}$	$a_0^{(2)}$	$a_1^{(2)}$	$\hat{a}_0^{(2)}$	std.	med.	$\hat{a}_1^{(2)}$	std.	med.
1	0.75	1	0.7	1.496	1.8337	1.1456	0.6222	0.2943	0.6819
1	0.75	1	-0.2	0.9226	0.3289	0.6668	-0.1616	0.1456	-0.1784
1	0.75	1	-0.9	-0.8792	0.0907	-0.8700	-0.9919	0.0696	-0.8700
1	0.2	1	0.7	1.1848	1.7999	1.1370	0.6628	0.2997	0.6749
1	0.2	1	-0.2	0.7793	0.7099	0.9053	-0.1104	0.2521	-0.1514
1	0.2	1	-0.9	0.9722	0.1008	0.9525	-0.8871	0.0759	-0.8771
1	-0.75	1	0.7	1.1622	1.0275	1.0746	0.6679	0.1748	0.6750
1	-0.75	1	-0.2	1.1018	0.5297	1.0222	-0.2360	0.1875	-0.2167
1	-0.75	1	-0.9	0.7609	1.0472	0.9055	-0.8284	0.2596	-0.8639
1	0.75	-1	0.7	-0.9198	0.1457	-0.9081	0.6467	0.1220	0.6402
1	0.75	-1	-0.2	-0.8744	0.1763	-0.8861	-0.2832	0.1300	-0.2930
1	0.75	-1	-0.9	-0.8303	0.1647	-0.8150	-1.0186	0.1442	-1.0235
1	0.2	-1	0.7	-0.9501	0.1454	-0.9610	0.6706	0.0974	0.6638
1	0.2	-1	-0.2	-0.9690	0.1659	-0.9925	-0.2199	0.1217	-0.2100
1	0.2	-1	-0.9	-0.8689	0.1437	-0.8672	-0.9869	0.1074	-0.9860
1	-0.75	-1	0.7	-0.9489	0.1099	-0.9483	0.6722	0.0667	0.6756
1	-0.75	-1	-0.2	-1.0434	0.1425	-1.0634	-0.1711	0.0518	-0.1736
1	-0.75	-1	-0.9	-1.0178	0.2379	-1.0035	-0.8969	0.0402	-0.8986
-1	0.75	1	0.7	0.2885	0.9009	0.6451	0.7775	0.1904	0.7470
-1	0.75	1	-0.2	-0.6659	0.6690	-0.7938	0.7283	0.3308	0.7798
-1	0.75	1	-0.9	-0.9517	0.4234	-0.9531	0.6858	0.2683	0.7239
-1	0.2	1	0.7	0.9179	0.6428	0.9343	0.7176	0.1063	0.7150
-1	0.2	1	-0.2	0.8894	0.2147	0.9411	-0.1297	0.1428	-0.1353
-1	0.2	1	-0.9	0.8815	0.2370	0.8936	-0.8084	0.2037	-0.7931
-1	-0.75	1	0.7	1.0030	1.1215	0.9903	0.6948	0.1893	0.6971
-1	-0.75	1	-0.2	0.9416	0.1317	0.9560	-0.1694	0.0956	-0.1770
-1	-0.75	1	-0.9	0.9417	0.1359	0.9636	-0.8610	0.1128	-0.8670
-1	0.75	-1	0.7	-1.0907	0.3599	-1.0643	0.6710	0.3181	0.7070
-1	0.75	-1	-0.2	-1.1930	0.3190	-1.1649	0.6366	0.2260	0.7126
-1	0.75	-1	-0.9	-1.2868	0.4172	-1.2484	0.5271	0.3515	0.6123
-1	0.2	-1	0.7	-0.9224	0.3937	-0.8884	0.5696	0.3876	0.5100
-1	0.2	-1	-0.2	-1.0476	0.3207	-1.0822	-0.0919	0.4118	0.0338
-1	0.2	-1	-0.9	-1.0586	0.4022	-1.0663	-0.8405	0.5089	-0.8051
-1	-0.75	-1	0.7	-0.9603	0.1447	-0.9651	0.6637	0.1278	0.6732
-1	-0.75	-1	-0.2	-0.9247	0.2878	-0.9564	-0.2316	0.1723	-0.2228
-1	-0.75	-1	-0.9	-1.2008	0.5850	-1.0996	-0.7959	0.2393	-0.8323

Tabulka 3.5–pokračování.

Skut. par.									
$a_0^{(1)}$	$a_1^{(1)}$	$a_0^{(2)}$	$a_1^{(2)}$	$\hat{c}$	std.	med.	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	std.	med.
1	0.75	1	0.7	3.6075	1.3891	3.6392	0.9776	0.0532	0.9772
1	0.75	1	-0.2	0.1166	0.5291	0.0456	0.9888	0.0582	0.9894
1	0.75	1	-0.9	-0.0332	0.2459	-0.0101	0.9920	0.0696	0.9905
1	0.2	1	0.7	3.3411	1.3517	3.3640	0.9791	0.0640	0.9790
1	0.2	1	-0.2	0.5131	0.8683	0.3781	0.9873	0.0605	0.9807
1	0.2	1	-0.9	-0.0122	0.2926	-0.0270	0.9845	0.0598	0.9875
1	-0.75	1	0.7	2.636	1.3704	2.4405	0.9882	0.0698	0.9822
1	-0.75	1	-0.2	0.3563	0.8253	0.2216	0.9926	0.0592	0.9894
1	-0.75	1	-0.9	0.3470	1.5807	0.3705	0.9760	0.0586	0.9787
1	0.75	-1	0.7	-0.0059	0.0485	-0.0138	1.0340	0.0704	1.0368
1	0.75	-1	-0.2	-0.0136	0.0607	-0.0251	1.0403	0.0660	1.0355
1	0.75	-1	-0.9	-0.0293	0.0702	-0.0478	1.0325	0.0625	1.0365
1	0.2	-1	0.7	0.0075	0.0592	0.0140	1.0414	0.0701	1.0420
1	0.2	-1	-0.2	0.0120	0.0850	0.0433	1.0464	0.0738	1.0387
1	0.2	-1	-0.9	-0.0402	0.0659	-0.0447	1.0264	0.0805	1.0243
1	-0.75	-1	0.7	-0.0024	0.0541	-0.0103	1.0163	0.0685	1.0078
1	-0.75	-1	-0.2	0.1188	0.0766	0.1307	1.0197	0.0695	1.0153
1	-0.75	-1	-0.9	-0.0057	0.2998	-0.0154	0.9878	0.0630	0.9788
-1	0.75	1	0.7	-1.0868	2.2448	-0.6896	1.0109	0.0638	1.005
-1	0.75	1	-0.2	-3.2545	1.9783	-3.3531	1.0106	0.0630	1.0136
-1	0.75	1	-0.9	-3.4235	1.4739	-3.5281	0.9945	0.0645	0.9958
-1	0.2	1	0.7	0.9906	1.5048	0.5751	1.0052	0.0757	0.9927
-1	0.2	1	-0.2	-0.0081	0.0819	-0.0077	1.0270	0.0716	1.0287
-1	0.2	1	-0.9	-0.0048	0.0872	-0.0122	1.0410	0.0723	1.0401
-1	-0.75	1	0.7	2.2327	1.5249	2.4710	1.0129	0.0708	1.0080
-1	-0.75	1	-0.2	0.0004	0.0580	0.0070	1.0466	0.0704	1.0373
-1	-0.75	1	-0.9	0.0066	0.0461	0.0061	1.0205	0.0675	1.0193
-1	0.75	-1	0.7	-3.7232	1.6139	-3.5825	0.9829	0.0649	0.9924
-1	0.75	-1	-0.2	-3.9300	1.5126	-3.9259	0.9872	0.0655	0.9889
-1	0.75	-1	-0.9	-3.4952	1.5413	-3.3067	0.9865	0.0643	0.9811
-1	0.2	-1	0.7	-0.7134	0.8889	-0.6155	0.9916	0.0719	0.9929
-1	0.2	-1	-0.2	-1.0674	1.0154	-0.9606	0.9875	0.0609	0.9895
-1	0.2	-1	-0.9	-0.2905	0.5453	-0.2194	0.9803	0.0654	0.9757
-1	-0.75	-1	0.7	-0.0161	0.2489	-0.0127	0.9808	0.0655	0.9821
-1	-0.75	-1	-0.2	-0.0405	0.6638	-0.1053	0.9879	0.0634	0.9880
-1	-0.75	-1	-0.9	-0.4329	1.4823	-0.3947	0.9797	0.0626	0.9699

3.5 Model CHARN

Model CHARN definovaný v části 2.6 je neparametrický. Funkce $f(\cdot)$ má význam podmíněné střední hodnoty $\mathsf{E}(X_t|X_{t-1}=x)$ a funkce $\sigma^2(\cdot)$ má význam podmíněného rozptylu $\mathsf{Var}(X_t|X_{t-1}=x)$. Označíme-li p sdruženou hustotu vektoru (X_{t-1}, X_t), p_1 marginální hustotu veličiny X_{t-1} a q podmíněnou hustotu veličiny X_t při daném X_{t-1}, platí

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathsf{E}(X_t|X_{t-1}=x) = \int yq(y|x)\,dy \\ &= \frac{1}{p_1(x)}\int yp(x,y)\,dy \qquad (3.15) \\ \sigma^2(x) &= \mathsf{Var}(X_t|X_{t-1}=x) = \mathsf{E}\left(X_t^2|X_{t-1}=x\right) - \left[\mathsf{E}\left(X_t|X_{t-1}=x\right)\right]^2 \\ &= \frac{1}{p_1(x)}\int y^2p(x,y)\,dy - f^2(x). \qquad (3.16) \end{aligned}$$

Odhady neznámých hustot p a p_1 se získávají lokálním průměrováním pozorovaných dat. Použité váhy jednotlivých hodnot udává tzv. jádrová funkce $K(\cdot)$, což je předem zvolená spojitá omezená a symetrická nezáporná funkce splňující podmínku

$$\int K(x)\,dx = 1.$$

Jestliže je nosič funkce $K(\cdot)$ omezený, užívá se místo $K(\cdot)$ pro pevně zvolené $h>0$ funkce $K_h(\cdot) = h^{-1}K(\cdot/h)$. Takto lze do průměrování zahrnout pouze pozorování, která nejsou příliš vzdálená od hodnoty, ve které počítáme odhad neznámé funkce. Pokud navíc pro některé $q \in \mathbb{N}$ platí

$$\int x^j K(x)\,dx \begin{cases} = 0, & \text{pro } j = 1,\ldots,q-1; \\ \neq 0, & \text{pro } j = q, \end{cases}$$

říkáme, že jádrová funkce (nebo jen zkráceně jádro) je řádu q.

Předpokládejme, že máme pozorování $X_1,\ldots,X_N$ a pevně zvolenou jádrovou funkci K, která je druhého řádu a jejímž nosičem je interval [-1,1]. Dále zvolíme $h>0$, odhad hustoty p_1 potom definujeme jako

$$\hat{p}_{1,h}(x) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} K_h\left(x - X_{t-1}\right)$$

a odhad hustoty p jako

$$\hat{p}_h(x,y) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} K_h\left(x - X_{t-1}\right)K_h\left(y - X_t\right).$$

Po dosazení odhadů namísto hustot ve vzorcích (3.15) a (3.16) dostaneme vzorce pro neparametrické odhady funkcí f a σ^2

$$\hat{f}_h(x) = \frac{\sum_{t=2}^{N} K_h(x - X_{t-1}) X_t}{\sum_{t=2}^{N} K_h(x - X_{t-1})} \tag{3.17}$$

a

$$\hat{\sigma}_h^2(x) = \frac{\sum_{t=2}^{N} K_h(x - X_{t-1}) X_t^2}{\sum_{t=2}^{N} K_h(x - X_{t-1})} - \hat{f}_h^2(x).$$

Tento odhad se v literatuře nazývá Nadarayův-Watsonův podle prací Nadaraya [18] a Watson [27]. Odhad je obecně vychýlený. Velikost vychýlení se sníží, pokud snížíme h, v takovém případě se však zvýší rozptyl odhadů. Vzorce pro vychýlení a rozptyl Nadarayových-Watsonových odhadů funkcí f a σ^2 v modelu CHARN uvádí například Härdle [14]

$$\mathsf{Bias}\left(\hat{f}_h(x)\right) = \frac{h^2}{2}\left(f''(x) + 2\frac{f'(x)p_1'(x)}{p_1(x)}\right)\mu_2(K) + o\left(h^2\right) \tag{3.18}$$

$$\mathsf{Var}\left(\hat{f}_h(x)\right) = \frac{1}{Nh}\frac{\sigma^2(x)}{p_1(x)}R(K) + o\left(\frac{1}{Nh}\right), \tag{3.19}$$

kde $\mu_2 = \int y^2 K(y)\,dy$ a $R(K) = \int K^2(y)\,dy$. Je vidět, že pokud zároveň $N \to \infty$, $h \to 0$ a $Nh \to \infty$, pak je odhad $\hat{f}_h(x)$ konzistentní. Vzorce pro vychýlení a rozptyl $\hat{\sigma}_h^2(x)$ jsou podobné, viz Härdle [14]. Volbu h je možné provést tak, aby byla optimální vzhledem ke střední čtvercové odchylce odhadu, tj.

$$\mathsf{MSE} = \mathsf{Bias}^2 + \mathsf{Var}\,.$$

Ze vzorců (3.18) a (3.19) je vidět, že optimálního řádu bude dosaženo volbou $h \sim N^{-1/5}$, kdy dostaneme $\mathsf{MSE} \sim N^{-4/5}$.

Kromě MSE se používají i další míry přesnosti odhadu, jedním z nich je tzv. cross-validation (CV) kritérium dané vzorcem

$$\mathsf{CV}(h) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N}\left(X_t - \hat{f}_{h,t}(X_{t-1})\right)^2 w(X_{t-1}), \tag{3.20}$$

kde $\hat{f}_{h,t}$ je neparametrický odhad funkce f definovaný vzorcem (3.17), v němž se vynechá t-té pozorování, a kde w je váhová funkce. Jako odhad optimálního h bereme takové $\hat{h}$, které minimalizuje výraz (3.20).

Kapitola 4

Testy linearity

4.1 Test proti obecné nelineární alternativě

Předpokládejme, že $X_1, \ldots, X_N$ jsou pozorování. Budeme testovat hypotézu, že data pocházejí z procesu, který se řídí lineárním modelem AR(p), proti alternativě, že tomu tak není. Postup je následující.

- Pomocí běžně užívaných kritérií najdeme nejvhodnější řád p autoregresního modelu.
- Standardním způsobem odhadneme parametry modelu AR(p).
- Vypočteme vyrovnané hodnoty $\hat{X}_t$ a rezidua $\hat{\varepsilon}_t$ pro $t = p+1, \ldots, N$. Získaný reziduální součet čtverců označíme RSS_0.
- Zvolíme $q \geq 2$ a provedeme regresi reziduí $\hat{\varepsilon}_t$ na regresory

$$\{1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}, \hat{X}_t^2, \ldots, \hat{X}_t^q\}. \tag{4.1}$$

  Příslušný reziduální součet čtverců označíme RSS.

- Vypočteme hodnotu testové statistiky

$$F = \frac{(N-p-q)(RSS_0 - RSS)}{(q-1)RSS}, \tag{4.2}$$

  která má za předpokladu platnosti hypotézy o linearitě rozdělení $F_{q-1,N-p-q}$.

Tento test se v literatuře nazývá test Langrangeových multiplikátorů nebo též RESET (Regression Error SpEcification Test), podrobnosti uvádí Ramsey [20].

4.2 Test proti podmíněné heteroskedasticitě

Tento test se používá k testování reziduí vypočtených z už odhadnutého modelu. Předpokládáme, že $e_1, \ldots, e_N$ jsou rezidua nějakého lineárního ARMA modelu. Budeme testovat hypotézu, že jsou nezávislá a stejně rozdělená proti alternativě, že rezidua vyhovují modelu ARCH(q). Podle definice 2.1.1 platí

$$\begin{aligned} e_t &= v_t \sqrt{\sigma_t^2} \\ \sigma_t^2 &= a_0 + a_1 e_{t-1}^2 + \cdots + a_q e_{t-q}^2, \end{aligned}$$

kde $a_i \geq 0$ pro $i = 0, 1, \ldots, q$. Navíc budeme předpokládat $v_t \sim \mathsf{N}(0,1)$. Za platnosti hypotézy, že e_t jsou nezávislá a stejně rozdělená, tj. $H_0 : a_1 = a_2 = \cdots = a_q = 0$, jsou i veličiny e_t^2 nezávislé a stejně rozdělené. Tudíž také $\mathsf{Corr}(e_t^2, e_{t-k}^2) = 0$ pro $k \neq 0$ a k testování je možné použít statistiku, kterou navrhli McLeod and Li [17]

$$Q(q) = N(N+2) \sum_{k=1}^{q} \frac{r_{k,2}^2}{N-k}, \tag{4.3}$$

kde $r_{k,2}$ značí výběrový autokorelační koeficient posloupnosti $\{e_t^2\}$

$$r_{k,2} = \frac{\sum_{t=k+1}^{N} \left(e_t^2 - \overline{e^2}\right)\left(e_{t-k}^2 - \overline{e^2}\right)}{\sum_{t=1}^{N} \left(e_t^2 - \overline{e^2}\right)^2},$$

přičemž $\overline{e^2} = N^{-1} \sum_{t=1}^{N} e_t^2$. Asymptotické rozdělení statistiky $Q(q)$ je za platnosti hypotézy H_0 rozdělení χ_q^2. V literatuře se tento typ testů založený na asymptotické normalitě výběrových autokorelací nazývá Portmenteau test. Asymptoticky ekvivalentní test odvozený pomocí Langrangeových multiplikátorů navrhl Engle [6], testová statistika je

$$\lambda = N \sum_{k=1}^{q} r_{k,2}^2.$$

Zobecnění postupu na alternativu GARCH potom provedl Bollerslev [2].

Test pomocí statistiky $Q(q)$, který navrhli McLeod and Li [17] se používá také v případě, že alternativní model je bilineární.

4.3 Test proti prahovým alternativám

Předpokládejme, že $X_1, \ldots, X_N$ jsou pozorování. Budeme testovat hypotézu, že data pocházejí z procesu, který se řídí lineárním modelem AR, proti alternativě, že model má

tvar

$$X_t = \begin{cases} a_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{p_1} a_i^{(1)} X_{t-i} + \varepsilon_t, & \text{když } X_{t-d} > c; \\ a_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{p_2} a_i^{(2)} X_{t-i} + \varepsilon_t, & \text{když } X_{t-d} \leq c. \end{cases} \tag{4.4}$$

Pro zjednodušení situace budeme nejprve předpokládat, že známe hodnotu prahu c, čísla p_1 a p_2 i hodnotu parametru d. Nechť $p = \max\{p_1, p_2\}$. Bez újmy na obecnosti uvažujme příklad $p = p_1 \geq p_2 \geq 0$. Položme $a_i^{(2)} = 0$ pro $i = p_2 + 1, \ldots, p$ a definujme

$$\theta_i = a_i^{(1)}, \text{ pro } i = 0, \ldots, p, \tag{4.5}$$

$$\phi_i = a_i^{(2)} - \theta_i, \text{ pro } i = 0, \ldots, p \tag{4.6}$$

Ozname ještě $q = \max\{i : \phi_i \neq 0\}$. Model (4.4) lze nyní po provedeném přeznačení zapsat ve tvaru

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_0 + \sum_{i=1}^{p} \theta_i X_{t-i} + I\left[X_{t-d} \leq c\right] \left(\phi_0 + \sum_{i=1}^{q} \phi_i X_{t-i} \right), \tag{4.7}$$

kde $I\left[X_{t-d} \leq c\right]$ značí indikátor jevu $\left[X_{t-d} \leq c\right]$. U modelu s $p = p_2 > p_1$ je možné postupovat stejně, zamění se pouze indexy (1) a (2) v definicích nových parametrů (4.5) a (4.6) a indikátor ve vztahu (4.7) se změní na $I\left[X_{t-d} > c\right]$.

Dále předpokládejme, že všechny kořeny rovnice

$$z^p - \theta_1 z^{p-1} - \cdots - \theta_p = 0$$

leží uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině. Z hlediska praktických aplikací se doporučuje také předpokládat $d \leq p$. Jestliže je model zapsán ve tvaru (4.7), je možné nulovou hypotézu ekvivalentně vyjádřit

$$H_0 : \phi_0 = \phi_1 = \cdots = \phi_q = 0.$$

Označíme $\boldsymbol{X}_N = (X_{p+1}, X_{p+2}, \ldots, X_N)^T$,

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_p & X_{p-1} & \ldots & X_1 \\ 1 & X_{p+1} & X_p & \ldots & X_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & X_{N-1} & X_{N-2} & \ldots & X_{N-p} \end{pmatrix}$$

a

$$\boldsymbol{Y} =$$

$$\begin{pmatrix} I\left[X_{p+1-d} \leq c\right] & X_p I\left[X_{p+1-d} \leq c\right] & X_{p-1} I\left[X_{p+1-d} \leq c\right] & \ldots & X_1 I\left[X_{p+1-d} \leq c\right] \\ I\left[X_{p+2-d} \leq c\right] & X_{p+1} I\left[X_{p+2-d} \leq c\right] & X_p I\left[X_{p+2-d} \leq c\right] & \ldots & X_2 I\left[X_{p+2-d} \leq c\right] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ I\left[X_{N-d} \leq c\right] & X_{N-1} I\left[X_{N-d} \leq c\right] & X_{N-2} I\left[X_{N-d} \leq c\right] & \ldots & X_{N-p} I\left[X_{N-d} \leq c\right] \end{pmatrix}.$$

Rezidua η lineárního modelu AR(p) dostaneme jako

$$\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{I}_{N-p} - \boldsymbol{P}_X)\, \boldsymbol{X}_N,$$

kde $\boldsymbol{I}_{N-p}$ je jednotková matice řádu $N - p$ a

$$\boldsymbol{P}_X = \boldsymbol{X} \left(\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}^T$$

je projekční matice na lineární podprostor generovaný sloupci matice $\boldsymbol{X}$. Podobně projektujme sloupce matice $\boldsymbol{Y}$ a dostaneme reziduální matici

$$\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{I}_{N-p} - \boldsymbol{P}_X)\, \boldsymbol{Y}.$$

Rezidua modelu SETAR, který je dán vzorcem (4.7) dostaneme jako

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{I}_{N-p} - \boldsymbol{P}_W)\, \boldsymbol{\eta},$$

kde

$$\boldsymbol{P}_W = \boldsymbol{W} \left(\boldsymbol{W}^T \boldsymbol{W}\right)^{-1} \boldsymbol{W}^T,$$

Testuje se pomocí reziduálních součtů čtverců v obou modelech. Nechť $RSS_{AR} = \|\boldsymbol{\eta}\|^2$ je reziduální součet čtverců v modelu AR(p) a nechť $RSS_{SETAR} = \|\boldsymbol{\xi}\|^2$ je reziduální součet čtverců v modelu SETAR určeném vzorcem (4.4). Rozdíl reziduálních součtů čtverců je

$$Q = RSS_{AR} - RSS_{SETAR} = \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi}.$$

Protože matice $\boldsymbol{P}_W$ je idempotentní, je možné veličinu Q ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$Q = \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^T (\boldsymbol{I}_{N-p} - \boldsymbol{P}_W)\, \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{P}_W \boldsymbol{\eta} = \|\boldsymbol{P}_W \boldsymbol{\eta}\|^2.$$

Pokud je správně zvolený (případně známý, jak jsme výše předpokládali) práh c, má Q rozdělení χ^2_{q+1}.

Jestliže hodnotu prahu c předem neznáme, definuje se

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-p} \inf_{c \in C} RSS_{SETAR}$$

a

$$\lambda^* = \sup_{c \in C} \frac{RSS_{AR} - RSS_{SETAR}}{\hat{\sigma}^2},$$

kde $C \subset \mathbb{R}$ je omezená množina přípustných hodnot c. Takto definovaná veličina λ^* nemá žádné z běžných rozdělení, její rozdělení je však v literatuře odvozeno a kritické hodnoty lze získat například simulacemi, podrobnosti viz Chan [15] nebo Tong [23].

4.4 Simulace

Citlivost jednotlivch testů popsaných v částech 4.1-4.3 byla prozkoumána pomocí simulací. Bylo vybráno následujících osm modelů, všude uvažujeme $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}(0,1)$.

- Model č. 1 - AR(1): $X_t = 0.1X_{t-1} + \varepsilon_t$;
- Model č. 2 - AR(2): $X_t = -X_{t-1} - 0.5X_{t-2} + \varepsilon_t$;
- Model č. 3 - ARMA(1,1): $X_t = 0.9X_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$;
- Model č. 4 - ARCH(1): $X_t = \varepsilon_t\sqrt{0.2 + 0.8X_{t-1}^2}$;
- Model č. 5 - GARCH(1,1): $X_t = \varepsilon_t\sqrt{V_t}$, kde $V_t = 0.1 + 0.8V_{t-1} + 0.1X_{t-1}^2$;
- Model č. 6 - BL(0,0,2,1): $X_t = 0.9X_{t-2}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$;
- Model č. 7 - EXPAR(1): $X_t = \left(0.5 + 0.9\exp\left\{-X_{t-1}^2\right\}\right)X_{t-1} + \varepsilon_t$;
- Model č. 8 - SETAR(2,1,1): $X_t = \begin{cases} 1 + 0.6X_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{pro } X_{t-1} \leq 0; \\ -1 + 0.4X_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{pro } X_{t-1} > 0. \end{cases}$

Dále bylo vygenerováno 1000 realizací každého uvedeného modelu, délka každé byla 500 pozorování. Na každou z nich byly provedeny postupně všechny tři testy popsané v kapitole 4. Počty zamítnutí nulové hypotézy jednotlivými testy jsou shrnuty v tabulce 4.1.

Výpočty byly provedeny za předpokladu známého skutečného řádu modelu, který byl použit i jako optimální řád lineárního modelu AR v nulové hypotéze. Například u modelu ARCH(1) se testovala nulová hypotéza, že data pocházejí z modelu AR(1), u modelu BL(0,0,2,1) se testovala nulová hypotéza, že data pocházejí z modelu AR(2).

U modelu SETAR se předpokládala znalost prahu i řádu obou podmodelů. Jako alternativní model k modelu AR(p) byl u testu založeném na statistice Q z části 4.3 (třetí řádek tabulky 4.1) uvažován model SETAR(2,1,1). Pokud jako alternativní model byl zvolen SETAR(2,2,2), výsledky se ve většině případů téměř nezměnily. Výjimkou je pouze testování modelu číslo 2, při němž nulová hypotéza, že data pocházejí z modelu AR(2), která je správná, byla ve 195 případech zamítnuta ve prospěch alternativy, že data pocházejí z modelu SETAR(2,2,2). Tento výsledek je pochopitelný a koresponduje s počtem zamítnutí nulové hypotézy u modelu číslo 1 ve prospěch alternativního modelu SETAR(2,1,1). U všech testů proti prahovým alternativám byl práh pevně stanoven na hodnotu $c = 0$, aby nemusely být použity složité procedury na výpočet kritických hodnot. Toto zjednodušení však mohlo vést k menšímu počtu zamítnutí nulové hypotézy než k jakému by došlo při použití modelu SETAR s vhodnějším prahem, který by mohl dávat menší reziduální součet čtverců.

Tabulka 4.1: Počty zamítnutí nulové hypotézy testem založeným na statistice F z části 4.1 (první řádek), testem založeným na statistice $Q(10)$ z části 4.2 (druhý řádek) a testem založeným na statistice Q z části 4.3 (třetí řádek). Celkový počet simulovaných realizací každého modelu je 1000, délka každé je 500 pozorování.

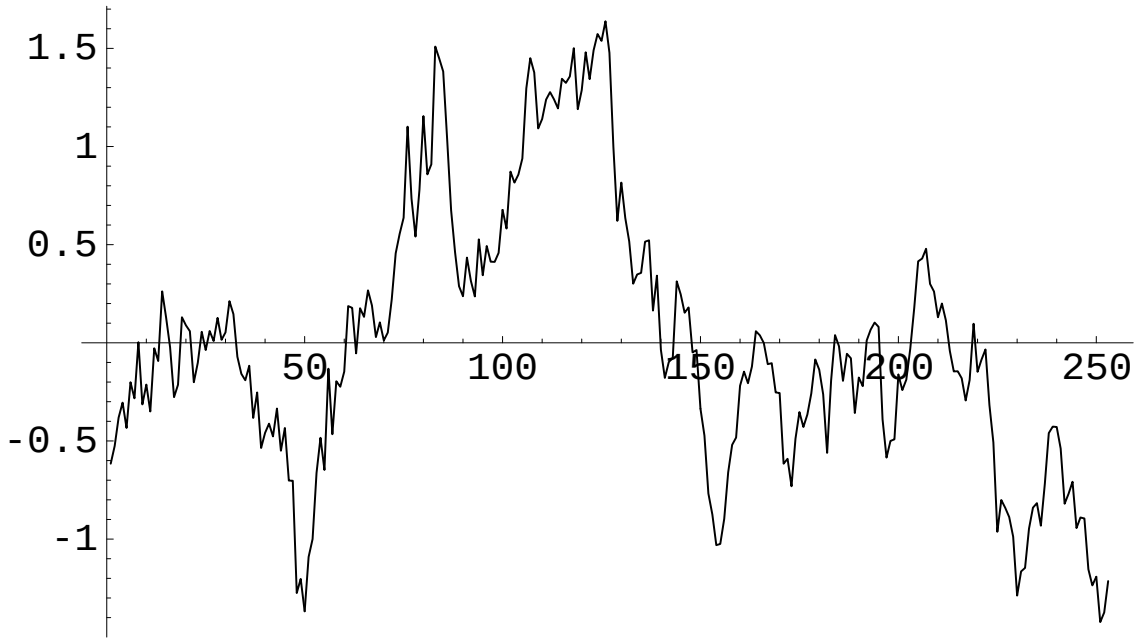
	Model č.							
test z části	1	2	3	4	5	6	7	8
4.1	0	0	0	622	7	1000	258	0
4.2	67	1000	1000	1000	980	697	996	1000
4.3	91	0	39	544	131	1000	1000	1000
nulová hyp.	AR(1)	AR(2)	AR(1)	AR(1)	AR(1)	AR(2)	AR(1)	AR(1)

Kapitola 5

Aplikace na reálná data

5.1 Popis dat a testy linearity

Byla zkoumána reálná řada kurzů britské libry (GBP) vzhledem k české koruně, které byly pozorovány v pracovních dnech roku 2005. Data byla získána z webové stránky ČNB. Před zpracováním byl od dat odečten aritmetický průměr 43.5518. Takto upravená data označíme $\{X_t\}_{t=1}^{253}$, jejich grafické znázornění je na obrázku 5.1. Poté byly provedeny testy linearity popsané v kapitole 4.



Obrázek 5.1: Pozorované kurzy GBP/Kč za rok 2005 po odečtení jejich aritmetického průměru 43.5518.

Tabulka 5.1: Hodnoty Akaikeho informačního kritéria pro různé řády p modelu AR(p) odhadnutého z řady X_t.

p	1	2	3	4	5	6	7
AIC(p)	556.9	556.3	552.9	552.5	551.7	550.1	549.1

5.1.1. *Test linearity proti obecné alternativě.* Nejprve byl proveden test hypotézy H_0, že data pocházejí z lineárního modelu AR(p), proti obecné alternativě, že tomu tak není. Maximální zkoumaný řád autoregrese byl zvolen 7. Hodnoty AIC pro jednotlivé řády jsou uvedeny v tabulce 5.1. Hodnoty AIC sice s rostoucím p stále klesají, nicméně největší relativní pokles je vidět u $p = 3$. Jako optimální řád modelu byl proto zvolen řád $p = 3$. Maximální mocnina regresorů (4.1) byla zvolena $q = 4$. Hodnota testové statistiky F ze vzorce (4.2) vyšla

$$F = 0.8213.$$

Kritická hodnota rozdělení $F_{3,246}$ na hladině 0.05 je přibližně 8.53. Test proto nezamítá nulovou hypotézu o linearitě dat.

5.1.2. *Test proti podmíněné heteroskedasticitě.* Zde byla testována hypotéza, že pozorování X_t jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny proti alternativě, že vyhovují některému modelu ARCH. Po vypočtení potřebných hodnot autokovarianční funkce řady X_t^2 vyšla hodnota statistiky $Q(10)$ ze vzorce (4.3)

$$Q(10) = 833.6.$$

Kritická hodnota rozdělení χ^2_{10} na hladině 0.05 je přibližně 18.31. Test proto zamítá hypotézu, že data jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny.

Provedení testu proti prahové alternativě by bylo v dané situaci příliš složité, a proto tento test není do práce zařazen. Dále se věnujme odhadům parametrů jednotlivých modelů, které jsou v práci zmiňovány.

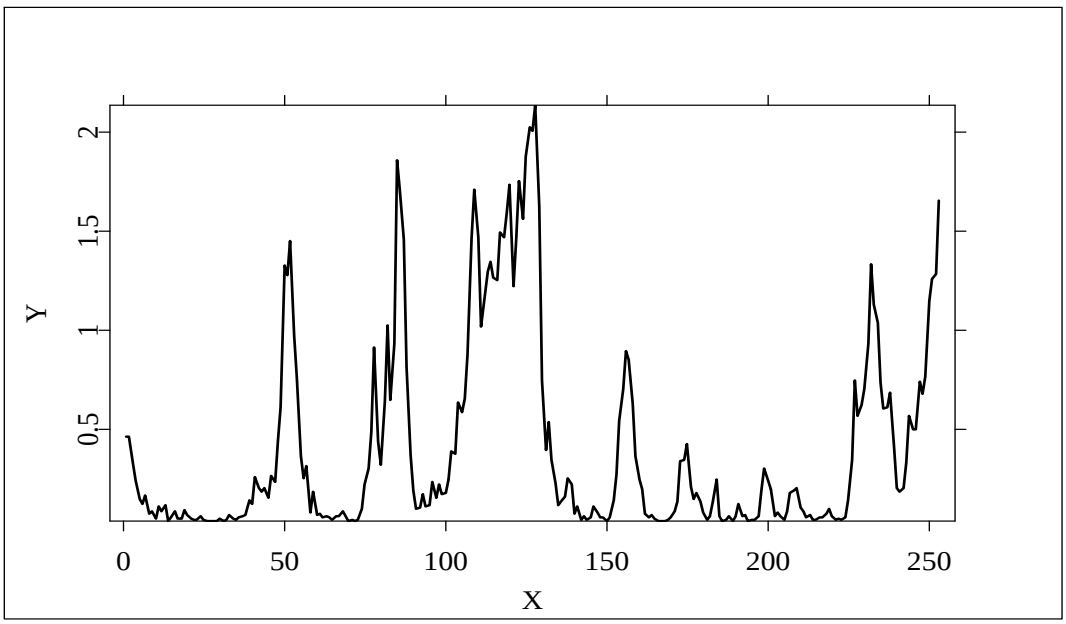
5.2 Aplikace zkoumaných nelineárních modelů

5.2.1. *Model GARCH.* Jediným testem, který linearitu pozorované řady zamítal, byl test proti podmíněné heteroskedasticitě z části 4.2, proto byl nejprve odhadnut model GARCH. K odhadu byl použit program XploRe, který za předpokladu, že $\varepsilon_t \sim \mathsf{N}(0,1)$ jako nejvhodnější model určil následující model GARCH(1,1)

$$\begin{aligned} X_t^2 &= \varepsilon_t^2 V_t, \\ V_t &= 0.0228 + 0.8720 X_{t-1}^2 + 0.0786 V_{t-1}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Směrodatné odchylky odhadů parametrů jsou

$$\sigma\left(\hat{a_0}\right) = 0.0013, \quad \sigma\left(\hat{a_1}\right) = 0.0258, \quad \sigma\left(\hat{b_1}\right) = 0.0151.$$



Obrázek 5.2: Odhadnutá volatilita řady kurzů GBP/Kč z obr 5.1. Odhad byl proveden pomocí modelu GARCH(1,1) s parametry uvedenými ve vzorci 5.1

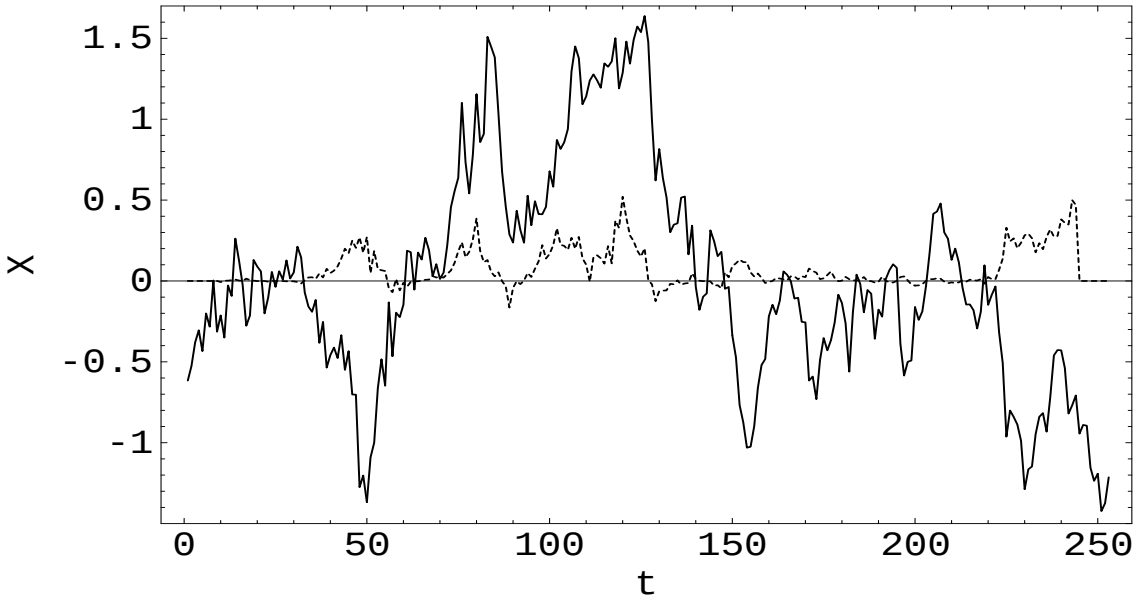
5.2.2. *Model BL(0,0,r, s).* Test pomocí statistiky Q popsaný v části 4.2 je doporučován i proti bilineární alternativě, neboť i bilineární modely mohou mít všechny veličiny X_t vzájemně nekorelované a odlišit od bílého šumu se dají pomocí autokovariancí jejich druhých mocnin. Z toho důvodu je dobré zkusit daty proložit některý bilineární model. Třída bilineárních modelů je velice široká a obecné hledání nejvhodnějšího modelu naráží na mnoho potíží, omezili jsme se proto pouze na speciální podtřídu modelů BL(0,0,r, s), daných vzorcem

$$X_t = \varepsilon_t + c_{r,s} X_{t-r} \varepsilon_{t-s}, \tag{5.2}$$

kde $r > 0$ a $s > 0$. V tabulce 5.2 jsou uvedeny hodnoty Akaikeho informačního kritéria pro všechny kombinace (r, s), $r \leq 10$ a $s \leq 20$. Tyto hodnoty jsou rovněž graficky znázorněny na obrázku 5.4. Podle tohoto kritéria byl jako nejlepší vyhodnocen model BL(0,0,3,9). Odhadnutá hodnota parametru vypočtená maximalizací pseudověrohodnostní funkce postupem uvedeným v části 3.2 vyšla $\hat{c}_{3,9} = 0.2683$. Protože tato metoda dává i odhady e_t veličin ε_t, bylo s jejich využitím možné vypočítat

$$\hat{X}_t = 0.2683 X_{t-3} e_{t-9}. \tag{5.3}$$

Graf srovnávající X_t a $\hat{X}_t$ je na obrázku 5.3. Jak je z obrázku zřejmé, není tento typ modelu pro popis dané řady příliš vhodný.



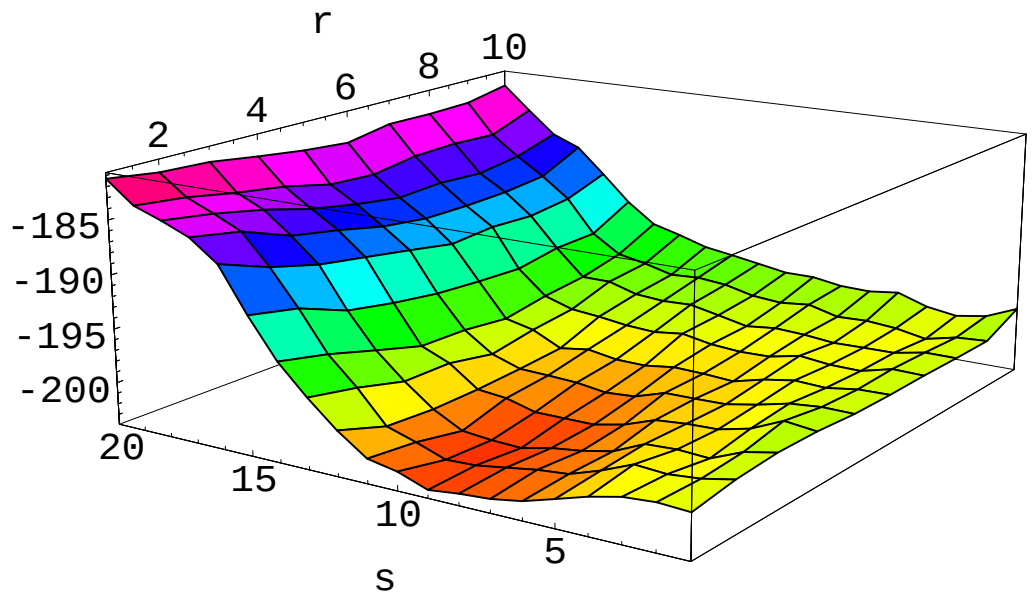
Obrázek 5.3: Srovnání řady kurzů GBP/Kč s hodnotami $\hat{X}_t$ modelu BL(0,0,3,9) s parametrem $\hat{c}_{3,9} = 0.2683$. vypočtenými podle vzorce (5.3). Původní data jsou znázorněna plnou čarou, hodnoty $\hat{X}_t$ tečkovaně.

Tabulka 5.2: Hodnoty Akaikeho informačního kritéria pro různé hodnoty (r, s) modelu BL(0,0,r, s) daného vzorcem (5.2), jehož parametr $c_{r,s}$ byl odhadnut z řady X_t.

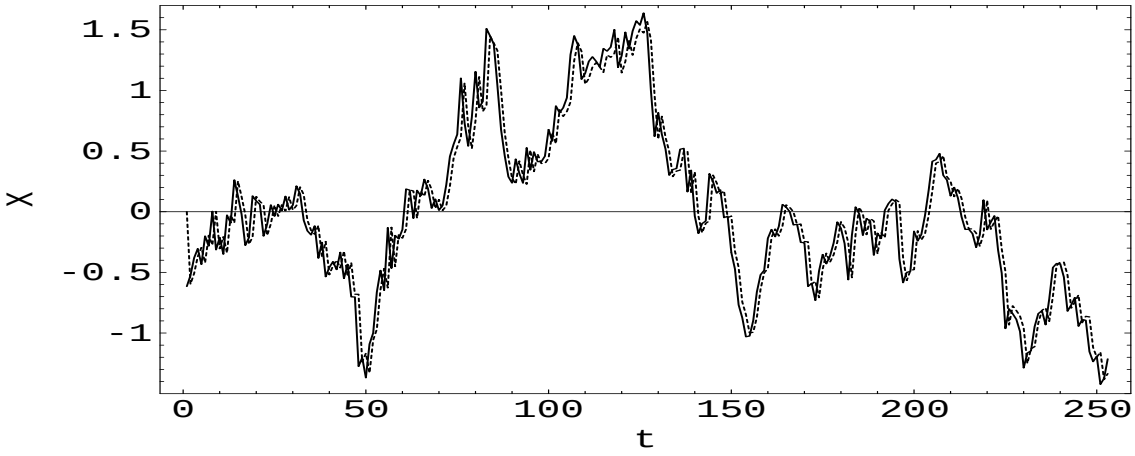
AIC(r, s)										
	r									
s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-199.9	-199.2	-198.9	-199.0	-199.3	-199.4	-199.4	-199.4	-199.4	-197.8
2	-199.7	-199.8	-199.5	-198.7	-199.3	-199.4	-199.3	-199.4	-199.6	-199.0
3	-199.9	-200.0	-200.7	-199.9	-199.5	-199.9	-200.0	-200.0	-200.2	-199.5
4	-200.6	-199.8	-200.5	-200.6	-200.2	-199.7	-199.9	-200.0	-199.7	-199.1
5	-201.4	-201.0	-200.6	-200.7	-200.7	-200.2	-199.6	-200.0	-199.4	-198.1
6	-202.2	-201.9	-201.9	-200.9	-200.8	-200.9	-200.2	-199.7	-199.5	-198.5
7	-202.7	-202.2	-202.4	-201.9	-200.8	-200.7	-200.3	-199.6	-198.8	-198.4
8	-202.9	-202.6	-202.8	-202.5	-201.7	-200.6	-200.1	-199.9	-199.1	-198.0
9	-203.2	-203.0	-203.4	-202.5	-201.9	-201.0	-199.6	-199.3	-198.9	-198.0
10	-202.2	-203.1	-203.3	-202.5	-201.5	-201.0	-199.9	-198.7	-198.2	-197.5

Tabulka 5.2-pokračování.

AIC(r,s)										
	r									
s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	-201.7	-202.1	-203.0	-201.7	-201.3	-200.5	-199.7	-198.8	-198.0	-197.0
12	-199.8	-201.3	-201.6	-201.5	-201.2	-200.9	-199.4	-198.6	-198.1	-196.6
13	-197.5	-198.4	-199.5	-199.5	-200.3	-199.6	-199.1	-197.8	-197.4	-195.8
14	-194.8	-195.8	-197.2	-198.4	-198.5	-198.9	-198.2	-197.8	-196.9	-195.0
15	-191.2	-192.2	-194.0	-194.8	-195.4	-195.7	-195.9	-195.2	-195.1	-193.1
16	-187.2	-188.9	-190.1	-190.9	-191.6	-192.4	-192.1	-192.3	-191.9	-190.4
17	-185.2	-186.1	-187.9	-188.8	-189.8	-190.3	-190.4	-190.3	-189.9	-188.0
18	-184.2	-184.9	-185.9	-187.1	-188.0	-188.7	-188.4	-188.7	-188.1	-186.9
19	-183.3	-183.8	-184.7	-185.4	-186.5	-186.7	-186.1	-186.0	-186.2	-184.7
20	-181.3	-182.0	-182.2	-182.9	-183.5	-183.9	-183.1	-183.2	-183.1	-182.3



Obrázek 5.4: Grafické znázornění hodnot Akaikeho informačního kritéria pro různé dvojice (r,s) modelu BL(0,0,r,s), které jsou uvedeny v tabulce 5.2.



Obrázek 5.5: Srovnání řady kurzů GBP/Kč s hodnotami $\hat{X}_t$ modelu EXPAR(1) vypočtenými podle vzorce (5.5). Původní data jsou znázorněna plnou čarou, hodnoty $\hat{X}_t$ tečkovaně.

5.2.3. *Model EXPAR.* Dalším zkoumaným modelem byl model EXPAR. Byl použit model daný vzorcem (3.12). Postupně byly odhadnuty metodou popsanou v části 3.3 parametry modelů EXPAR(p) pro $p = 1, 2, 3, 4$ a 5. Poté byly vypočteny hodnoty Akaikeho informačního kritéria, které jsou pro jednotlivé modely uvedeny v tabulce 5.3. Z uvedených modelů je podle AIC nejlepší model EXPAR(1). Odhadnutý model má vzorec

$$X_t = \left(0.9663 + 0.0044 \exp\{-0.2615 X_{t-1}^2\}\right) X_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{5.4}$$

Na obrázku 5.5 lze nalézt srovnání pozorování X_t a vyrovnaných hodnot

$$\hat{X}_t = \left(0.9663 + 0.0044 \exp\{-0.2615 X_{t-1}^2\}\right) X_{t-1}. \tag{5.5}$$

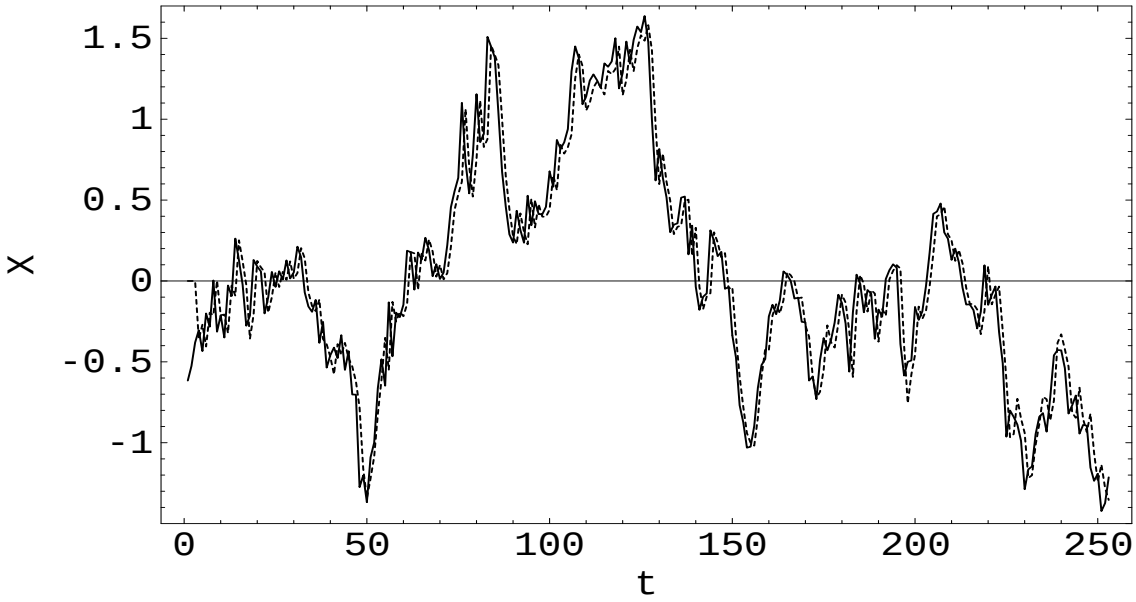
Je vidět, že odhadnutý model je velice blízký modelu

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

z čehož lze usoudit, že model EXPAR také není pro popis dat příliš vhodný.

Tabulka 5.3: Hodnoty Akaikeho informačního kritéria pro různé hodnoty p modelu EXPAR(p) daného vzorcem (3.12).

p	1	2	3	4	5
AIC(p)	-834.56	-828.82	-825.70	-817.56	-809.92



Obrázek 5.6: Srovnání řady kurzů GBP/Kč s hodnotami $\hat{X}_t$ modelu SETAR(2,1,3) vypočtenými podle vzorce (5.7). Původní data jsou znázorněna plnou čarou, hodnoty $\hat{X}_t$ tečkovaně.

5.2.4. *Model SETAR.* Posledním zkoumaným modelem byl model SETAR. Byl použit model daný vzorcem (3.13) pro daný parametr zpoždění $d = 1$. Postupně byly odhadnuty metodou popsanou v části 3.4 parametry modelů SETAR$(2, p_1, p_2)$ pro $p_{1,2} = 1, 2, 3$ a 4. Poté byly vypočteny hodnoty Akaikeho informačního kritéria, které jsou pro jednotlivé modely uvedeny v tabulce 5.4. Z uvedených modelů je podle AIC nejlepší model SETAR(2,1,3). Odhadnutý model má vzorec

$$X_t = \begin{cases} -0.0018 + 0.9667X_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{když } X_{t-1} > -0.2498; \\ -0.0606 + 0.8491X_{t-1} + 0.4269X_{t-2} - 0.4029X_{t-3} + \varepsilon_t, & \text{když } X_{t-1} \leq -0.2498. \end{cases} \tag{5.6}$$

Na obrázku 5.6 lze nalézt srovnání pozorování X_t a vyrovnaných hodnot

$$\hat{X}_t = \begin{cases} -0.0018 + 0.9667X_{t-1}, & \text{když } X_{t-1} > -0.2498; \\ -0.0606 + 0.8491X_{t-1} + 0.4269X_{t-2} - 0.4029X_{t-3}, & \text{když } X_{t-1} \leq -0.2498. \end{cases} \tag{5.7}$$

Je vidět, že i tentokrát je odhadnutý model poměrně blízký modelu

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

takže model SETAR také není pro popis dat příliš vhodný.

Tabulka 5.4: Hodnoty Akaikeho informačního kritéria pro různé dvojice (p_1, p_2) modelu SETAR$(2, p_1, p_2)$ daného vzorcem (3.13).

AIC(p_1, p_2)	p_2			
p_1	1	2	3	4
1	-836.47	-831.25	-836.76	-830.65
2	-831.81	-830.57	-834.98	-828.87
3	-826.77	-825.08	-833.29	-827.19
4	-821.02	-820.31	-827.01	-825.19

5.2.5. *Model CHARN.* K odhadu neparametrického modelu CHARN, který je definován v části 2.6 byla použita tři různá jádra, která zmiňuje Hafner [12] na straně 129. Jsou to

- Epanechnikovo jádro

$$K_1(u) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-u^2), & \text{pro } |u| \leq 1; \\ 0, & \text{jinak;} \end{cases}$$

- kvartické jádro

$$K_2(u) = \begin{cases} \frac{15}{16}(1-u^2)^2, & \text{pro } |u| \leq 1; \\ 0, & \text{jinak;} \end{cases}$$

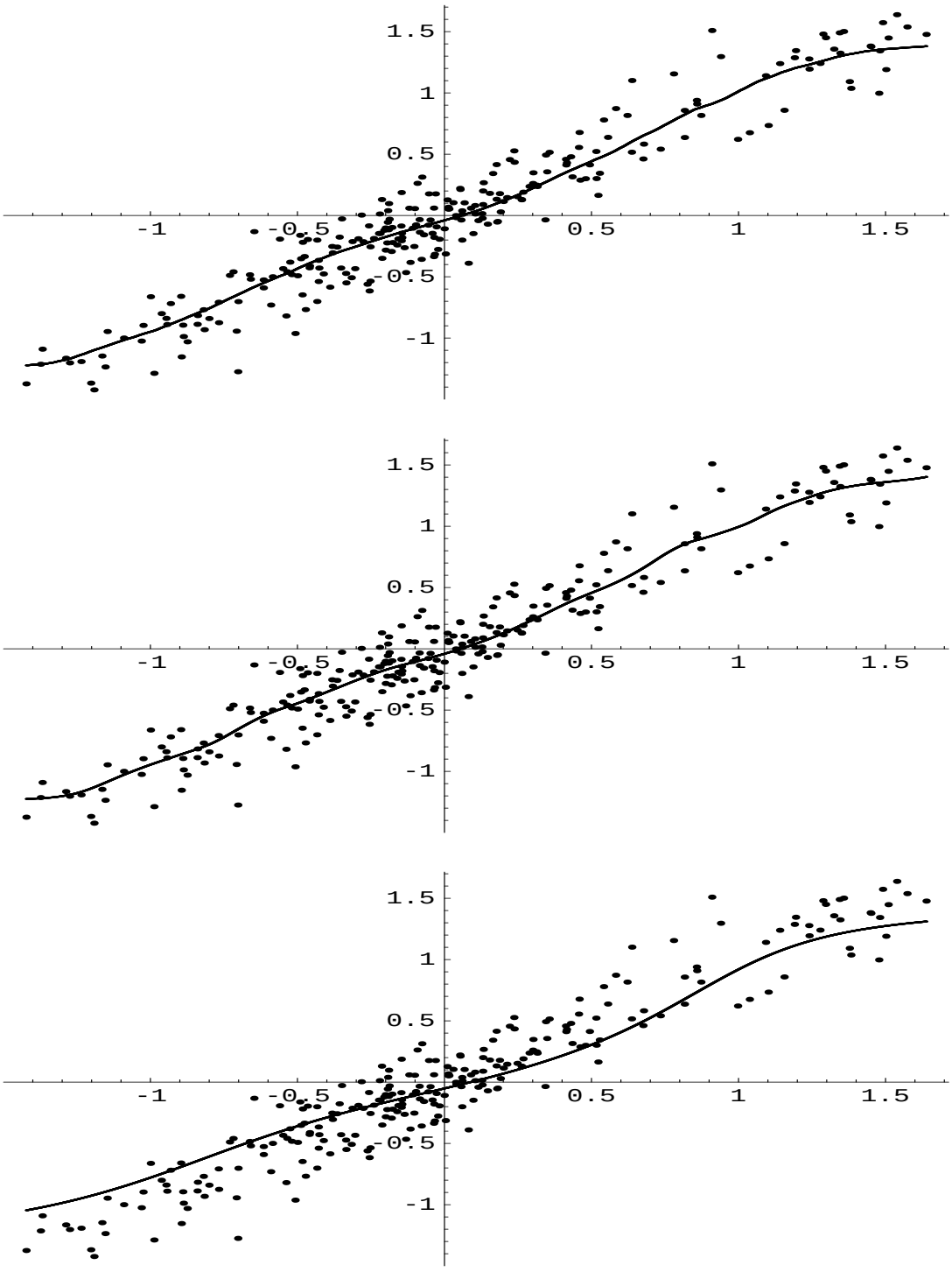
- Gaussovo jádro

$$K_3(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}.$$

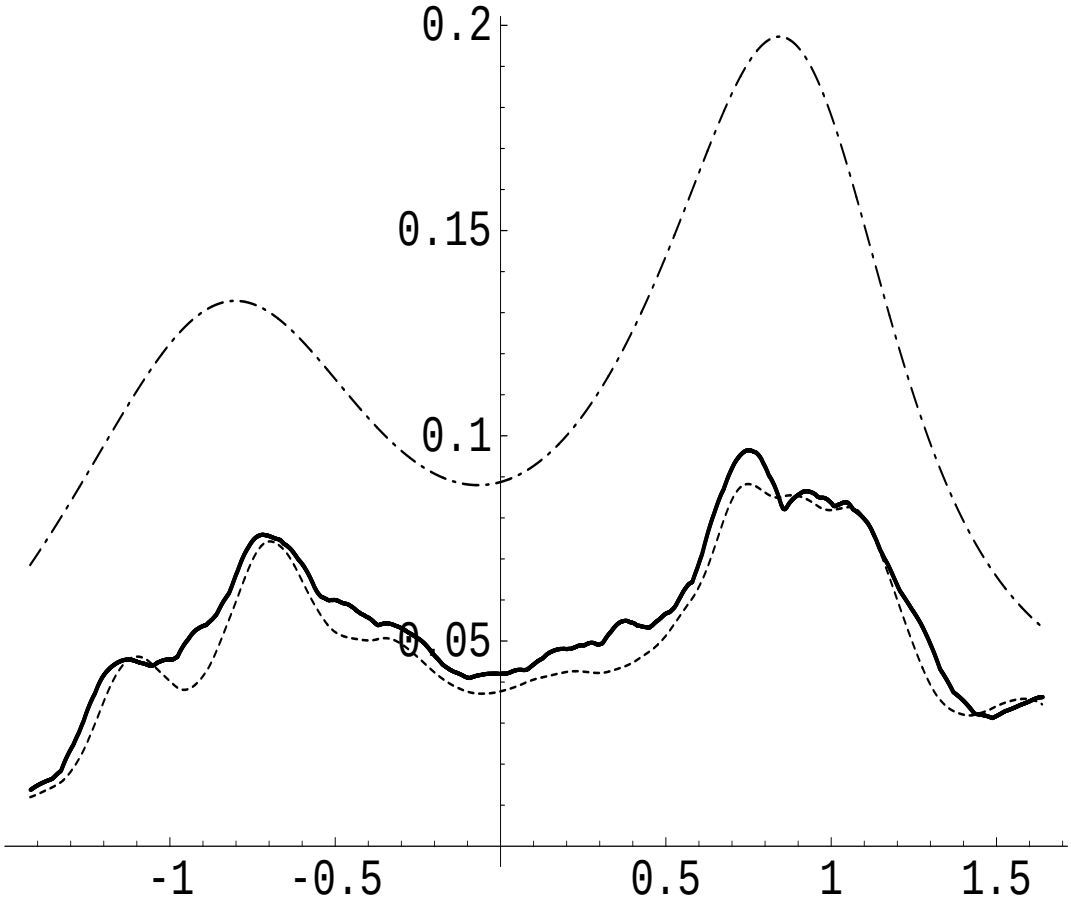
Metodou popsanou v části 3.5 byly vypočteny odhady $\hat{f}_i(x)$ a $\hat{\sigma}_i^2(x)$ funkcí

$$f(x) = \mathsf{E}(X_t \,|\, X_{t-1} = x) \quad \text{a} \quad \sigma^2(x) = \mathsf{Var}(X_t \,|\, X_{t-1} = x).$$

Index $i \in \{1, 2, 3\}$ odpovídá použitému jádru. Volba šířky h průměrovaného intervalu je v souladu s doporučením z části 3.5 $h = 253^{-1/5}$. Výsledky ukazují obrázky 5.7 a 5.8. Je vidět, že shoda odhadnutých funkcí podmíněné střední hodnoty s pozorovanými hodnotami je velmi dobrá. Mezi odhady pořízenými pomocí různých jader nejsou příliš velké rozdíly. Také je vidět, že zatímco odhady funkce $f(x)$ nevylučují linearitu řady, odhady funkce $\sigma^2(x)$ naznačují, že podmíněný rozptyl $\mathsf{Var}(X_t \,|\, X_{t-1} = x)$ není konstantní. Ze zkoumaných parametrických modelů by tudíž bylo nejvhodnější užití autoregresního modelu s šumem vyhovujícím modelu ARCH nebo GARCH.



Obrázek 5.7: Srovnání neparametrických odhadů podmíněné střední hodnoty $\mathsf{E}(X_t \mid X_{t-1} = x)$, nahoře je funkce $\hat{f}_1(x)$ vypočtená pomocí jádra K_1, uprostřed je funkce $\hat{f}_2(x)$ vypočtená pomocí jádra K_2 dole je funkce $\hat{f}_3(x)$ vypočtená pomocí jádra K_3. Na všech grafech jsou tečkami znázorněny uspořádané dvojice pozorovaných hodnot (X_{t-1}, X_t).



Obrázek 5.8: Srovnání neparametrických odhadů podmíněného rozptylu $\mathsf{Var}(X_t \,|\, X_{t-1} = x)$, funkce $\hat{\sigma}_1^2(x)$ vypočtená pomocí jádra K_1 je nakreslena plnou čarou, funkce $\hat{\sigma}_2^2(x)$ vypočtená pomocí jádra K_2 je znázorněna čárkovaně a funkce $\hat{\sigma^2}_3(x)$ vypočtená pomocí jádra K_3 je nakreslena čerchovaně.

Literatura

[1] Berndt, E. K., Hall, B. H., Hall, R. E., Hausman, J. A. (1974): Estimation inference in nonlinear structural models, *Annals of Economic ans Social Measurement* **4**, 653–665.

[2] Bollerslev, T. P. (1986): Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics* **31**, 307–327.

[3] Bossaerts, P., Härdle, W., Hafner, C. (1996): Foreign exchange rates have surprising volatility. In: P. Robinson (ed.), *Athens Conference on Applied Probability and Time Series, vol. 2,* 55–72, in Lecture Notes in Statistics, No. 115, Springer Verlag.

[4] Box, G. E. P., Jenkins, G. M. (1976): Time Series Analysis. Forecasting and Control. Holden-Day, Oakland CA.

[5] Cipra, T.(1983): Nelineární modely časových řad, *Ekonomicko-matematický obzor* **19**, 164–177.

[6] Engle, R. F. (1982): Autoregressive Conditionally Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation,*Econometrica* **50**, 987–1008.

[7] Engle, R. F., Gonzales-Rivera, G. (1991): Semiparametric ARCH models, *Journal of Business and Economic Statistics* **9**, 345–360.

[8] Gouriéroux, Ch. (1997): ARCH Models and Financial Applications. Springer Verlag, New York.

[9] Gouriéroux, Ch., Monfort, A. (1995): Statistics and Econometric Models: General Concepts, Estimation, Prediction and Algorithms, Vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge.

[10] Gouriéroux, Ch., Monfort, A., Trognon A. (1984): Pseudo maximum likelihood methods: Theory, *Econometrica* **52**, 681–700.

[11] Granger, C. W. J., Andersen, A. P. (1978): An Introduction to Bilinear Time Series Models. Vandenhoek and Ruprecht, Gottingen.

[12] Hafner, Ch. (1998): Nonlinear time series analysis with applications to foreign exchange rate volatility. Physica-Verlag, Heidelberg.

[13] Haggan, V., Ozaki, T. (1981): Modeling nonlinear vibrations using an amplitude-dependent autoregressive time series models, *Biometrica* **68**, 189–196.

[14] Härdle, W. (1990): Applied Nonparametric Regression. Cambridge University Press, Cambridge.

[15] Chan, K. S. (1990): Testing for threshold autoregression, *Annals of Statistics* **18**, 1886–1894.

[16] Jones, D. A. (1976): Non-linear Autoregressive Processes. Unpublished PhD Thesis, University of London.

[17] McLeod, A. I., Li, W. K. (1983): Diagnostic checking ARMA time series models using squared residual autocorrelations, *Journal of Time Series Analysis* **4**, 269–273.

[18] Nadaraya, E. (1964): On estimating regression, *Theory of Probability and its Application* **9**, 141–142.

[19] Priestley, M. B. (1988): Non-linear and Non-stationary Time Series Analysis. Academic Press, London.

[20] Ramsey, J. B. (1969): Test for specification errors in classical linear least-squares regression analysis, *Journal of the Royal Statistical Society B* **31**, 350–371.

[21] Subba Rao, T. (1981): On the theory of bilinear models, *Journal of the Royal Statistic Society B* **43**, 244–255.

[22] Tong, H. (1983): Threshold Models in Non-linear Time Series Analysis. Lecture Notes in Statistics, No. 21. Springer, Heidelberg.

[23] Tong, H. (1990): Nonlinear Time Series. Clarendon Press, Oxford.

[24] Tong, H., Lim, K. S. (1980): Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data, *Journal of the Royal Statistic Society B* **42**, 245–292.

[25] Turkman, K. F., Turkman, M. A. A. (1997): Extremes of bilinear time series models, *Journal of time series analysis* **18** No. 3, 305–319.

[26] Wang, S. R., An, H. Z., Tong, H. (1983): On the distribution of a simple stationary bilinear process, *Journal of time series analysis* **4** No. 3, 209–216.

[27] Watson, G. (1964): Smooth regression analysis, *Sankhya A* **26**, 359–372.

[28] Weiss, A. A. (1986): Asymptotic theory for ARCH models: Estimation and testing, *Econometric Theory* **2**, 107–131.

[29] White, H. (1982): Maximum likelihood estimation of misspecified models, *Econometrica* **50**, 1–25.