Univerzita Karlova v Praze
Matematicko–fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Michal Kročil

Modelování ekonomického kapitálu banky

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Gabriel Marosi

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Rád bych na tomto místě poděkoval Mgr. Gabrielu Marosimu za vedení práce, trpělivost, stejně tak jako za cenné rady a podněty při tvorbě modelů i interpretaci výsledků. Velké díky patří mým rodičům za podporu během celé doby studia i všem ostatním, kteří mi v jeho průběhu dodávali tolik potřebné síly překonávat obtíže.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 21. dubna 2005 Michal Kročil

Obsah

Abstrakt

Název práce: Modelování ekonomického kapitálu banky
Autor: Michal Kročil
Katedra (ústav): Katedra Finanční a Pojistné Matematiky
Vedoucí diplomové práce: Mgr. Gabriel Marosi
e-mail vedoucího: gmarosi@csas.cz
Abstrakt: Hlavním tématem diplomové práce je pojednání o modelech měření očekávaných a neočekávaných ztrát banky z úvěrového portfolia, potřeba ekonomického kapitálu pro zabezpečení solventnosti instituce a vztah mezi ekonomickým kapitálem a regulatorním požadavkem.
Klíčová slova: Ekonomický kapitál, solventnost, $CreditRisk^{+}$, $CreditMetrics$

Title: Modeling of Economic Capital
Author: Michal Kročil
Department: Department of Financial and Insurance Mathematics
Supervisor: Mgr. Gabriel Marosi
Supervisor's e-mail address: gmarosi@csas.cz
Abstract: The main task of this diploma thesis is a tractate about models of bank's credit portfolio expected and unexpected loss, need of economic capital for buffering bank against becoming insolvent, relationship between economic capital and regulatory capital.
Keywords: Economic Capital, Solvency, $CreditRisk^{+}$, $CreditMetrics$

Kapitola 1

Úvod

Riziko selhání, pojem jenž se prolíná celou předkládanou diplomovou prací, značí pravděpodobnost, že protistrana finančního kontraktu nedostojí svým závazkům a povinnostem ze smlouvy pro ni plynoucím. Pokud tato eventuelita nastatne, mluvíme o tzv. defaultu protistrany. Pro účely předkládané diplomové práce omezíme pojem úvěrového rizika na změnu kreditní kvality (zlepšení nebo zhoršení kreditní ratingové úrovně) nebo výskyt defaultu u smluvní protistrany.
Institucemi, jichž se kreditní riziko týká především, jsou finanční instituce obecně a banky obzvláště. A pro bankovní sektor není kreditní riziko jen tím nejstarším, ale zřejmě také tím největším z rizik. Ani dlouhá doba, během níž se instituce s tímto rizikem potýkají, však neznamená, že by tyto byly s to je dostatečně efektivně řídit.
Od poloviny osmdesátých let byly v technické literatuře publikovány modely založené na *portfolio selection theory* s cílem aplikovat znalosti o tržním riziku na riziko úvěrové, jež bylo v portfoliu zakomponované. Ale modelování kreditního rizika portfolia, se všemi svými specifickými rysy a úskalími, se nedostalo do popředí zájmu akademiků a odborníků dříve, než po lednu 1996, kdy byly *Basel Commitee on Banking Supervision* uznány modely interního rizika tržního.
V tomto mezidobí však bylo vyvinuto a stalo se dostupnými několik modelů a softwarových nástrojů určených k měření a posuzování kreditního rizika. Mezi nejvýznamnější z nich patří model $CreditMetrics^{TM}$ od J.P.Morgan a také model $CreditRisk^{+}$ vyvinutý Credit Suisse Financial Products. (Mezi další významné modely kreditního rizika se pak řadí $CreditPortfolioView^{TM}$ tvůrců Wilson a McKinley a $PortfolioManager^{TM}$ společnosti KMV.)
A právě aplikace modelů $CreditMetrics$ a $CreditRisk^{+}$ na modelové i reálné portfolia a jejich nabízející se srovnání je ústředním tématem této práce. První kapitoly obsahují nástin teorie, na níž se oba modely zakládají, dále

přichází na řadu srovnání matematických rámců, v nichž jsou obě metodologie budovány, jejich vzájemná převoditelnost a kalibrace modelů která uzavírá teoretickou část porovnávání. Dále následuje popis užitých modelových portfolií a rozbor programového zpracování obou modelů. V závěru pak přichází na řadu vyhodnocení získaných výsledků a vyslovení závěrů z jejich porovnání plynoucích.

Kapitola 2

Teorie

2.1 Modelování očekávané a neočekávané ztráty

Pro zodpovězení otázek: "Jak velkému kreditnímu riziku je banka vystavena v případě nedostání závazků dlužníkem?" a "Jak velkou ztrátu pravděpodobně utrpí v tomto případě na svých aktivech?" je třeba nejprve definovat několik pojmů. A právě zavedení těchto pojmů si klade za cíl první kapitola

2.1.1 Očekávaná ztráta

Prvním ze zmíněných pojmů je *Očekávaná ztráta* (Expexted Loss – EL). Očekávaná ztráta, kterou banka v případě selhání dlužníka utrpí, můžeme definovat jako součin pravděpodobnosti selhání dlužníka (defaultu) a rozdílu mezi částkou, kterou je dlužník smluvně zavázán uhradit, a částkou, kterou bude dlužník schopen uhradit v případě defaultu. Jako první linii obrany proti nesolventnosti tedy banka vyhrazuje částku ekvivalentní očekávané ztrátě. Tato částka se označuje jako *Loan loss reserve*. Druhým způsobem, jak je možno na očekávanou ztrátu nahlížet, je prostřednictvím hodnoty rizikové pohledávky $v(t,T)$, jak uvádí rovnice 2.1

$$\begin{aligned} v(t,T) &= p(t,T)[\delta + (1-\delta)Q_t(\tau > T)] \\ &= p(t,T)[1-(1-\delta)Q_t(\tau \leq T)] \end{aligned} \tag{2.1}$$

Zde $p(t,T)$ je hodnota bezrizikové pohledávky, t je čas, v němž pohledávku hodnotíme, T je doba splatnosti a $Q_t(\tau \leq T)$ je pravděpodobnost, že k defaultu dojde před vypršením doby splatnosti T. V případě defaultu je pak banka schopna získat pouze podíl δ (kde $0 < \delta < 1$) z celkové hodnoty pohledávky. Tento podíl se označuje jako *recovery rate*. Úpravou rovnice (2.1) dostáváme

$$p(t,T) - v(t,T) = p(t,T)[(1-\delta)Q_t(\tau \leq T)] \tag{2.2}$$

Levá strana rovnice (2.2) značí rozdíl mezi bezrizikovou a rizikovou hodnotou pohledávky. Tento rozdíl je hodnota, kterou věřitel očekává, že ztratí v případě selhání schopnosti dlužníka dostát svým závazkům. Proto se prává strana rovnice (2.2) nazývá Očekávaná ztráta – EL.

$$EL = p(t,T)[(1-\delta)Q_t(\tau \leq T)] \tag{2.3}$$

S Očekávanou ztrátou se váže také další termín, kterým je *Expozice banky* (Exposure). "Jak velké ztrátě banka čelí v případě selhání dlužníka dostát svým závazkům nebo v případě zhoršení jeho kreditního ratingu?" je otázka, na kterou nám expozice dává odpověď. Určení části z této expozice, kterou nebude banka v případě defaultu pravděpodobně schopna získat zpět, je jednou z našich předních priorit. Tuto část nazýváme *Ztráta daná selháním* (Loss given default - LGD). Určení LGD sestává ze dvou hlavních částí:

- výpočtu očekávané ztráty
- odhadu neočekávané ztráty

2.1.2 Ztráta v případě defaultu

V případě neschopnosti dlužníka dostát svým závazkům, věřitel získá zpět jen část δ z rizikové pohledávky. Je však konvencí, ptát se, jaká část je ztracena spíše, než jakou část je možno získat zpět. Na základě této konvence pak zavádíme *Ztrátu v případě defaultu* (Loss Given Default – LGD). Která není nic jiného, než

$$LGD \equiv 1 - \delta \tag{2.4}$$

Rovnici očekávané ztráty (2.3) pak můžeme přepsat jako

$$EL = p(t,T) \times LGD \times Q_t(\tau \leq T) \tag{2.5}$$

2.1.3 Neočekávaná ztráta

Bez ohledu na to, jak prudentní je banka při realizování svých každodenních obchodních aktivit, stále existují faktory, které způsobují nejistotu v hodnotě ztráty na daném bankovním portfoliu. Tuto nejistotu, nebo vhodněji řečeno nestálost výše ztrát, lze popsat více způsoby. Buďto *Neočekávanou ztrátou*

(Unexpected loss – UL) nebo pomocí kvantilů daných rozdělení četností a výše ztrát dle metody *VaR* (Value-at-Risk).
Z matematického hlediska jde, pokud mluvíme o neočekávané ztrátě, o standardní odchylku ze změny hodnoty aktiv na konci lhůty splatnosti. To znamená, že neočekávaná ztráta je ve své podstatě odhadnutým rozptylem potenciální ztráty hodnoty portfolia okolo očekávané ztráty. Pro schopnost banky dostát svým závazkům je tedy zcela nezbytné, aby vyhradila dostatečný kapitál na pokrytí těchto fluktuací v hodnotě svých portfolií. Můžeme tedy definovat neočekávanou ztrátu, UL_H, hodnoty aktiva V_H v časovém horizontu t_H jako standardní odchylku z daného nepodmíněného aktiva ve zmíněném horizontu:

$$UL_H \equiv \sqrt{var[V_H]} = \langle V_H^2 \rangle - \langle V_H \rangle^2 \tag{2.6}$$

Na rozdíl od kvantifikování nestálosti výše ztrát pomocí neočekávané ztráty, je přístup k tomuto problému metodou VaR založen na stanovení objemu ztráty, který nebude s danou pravděpodobností překročen.
Definujme, pro $0 < k < 1$, k-tý kvantil rozložení náhodné veličiny X jako hodnotu x takovou, že splňuje:

$$P(X \leq x) \geq k \text{ a současně } P(X \geq x) \geq 1 - k \tag{2.7}$$

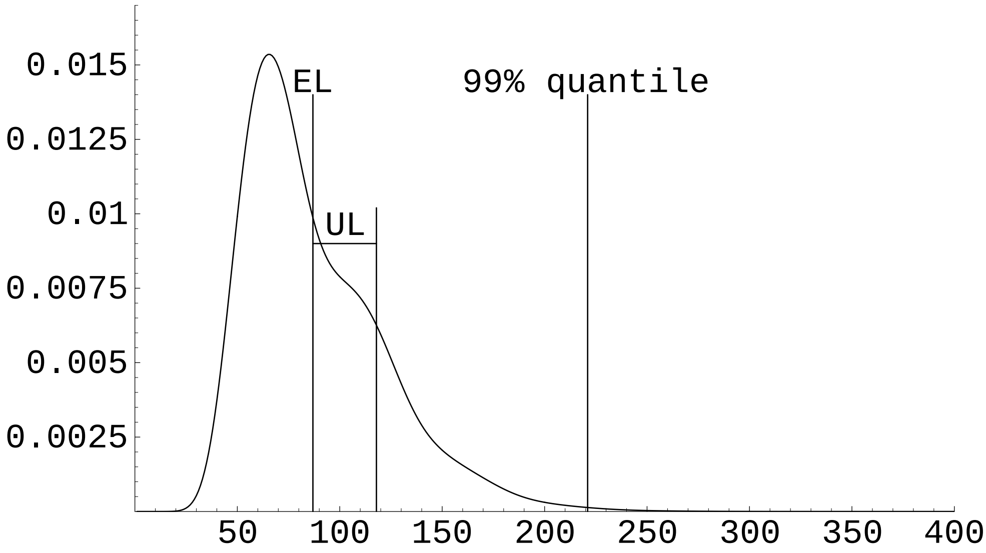
V souladu s touto definicí je pak $-VaR_\alpha$ pro niž platí

$$P(L > -VaR_\alpha) = \alpha \tag{2.8}$$

prahovou hodnotou již překročí náhodná hodnoty velikosti ztráty v portfoliu L jen s určitou malou pravděpodobností α. Tudíž $-VaR$ je 100α procentním kvantilem distribuce L.
Následující obrázek 2.1 pak graficky ilustruje oba zmíněné přístupy.

2.1.4 Ekonomický kapitál

Množství kapitálu potřebného k uchránění banky před nesolventností, jež nazýváme *Ekonomický* (nebo také *Rizikový*) *kapitál* (Economic capital - EC), je úzce spjato především s velikostí neočekávané ztráty. Pro dosažení náležité kapitalizace pro každou obchodní linii banky je potřeba určit konfidenční intervaly odpovídající bankou požadovanému kreditnímu ratingu. To je nutné, neboť požadovaný bankovní kreditní rating přímo koresponduje s danou pravděpodobností kapitálové náročnosti.



Obrázek 2.1: Nestálost výše ztrát, "EL" - očekávaná ztráta, "UL" - neočekávaná ztráta, "99% quantile" - 99%-ní kvantil rozložení výše ztráty (osa X: výše ztrát, osa Y: pravděpodobnost)

Požadovaný rating	Konfidenční interval
AAA	99,99%
AA	99,79%
A	99,90%
BBB	99,70%

Tabulka 2.1: Konfidenční intervaly

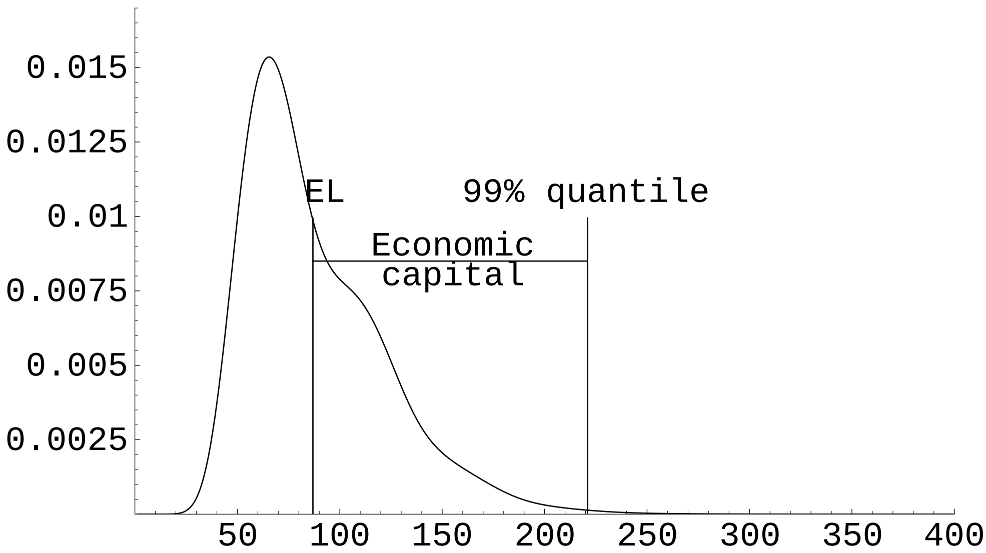
Tabulka 2.1 uvádí příklad konfidenčních intervalů na základě ratingu instituce.

Výše uvedené konfidenční intervaly jsou toliko indikací historických pravděpodobností defaultu korespondujících s jednotlivými ratingovými kategoriemi. Ve skutečnosti pak tyto průměry kolísají v závislosti jak na čase, tak na ekonomických cyklech.
Případná otázka v této chvíli zní: "Jaké minimální množství ekonomického kapitálu má banka držet, aby se dostatečně chránila před vlivem neočekávaných ztrát?" Matematicky to může přepsat následovně: Jestliže L_T je náhodná

veličina reprezentující ztrátu a z je konfidenční interval, jaká minimální hodnota v ekonomického kapitálu na časovém horizontu T je nutná k ochránění solventnosti banky tak aby

$$P\{L_T \leq v\} = z \tag{2.9}$$

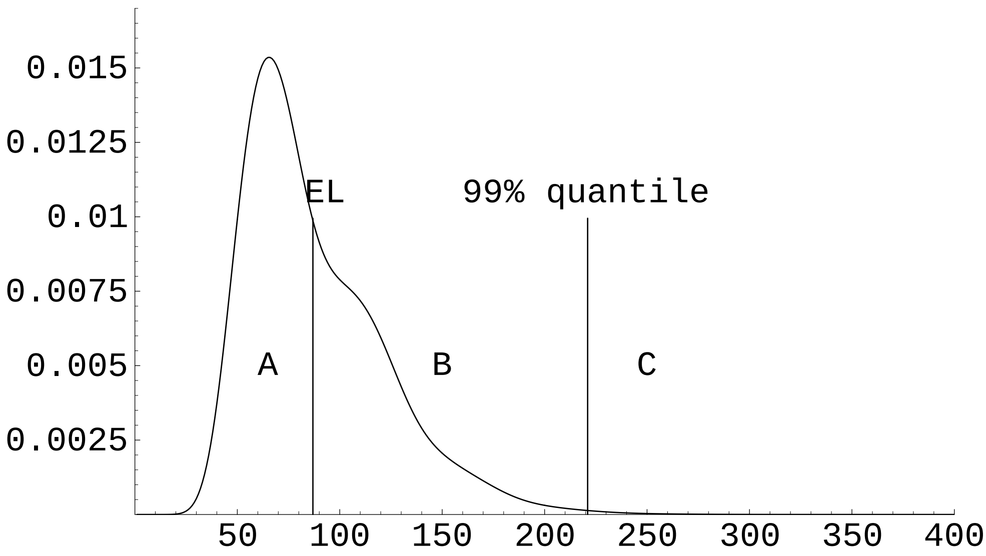
Obrázek 2.2 pak je při prezentaci ekonomického kapitálu přechodem od vyjádření matematického ke grafickému a následný obrázek 2.3 ilustruje krytí jednotlivých částí celkové ztráty, kterou banka v důsledku defaultů utrpí.



Obrázek 2.2: Ekonomický kapitál, "EL" - očekávaná ztráta, "Economic capital" - ekonomický kapitál, "99% quantile" - 99%-ní kvantil rozložení výše ztráty (osa X: výše ztrát, osa Y: pravděpodobnost)

2.1.5 Regulatorní požadavek

Jak již bylo uvedeno dříve, ztráty, kterým banka čelí, mohou být rozděleny na očekávané a neočekávané. Tyto ztráty banka kryje kapitálem k tomu určeným. Druhým, z námi zmiňovaných druhů kapitálu, je *Regulatorní kapitál* (Regulatory capital – RC). Na rozdíl od ekonomického, který vziká na



Obrázek 2.3: Krytí ztráty "EL" - očekávaná ztráta, "99% quantile" - 99%-ní kvantil rozložení výše ztráty, "A" - část pokryta oceněním a provizemi, "B" - část pokryta kapitálem a / nebo provizemi, "C" - část kvantifikována a kontrolována koncentračními limity (osa X: výše ztrát, osa Y: pravděpodobnost)

základě odhadu vypracovaného bankou samotnou, regulatorní kapitál je stanovován bankovním regulátorem, jako minimální kapitál potřebný k ochráně solventnosti banky před neočekávanými ztrátami. V minulosti se oba tyto odhady podstatně lišily, neboť pravidla pro určování regulatorního kapitálu BIS-88 postrádaly dostatečnou citlivost na jednotlivá rizika. Avšak i přesto, že novější stadardy Basel I. a Basel II. jsou v těchto ohledech mnohem citlivější, přístup především k riziku plynoucímu z koncentrace expozice v portfoliu je stále odlišný od interních modelů kreditního rizika, a tudíž se při některých méně diverzifikovaných portfoliích mohou lišit i oběma metodologiemi počítané hodnoty kapitálu.

Kapitola 3

Přehled modelů kreditního rizika

Již v krátkém čase od svého veřejného uvedení v roce 1997 se oba dva modely *J. P. Morgan's CreditMetrics* a *Credit Suisse's CreditRisk*$^+$ staly významnými posuzovacími kriterii při interním modelování kreditního rizika. Záměrem tvůrců obou těchto modelů byla kvantifikace stejného rizika, přesto se navzájem liší jak ve svých omezeních a distribučních předpokladech, tak v navrhovaných postupech řešení a kalibracích. Tudíž, při hodnocení kreditního rizika shodného portfolia kreditních expozic, budou obecně oba modely přinášet různé výsledky. Bohužel, oba modely nelze přímo porovnat, neboť každý z nich je prezentován v odlišném matematickém rámci. Model *CreditMetrics* se ve své podstatě zakládá na určení pohybu latentních proměných, kdy předpokládáme, že tyto proměné závisejí na vnějších rizikových faktorech. Závislost na stejných rizikových faktorech, pak u modelu *CreditMetrics* dává vzniknout korelacím kreditních jevů mezi jednotlivými dlužníky. Oproti tomu, model *CreditRisk*$^+$ je založen na průmyslových pojistných modelech náhodného rizika. Místo latentních proměných zde má každý dlužník vlastní pravděpodobnost defaultu, která se může s časem měnit v závislosti na makroekonomických faktorech, které působí v pozadí. Podle míry citlivosti dvou dlužníků na určitou skupinu faktorů se budou společně měnit i jejich pravděpodobnosti defaultů. Tato souvstažnost ve změně pravděpodobností je prezentována korelacemi mezi defaulty. Jak *CreditMetrics* tak *CreditRisk*$^+$ se zabývají stejnou problematikou kvantifikace kreditního rizika, každý z uvedených modelů však mluví poněkud odlišným jazykem.

3.1 $CreditRisk^+$

V následující části se budeme podrobněji zabývat modelem CreditRisk$^+$, jenž byl vyvinut a v roce 1996 veřejnosti představen společností Credit Suisse Financial Products. Zmíněný model bere v potaz velikost expozice a její dobu splatnosti, stejně jako informaci o systematickém riziku dlužníka a jeho kreditní kvalitě. Je tak založen na portfoliovém přístupu kvantifikace kreditního rizika.

Metodologie $CreditRisk^+$ je založena na dvoustavovém modelu, kdy dlužník na konci sledovaného období může být pouze ve stavech selhal (default) nebo dostál svým, ze smlouvy plynoucím, povinnostem. Stav dlužníka na konci periody můžeme tedy popsat náhodnou veličinou s alternativním rozdělením a stanovit, že $p_A(\mathbf{x})$ udává pravděpodobnost, že dlužník A nebude schopen dostát svým závazkům a bude se na konci periody nacházet ve stavu default. $p_A(\mathbf{x})$ tedy uvažujeme jako podmíněnou náhodnou veličinu.
Korelace defaultů jsou v modelu $CreditRisk^+$ řízeny vektorem rizikových faktorů. Tento má obecně K složek a tvar vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_K)$. Defaulty jednotlivých dlužníků jsou pro daný vektor rizikových parametrů vzájemně nezávislé a výše uvedená podmíněná pravděpodobnost $p_A(\mathbf{x})$ je funkcí ratingového stupně ζ_A dlužníka A, realizace $\mathbf{x}$ rizikových faktorů a také váhového vektoru $w_{A1}, \ldots, w_{AK}$, který udává citlivost dlužníka A na jednotlivé rizikové faktory. Tato funkce má pak tvar:

$$p_A(\mathbf{x}) = \bar{p}_{\zeta(A)}\Big(\sum_{k=1}^{K} x_k w_{Ak}\Big) \tag{3.1}$$

kde $\bar{p}_{\zeta(A)}$ je nepodmíněná pravděpodobnost defaultu dlužníka A, který patří do ratingového stupně ζ, a kde $\mathbf{x}$ jsou nezáporné vektory o jednotkové střední hodnotě.
Intuitivně nám pak tato specifikace říká, že rizikové faktory $\mathbf{x}$ slouží ke zvýšení nebo snížení nepodmíněné pravděpodobnosti $p_{\zeta(A)}$. Hodnoty x_k vyšší než jedna tedy zvyšují pravděpodobnost defaultu každého dlužníka úměrně velikosti w_{Ak} - jeho citlivosti na tento faktor.
Dale je nutné požadovat, aby byl součet náhodných veličin w_{Ak}, přes $k = 1, \ldots, K$ roven jedné. Tím je zaručena platnost rovnosti:

$$E[p_i(\mathbf{x})] = \bar{p}_{\zeta(i)} \tag{3.2}$$

Pro analýzu ztrát, na portfoliu vznikajících, zavavedeme nyní první ze dvou vytvořujících funkcí pravděpodobností, a to vytvořující funkci pravděpodobnosti výskytu n defaultů v portfoliu:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(N = n) z^n \tag{3.3}$$

Kde N je náhodné číslo reprezentující počet defaultů.
Než se dostaneme k této nepodmíněné funkci pomocné proměnné z, je nutno odvodit podmíněnou vytvořující funkci $F(z|\mathbf{x})$ pro celkový počet defaultů v portfoliu závislou na rizikovém parametru $\mathbf{x}$. Pro jednotlivé dlužníky jde o Bernoulliovskou vytvořující funkci pravděpodobností:

$$F_A(z|\mathbf{x}) = (1 - p_A(\mathbf{x}) + p_A(\mathbf{x})z) = (1 + p_A(\mathbf{x})(z-1)) \tag{3.4}$$

Užitím aproximace

$$log(1+y) \approx y \text{ pro } y \approx 0 \tag{3.5}$$

a její aplikací na náš případ

$$log(1 + p_A(\mathbf{x})(z-1)) \approx p_A(\mathbf{x})(z-1) \tag{3.6}$$

pak můžeme psát že:

$$F_A(z|\mathbf{x}) = exp(log(1 + p_A(\mathbf{x})(z-1))) \approx exp(p_A(\mathbf{x})(z-1)) \tag{3.7}$$

Kdy na pravé straně dostáváme pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny Poissonova rozložení s parametrem $p_A(\mathbf{x})$. Tato úprava nám tedy říká, že pokud $p_A(\mathbf{x})$ je malé, můžeme ignorovat omezení, že dlužník může zdefaultovat jen jednou, a reprezentovat jeho default jako Poissonovsky rozloženou náhodnou veličinu spíše, než jako Bernoulliovskou. Exponenciální forma pravděpodobnostní vytvořující funkce je pak esenciální při výpočtech uvnitř modelu.
Podmíněně na $\mathbf{x}$, defaulty jednotlivých dlužníků jsou vzájemně nezávislé, proto můžeme vytvořující funkci pravděpodobností celkového počtu defaultů v kmeni vyjádřit jako:

$$F(z|\mathbf{x}) = \prod_A F_A(z|\mathbf{x}) = \prod_A exp(p_A(\mathbf{x})(z-1)) = exp(\mu(\mathbf{x})(z-1)) \tag{3.8}$$

kde $\mu(\mathbf{x}) \equiv \Sigma_A p_A(\mathbf{x})$.
Vytvořující funkce pravděpodobností má pro nás velice důležitou vlastnost, a to že:

- Jestliže $F_\kappa(z|\mathbf{x})$ je vytvořující funkcí náhodné veličiny κ za podmínky $\mathbf{x}$, a $\mathbf{x}$ má hustotu $h(\mathbf{x})$, pak nepodmíněná pravděpodobnostní vytvořující funkce κ je $F_\kappa(z) = \int_x F_\kappa(z|\mathbf{x})h(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.

Můžeme tedy,abychom dostali nepodmíněnou pravděpodobnostní vytvořující funkci $F(z)$, integrovat $F(z|\mathbf{x})$ podle $\mathbf{x}$ a odstranit tak vliv rizikových faktorů, které jsou z předpokladu nezávislé a mají Gama rozložením s jednotkovou střední hodnotou a rozptylem σ_k^2, $k = 1, \dots, K$. Snadno se tedy dostáváme k rovnosti

$$F(z) = \prod_{k=1}^{K} \left(\frac{1 - \delta_k}{1 - \delta_k z} \right)^{1/\sigma_k^2} \tag{3.9}$$

$$\text{kde } \delta_k \equiv \frac{\sigma_k^2 \mu_k}{1 + \sigma_k^2 \mu_k} \text{ a } \mu_k \equiv \Sigma_A w_{Ak} \bar{p}_{\zeta(A)} \tag{3.10}$$

Vyjádření vytvořující funkce pravděpodobností rozdělení počtu defaultů indikuje, že celkový počet defaultů v portfoliu je součtem K nezávislých negativně-binomicky rozložených náhodných veličin.
Pro určení distribuce, vztahující se k této vytvořující funkci pravděpodobností, je možno rozvinout $F(z)$ do Taylorovy řady. Pokud jsou tedy pravděpodobnosti jednotlivých defaultů malé, avšak ne nutně navzájem ekvivalentní, dostaneme pravděpodobnost výskytu n defaultů v portfoliu jako koeficient u z^n ve zmíněném Taylorově rozvoji funkce v bodě 0.
Druhou ze zmiňovaných vytvořujících funkcí pravděpodobností je pak $G(z)$, vytvořující funkce pravděpodobnosti výše ztrát.
Předpokládejme že LGD je konstatní část λ z celkového objemu expozice. Nechť dále L_A značí velikost expozice u dlužníka A. Abychom mohli využít výhod výpočetního modelu, je třeba vyjádřit objemy expozic λL_A jako celočíselné násobky pevné jednotky ztráty (např. milion korun). Základní jednotku ztráty, tzv. *standardizovanou expozici* značíme ν_0 a její celočíselné násobky pak jako *standardizované expoziční úrovně*. Standardizovaná expozice dlužníka A značená $\nu(A)$ je pak ekvivalentní hodnotě $\lambda L_A/\nu_0$ zaokrouhlené na nejbližší celé číslo.
Označme tedy G_A vytvořující funkci pravděpodobností ztráty u dlužníka A. Pak pravděpodobnost ztráty $\nu(A)$ jednotek na portfoliu, skládajícím se pouze z onoho dlužníka, musí být rovna pravděpodobnosti defaultu tohoto dlužníka, tedy:

$$G_A(z|\mathbf{x}) = F_A(z^{\nu(A)}|\mathbf{x}) \tag{3.11}$$

Užitím podmíněné nezávislosti defaultů nyní dostáváme podmíněnou vytvořující funkci pravděpodobností v celém portfoliu

$$G(z|\mathbf{x}) = \prod_A G_A(z|\mathbf{x}) = exp\Big(\sum_{k=1}^{K} x_k \sum_A \bar{p}_{\zeta(A)} w_{Ak}(z^{\nu(A)} - 1)\Big) \qquad (3.12)$$

A jako už v předchozím případě i zde se zbavíme závislosti na rizikových parametrech $\mathbf{x}$ integrací a dostáváme tak

$$G(z) = \prod_{k=1}^{K} \Big(\frac{1-\delta_k}{1-\delta_k P_k(z)}\Big)^{1/\sigma_k^2} \text{ kde } P_k(z) = \frac{1}{\mu_k} \sum_A w_{ik} \bar{p}_{\zeta(A)} z^{\nu(A)} \qquad (3.13)$$

kde δ_k a μ_k jsou opět definovány jako v rovnici (3.9).
Nepodmíněná pravděpodobnost výskytu n jednotek ztrát ν_0 v celém portfoliu je, jako v minulém případě, dána koeficientem u z^n v Taylorově rozvoji řady $G(z)$ v bodě 0.

3.2 *CreditMetrics*

Následující kapitola nás seznámí s metodologií modelu CreditMetrics z dílny investiční společnosti J.P. Morgan. Tento model hodnotí kreditní riziko portfolia na základě změny hodnoty aktiva dané změnou kreditní kvality dlužníka. Přístup tvůrců z J.P Morgan se liší od předchozího modelu již v tom, že zahrnuje nejen možný default dlužníka, ale postihuje také potenciální změnu jeho kreditní kvality prezentovanou pohybem mezi jednotlivými ratingovými kategoriemi. Pro naše srovnávací účely však bude výhodné omezit se při výpočtech pouze na stavy selhal (default) / bez problémů dostál svým závazkům.

Model *CreditMetrics* spočívá v simulaci hodnot portfolia metodami Monte Carlo a jejich následným porovnáním s tzv. prahovými hodnotami, jejichž překročení znamená posun klienta do jiné kategorie. Výstupen plného modelu *CreditMetrics* tedy není změna hodnoty portfolia daná jen defaulty jednotlivých dlužníků, ale změna tržní hodnoty aktiv daná defaulty nebo přechody dlužníků mezi jednotlivými ratingovými kategoriemi. Nejdříve si však objasněme myšlenkový proces, který za touto metodou stojí.
Jde o matematický rámec, vyvinutý v roce 1974 Robertem Mertonem, zakládající se na přístupu k oceňování opcí, jenž aplikujeme při hodnocení aktiv korporátních klientů. Předpokládá se, že hodnota těchto aktiv, označme ji V_t, se chová jako standardní geometrický Brownův pohyb, který můžeme popsat rovnicí jako:

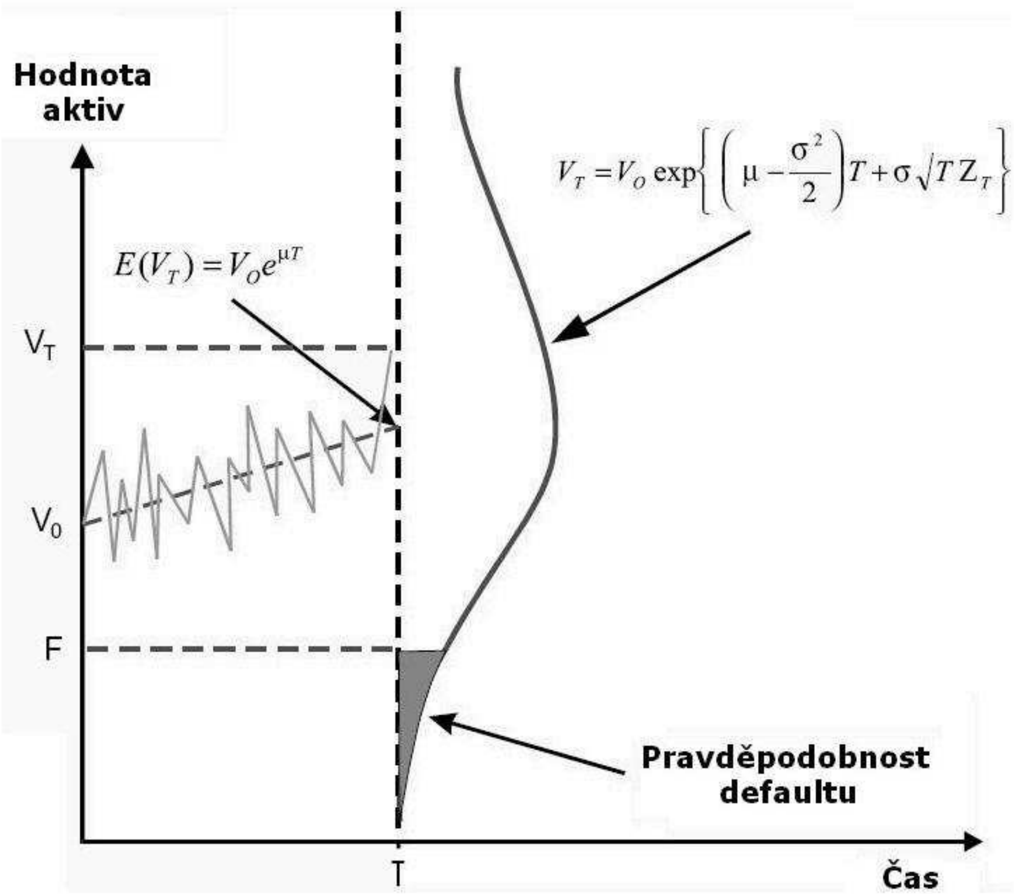
$$V_t = V_0 exp\left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \sqrt{t} Z_t \right\} \tag{3.14}$$

kde $Z_t \sim N(0,1)$ a kde μ a σ^2 jsou střední hodnota a rozptyl růstu hodnoty aktiv této společnosti, kterou můžeme zapsat jako dV_t/V_t. V_t má tedy logaritmicko-normální rozložení se střední hodnotou pro niž v čase t platí:

$$E(V_t) = V_0 exp\{\mu t\} \tag{3.15}$$

Je však nutno uvést další předpoklad, a to že daná společnost má v našem případě velice jednoduchou kapitálovou strukturu. Platí pro ni, že je financována pouze ze jmění S_t a jednoho úvěrového instrumentu s nulovým kupónem a dobou splatnosti T. Tento instrument má nominální hodnotu F a současnou třžní hodnotu B_t.
Za těchto předpokladů pak default může nastat pouze v okamžiku splatnosti úvěru T, pokud hodnota aktiv V_t je v tomto okamžiku nižší než smlouvou stanovená platba jeho závatků F.

Obrázek 3.1, převzatý z M. Crouhy a kolektiv [2], pak ilustruje distribuci hodnoty aktiv v okamžiku splatnosti úvěru T a také pravděpodobnost defaultu, kterou značí šedá plocha pod F.



Obrázek 3.1: Distribuce hodnoty aktiv

Poněvadž víme, že znormovaná a následně zlogaritlomaná výše zisků $log\left(\frac{V_t}{V_0}\right)$ má normální rozložení $N((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma\sqrt{t})$, můžeme pro klienta A po zavedení p_{Def} značící pravděpodobnost defaultu a V_{Def} značící kritickou hodnota aktiv takovou, že platí

$$p_{Def} = Pr[V_t \leq V_{Def}] \tag{3.16}$$

tvrdit, že default nastává, pokud Z_t splňuje rovnost:

$$\begin{aligned} p_{Def} &= Pr\left[\frac{log(V_{Def}/V_0) - (\mu - (\sigma^2/2))t}{\sigma\sqrt{t}} \geq Z_t\right] \\ &= Pr\left[Z_t \leq -\frac{log[V_0/V_{Def}] + [\mu - (\sigma^2/2)]t}{\sigma\sqrt{t}}\right] \equiv N(-d_2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

kde normalizovaný zisk

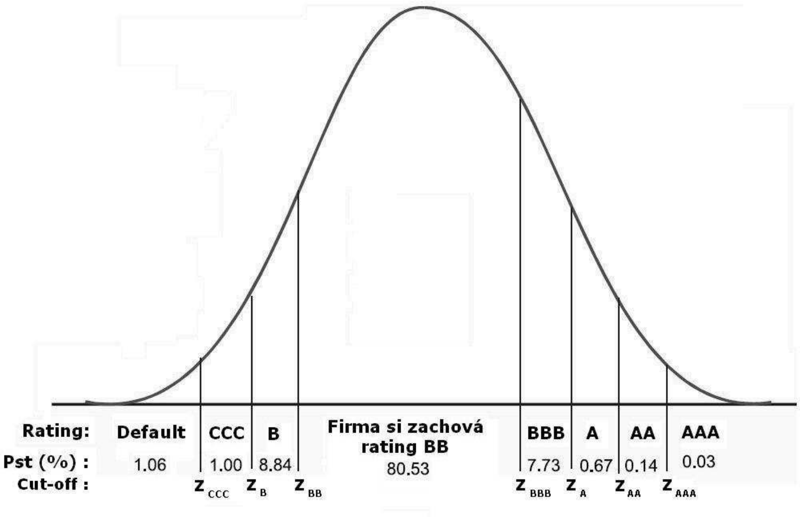
$$r = \frac{log(V_t/V_0) - (\mu - (\sigma^2/2))t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (3.18)$$

má N(0,1) rozložení. $-d_2$ je zde prahová hodnota odpovídající příslušnému kvantilu normovaného normálního rozložení pravděpodobnosti selhání dlužníka daného ratingu. Pro kritickou hodnotu aktiv V_{Def}, jejíž překročení značí default, pak platí rovnost:

$$d_2 \equiv \frac{log(V_0/V_{Def}) + (\mu - (\sigma^2/2))t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (3.19)$$

V případě plného modelu $CreditMetrics$ bychom pak tuto metodu rozšířili zahrnutím změn kreditní kvality klienta. To na příkladu ilustruje obrázek 3.2 znázorňující distribuci hodnoty aktiv firmy s počátečním ratingem BB a její případný přechod do jiné ratingové kategorie, nebo zdefaultování.

Jak je z obrázku zřejmé, rozšíření modelu spočívá v rozškálování distribuce do několika oddílů takovým způsobem, že pokud bychom provedli náhodný výběr z této distribuce, dostali bychom hodnoty příslušné tabulky pravděpodobností přechodů. Hodnoty těchto pravděpodobností pak korespondují s prahovými hodnotami Z_{AAA} až Z_{CCC}.
Avšak pro naše účely modelování náhodných scénářů vývoje platební schopnosti klienta zaveďme v modelu $CreditMetrics$ pro každého dlužníka náhodné číslo y_A s normovaným normálním rozložením. Stav dlužníka na konci pozorované periody je pak dán polohou y_A a příslušné prahové hodnoty. V případě defaultu předpokládejme, že výše ztráty, kterou věřitel utrpí je pevný podíl λ z nominální hodnoty dluhu. Tím se dostáváme k druhému výraznému omezení, neboť v plné verzi model umožňuje působení idiosynchronního rizika na ztráty. V případě, že nedojde k defaultu, ale v našem případě zůstává hodnota dluhu nezměněna, a naše upravená verze je tak, než modelem změny tržní hodnoty, spíše modelem ztrát hodnoty zůstatkové.
Hodnota aktiv y_A dlužníka A na časovém horizontu je modelována jako lineární funkce vektoru rizikových faktorů $\mathbf{x}$ a idiosynchronních faktorů ϵ_A.



Obrázek 3.2: Hodnota aktiv firmy s počátečním ratingem BB

Vektor $\mathbf{x}$ vnáší do modelu korelace působením vnějších faktorů, ovlivňujících jednotlivé dlužníky. Relativní citlivost dlužníka A na danou sadu rizikových faktorů $\mathbf{x}$ je dána váhovým vektorem w_A. Naopak ϵ_A prezentuje v modelu faktor pro každého dlužníka ryze specifický. Můžeme tedy shrnout:

$$y_i = \mathbf{x}\mathbf{w}_A + \eta_A \epsilon_A \tag{3.20}$$

s poznámkou, že η_A udává váhu idiosynchronního efektu pro dlužníka.
Dle předpokladu má vektor rizikových paramtrů $\mathbf{x}$ normální rozložení s nulovou střední hodnotou a kovarianční maticí Ω. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že na diagonále Ω jsou jednotky tak, aby marginální rozložení jednotlivých faktorů byla $N(0,1)$. Opět bez újmy na obecnosti lze položit rozptyl y_A roven jedné (např., že $\mathbf{w}_i'\Omega\mathbf{w}_i + \eta_i^2 = 1$).
V plném modelu je, jak už bylo zmíněno dříve, s každou počáteční kategorií ζ daného dlužníka, spojena také prahová hodnota C_ζ. V našem případě se však omezíme na prahovou hodnotu pouze jednu a zavedeme, že pokud latentní proměnná y_A dlužníka A klesne pod $C_{\zeta(A)}$, dojde k defaultu. Můžeme následně psát, že selhává schopnost dlužníka dostát svým závazkům pokud

$$\mathbf{x}\mathbf{w}_A + \eta_A \epsilon_A < C_{\zeta(A)} \tag{3.21}$$

Hodnoty C_ζ jsou v modelu nastaveny tak, aby nepodmíněná pravděpodobnost defaultu dlužníka z ratingové kategorie ζ byla rovna $\bar{p}_\zeta$. To znamená, že

$\bar{p}_\zeta = \Phi(C_\zeta))$, kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozložení a $\bar{p}_\zeta$ je nepodmíněná pravděpodobnost defaultu dlužníka z ratingové kategorie ζ.
Metoda *CreditMetrics* dále spočívá v aplikaci simulací typu Monte Carlo. Abychom obdrželi náhodný výběr z portfolia, realizujeme nejprve náhodný výběr vektoru $\mathbf{x}$ s vícerozměrným rozložením N(0,Ω). Následně provedeme náhodný výběr sady vzájemně nezávislých stejně rozložených idiosynchronních náhodných veličin ϵ.
Dalším krokem po realizaci těchto náhodných výběrů je určení hodnoty latentní proměnné y_i, kterou následně porovnáme s prahovými hodnotami $C_{\zeta(A)}$ a zjistíme tak statut dlužníka, jenž dále prezentujeme veličinou D_A, která nabývá hodnot jedna pro default a nula v případě dostání dlužníka svým závazkům.
Ztráta na modelovaném portfoliu pro tento výběr je pak dána jako

$$\sum_A D_A \lambda L_A \tag{3.22}$$

Pro odhad výsledků pak mnohokrát opakujeme celý proces. Ztráty na portfoliu dané každým z náhodných výběrů jsou následně uspořádány tak, aby konečně utvořily kumulativní distribuci ztrát portfolia.

3.3 Rozdíly mezi modely

V této kapitole se již zaměříme na srovnání obou metod kvantifikace kreditního rizika. Budeme se zde zabývat především rozdílností obou metodologií, také však jejich vzájemnou převoditelností. K praktickému srovnání funkčnosti modelů na portfoliích různé kvality a kvantity se dostaneme až v následujících oddílech.

Modely *CreditMetrics* a *CreditRisk*$^+$ se liší jak v distribučních předpokladech, formách užitých funkcí, technikách řešení, navrhovaných metodách kalibrací, tak i v použitém matematickém jazyce.
Oba modely mohou být promítnuty do svého protějšku, což však prokazuje, že rozdíl mezi latentní proměnnou v reprezentaci *CreditMetrics* a korelovanými pravděpodobnostmi defaultu v modelu *CreditRisk*$^+$ je rozdíl prezentace a ne podstaty. Podobně, metody pro kalibraci parametrů, navrhované v technických dokumentech Credit Suisse Financial Products [1] a G. M. Grupton [5], jsou uživatelům velmi nápomocny avšak nejsou nutným předpokladem funkčnosti metodologií.
Oproti tomu, distribuční předpoklady a formy funkcí jsou modelům vlastní a

neodvozené. V obou modelech volba distribuce systémových rizikových faktorů $\mathbf{x}$ a forma funkce podmíněné pravděpodobnosti defaultu $p_A(\mathbf{x})$ dohromady dávají tvar sdruženým distribucím defaultů dlužníků napříč portfoliem. Specifikace modelu *CreditMetrics* o normálním rozložení vektoru $\mathbf{x}$ a distribuční funkci příslušící $p_A(\mathbf{x})$, ve své podstatě volitelné, mohou být subjektivní, nicméně silně ovlivňují dosahované výsledky. Je možné nahradit mnoharozměrné rozložení rozložením normálním a stále aplikovat metody Monte Carlo modelu *CreditMetrics*. Každopádně, i když by byly parametry překalibrovány na stejnou střední hodnotu a rozptyl ztráty na portfoliu, celkový tvar rozložení ztráty se bude lišit a tudíž se budou lišit i hodnoty percentilů v koncových oblastech. Volba gamma rozložení a forem funkcí podmíněných pravděpodobností defaultu jsou podobně charakteristické pro $CreditRisk^+$.
Zbylé odlišnosti mezi těmito dvěma modely můžeme připsat na vrub rozdílům v metodách řešení. Aplikace Monte Carlo v modelu *CreditMetrics* je flexibilní avšak výpočetně náročnější. $CreditRisk^+$ oproti tomu nabízí efektivitu řešení, která je však vykoupena dodatečnými omezeními a aproximacemi. Z těchto odlišností můžeme za hlavní považovat, že:

- *CreditMetrics* je model přirozeně otevřený více-stavovým výsledkům a nejistotě ve výši nazpět získaných financí, kdežto uzavřený $CreditRisk^+$ model je pouze dvou-stavový s pevnou výší recovery rate.
- $CreditRisk^+$ zavádí "Poissonovskou aproximaci" na podmíněné rozložení defaultů.
- $CreditRisk^+$ zaokrouhluje expozice jednotlivých dlužníků na nejbližší prvek konečné množiny předem daných hodnot.

Při promítání modelu $CreditRisk^+$ lze zkonstruovat verzi metody Monte Carlo, která se vyhne Poissonovské a expoziční aproximaci a umožní užití rizikovosti výše ztrát. Je už méně přímočaré, avšak stále dobře možné vytvořit mnohorozměrné zobecnění metody Monte Carlo i celého modelu $CreditRisk^+$. Neboť výpočetní výhody mohou být pro některé uživatele modelu $CreditRisk^+$ směrodatné, je třeba efekt aproximací na přesnost tohoto modelu přesněji kvantifikovat. Proto se v dalších částech budeme zabývat i simulacemi, kterými bychom uvedený efekt objasnili.
Za zmínku také stojí, že s předpokladem nezávislosti odvětvových rizikových faktorů v metodologii $CreditRisk^+$ nedojde k žadné ztrátě na obecnosti. V obou modelech je vektor vah w nezávislý, až na omezení daná měřítkem. V *CreditMetrics* může být vektor odvětvových rizikových faktorů $\mathbf{x}$ ortogonalizován a korelace zakonponovány do $\mathbf{w}$. Avšak se zavedením ortogonality do

$CreditRisk^+$ je třeba klást větší důraz na identifikaci a kalibraci odvětvových rizik v tomto modelu.

3.3.1 Promítnutí *CreditMetrics* do $CreditRisk^+$

$CreditRisk^+$ je ve své podstatě modelem rizika defaultů. Každý z dlužníků má na konci periody, v níž jej sledujeme, jen dva možné stavy selhal (default) a nebo dostál svým, ze smlouvy plynoucím, závazkům. Pro promítnutí modelu *CreditMetrics* do modelu $CreditRisk^+$ tedy musíme uvažovat jen omezený model *CreditMetrics* s pouze dvěma stavy a fixní expozicí. Dále je nutno slučit jednotlivé expozice každého dlužníka tak, aby každému dlužníkovi v portfoliu odpovídala právě jedna expozice. Nechť tedy index A značí dlužníka A a nechť ζ_A je jeho počáteční ratingový stupeň. Pro každý ratingový stupeň p_ζ nechť značí nepodmíněnou pravděpodobnost defaultu na daném časovém horizontu. Dále budiž $\mathbf{x}$ vektorem rizikových faktorů *CreditMetrics* a Σ kovarinční maticí $\mathbf{x}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že na diagonále Σ jsou jednotky, tak aby marginální distribuce měly normální rozložení N(0,1). Jak jsme již znímili v podrobném popisu modelu *CreditMetrics*, stav dlužníka A je reprezentován latentní proměnnou y_A zadanou jako

$$y_A = \mathbf{x}\mathbf{w}_A + \sigma_A \epsilon_A \tag{3.23}$$

Bez újmy na obecnosti nyní můžeme zavést, že y_A má rozptyl roven jedné. (např. že $\mathbf{w}_A' \Sigma \mathbf{w}_A + \sigma_A^2 = 1$). S každým ratingovým stupněm je také asociována prahová hodnota C_ζ a default dlužníka A popisuje výše uvedená rovnice 3.21.
Nechť $p_A(\mathbf{x})$ je pravděpodobnost defaultu dlužníka A při vektoru rizikových faktorů $\mathbf{x}$. Toto je dáno rovnicí

$$p_A(\mathbf{x}) = \Phi((C_{\zeta(A)} - \mathbf{x}\mathbf{w}_A)/\sigma_A) \tag{3.24}$$

kde Φ je distribuční funkce normálního rozložení.
Nyní můžeme přímo aplikovat metodologii $CreditRisk^+$. Nejprve odvodíme vytvořující funkci podmíněné pravděpodobnosti $F(z|\mathbf{x})$ pro celkový počet defaultů v portfoliu. Defaulty jednotlivých dlužníků jsou vzájemně nezávislé. Závisejí pouze na vektoru $\mathbf{x}$. Tudíž

$$\begin{aligned} F(z|\mathbf{x}) = \prod_A F_A(z|\mathbf{x}) &= \prod_A (1 - p_A(\mathbf{x}) + p_A(\mathbf{x})z) \\ &\approx \prod_A e^{p_A(\mathbf{x})(z-1)} = e^{\mu(\mathbf{x})(z-1)} \end{aligned} \tag{3.25}$$

kde $\mu(x) \equiv \Sigma_A p_A(\mathbf{x})$. Abychom získali vytvořující funkci nepodmíněné pravděpodobnosti $F(z)$, integrujeme nyní podle $\mathbf{x}$

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z|\mathbf{x})\phi_\Sigma(\mathbf{x})dx \tag{3.26}$$

kde ϕ_Σ je distribuční funkce vícerozměrného normálního rozdělení N(0,Σ). Nepodmíněná pravděpodobnost, že se v daném portfoliu vyskytne právě n defaultů, je dána koeficientem u z^n v Taylorově rozvoji $F(z)$:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} exp(-\mu(\mathbf{x}))\frac{\mu(\mathbf{x})^n z^n}{n!}\phi_\Sigma(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} exp(-\mu(\mathbf{x}))\mu(\mathbf{x})^n\phi_\Sigma(\mathbf{x})d\mathbf{x}\Big)z^n \end{aligned} \tag{3.27}$$

Tyto integrály jsou analiticky těžko určitelné a v praxi bývají aproximovány použitím metodiky Monte Carlo.
Závěrečný krok v modelu $CreditRisk^+$ bude určení vytvořující funkce pravděpodobnosti ztrát $G(z)$. Nechť tedy L_A je ztráta daná defaultem na expozici za dlužníkem A. Zaokrouhlíme L_A na nejbližší prvek ze standardizované množiny výší ztrát $\{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$. Dále rozdělme portfolio na části S_j $(j = 1, \ldots, m)$ dle výše expozic. (Dlužník A je v subportfoliu S_j právě tehdy, když $L_A = \nu_j$). Ať G_j je vytvořující funkcí pravděpodobností ztrát uvnitř subportfolia S_j. Pravděpodobnost ztráty $n\nu_j$ v S_j se musí rovnat pravděpodobnosti n defaultů v S_j, tedy koeficient u $z^{n\nu_j}$ v rozvoji $G_j(z|\mathbf{x})$ musí odpovídat koeficientu u z^n v rozvoji $F_{S_j}(z|\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} G_j(z|\mathbf{x}) &= F_{S_j}(z^{\nu_j}|\mathbf{x}) = \prod_{A\in S_j} F_A(z^{\nu_j}|\mathbf{x}) \\ &= \prod_{A\in S_j} exp(p_A(\mathbf{x})(z^{\nu_j} - 1)) = exp(\mu_j(\mathbf{x})(z^{\nu_j} - 1)) \end{aligned} \tag{3.28}$$

kde $\mu_j \equiv \Sigma_{A\in S_j} p_A(\mathbf{x})$. A neboť jsou vzájemně nezávislé jednotlivé defaulty, jsou stejně tak vzájemně nezávislé i ztráty subportfolií a tudíž

$$G(z|\mathbf{x}) = \prod_j G_j(z|\mathbf{x}) = exp\Big(\sum_j \mu_j(\mathbf{x})(z^{\nu_j} - 1)\Big) = exp\Big(\mu(\mathbf{x})(P(z|\mathbf{x}) - 1)\Big) \tag{3.29}$$

kde $P(z|\mathbf{x}) \equiv \big(\Sigma_j \mu_j(\mathbf{x})z^{\nu_j}\big)/\mu(\mathbf{x})$. A konečně tedy získáváme $\mathbf{x}$ pro určení $G(z)$. Nepodmíněná pravděpodobnost výskytu právě n ztrát v celém portfoliu je opět dána koeficientem u z^n v Taylorově rozvoji $G(z)$ v bodě 0.

3.3.2 Promítnutí *CreditRisk*$^+$ do *CreditMetrics*

Překlad opačným směrem je podobně přímočarý. Nechť x je vektor rizikových faktorů *CreditRisk*$^+$. Předpokládejme, že tyto faktory jsou ortogonální a x_k $(k = 1, ..., n)$ mají $Gama(\alpha_k, \beta_k)$ rozdělení. Nechť také $\mu_k = \alpha_k\beta_k$ je očekávaná hodnota x_k.
Použijeme tentokrát nejobecnější reprezentaci modelu *CreditRisk*$^+$, která umožňuje závislost pravděpodobnosti defaultu dlužníka A na více než jen jednom faktoru. Nechť $\mathbf{w}_A$ je n-rozměrný prvek reprezentující váhy rizikových faktorů pro dlužníka A. Pravděpodobnost defaultu tohoto dlužníka je pak dána jako

$$p_A(\mathbf{x}) = p_{\zeta(A)} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k} w_{Ak}. \tag{3.30}$$

Tak jako v jedno-faktorové verzi modelu *CreditRisk*$^+$, je i zde $p_{\zeta(A)}$ nepodmíněná pravděpodobnost defaultu.
Abychom se mohli přesunout do rámce modelu *CreditMetrics* přiřadíme dlužníku A latentní proměnou y_A definovanou jako:

$$y_A = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k} w_{Ak} \right)^{-1} \epsilon_A \tag{3.31}$$

Rizikové faktory ϵ_A jsou vzájemně nezávislé, stejně rozložené náhodné veličiny s exponenciálním rozložením s parametrem 1. Dlužník A pak defaultuje právě tehdy, když $y_A < p_{\zeta(A)}$. Pravděpodobnost defaultu je dána:

$$\begin{aligned} P(y_A < p_{\zeta(A)}|\mathbf{x}) &= P\Big(\epsilon_A < p_{\zeta(A)} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k} w_{Ak}|\mathbf{x}\Big) \\ &= 1 - exp\Big(-p_{\zeta(A)} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k} w_{Ak}\Big) \\ &\approx p_{\zeta(A)} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k} w_{Ak} = p_A(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{3.32}$$

kde druhý řádek rovnice jsme dostali použitím distribuční funkce exponenciálního rozložení a poslední řádek pak spočívá v užití rovnic (3.25) uvedených výše. Ona pravděpodobnost defaultu je tedy jednoduše $p_{\zeta(A)}$.
Ve specifikaci klasického *CreditMetrics* modelu je latentní proměnná zadána jako suma náhodných veličin o normálním rozložení. Pokud promítáme *CreditRisk*$^+$ do rámce *CreditRisk*, latentní proměnná nabývá formu vícerozměrné veličiny, ale podstata zůstává stejná. V modelu *CreditMetrics*

jsou prahové hodnoty C_ζ určeny jako funkce přidružených nepodmíněných pravděpodobností p_ζ. Zde, oproti tomu, jsou prahové hodnoty dány pouze pravděpodobnostmi p_ζ. Až na tyto výjimky je pak proces identický. Simulace portfolia bude sestávat z náhodných výběrů sady odvětvových rizikových faktorů a sady idiosynkratických rizikových faktorů. Odsud jsou pak spočteny latentní proměnné náležící dlužníkovi a následně určeny výskyty defaultů.

3.3.3 Kalibrace modelů

V každém modelu kreditníh rizika portfolia je struktura korelací pravděpodobností defaultů podstatným determinantem distribuce ztrát. Zvláštní pozornost je tedy třeba věnovat vzájemné konzistenci kalibrací parametrů, které tyto korelace definují.
Pro jednoduchost jsme v našich modelech uvažovali pouze jeden faktor systematického rizika $\mathbf{x}$. Uvnitř každé ratingové kategorie pak jsou jednotliví dlužníci, až na velikost expozice, ze statistického hlediska totožní. Znamená to pro nás, že každý klient ratingové kategorie ζ má nepodmíněnou pravděpodobnost defaultu $\bar{p}_\zeta$ a má také stejné váhy systematického faktoru w_ζ. Velikosti těchto vah pak závisí na volbě modelu. Hodnoty $\bar{p}$ jsme nastavili podle průměrných ročních pravděpodobností defaultu z Moody's Investors Service [6].
Kalibrace vah w_ζ pak probíhá zpětně od historických volatilit pravděpodobností defaultů. Nejprve se odhadnou rozptyly V_ζ podmíněných pravděpodobností defaultů $p_\zeta(\mathbf{x})$. Pro kalibrační účely je pak nejvýhodnější vyjádřit volatilitu pomocí normalizované standardní odchylky $\sqrt{V_\zeta}/\bar{p}_\zeta$.
Druhý krok při určení vah w_ζ je pak závislý na modelu. V našem případě při kalibraci vah modelu *CreditMetrics* užijeme následující předpoklad:

$$V_\zeta \equiv Var[p_\zeta(\mathbf{x})] = \Phi(C_\zeta, C_\zeta, w_\zeta^2) - (\bar{p}_\zeta)^2 \tag{3.33}$$

kde $\Phi(z_1, z_2, \rho)$ je podmíněná distribuční funkce dvourozměrného normálního rozdělení náhodné veličiny $Z \equiv [Z_1, Z_2]'$, pro niž platí:

$$E[Z] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ a } Var[Z] = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

a kdy $\bar{p}_\zeta$ jsou výše zníněné historické pravděpodobnosti defaultu a ρ předpokládané míry korelace.
Při daných prahových hodnotách C_ζ, které jsou funkcemi $\bar{p} - \zeta$ a normalizovaných volatilitách $\sqrt{V_\zeta}/\bar{p}_\zeta$, jsou nezáporné váhy w_ζ jednoznačně určeny nelineární rovnicí 3.33. Důkaz uvedeného tvrzení je možno dohledat v M. B. Gordy [4].

V modelu $CreditRisk^+$ s jedním faktorem systematického a specifického idiosynchronního rizika lze parametrizaci flexibilně provést jako model se dvěma rizikovými faktory v němž má první faktor nulovou volatilitu, a tudíž je vždy roven jedné, jak uvádí publikace Credit Suisse Financial Products [1]. Jako na první faktor se zde odkazujeme na faktor specifický. Nechť w_ζ jsou váhy u x_2, které jsou jednotné mezi klienty jednoho ratingového stupně, avšak mohou se lišil mezi stupni, pak váhy u x_1 musí být $1-w_\zeta$. Pro zjednodušení značení můžeme položit první rizikový faktor x_1 identicky roven jedné, přeznačit druhý faktor x_2 na x a standardní odchylku σ_2 faktoru x_2 na σ. Po tomto přeznačení pak v modelu $CreditRisk^+$ pro rozptyl pravděpodobnosti defaultu dlužníka z ratingové kategorie ζ platí:

$$V_\zeta = Var[\bar{p}_\zeta(1 - w_\zeta + w_\zeta x)] = (\bar{p}_\zeta w_\zeta \sigma)^2 \tag{3.35}$$

Tudíž normalizovaná volatilita $\sqrt{V_\zeta}/\bar{p}_\zeta$ je rovna $w_\zeta\sigma$.
Vzhledem k σ jsou váhy w_ζ jednoznačně určeny, avšak nám stále schází další informace pro volbu parametru σ. Role σ jako takové je však z tohoto pohledu v modelu téměř zanedbatelná, neboť pro volatilitu pravděpodobnosti defaultu je určující pouze součin $w_\zeta\sigma$. Jsou to však hodnoty vyšších momentů rozložení $p_A(\mathbf{x})$, které na parametru sigma závisí přímo a ne pouze prostřednictvím součinu $w_\zeta\sigma$, neboť σ ovlivňuje nejen velikost, ale také tvar rozložení $\mathbf{x}$. Díky tomu jsou pak na volbu σ velmi citlivé koncové pravděpodobnosti ztrát.

Kapitola 4

Aplikace modelů

V následujících kapitolách se dostáváme z teoretické do roviny praktické. Na portfolia fiktivní i na reálný kmen poskytnutý Českou spořitelnou a.s. aplikujeme modely $CreditRisk^+$ *a* $CreditMetrics$. *Ještě před samotnou aplikací obou metod je však podrobně popsán účel a postup konstrukce fiktivních portfolií doplněn o popis programového zpracování obou modelů.*

4.1 Parametry modelů

Za účelem srovnávání chováni obou popisovaných výpočetních modelů kreditního rizika byla vytvořeno sada fiktivních typových portfolií předem definovaných vlastností. Výsledky aplikací modelů $CreditRisk^+$ a $CreditMetrics$ na těchto kmenech jsou hlavními indiciemi pro interpretaci obou metodologií. Nejdříve však je nutno upřesnit několik parametrů na nichž byly oba modely zbudovány.

4.1.1 Ratingové škály

Rozlišení kvality klientů ve všech kmenech bylo užito jejich rozdělení do ratingových kategorií. Každé z těchto kategorií pak byly vlastní jak pravděpodobnost defaultu klienta tak rozptyl této pravděpodobnosti.
Pro stratifikaci dlužníků se nejčastěji užívají škály *Moody's Investors Service* a *Standard&Poors (S&P)*. Převod mezi oběma zmíněnými škálami udává tabulka 4.1:

Kromě výše uvedených ratingových kategorií ještě Moody's používá "1"

S&P	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	CC	D
Moody's	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Ca	C

Tabulka 4.1: Převod mezi ratingovými kategoriemi

pro indikaci mírně lepší a "3" pro indikaci mírně horší kvality, například rating A1 je tedy o málo vyšší, než A, kdežto A3 je o málo nižší. Škála S&P může být obdobně modifikována užitím "+" a "-", kde "+" značí mírně vyšší a "-" mírně nižší kvalitu.

4.1.2 Pravděpodobnosti defaultů

Pro každou z ratingových kategorií, které se v datech vyskytly, byly z Moody's Investors Service [6] převzaty historické pravděpodobnosti defaultu. Metodou, uvedenou v kapitole *Kalibrace modelů* pak byly modely nastaveny tak, aby dávaly totožné hodnoty nepodmíněných očekávaných ztrát pro klienty daných ratingových kategorií. Dalším cílem kalibrací rozptylů bylo dosažení 50%-ní korelace uvnitř odvětví při zachování nulové korelace mezi odvětvími. Všechny tyto údaje shrnuje tabulka 4.2.

Moody's Rating	Pst. Defaultu v %	Rozptyl ($\times 10^{-4}$)
Aaa	0,00	0,00000
Aa2	0,05	0,207427
A2	0,03	0,103493
A3	0,04	0,153099
Baa1	0,20	1,365110
Baa2	0,14	0,841263
Baa3	0,49	4,586375
Ba1	0,68	7,126199
Ba2	0,62	6,294839
Ba3	2,28	35,455038
B1	3,20	54,999703
B2	6,78	141,110839
B3	11,43	261,054749
Caa	22,52	526,936123

Tabulka 4.2: Pravděpodobnosti defaultů a jejich rozptyly

Je třeba uvést,že doby do splatnosti byly u všech účtů ve všech portfoliích paušálně nastaveny jako jednoleté a že kromě ratingových klasifikací a velikostí expozic byly u každé položky všech kmenů obsaženy také informace o příslušnosti klienta k odvětvím ze škály znázorněné v tabulce 4.3.

Zemědělství a lesnictví	Těžeba nerostných surovin	Výroba zboží
Energetika a dodávky vody	Stavební průmysl	Doprava a spoje
Informace	Bankovnictví a pojišťovnictví	Reality
Služby	Veřejný sektor	Zdarvotnictví a sociální služby
Soukromá klientela	Ubytovací a restaturační služby	Ostatní činnosti

Tabulka 4.3: Odvětví

4.2 Testovací portfolia

V následujícím oddíle bude podrobně popsána konstrukce fiktivních portfolií jež jsme vytvořili pro testování citlivosti modelů na:

- velikost portfolia
- kvalitu portfolia
- koncentrace klientů portfolia

4.2.1 Portfolia různé velikosti

První sada fiktivních kmenů byla vytvořena pro testování modelů na portfoliích různých počtů klientů. Toto testování mělo odhalit velikost efektu zkreslení daného aproximací empirického rozložení Poissonovým v modelu *CreditRisk*$^+$. Všichni klienti z oněch čtyř kmenů pak měli jednotnou jak expozici, tak ratingovou skladbu. Počet klientů portfolií byl odstupňován následovně:

Portfolio	XL	L	M	S
Počet klientů	2000	1000	500	200

Tabulka 4.4: Objemy portfolií

Abychom ještě zvýraznili vliv testovaného efektu, respektive omezili vlivy ostatní, byla tato portfolia modelována při nastaveních nulové úrovně korelací v obou modelech.

4.2.2 Portfolia různé kvality

Čtyři fiktivní portfolia jsme zkonstruovali pro odhalení rozdílů chování modelů při vyhodnocování kmenů různé ratingové skladby. Pro dosažení maximálního akcentu na kvalitativní skladbu portfolií jsme tedy odstranili vlivy koncentrace uvnitř portfolia jednotným nastavením expozic všech klientů. Kvalitativní skladba těchto čtyř kmenů pak byla následující:

Každé z výše uvedených portfolií obsahovalo 4000 položek reprezentující úvěry jednotlivých klientů a distribuce ratingových kategorií, kterou shrnuje obrázek 4.1, byla převzata z M. B. Gordy [4].

Rating S&P	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
Podíl expozic klientů	3,82%	5,9%	29,26%	37,92%	19,08%	2,72%	1,3%

Tabulka 4.5: Portfolio vysoké kvality

Rating S&P	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
Podíl expozic klientů	2,92%	5%	13,38%	31,16%	32,44%	11,12%	3,98%

Tabulka 4.6: Portfolio průměrné kvality

Rating S&P	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
Podíl expozic klientů	1%	1,54%	3,7%	16,54%	38,06%	32,36%	6,8%

Tabulka 4.7: Portfolio nízké kvality

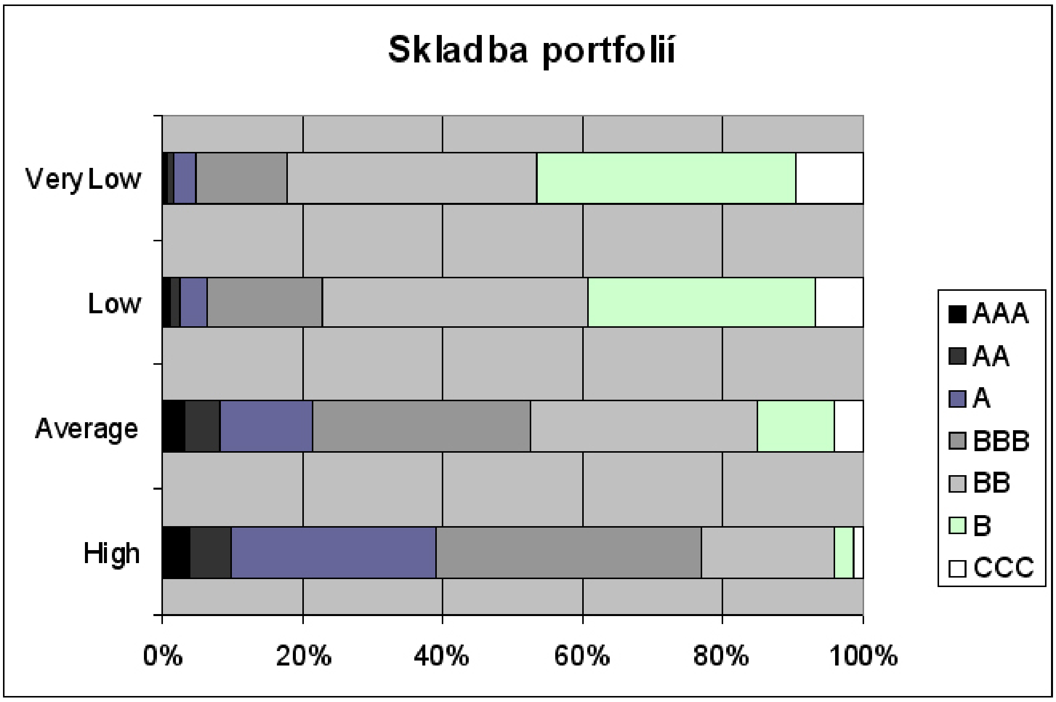
Rating S&P	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
Podíl expozic klientů	0,5%	1,02%	3,16%	13,2%	35,6%	37,02%	9,5%

Tabulka 4.8: Portfolio velmi nízké kvality

4.2.3 Portfolia různé míry koncentrace klientů

Stejně tak, jako byla první sada portfolí konstruovaná pro posouzení vlastností modelů na kmenech různé ratingové skladby, byl druhý set navržen pro testování při různé míře koncentrace klientů v portfoliu. Jelikož koncentrace má významný vliv na tvar rozložení ztrát a potažmo tedy i na hodnoty kvantilů, je třeba zmapovat citlivost obou modelů na míru koncentrace expozice uvnitř portfolia. Obrázek 4.2 pak ilustruje odlišnost normálního rozložení a rozložením výše ztrát s charekteristickým těžkým koncem typickým pro nedostatečně diverzifikované portfolio.

Nejprve pro průměrně kvalitní, a pak pro vysoce kvalitní kmeny, byly sestaveny trojice portfolií. V prvním z nich měly všechny expozice jednotnou velikost. V druhém případě byly expozice jednotné, až na deset procent klientů ratingu BB (respektive BBB v případě portfolia vysoké kvality), jejichž expozice byly pětinásobné a bylo tedy mezi nimi koncentrováno přes 35% celkové expozice kmene. Ve třetím případě pak expozice zníměných deseti procent klientů byla oproti ostatním patnácti-násobná a bylo mezi těmito deseti procenty klientů koncentrováno 62,5% celkové expozice portfolia.



Obrázek 4.1: Skladba portfolií

Tabulka 4.9 pak dává přehled zmíněných koncentrací:

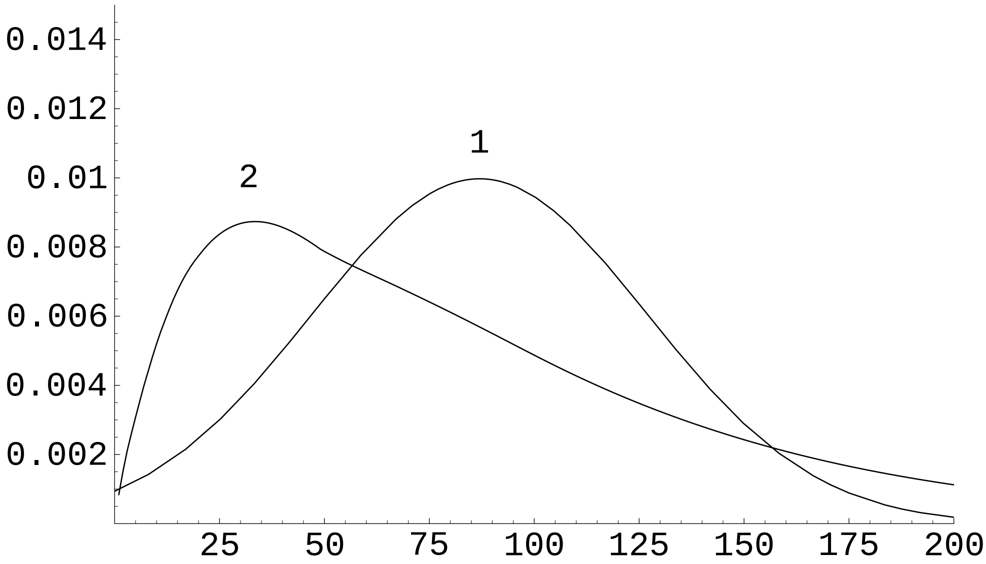
	Portfolio průměrné kvality			Portfolio vysoké kvality		
Hladina	nízká	střední	vysoká	nízká	střední	vysoká
Koncentrace v 10%	10%	35,7%	62,5%	10%	35,7%	62,5%

Tabulka 4.9: Koncentrace v portfoliích

4.3 Portfolio dat České Spořitelny a.s.

V následujícím oddíl bude popsáno portfolio reálných dat, které nám poslouží k otestování obou modelů v prostředí, pro něž jsou primárně konstruovány.

Kmen reálných dat byl poskytnut Českou Spořitelnou a.s., a jedná se o část



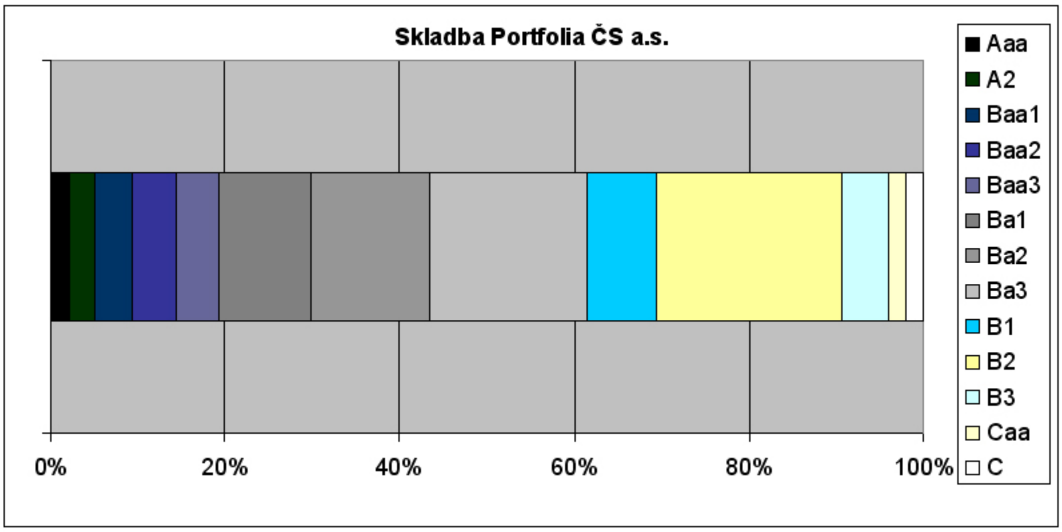
Obrázek 4.2: Odlišnost rozložení, graf "1" - Normální rozložení, graf "2" - ztráty způsobené úvěrovými riziky (osa X: výše ztrát, osa Y: pravděpodobnost)

historických dat České Spořitelny a.s. obsahujících expozice banky za korporátními klienty.
Vzorek obsahuje 2826 klientů a jejich ratingy jsou namapovány na stupnici Moody's. Stupnice je v našem případě ještě modifikována podrobnějším rozškálováním každého z hlavních stupňů na alfanumerické stupně. Dále pak je každý klient klasifikován odvětvím podle tabulky 4.3, které nejlépe charakterizuje předmět jeho podnikátelské aktivity. Datový vzorek obsahuje také informace o době splatnosti úvěrů, velikostech obratů jednotlivých klientů a jejich úrokových měrách, které jsme však v našem případě nevyužili. Naopak pro nás zásadní informací byly objemy expozic, jejichž suma dosahovala 615 632 326,6 Kč a distribuce ratingových kategorií v portfoliu, kterou uvádí tabulka 4.10.

Rating	Počet klientů	% z celku	Objem expozice v Kč	% z celku
Aaa	67	2,37	4 585 399,6	0,74
A2	83	2,94	43 358 190,0	7,03
Baa1	130	4,60	36 321 803,9	5,89
Baa2	155	5,48	73 710 222,8	11,96
Baa3	146	5,17	66 906 734,4	10,85
Ba1	319	11,29	50 721 818,6	8,23
Ba2	407	14,40	90 883 184,8	14,74
Ba3	357	12,63	55 931 973,7	9,07
B1	244	8,63	42 041 719,9	6,82
B2	634	22,44	115 483 168,4	18,73
B3	165	5,84	24 581 014,5	3,99
Caa	57	2,02	7 700 430,6	1,25
C	62	2,19	4 306 665,6	0,70

Tabulka 4.10: Distribuce ratingových kategorií v portfoliu České spořitelny a.s.

Následující obrázek 4.3 pak názorně sumarizuje popsanou distribuci.



Obrázek 4.3: Skladba portfolia České spořitelny a.s.

4.3.1 Úprava dat

Před samotnou modelovací fází bylo nutné data upravit a klasifikovat. Klasifikace spočívala v přiřazení pravděpodonosti defaultu a jejího rozptylu každé z položek na základě ratingové úrovně, na níž se daný klient nacházel. Jednotlivé hodnoty byly přiřazovány na základě historických pozorování shrnutých v tabulce 4.2. Dlužníky pak ještě, pro zjednodušení numerických výpočtů v modelu *CreditRisk*$^+$, bylo třeba rozdělit dle velikostí expozic do několika kategorií. Tyto byly konstruovány tak, aby celé portfolio rozčlenili na skupiny klientů podobných objemů expozic, avšak tak, aby počty klientů ani sumy očekávaných ztrát v každé skupině nebyly příliš nízké. Jako vhodný počet těchto oddílů se nakonec ukázalo číslo deset. Tabulka 4.11 udává podrobný popis těchto kategorií.

Kategorie číslo:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ	0,1	2	3	4	5	6	7,8	9-12	13-20	21 ...
Počet klientů	2466	132	41	44	25	27	25	20	21	25
Objem ν ($\times 10^4$)	480,4	153,2	81,8	145,7	119,2	85,5	122,5	90,3	128,6	331,3

Tabulka 4.11: Expoziční kategorie

Kde μ je velikost expozice klienta dělená dvaceti a zaokrouhlená na nejbližší celý násobek $\times 10^4$, a ν je očekávaná ztráta za klientem.
Kontingenční tabulky hodnot μ a jejich rozptylů, které vznikly rozškálováním celého portfolia dle objemových kategorií expozic a odvětví, pak již sloužily jako vstupní data modelu *CreditRisk*$^+$. Na rozdíl od těchto kontingenčních tabulek byly vstupem modelu *CreditMetrics* tabulky obsahující výčet klientů s jejich ratingovými kategoriemi, objemy expozic a odvětvími, do nichž klienti spadali.

4.4 Programové zpracování

V této části se dostáváme k popisu programového zpracování dat modely. Uvedeme zde jak charakteristiku použitých programu, tak i formu vstupů a výstupů a především pak samotnou konstrukci modelů.
Hned na začátku je třeba poznamenat, že každý z modelů byl vytvořen

v odlišném programovacím jazyce, formát výstupních parametrů je však totožný, a můžeme proto v závěrečné kapitole přistoupit k jejich společné interpretaci.

4.4.1 *CreditRisk*$^+$ - Mathematica

Pro naprogramování modelu *CreditRisk*$^+$ byl zvolen software Mathematica pochazející z dílny Wolfram Research. Cílem obou modelů bylo extrahovat z dat údaje charakteristické pro distribuci výše škod. Skript programu lze najít na přiloženém mediu.
V modelu *CreditRisk*$^+$ jsme postupovali následovnými kroky:

1. Načtení dat
2. Vytvoření polynomů Poissonova rozložení aproximací empirického rozložení výše ztrát
3. Vygenerování vytvořujíci funkcí pravděpodobností výší ztrát pro model se zahrnutím i bez zahrnutí vlivu korelací uvnitř odvětví
4. Rozvinutí vytvořujících funkcí v řady v bodě 0
5. Vytvoření funkce kumulativní hustoty rozložení výše ztrát postupným sčítáním koeficientů u rozvinutých řad vytvořujících funkcí pravděpodobností
6. Určení 95%-ního a 99%-ního kvantilu identifikací místa překročení hodnot $0,95$ a $0,99$ pravděpodobností funkcemi kumulativních hustot a následnou lineární aproximací
7. Derivování rozvinutých řad vytvořujících funkcí (následným dosazením jednotky za pomocnou proměnnou tak dostáváme střední hodnotu výše ztrát)
8. Shrnutí získaných výsledků

4.4.2 *CreditMetrics* - SAS

Pro zpracování simulačního modelu *CreditMetrics*, který již neměl pracovat se zmíněnými kontingenčními tabulkami, ale přímo s datovými sety s údaji jednotlivých klientů, se jako vhodnější varianta jevil programový balík SAS vytvořen společností SAS Institute Inc.
Jak již bylo zmíněno, do programu vstupovala data ve formě tabulky obsahující u každeho klienta:

1. ratingovou klasifikaci
2. informaci o odvětví do něhož klient spadá
3. velikost expozice

kromě tabulek s daty jednotlivých portfolií byly dalšími informacemi do výpočtu vstupujícími tabulka mapující prahové hodnoty (kvantily odpovídající pravděpodobnostem defaultů) všech užitých ratingových stupňů. Očekávaná korelace uvnitř odvětví byla nastavena na úroveň 50%. Postup simulace portfolií pak byl následovný:

1. Načtení všech tabulek
2. Přeformátování Moody's ratingů na číselné hodnoty a následné setřídění dle těchto hodnot
3. Generování dvou vektorů náhodných čísel z normovaného normálního rozložení. První z nich, vektor rizikových faktorů odvětví, o rozměru 1×(počet odvětví) a druhy, vektor idiosynchronních rizikových faktorů, o rozměru 1×(počet klientů).
4. Výpočet hodnoty latentní proměnné každého dlužníka
5. Její porovnání s prahovými hodnotami a následná klasifikace default no-default
6. Nasčítání hodnot nezdefaultovaných expozic
7. Deset tisíc opakování celého procesu simulace portfolia (kroků 3. až 6.)
8. Uspořádání všech vypočtených scénářů
9. Vyhodnocení střední hodnoty ztráty portfolia, stejně jako 95%-ního a 99%-ního kvantilu výše ztrát

4.5 Výsledky výpočtů a simulací

V této kapitole se dostáváme k prezentaci výsledků získaných aplikací obou modelů jak na tři sady fiktivní portfolií, tak na portfolio reálných dat České spořitelny a.s.. Srovnání je provedeno na výstupních datech obou modelů, jimiž jsou:

- *Střední hodnota výše ztrát na portfoliu (v Kč)*

- *95%-ní kvantil rozložení výše ztrát (v Kč)*
- *99%-ní kvantil rozložení výše ztrát (v Kč)*

Kde obě hodnoty kvantilů jsou vždy ošetřeny odečtením střední hodnoty ztráty. Každá sada výsledků je shrnuta do tabulky v níž jsou uvedeny velikosti parametrů vypočtené oběma modely a kde každá z hodnot je prezentována jak ve tvaru nominálním (sloupec Nom.), tak ve sloupci Rel. jako procentuální část z celkového objemu portfolia.

4.5.1 Portfolia různé velikosti

V první, ze sad fiktivních kmenů, je určujícím prvkem objem pozorováných dat. Na čtyřech portfoliích měly testy napovědět, jaký má tento faktor vliv na nepřenost vznikající aproximací výše pospaným Poissonovým rozložením. Pro docílení maximálního akcentu na faktor objemu byly v této sadě nastaveny korelace uvnitř odvětví jednotně na 0%. Hodnota portfolia byla v modelu $CreditMetrics$ v tomto případě simulována pomocí 100 000 scénářů.

	$CreditRisk^+$		$CreditMetrics$	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v Kč)	2 847,6	6,8	2 843,8	6,8
95%-ní kvantil (v Kč)	397,8	0,9	390,1	0,9
99%-ní kvantil (v Kč)	573,5	1,4	558,1	1,3

Tabulka 4.12: Portfolio XL - 2 000 klientů, objem expozice: 42 000 Kč

	$CreditRisk^+$		$CreditMetrics$	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v Kč)	1 423,8	6,8	1 426,5	6,8
95%-ní kvantil (v Kč)	279,8	1,3	274,5	1,3
99%-ní kvantil (v Kč)	407,0	1,9	398,5	1,9

Tabulka 4.13: Portfolio L - 1 000 klientů, objem expozice: 21 000 Kč

Z vypočtených výsledků vyplývá, že střední hodnoty výší ztrát oba modely počítají jen s minimální odchylkou při jakémkoliv počtu klientů a její relativní hodnoty zůstávají konstantně na $6,8\%$. Avšak při pohledu na položky ve sloupce kvantilů spatřujeme zřejmý trend přibližování se hodnot se vzrůstajícím počtem klientů v kmeni. Tento trend platí jak u 95%-ních tak u

	CreditRisk$^+$		*CreditMetrics*	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v Kč)	711,9	6,8	711,9	6,8
95%-ní kvantil (v Kč)	196,7	1,9	191,0	1,9
99%-ní kvantil (v Kč)	289,4	2,8	275,1	2,6

Tabulka 4.14: Portfolio M - 500 klientů, objem expozice: 10 500 Kč

	CreditRisk$^+$		*CreditMetrics*	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v Kč)	284,7	6,8	284,1	6,8
95%-ní kvantil (v Kč)	123,1	2,9	135,8	3,2
99%-ní kvantil (v Kč)	184,9	4,4	177,8	4,2

Tabulka 4.15: Portfolio S - 200 Klientů, objem expozice: 4 200 Kč

99%-ních kvantilů.
Výsledky tedy můžeme shrnout do následujících bodů:

1. Oba modely potvrzují naše očekávání, že s rostoucí diverzifikací klesají relativní hodnoty VaR
2. Modely se liší zejména díky:
   - limitované četnosti simulací v rámci *CreditMetrics*
   - nepřesnosti vznikající díky menšímu počtu klientů, kdy při aproximaci s Poissonovým rozložením se toto nepřibližuje dostatečně.

4.5.2 Portfolia různé kvality

Další serie fiktivních testovacích kmenů byla zkonstruována pro posouzení chování obou modelů při různých ratingových skladbách portfolií.
Všechna portfolia mají v těchto případech jednotný objem expozice, každé se skládá ze 4 000 dlužníků a korelace mezi jednotlivými odvětvími byly v nastaveny na hladinu 50%. V modelu *CreditMetrics* bylo pro každý kmen simulováno 10 000 scénářů vývoje.

	CreditRisk$^+$		*CreditMetrics*	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v Kč)	488,1	0,6	490,8	0,6
95%-ní kvantil (v Kč)	840,7	1,0	580,2	0,7
99%-ní kvantil (v Kč)	1 490,2	1,8	1 105,2	1,3

Tabulka 4.16: Portfolio vysoké kvality, 4 000 klientů, objem expozice: 84 000 Kč

	CreditRisk$^+$		*CreditMetrics*	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v Kč)	1 594,8	1,9	1 599,9	1,9
95%-ní kvantil (v Kč)	1 556,5	1,9	1 340,1	1,6
99%-ní kvantil (v Kč)	2 521,0	3,0	2 054,1	2,4

Tabulka 4.17: Portfolio průměrné kvality, 4 000 klientů, objem expozice: 84 000 Kč

	CreditRisk$^+$		*CreditMetrics*	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v Kč)	3 167,7	3,8	3 144,8	3,8
95%-ní kvantil (v Kč)	2 152,2	2,6	3 155,3	3,8
99%-ní kvantil (v Kč)	3 360,2	4,0	4 415,3	5,3

Tabulka 4.18: Portfolio nízké kvality, 4 000 klientů, objem expozice: 84 000 Kč

	CreditRisk$^+$		*CreditMetrics*	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v Kč)	4 200,3	5,0	4 216,7	5,0
95%-ní kvantil (v Kč)	2 485,3	3,0	3 343,3	4,0
99%-ní kvantil (v Kč)	3 836,8	4,6	5 443,3	6,5

Tabulka 4.19: Portfolio velmi nízké kvality, 4 000 klientů, objem expozice: 84 000 Kč

Získané výsledky opět můžeme shrnout do několika bodů:

1. Zhoršování kvality portfolia se podle očekávání odráží v rostoucí hodnotě očekávané ztráty. Celé kmeny pak svými očekávanými ztrátami

odpovídají investicím o ratingových klasifikacích:

- Kmen nejlepší kvality ... Baa3 - Ba1
- Kmen průměrné kvality ... Ba2 - Ba3
- Kmen nízké kvality ... B1
- Kmen velmi nízké kvality ... B2

2. Relativně nízká korelace v dané sadě portfolií drží neočekávanou ztrátu pod hranicí regulatorního očekávání (8%).

3. Oba modely dávají shodné výsledky v oblasti očekávané ztráty. Rozdíl mezi výpočty modelů hodnot 95%-ních a 99%-ních kvantilů lze připsat na vrub odlišné reprezentaci korelací mezi klienty a chybám vznikajícím při simulacích metodou Monte Carlo.

4.5.3 Portfolia různé míry koncentrace klientů

Poslední sada fiktivních portfolií je určena k testování modelů při různé míře koncentrace expozice v kmenu. Tato sada se skládá ze dvou serií. První serie je situována v portfoliu průměrné kvality, druhá pak v portfoliu vysoké kvality.
I v tomto případě bylo v modelu *CreditMetrics* provedeno 10 000 simulací a korelace mezi klienty uvnitř jednotlivých odvětví byly opět na 50%-ní hladině. Výsledky výpočtů, prezentované stejnou formou, jako v minulých případech, jsou pak následující:

	CreditRisk$^+$		*CreditMetrics*	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v Kč)	1 594,8	1,9	1 616,8	1,9
95%-ní kvantil (v Kč)	1 556,5	1,9	1 743,2	2,1
99%-ní kvantil (v Kč)	2 521,0	3,0	2 583,2	3,1

Tabulka 4.20: Portfolio průměrné kvality, nízká koncentrace, 4 000 klientů, objem expozice: 84 000 Kč

Předchozí výsledky kapitoly 4.5.2 poukázaly, že portfolio průměrné kvality odpovídá klientským ratingům Ba2 - Ba3, neboli spodní hranici Ba.
V testování jsme byly navyšovány expozice deseti procent klientů s ratingem Ba. Výsledky ukazují, že se zvyšující se koncentrací narůstají hodnoty VaR95

	CreditRisk$^+$		*CreditMetrics*	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v Kč)	2010,0	1,7	2 216,3	1,9
95%-ní kvantil (v Kč)	2 277,9	1,9	3 243,7	2,8
99%-ní kvantil (v Kč)	4 135,4	3,5	5 343,7	4,5

Tabulka 4.21: Portfolio průměrné kvality, střední koncentrace, 4 000 klientů, objem expozice: 117 600 Kč

	CreditRisk$^+$		*CreditMetrics*	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v Kč)	2 929,0	1,5	3 618,3	1,8
95%-ní kvantil (v Kč)	5 338,4	2,6	9 201,7	4,6
99%-ní kvantil (v Kč)	11 350,1	5,6	12 141,7	6,0

Tabulka 4.22: Portfolio průměrné kvality, vysoká koncentrace, 4 000 klientů, objem expozice: 201 600 Kč

a VaR99 podle očekávání. Dále pak posilováním kvality portfolia dochází i k poklesu očekávané ztráty, neboli portfolio se posouvá od spodní hranice ratingu Ba více k jejímu středu Ba2.

	CreditRisk$^+$		*CreditMetrics*	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v Kč)	488,1	0,6	477,2	0,6
95%-ní kvantil (v Kč)	839,6	1,0	782,8	0,9
99%-ní kvantil (v Kč)	1 508,3	1,8	1 622,8	1,9

Tabulka 4.23: Portfolio vysoké kvality, nízká koncentrace, 4 000 klientů, objem expozice: 84 000 Kč

Při testování citlivosti portfolia lepší kvality na zvyšování koncentrace se opět potvrdilo očekávání nárůstu obou hodnot VaR. Při této kvalitě portfolia se ovšem neprojevila tak výrazně změna očekávané ztráty, neboť rozdíly mezi pravděpodobnostmi defaultů ratingů Baa a Ba již nejsou významné.

	CreditRisk$^+$		*CreditMetrics*	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v Kč)	696,4	0,6	699,2	0,6
95%-ní kvantil (v Kč)	1 312,1	1,1	2 240,8	1,9
99%-ní kvantil (v Kč)	2 376,7	2,0	3 500,3	3,0

Tabulka 4.24: Portfolio vysoké kvality, střední koncentrace, 4 000 klientů, objem expozice: 117 600 Kč

	CreditRisk$^+$		*CreditMetrics*	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v Kč)	1 214,0	0,6	1 212,7	0,6
95%-ní kvantil (v Kč)	3 169,9	1,6	5 927,3	2,9
99%-ní kvantil (v Kč)	6 339,7	3,1	7 187,3	3,6

Tabulka 4.25: Portfolio vysoké kvality, vysoké koncentrace, 4 000 klientů, objem expozice: 201 600 Kč

4.5.4 Portfolio reálných dat České spořitelny a.s.

Výsledků, jež jsme obdrželi při aplikaci modelů *CreditRisk*$^+$ a *CreditMetrics* na testovací portfolia, nyní můžeme využít při prezentaci a vyhodnocení dat získaných modelováním portfolia reálného.
Pro reálné portfolio dat České spořitelny a.s. bylo opět provedeno 10 000 simulací metodou Monte Carlo. V tabulce 4.26 jsou zaznamenány oběma modely spočtené hodnoty při korelaci uvnitř odvětví o velikosti 50%. Pro názornost a objasnění dosažených hodnot výpočtů pak tabulka 4.28 srovnává velikosti očekáváné a neočekávané ztráty v modelu *CreditMetrics* při různých úrovních korelací uvnitř odvětví.

	CreditRisk$^+$		*CreditMetrics*	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v 10^4 Kč)	1 738,8	3,0	1 735,9	3,0
95%-ní kvantil (v 10^4 Kč)	2 649,7	4,3	2 992,3	4,9
99%-ní kvantil (v 10^4 Kč)	4 648,1	7,5	5 187,3	8,4

Tabulka 4.26: Portfolio České spořitelny a.s., 2 826 klientů, objem expozice: 61 653,23×10^4 Kč

Rozdíly vypočtených hodnoty kvantilů normované velikostí expozice napovídají, při srovnání s výsledky u testovacích portfolií, o vyšší koncentraci expozic v portfoliu nebo o nižší kvalitě portfolia z hlediska ratingové skladby. Obě tyto doměnky lze potvrdit jednak srovnáním tabulky 4.10 skladby portfolia České spořitelny a.s. se statistikami 4.5 až 4.8, kdy tento kmen je svým charakterem velmi blízký portfoliům nízké až velmi nízké kvality. Doměnku o vysoké koncentraci pak potvrzuje následující tabulka 4.27, z níž je patrno, že 10% největších klientů znamená 74% celkové expozice. Při definici hypotetických portfolií pro testování koncentrace jsme měli obdobný ukazatel u nejvíce koncentrovaného portfolia 62, 5%.
Jelikož hodnoty VaR99 indikují, že koncentrace rizika v portfoliu je nad očekávání regulatorního požadavku, provedli jsme další testování a zahrnuli jsme hladinu spolehlivosti 99, 9% odpovídající regulatornímu požadavk.
Koncentrace rizika je ovlivňována dvěma faktory, prvním jsou výše expozice největších klientů a druhým korelace mezi nimi. Jelikož výše expozic nelze ovlivnit, provedli jsme citlivostní analýzu ohledně různých korelací mezi klienty, jejíž výsledky ukazuje tabulka 4.28. Z výsledků můžeme vyvodit, že korelace přibližně 10 až 30 procent jsou v oblasti regulatorního očekávání. Korelace nad úroveň 30% by již vyžadovaly kapitál vyšší, než jaký stanovuje regulatorní požadavek (Tedy, podle Opatření ČNB č.2/2002 vyhláška 333/2002, 8% rizikově vážených aktiv.)
Z výsledků citlivostní analýzy lze tedy konstatovat, že při recesivní fázi ekonomického cyklu by banka měla držet více kapitálu, než regulatorní minimum.

	Objem expozice v Kc	% z celku
Celé portfolio	616 532 322,6	100
10% největších klientů	456 364 045,4	74,02

Tabulka 4.27: Koncentrace v portfoliu České spořitelny a.s.

Shrutím poznatků získaných modelováním reálného portfolia České spořitelny a.s. dospějeme k těmto závěrům:

1. Reálné portfolio odpovídá svou skladbou kmenům průměrné až nižší kvality.

2. Výsledky 95%-ního i 99%-ního kvantilu přesahují hodnoty všech hypotetických portfolií, což odpovídá struktuře portfolia z hlediska koncentrace.

	korelace 10%		korelace 30%		korelace 50%	
	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%	Nom.	Rel.%
Očekávaná ztráta (v 10^4 Kč)	1 748,5	3,0	1 728,9	3,0	1 735,9	3,0
95%-ní kvantil (v 10^4 Kč)	1 398,4	2,3	2 130,9	3,5	2 992,3	4,9
99%-ní kvantil (v 10^4 Kč)	2 226,1	3,6	3 586,9	5,8	5 187,3	8,4
99,9%-ní kvantil (v 10^4 Kč)	3 003,3	4,9	5 839,0	9,5	8 763,7	14,2

Tabulka 4.28: Hodnoty výstupních parametrů při různé koncentraci klientů v portfoliu České spořitelny a.s.

3. Z regulatorního očekávání 8% z objemu celkové expozice kmene na hladině významnosti $99,9\%$ vyplývá, že koncentrace v portfoliu je při 50%-ní korelaci klientů nad očekáváním regulatorního požadavku.

4. Nižší hladiny korelace znamenájí významné snížení hodnot obou kvantilů.

Kapitola 5

Závěr

V předkládáné diplomové práci se pojednává o dvou ucelených metodologiích modelování kreditního rizika. Jak *CreditRisk*$^+$ z dílny Credit Suisse Financial Products, tak *CreditMetrics* tvůrců z J. P. Morgan, oba v práci popsané modely, zaujímají významné postavení při kvantifikování rizika, jehož správné řízení je základním kamenem úspěšného chodu finančních institucí.
Práce je rozčleněna do tří logických oddílů. Prvním z nich je úvodem do teorie, na které oba modely budují své metodologie, a je zde také zmíněn regulatorní požadavek a jeho souvislost s kvantifikací kreditního rizika popisovanými interními modely.
Druhý oddíl již konkrétně pojednává o matematickém rámci obou modelů, zabývá se jak jejich rozdíly, tak i vzájemnou převoditelností a kalibrací parametrů pro docílení srovnatelnosti výsledků.
Poslední oddíl nachází své zaměření v parametrizaci modelů *CreditRisk*$^+$ a *CreditMetrics*, popisu testovacích portfolií i portfolia reálných dat České spořitelny a.s., nastiňuje jak byly modely zpracovány po programové stránce a především pak prezentuje a komentuje výsledky, jichž bylo modelováním dosaženo.
Samotné testování obou přístupů ke kvantifikaci kreditního rizika bylo uskutečněno na třech sadách fiktivních portfolií a jednom kmenu dat reálných. Výsledky pak potvrdily několik empirických očekávání. Prvním z nich bylo, že se stoupající diverzifikací dojde k poklesu hodnot VaR, které byly ve většině případů testovány na 95 a 99 procentních kvantilech. Dále pak, že s poklesem kvality kmenu po stránce ratingové skladby dojde k navyšování očekávané ztráty.
Ve výsledcích jednotlivých modelů se objevily rozdíly, avšak oba modely potvrzovaly výše uvedené očekávání. Rozdíly mezi modely se připisují zejména na vrub rozdílnosti reprezentace korelace v modelech, která se projevuje především v hodnotách vysokých kvantilů rozložení výše ztrát, a zjednodušení

reprezentace expozic v modelu $CreditRisk^+$.
Portfolio reálných historických dat České spořitelny a.s. ukazovalo, že jeho kvalita se řadí mezi testovací hypotetická portfolia s průměrnou až nižší kvalitou. Pro testování koncentrace rizika bylo použita korelace mezi klienty 50% což se ukázalo ve srovnání s regulatorním požadavkem jako jako nadměrný předpoklad. Provedená citlivostní analýza následně ukázala, že korelace mezi 10 až 30% je v rámci regulatorního očekávání.
Diplomová práce ukázala citlivost obou zkoumaných modelů při VaR95 a VaR99 na koncentraci rizika plynoucím jak z významných expozic, tak z korelací mezi klienty. Přirozeným pokračováním této práce by mohlo být modelování korelací dlužníků a a zakomponování do řízení úvěrového portfolia.

Literatura

[1] Credit Suisse Financial Products: *CreditRisk$^+$: A credit risk management framework,* Credit Suisse Financial Products, 1997

[2] Crouhy M., Galai D., Mark R.: *A comparative analysis of current credit risk models,* Journal of banking and finance, 2000

[3] Dev A.: *Economic capital: A practicioners guide,* Risk Books, London 2004

[4] Gordy M. B.: *A comparative anatomy of credit risk models,* Journal of banking and finance, 1998

[5] Grupton G. M., Christopher C. F., Bathia M.: *CreditMetrics-Technical document,* J.P.Morgan & Co.Incorporated 1997

[6] Moody's Investors Service: *Default and recovery rates of corporate bond issuers,* 2003

[7] Ong, M. K.: *Credit ratings: Methodologies, rationale and default risk,* Risk Books, London 2002

[8] Ong, M. K.: *Internal credit risk models,* Risk Books, London 1999

[9] Price Waterhouse: *Úvod do řízení úvěrového rizika,* Management Press, Praha 1994

[10] Ziegler, K., Nidetzký, T., Žalman, L. et al. : *Finanční řízení bank,* Bankovní institut vysoká škola, Praha 1997