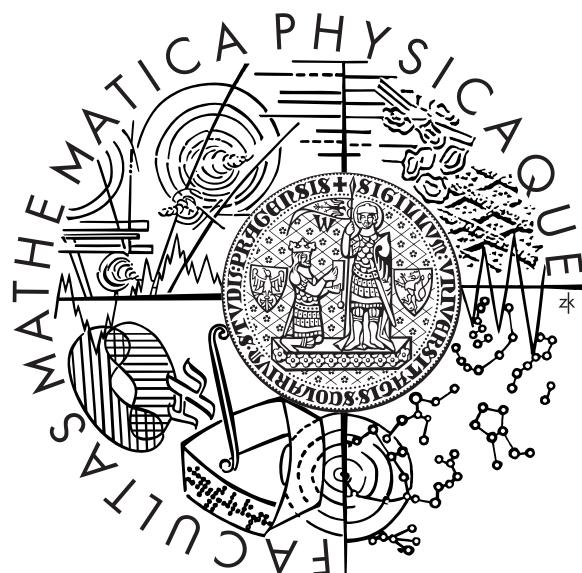


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Martin Pleška

Oceňování kreditního rizika

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Pavel Charamza, CSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Děkuji svému vedoucímu RNDr. Pavlovi Charamzovi, CSc. za konzultace, cenné rady a připomínky.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Nesouhlasím se zapůjčováním práce.

V PRAZE DNE 21. DUBNA 2006

MARTIN PLEŠKA

Obsah

Úvod	5
1 První úvahy týkající se výpočtu kreditního rizika	7
1.1 Zavedení pojmu	7
1.2 Úvod do problematiky kreditního rizika portfolia	8
1.2.1 Očekávané problémy, možná řešení	8
1.3 Nejjednodušší portfolio tvořené jediným úvěrem	9
1.3.1 Skóringová pásma a přechod mezi nimi	10
1.3.2 Stanovení hodnoty úvěru s novým skóringem	12
1.3.3 Střední hodnota úvěru v čase $\tau = 1$	15
1.3.4 Míry kreditního rizika	16
1.4 Portfolio tvořené dvěma a více úvěry	18
1.4.1 Portfolio tvořené dvěma úvěry	18
1.4.2 Portfolio tvořené více než dvěma úvěry	22
2 Rizikové náklady	23
2.1 Stanovení rizikových nákladů pomocí rozdělení doby do defaultu	25
2.1.1 Postupně rovnoměrně splatný úvěr	26
2.1.2 Jednoletý postupně rovnoměrně splatný úvěr	28
2.1.3 Jednoletý jednorázově splatný úvěr	29
2.2 Stanovení rizikových nákladů pomocí Markovových řetězců	30
2.2.1 Jednorázově splatné úvěry	35
2.2.2 Postupně rovnoměrně splatné úvěry	36
2.3 Výtěžnost	38
3 Další aspekty výpočtu kreditního rizika	41
3.1 Sdružené pravděpodobnosti přechodu	41

3.2	Závislosti mezi úvěry	42
3.2.1	Rozšíření Mertonova modelu	42
3.2.2	Odhad korelací aktiv	46
3.3	Marginální riziko	46
4	Simulace	47
4.1	Matice pravděpodobností přechodu	48
4.1.1	Odhad matice pravděpodobností přechodu	48
4.2	Generování scénářů	52
4.2.1	Varianční matice	53
4.3	Stanovení hodnoty portfolia	54
4.3.1	Poskytnutá data	54
4.3.2	Hodnoty V_{1j} pro $j \neq d$	56
4.3.3	Hodnoty V_{1d}	57
4.3.4	Hodnota portfolia	58
4.3.5	Cena zdrojů	59
4.4	Shrnutí a zpracování získaných výsledků	59
Závěr		65
Literatura		66
A		67
A.1	Rychlosť konvergence simulací	67

Název práce: Oceňování kreditního rizika

Autor: Martin Pleška

Katedra: KPMS - Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Pavel Charamza, CSc.

e-mail vedoucího: pavel.charamza@mediaresearch.cz

Abstrakt: Podle pravidel uvedených v dokumentu Basel II musí banky počítat rizikový kapitál na základě očekávané hodnoty kreditního rizika, ale zejména na základě některých jeho charakteristik, mezi které se řadí Value at Risk (VaR). Ten lze počítat například způsobem uvedeným v práci Creditmetrics. V této práci se budeme zabývat právě touto metodou výpočtu VaR jako míry kreditního rizika. Stanovení očekávané hodnoty portfolia, kterého kreditní riziko nás zajímá, je v práci demonstrováno dvěma způsoby. Jednak metodou diskontovaných finančních toků a také pomocí rizikových nákladů. Odhad VaR se provádí pomocí simulací rozdělení hodnoty portfolia. Práce je doplněna konkrétním výpočtem nad reálnými daty.

Klíčová slova: střední hodnota portfolia, kreditní riziko, Value at Risk

Title: Valuation of Credit Risk

Author: Martin Pleška

Department: KPMS - Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Pavel Charamza, CSc.

Supervisor's e-mail address: pavel.charamza@mediaresearch.cz

Abstract: According to the rules stated in the Basel II document banks are obliged to calculate risk capital on the basis of expected value of credit risk and in particular on the basis of some of its characteristics among which is Value at Risk (VaR) also ranked. It can be calculated for example by the method stated in Creditmetrics paper. In this thesis we will focus on this method of calculation of VaR which is considered to be a measure of credit risk. Determination of expected value of portfolio which credit risk we are concerned about is in this paper demonstrated by two methods. First one is the method of discounted cash flow and the second one is the method of risk costs. Estimations of VaR are being performed through the use of simulation of distribution of the value of the portfolio. The work is amended by a particular calculation with real data.

Keywords: expected value of portfolio, credit risk, Value at Risk

Úvod

Podle pravidel uvedených v dokumentu Basel II [11] musí banky počítat rizikový kapitál na základě očekávané hodnoty kreditního rizika, ale zejména na základě některých jeho charakteristik, mezi které se řadí také **Value at Risk** (VaR). Ten lze počítat například způsobem uvedeným v práci Creditmetrics [4]. V této práci se budeme zabývat právě touto metodou výpočtu VaR jako míry kreditního rizika.

V první kapitole přiblížíme metodiku používanou v práci Creditmetrics. Odvodíme vzorec pro výpočet střední hodnoty jednoduchého portfolia tvořeného jedním úvěrem a také vzorec pro výpočet směrodatné odchylky a $\alpha\%$ -ního kvantilu hodnoty portfolia. Tyto hodnoty později využijeme k výpočtu Value at Risk portfolia. Také uvedeme motivační úvahu pro alternativní přístup k výpočtu VaR pomocí rizikových nákladů. Tento přístup se jeví jako vhodný zejména pro instituce, které k popisu *rizikovosti* nového či stávajícího klienta nepoužívají mezinárodní ratingovou škálu.

V druhé kapitole pak rozvedeme myšlenku rizikových nákladů a odvodíme pro ně obecný vzorec. Budeme uvažovat model založený na době do defaultu a model, ve kterém se předpokládá markovská vlastnost přechodů mezi jednotlivými skóringovými stavami klienta. Budeme se také věnovat výtěžnosti z těch úvěrů, které klienti v jistém momentu jejich trvání přestanou splácet.

Obsahem třetí kapitoly budou poznámky k dalším aspektům, které je nutno brát do úvahy při výpočtu kreditního rizika portfolia. Zejména se jedná o závislosti mezi jednotlivými úvěry tvořícími portfolio. Popíšeme Mertonův model a uvedeme jeho rozšíření, které nám poslouží v další kapitole při odhadování očekávaných hodnot úvěrů a rozdělení hodnoty celého portfolia v čase.

Ve čtvrté kapitole budeme aplikovat poznatky a postupy z první až třetí kapitoly na soubor reálných dat. Popíšeme datový soubor a jednotlivé úpravy, které s ním provedeme. Odhadneme pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými stavami a rozdělení hodnot portfolia z datového souboru. Na základě

znalosti rozdělení spočteme střední hodnotu a kvantil rozdělení hodnot portfolia. Kombinací těchto dvou čísel získáme hledané Value at Risk.

Kapitola 1

První úvahy týkající se výpočtu kreditního rizika

1.1 Zavedení pojmu

Uveďme několik nezbytných základních pojmu, se kterými budeme dále pracovat.

Kreditní riziko – riziko ztráty v důsledku neschopnosti nebo neochoty smluvního partnera dostát svým závazkům. Někdy se tomuto riziku říká také úvěrové.

Doba splatnosti – doba, na kterou je peněžní částka (ve formě úvěru nebo produktu úvěrového typu) zapůjčena.

Portfolio – soubor investičních instrumentů (prvků) neboli aktiv, které mohou být finanční i nefinanční povahy. Nefinančním instrumentem může být například budova, finančním zase například akcie nebo úvěr. V této práci budeme pracovat s portfolii tvořenými úvěry případně dluhopisy. Hodnota finančních instrumentů závisí na náhodných parametrech, proto je také sama náhodnou veličinou.

Hodnota portfolia – součet hodnot jednotlivých prvků tvorících portfolio v daném časovém okamžiku. Protože hodnoty jednotlivých prvků jsou náhodné veličiny, je i hodnota portfolia náhodná veličina.

Hodnota v riziku, VaR – rozdíl střední hodnoty portfolia a $\alpha\%$ -ního kvantilu rozdělení hodnoty portfolia. Za α se většinou volí 0,01%, 0,1% nebo 1%.

Default – stav, když klient není schopen dostát svým závazkům, většinou se za hraniční dobu bere, pokud je klient 90 nebo více dnů po splatnosti.

Pravděpodobnost defaultu – Pravděpodobnost, že se dlužník dostane do defaultu v rámci určitého časového období. V této práci budeme pod daným

obdobím rozumět jeden rok.

Výtěžnost pohledávky – náhodná veličina. Podíl části dlužné pohledávky, kterou se podaří získat po klientově defaultu, k nesplacené výši pohledávky.

Očekávaná výtěžnost – střední hodnota výtěžnosti.

Kreditní skóring (stav) – stupeň kreditního rizika charakterizovaný stejnou pravděpodobností defaultu. Možnými nástroji k určení kreditního skóru jsou logistická regrese, regresní stromy apod.

EAD – Exposure at default, angažovanost v momentě defaultu. Dlužná částka spolu s naběhlými úroky a případnými penále v momentě defaultu. Protože moment defaultu je náhodná veličina, může být EAD považována za náhodnou veličinu.

LGD – Loss given default, ztráta v případě defaultu. Procentuálně vyjádřena hodnota ztráty z EAD. Je-li EAD chápáno jako náhodná veličina, je i LGD náhodnou veličinou.

Likvidita – Schopnost splnit své závazky v momentě jejich splatnosti; často měřena jako poměr krátkodobých aktiv a krátkodobých pasiv.

Marginální směrodatná odchylka – změna směrodatné odchylky portfolia způsobená přidáním dalšího prvku do portfolia.

1.2 Úvod do problematiky kreditního rizika portfolia

Portfolia nesoucí kreditní riziko jsou velmi rozmanitá. Mohou být tvořena jak úvěry, tak tzv. *produkty úvěrového typu*, obecně však pouze finančními instrumenty. Úvěrem je poskytnutí pěněžní částky (jistina) na určitou dobu (doba splatnosti) za odměnu, kterou je úrok z jistiny. Mezi produkty úvěrového typu můžeme zařadit například dluhopis (kuponový i bezkuponový) nebo jiné druhy cenných papírů. Nebude-li v dalším textu výslovně uvedeno jinak, budeme pracovat s portfolii tvořenými jedním či více úvěry. Případná modifikace dosažených výsledků pro produkty úvěrového typu je snadná.

1.2.1 Očekávané problémy, možná řešení

Tržní riziko (Market Risk) je riziko plynoucí z nejisté tržní hodnoty portfolia aktiv. Platí, že příjmy plynoucí z majetku (aktiv) jsou relativně symetricky rozloženy a dají se dobře approximovat Gaussovým normálním rozdělením. To znamená, že dva základní statistické parametry - střední hodnota (průměr)

a směrodatná odchylka hodnoty portfolia - jsou dostatečné k tomu, abychom dokázali popsat tržní riziko a určit kvantilové úrovně pro majetková portfolia.

Naproti tomu rozdelení výnosů z poskytnutých úvěrů jsou velmi šikmá a mají těžké chvosty. To znamená, že potřebujeme více než jen průměr a směrodatnou odchylku, abychom dokázali určit a popsat rozdelení hodnot úvěrového portfolia.

Těžký chvost rozdelení výnosů z úvěrů je způsoben situacemi, když z nějakého důvodu klient přestane splácet svůj závazek a z pohledu banky jakožto věřitele zdefaultuje. Dostane se tedy do takového stavu, že pravděpodobnost uspokojení nároků věřitele v plném rozsahu je nulová. Výnosy z úvěrů jsou charakterizovány poměrně velkou pravděpodobností získání (relativně) malého zisku z čistých úrokových výnosů (net interest earnings), spojenou ale s (relativně) malou pravděpodobností ztráty poměrně velké části investice v případě defaultu klienta.

Problematickým se jeví modelování korelací úvěrů. Korelace majetku se dají přímo odhadnout z pozorování likvidních cen na trhu. Odhadnout korelace kvality úvěrů se ukazuje být mimořádně obtížné. Způsobeno je to hlavně nedostatkem dat.

Potenciální řešení v sobě zahrnují:

- (i) předpoklad, že korelace úvěrů jsou stejné pro celé portfolio,
- (ii) návrh modelu zachytávajícího korelace úvěrů, parametry kterého je možné jednoduše odhadnout.

Je zřejmé, že předpoklad uvedený v (i) je nerealistický. Naším prvním úkolem bude stanovení hodnoty portfolia v čase, přesněji jejího rozdelení. V případě portfolií tvořených dvěma a více úvěry bude nutné popsat závislosti mezi jednotlivými úvěry. V nasledující části ukážeme, jakým způsobem je možné rozdelení hodnoty portfolia modelovat. Problematicke závislostí mezi úvěry se budeme věnovat ve třetí kapitole.

1.3 Nejjednoduší portfolio tvořené jediným úvěrem

V této části se budeme zabývat nejjednodušším typem portfolia tvořeného jedním úvěrem. Přiblížíme některé klíčové komponenty potřebné při modelování pravděpodobnostního rozdelení hodnoty portfolia. Specifikujeme skóringové kategorie, které použijeme a popíšeme pravděpodobnosti přechodu mezi nimi. Stanovíme novou hodnotu portfolia při pohybu nahoru nebo dolů

v rámci skóringových pásem a určíme hodnotu v případě defaultu. Získané hodnoty použijeme spolu s pravděpodobnostmi přechodu k výpočtu očekávané hodnoty portfolia na konci zvoleného časového období. Tu pak použijeme k výpočtu směrodatné odchylky hodnoty portfolia a Value at Risk portfolia.

1.3.1 Skóringová pásma a přechod mezi nimi

Uvažujme množinu skóringových stavů¹ $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n, d\}$, kde d označuje stav defaultu. Nechť úvěr s dobou do splatnosti t , t.j. splatný za t let od aktuálního času $\tau = 0$, je v tomto čase hodnocený skóringovou kategorií s_i , $i = 1, \dots, n$.

Dále nechť časové období (horizont), za které budeme počítat hodnotu portfolia, je jeden rok. Období jiné délky mohou být samozřejmě také vhodná.

Zavedeme náhodnou veličinu X_τ označující stav prvku portfolia v čase τ , $\tau = 0, 1, \dots, t$. Předpokládáme, že $\tau = 0$ je aktuální čas a že

$$\{X_\tau, \tau \in \{0, 1, \dots, t\}\}$$

tvoří homogenní Markovův řetězec s diskrétním časem, množinou stavů S a počátečním rozdělením

$$P(X_0 = s_i) = p_i, \quad s_i \in S \setminus \{d\} \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n, 0)^\top. \quad (1.1)$$

Protože náš horizont je jeden rok, zajímá nás charakterizace rozsahu hodnot, které může úvěr mít na konci období. Uvedeme nejdříve všechny možné stavy na konci období v závislosti na kreditních událostech během roku:

- dlužník zůstane ve stavu s_i na konci roku,
- dlužník se přesune do některého ze stavů s_{i-1}, \dots, s_1 nebo s_{i+1}, \dots, s_n ,
- dlužník zdefaultuje.

Každému výstupu odpovídá jiná pravděpodobnost toho, že nastane. Zapišme možnosti uvedené výše formálně:

$$\begin{aligned} P(X_{\tau+1} = s_i | X_\tau = s_i) &= p_{s_i s_i}(\tau, \tau + 1), \\ P(X_{\tau+1} = s_j | X_\tau = s_i) &= p_{s_i s_j}(\tau, \tau + 1), \quad j \neq i \wedge j \neq d \\ P(X_{\tau+1} = d | X_\tau = s_i) &= p_{s_i d}(\tau, \tau + 1), \quad \tau = 0, \dots, t - 1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

¹viz. definice v části 1.1.

Protože uvažujeme homogenní Markovův řetězec, nezávisejí pravděpodobnosti přechodu na časových okamžicích, ale jenom na jejich rozdílu, viz. Prášková, Lachout [9], který je v našem případě 1. Pravděpodobnosti přechodu uvedené výše budeme proto v dalším textu označovat krátce p_{ii}, p_{ij}, p_{id} . Pro jednoduchost vynecháme index s .

Jednotlivé pravděpodobnosti přechodu je pak užitečné seřadit do čtvercové matice *pravděpodobností přechodu*. Budeme předpokládat, že stav d je (v terminologii Markovských řetězců) absorpční, viz. například Prášková, Lachout [9], t.j. úvěr se v následujícím období už nemůže přesunout do žádného ze stavů s_1, \dots, s_n , protože $p_{dj} = 0$ pro $j = 1, \dots, n$. To tedy znamená, že v našem případě má matice pravděpodobností přechodu tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} & p_{1d} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} & p_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} & p_{nd} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Obecně bychom samozřejmě měli předpokládat, že $p_{dj} \neq 0$ pro $j = 1, \dots, n$ a $p_{dd} < 1$. Nicméně reálné situace ukazují, že pravděpodobnosti p_{dj} pro $j = 1, \dots, n$, jsou zanedbatelné a proto můžeme matici pravděpodobností přechodu uvažovat právě v tvaru (1.3).

Příklad 1. Pro ilustraci uvedených pojmu nám může posloužit příklad uvedený v Guptin, Finger a Bhatia [4]. Mějme úvěr, který je v čase $\tau = 0$ hodnocený skóringem s_4 . Předpokládejme, že $n = 7$. Tedy $\mathbf{p} = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^\top$. Pravděpodobnosti přechodu ze stavu s_4 do stavů s_1, \dots, s_7, d jsou uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 1.1 Pravděpodobnosti přechodu ze stavu s_4

Skóring na konci roku	$p_{4j} (\%)$ $j = 1, \dots, n, d$
s_1	0,02
s_2	0,33
s_3	5,95
s_4	86,93
s_5	5,30
s_6	1,17
s_7	0,12
d	0,18

Jde o čtvrtý řádek matice \mathbf{P} . \triangle

Také si můžeme všimnout, že matice \mathbf{P} je *bloková matici*, to znamená, že ji můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^* & \mathbf{p}_d \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

kde $\mathbf{P}^* = (p_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$ je čtvercová matice a $\mathbf{p}_d = (p_{id})$, $i = 1, \dots, n$, je vektor odpovídající délky. Této vlastnosti využijeme v kapitole 2.

Postup, jak odhadnout pravděpodobnosti přechodu mezi skóringovými stavý, bude uveden v kapitole 4. Pro tuto chvíli předpokládejme, že pravděpodobnosti přechodu jsou známé. Dalším úkolem, který před sebou máme je stanovení hodnoty úvěru v čase $\tau = 1$.

1.3.2 Stanovení hodnoty úvěru s novým skóringem

V předchozí části jsme popsali pravděpodobnosti přechodu do kteréhokoliv z možných stavů v čase $\tau = 1$. V této části přiřadíme jednotlivým stavům hodnoty. K tomu musíme najít střední současnou hodnotu zůstávajících cash flow plynoucích z úvěru s novým skóringem v čase $\tau = 1$. Poznamenejme, že každému z n možných skóringů samozřejmě odpovídá jiná střední současná hodnota (vztažená k času 1).

Označme $V_{\tau i}$ hodnotu úvěru se skóringem s_i v čase τ a předpokládejme, že pro počáteční rozdělení \mathbf{p} Markovova řetězce $\{\mathbf{X}_\tau, \tau \in \{0, 1, \dots, t\}\}$ existuje vektor odpovídajících hodnot

$$\mathbf{V}_0 = (V_{0s_1}, V_{0s_2}, \dots, V_{0s_n}, 0)^\top. \quad (1.5)$$

Stanovení hodnoty portfolia v čase $\tau = 1$ můžeme rozdělit na dvě kategorie. V případě pohybu nahoru nebo dolů na skóringové škále určujeme novou hodnotu úvěru, která není ničím jiným než střední současnou hodnotou zůstávajících cash flow plynoucích z úvěru. Diskontní sazba, která vstupuje do výpočtu současné hodnoty, se získá z jednoleté forwardové křivky bezkuponového dluhopisu (zero-coupon one-year forward yield curve), která pokračuje od konce rizikového horizontu po splatnost úvěru. Tato křivka je různá pro každou skóringovou kategorii za jeden rok.

Připomeňme, že doba splatnosti úvěru je t let. Označme C_τ pravidelné platby plynoucí z úvěru (splátky, pro jednoduchost uvažované jednou ročně), $r_{\tau j}$ diskontní sazbu získanou z jednoroční forwardové křivky bezkuponového dluhopisu, který je na konci období hodnocen skóringem s_j . V_{1j} je hodnota

úvěru se skóringem s_j v čase $\tau = 1$. Potom úvahu o střední současné hodnotě úvěru uvedenou výše můžeme vyjádřit vzorcem:

$$V_{1j} = \sum_{\tau=1}^t \frac{C_\tau}{(1+r_{\tau j})^{\tau-1}}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

Přesný význam V_{1j} z hlediska její náhodnosti popíšeme v části 1.3.3.

V případě defaultu odhadujeme hodnotu části úvěru, kterou se ještě bance podaří získat, označme ji V_{1d} , tedy

$$V_{1d} = (1 - \text{LGD}) \cdot \text{EAD}, \quad (1.7)$$

kde EAD označuje angažovanost v momentě defaultu a LGD značí procentuálně vyjádřenou ztrátu v případě defaultu.

Počítat současnou hodnotu zůstávajících cash flow by nemělo smysl (žádné zůstávající cash flow nejsou). Poznamenejme, že v LGD je zahrnut i časový diskont.

Tímto způsobem spočítáme vektor hodnot úvěru se složkami odpovídajícími jednotlivým stavům v čase $\tau = 1$:

$$\mathbf{V}_1 = (V_{1s_1}, V_{1s_2}, \dots, V_{1s_n}, V_{1d})^\top. \quad (1.8)$$

Příklad 2. Navažme na Příklad 1 a uveďme hodnoty přiřazené jednotlivým skóringům v čase $\tau = 1$, viz. [4].

Tabulka 1.2 Hodnoty odpovídající novým skóringům

Skóring na konci roku	Hodnota v tis. USD
s_1	109,37
s_2	109,19
s_3	108,66
s_4	107,55
s_5	102,02
s_6	98,10
s_7	83,64
d	51,13

△

V případě, že banka nepoužívá skóringovou/ratingovou škálu některé z mezinárodních institucí (např. Standard&Poor's) je použití výše uvedeného vzorce (1.6), hlavně však $r_{j\tau}$, poněkud obtížné. Existuje ale také jiný přístup.

Očekávanou hodnotu portfolia je možné určit také pomocí tzv. *rizikových*

KAPITOLA 1. PRVNÍ ÚVAHY TÝKAJÍCÍ SE VÝPOČTU KREDITNÍHO RIZIKA 14

nákladů, kterým se budeme podrobněji věnovat v kapitole 2. Zde uvedeme jen motivační úvahu:

Hodnota úvěru v čase je náhodná veličina, v našem označení V_τ , $\tau = 1, \dots, t$, protože ji kromě výše poskytnutého úvěru a smluvné úrokové sazby určuje hlavně schopnost klienta splátet. Naším úkolem je určit střední hodnotu této náhodné veličiny v libovolném čase $\tau \in (0, t)$, kde t je doba splatnosti úvěru v letech. Pokud klient nepřejde do defaultu, bude úvěr splátet ještě po dobu $t - \tau$.

Očekávanou hodnotu úvěru se skóringem s_j v čase $\tau \in (0, t)$ můžeme vyjádřit následujícím způsobem:

$$V_{\tau j} = (\text{Očekávaný úrokový příjem} - \text{Očekávaná ztráta})_{t-\tau} \quad (1.9)$$

Speciálně tedy pro náš rizikový horizont máme

$$V_{1j} = (\text{Očekávaný úrokový příjem} - \text{Očekávaná ztráta})_{t-1} \quad (1.10)$$

V rámci celkového úroku banka účtuje klientovi také *rizikové náklady*, kterými kryje riziko defaultu klienta. Abychom byli schopni určit rizikové náklady, musíme odhadnout očekávanou ztrátu z poskytnutého úvěru. Rizikové náklady potom vypočteme z tzv. *bilanční rovnice*, která porovnává očekávanou ztrátu a očekávaný úrokový příjem z rizikových nákladů:

$$\text{Očekávaný příjem z rizikových nákladů} = \text{Očekávaná ztráta} \quad (1.11)$$

Způsoby řešení této rovnice uvedeme podrobně v kapitole 2.

Nyní máme k dispozici všechny informace potřebné k tomu, abychom popsali rozdelení hodnot úvěru v čase $\tau = 1$. Počáteční rozdelení Markovova řetězce je dáno vzorcem (1.1), jemu odpovídající hodnoty úvěru (1.5), pravděpodobnosti přechodu mezi skóringovými stavami (1.3) a hodnoty úvěru odpovídající těmto pravděpodobnostem v čase $\tau = 1$ (1.6) nebo (1.10). Můžeme tedy počítat střední hodnotu úvěru v čase $\tau = 1$.

Příklad 3. Spojením informací z Příkladů 1 a 2 dostáváme rozdelení očekávané hodnoty úvěru v čase $\tau = 1$, který měl v čase $\tau = 0$ skóring s_4 , jak je uvedeno v Guptin, Finger a Bhatia [4].

Tabulka 1.3 Rozdělení očekávané hodnoty úvěru v čase $\tau = 1$

Skóring na konci roku	Oček. hodnota v tis. USD	p_{4j} (%) $j = 1, \dots, n, d$
s_1	109,37	0,02
s_2	109,19	0,33
s_3	108,66	5,95
s_4	107,55	86,93
s_5	102,02	5,30
s_6	98,10	1,17
s_7	83,64	0,12
d	51,13	0,18

△

1.3.3 Střední hodnota úvěru v čase $\tau = 1$

Označme μ_{1i} střední hodnotu úvěru v čase $\tau = 1$. Index i , $i = 1, \dots, n$ značí skóring úvěru v čase $\tau = 0$. Dále označme jako V_1 hodnotu úvěru v čase $\tau = 1$ v případě, že není specifikován stav, ve kterém se úvěr nachází. Je zřejmé, že je to náhodná veličina, jejíž realizace závisí právě na skóringu, tedy stavu úvěru.

V případě našeho jednoprvkového portfolia je:

$$\begin{aligned}
\mu_{1i} &= EV_1 \\
&= \text{EE}[V_1 | X_1] \\
&= \sum_{j=1}^n p_{ij} \text{E}[V_1 | X_1 = s_j] + p_{id} V_{1d} \\
&= \sum_{j=1}^n p_{ij} V_{1j} + p_{id} V_{1d}, \tag{1.12}
\end{aligned}$$

kde p_{ij} jsou dány (1.2). Podle toho, co bylo uvedeno v předešlém, můžeme V_{1j} počítat dvěma způsoby. Buď podle vzorce (1.6), nebo podle (1.10). V této kapitole se přidržíme první možnosti, (1.10) bude podrobně rozebrán v kapitole 2. V_{1d} bylo zavedeno ve vzorci (1.7). Vzorec (1.12) lze tedy dále upravit do tvaru

$$\mu_{1i} = \sum_{j=1}^n p_{ij} \sum_{\tau=1}^t \frac{C_\tau}{(1 + r_{\tau j})^{\tau-1}} + p_{id} V_{1d} \tag{1.13}$$

Získali jsme jednoduchý vzorec pro výpočet střední hodnoty úvěru v čase $\tau = 1$. Přistupme tedy k výpočtu dvou běžných měr kreditního rizika – směrodatné odchylce hodnoty úvěru a Value at Risk úvěru.

1.3.4 Míry kreditního rizika

Metodami, které uvádějí Guptin, Finger a Bhatia [4] můžeme počítat dvě v praxi i v literatuře běžně používané míry kreditního rizika portfolia: *směrodatnou odchylku* a *Value at Risk*. Obě míry odrážejí rozdělení hodnoty portfolia a pomáhají při kvantifikaci kreditního rizika. Ani o jedné z nich se nedá tvrdit, že by byla z nějakého důvodu „nejlepší“. Obě však významným způsobem přispívají k pochopení kreditního rizika jako takového.

Směrodatná odchylka hodnoty portfolia

Jednou z možných měr variability kreditního rizika je rozptyl, resp. směrodatná odchylka hodnoty portfolia.

Protože směrodatná odchylka je odmocninou z rozptylu, vyjdeme ze základního vzorce

$$\text{var}Z = \mathbb{E}(Z - \mathbb{E}Z)^2 \quad (1.14)$$

V našem případě je $Z = \mathbb{E}[V_1|X_1]$, a tedy

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{var}\mathbb{E}[V_1|X_1] \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}[V_1|X_1] - \mathbb{E}\mathbb{E}[V_1|X_1])^2 \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}[V_1|X_1] - \mu_{1i})^2 \\ &= \sum_{j=1}^n p_{ij} (\mathbb{E}[V_1|X_1 = s_j] - \mu_{1i})^2 + p_{id} (V_{1d} - \mu_{1i})^2, \end{aligned} \quad (1.15)$$

což se dosazením vzorce (1.6) za V_{1j} dá dále upravit na

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^n p_{ij} \left(\sum_{\tau=1}^t \frac{C_\tau}{(1+r_{\tau j})^{\tau-1}} - \mu_{1i} \right)^2 + p_{id} (V_{1d} - \mu_{1i})^2. \quad (1.16)$$

Pro směrodatnou odchylku hodnoty portfolia máme

$$\sigma_{1i} = \sqrt{\sum_{j=1}^n p_{ij} \left(\sum_{\tau=1}^t \frac{C_\tau}{(1+r_{\tau j})^{\tau-1}} - \mu_{1i} \right)^2 + p_{id} (V_{1d} - \mu_{1i})^2}, \quad (1.17)$$

kde index $1i$ opět zdůrazňuje fakt, že směrodatnou odchylku hodnoty úvěru počítáme v čase $\tau = 1$ a že úvěr měl v čase $\tau = 0$ skóring s_i .

Interpretace směrodatné odchylky není v tomto případě jednoduchá, protože rozdělení kreditního rizika není normální. Rozdělení hodnoty portfolia má většinou těžký chrost na straně „ztráty“ a limitované „výnosy“. Délka tohoto chvostu se dá charakterizovat jeho délkou v směrodatné odchylce.

Protože je však směrodatná odchylka symetrická míra disperze, sama o sobě nerozlišuje stranu výnosů a stranu ztrát v rozdělení.

Value at Risk portfolia

K tomu, abychom dokázali spočítat Value at Risk portfolia, potřebujeme znát kromě střední hodnoty portfolia ještě 1%-ní kvantil rozdělení hodnoty portfolia. Protože interpretace 1%-ního kvantilu je snazší než směrodatné odchylky hodnoty portfolia, bude i význam Value at Risk snáze pochopitelný nežli právě směrodatná odchylka.

Uved'me způsob, kterým kvantil zavádí Anděl [1]:

Nechť F je nějaká distribuční funkce. Zaved'me funkci F^{-1} předpisem

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}, \quad 0 < u < 1. \quad (1.18)$$

Potom F^{-1} se nazývá kvantilová funkce odpovídající distribuční funkci F . Hodnotám $F^{-1}(u)$ se říká *kvantily*. Když je F rostoucí, potom F^{-1} je obyčejná inverzní funkce k F .

Speciálně, hodnotám $F^{-1}(u)$, pre $u = 0,01k$ $0 < k < 100$ se říká *percentily*.

Z výše uvedeného plyne, že 1%-ní kvantil (= první percentil) rozdělení hodnoty našeho úvěru v čase $\tau = 1$ je úroveň, pod kterou hodnota úvěru klesne s pravděpodobností 0,01.

Odhad 1%-ního kvantilu je jednoduchý: Při zachování stávajícího označení máme pro úvěr hodnocený v čase $\tau = 1$ skóringem s_i vektor pravděpodobností přechodu $(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in}, p_{id})^\top$ a jemu odpovídající hodnoty úvěru V_{1j} , $j = 1, \dots, n$ a V_{1d} . Hodnoty V_{1j} , $j = 1, \dots, n$ nyní uspořádáme podle velikosti vzestupně

$$V_{1(1)} \leq \dots \leq V_{1(n)}. \quad (1.19)$$

Hodnotám $V_{1(j)}$, $j = 1, \dots, n$ odpovídají pravděpodobnosti přechodu $p_{i(j)}$, $j = 1, \dots, n$, které ale samozřejmě nemusí být uspořádané.

Nechť

$$r_k = \min\{r'; (p_{id} + \sum_{l=1}^{r'} p_{i(l)}) \geq 0,01k, 1 \leq r' \leq n\}, \quad (1.20)$$

$$1 < k < 100.$$

Potom

$$W_{1;k} = V_{1d} + \sum_{j=1}^{r_k} V_{1(j)} \quad (1.21)$$

je $k\%$ -ní kvantil rozdělení hodnoty úvěru v čase $\tau = 1$.

Použitím vzorce (1.13) dostáváme pro Value at Risk na 1% -ní hladině

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1i} &= \mu_{1i} - W_{1;1} & (1.22) \\ &= \sum_{j=1}^n p_{ij} \sum_{\tau=1}^t \frac{C_\tau}{(1+r_{\tau j})^{\tau-1}} + p_{id}V_{1d} - V_{1d} - \sum_{j=1}^{r_k} V_{1(j)} \\ &= \sum_{j=1}^n p_{ij} \sum_{\tau=1}^t \frac{C_\tau}{(1+r_{\tau j})^{\tau-1}} - V_{1d} \underbrace{(1-p_{id})}_{\sum_{j=1}^n p_{ij}} - \sum_{j=1}^{r_k} V_{1(j)} \\ &= \sum_{j=1}^n p_{ij} \left(\sum_{\tau=1}^t \frac{C_\tau}{(1+r_{\tau j})^{\tau-1}} - V_{1d} \right) - \sum_{j=1}^{r_k} V_{1(j)}. & (1.23) \end{aligned}$$

Index $1i$ má stejný význam jako ve vzorcích (1.13) a (1.17).

1.4 Portfolio tvořené dvěma a více úvěry

1.4.1 Portfolio tvořené dvěma úvěry

V předchozích částech jsme ilustrovali zacházení s jedním úvěrem se skóringem s_i v čase $\tau = 0$, splatným za t let. Přidejme nyní do tohoto jednoduchého portfolia úvěr hodnocený v čase $\tau = 0$ skóringem s_j , $j = 1, \dots, n$, který je splatný za t' let, $1 < t'$. Naším cílem bude opět spočítat kreditní riziko tohoto portfolia v čase $\tau = 1$.

Podobně jako v předchozím, kde stav úvěru v čase byla náhodná veličina, kterou jsme označili X_τ , bude stav našeho dvouprvkového portfolia v čase náhodný vektor

$$\mathbf{X}_\tau = \begin{pmatrix} X_\tau \\ Y_\tau \end{pmatrix}, \quad \tau = 1, \dots, \min(t, t') \quad (1.24)$$

Pro $\tau \in (\min(t, t'), \max(t, t'))$ se problém redukuje na výpočet kreditního rizika menšího portfolia tvořeného jedním úvěrem, který jsme popsali v části 1.3.

Podobně jako v části 1.3 budeme předpokládat, že

$$\{\mathbf{X}_\tau, \tau \in \{0, 1, \dots, \min(t, t')\}\}$$

je Markovův řetězec s diskrétním časem, množinou stavů S a počátečním rozdělením

$$P(\mathbf{X}_0 = (s_i, s_j)^\top) = \begin{pmatrix} p_i \\ p_j \end{pmatrix}, \quad s_i, s_j \in S \setminus \{d\} \quad (1.25)$$

$$P(\mathbf{X}_0 = (s_i, d)^\top) = P(\mathbf{X}_0 = (d, s_j)^\top) = P(\mathbf{X}_0 = (d, d)^\top) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Sdružené pravděpodobnosti přechodu pro dva úvěry označíme $p_{(i,j)(i',j')}^2$:

$$p_{(i,j)(i',j')} = P(\mathbf{X}_1 = (s_{i'}, s_{j'})^\top | \mathbf{X}_0 = (s_i, s_j)^\top). \quad (1.27)$$

Stejně jako v části 1.3 budeme předpokládat, že k počátečnímu rozdělení Markovova řetězce existují odpovídající hodnoty úvěrů v čase $\tau = 0$

$$\mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} V_{0s_i} \\ V_{0s_j} \end{pmatrix}, \quad s_i, s_j \in S \setminus \{d\}, \quad V_{0d} = 0. \quad (1.28)$$

Dalším krokem je výpočet očekávané současné hodnoty úvěrů v čase $\tau = 1$ pro každý z možných skóringů. Jediný rozdíl oproti části 1.3.2 je v tom, že v tomto případě počítáme „po složkách“ a současná hodnota portfolia vztažena k času $\tau = 1$ pro jednotlivé dvojice skóringů, označíme ji $V_{1(i,j)(i',j')}$, bude součtem těchto složek.

Vzorec pro současnou hodnotu jednoho úvěru je daný (1.6). Označíme-li D_τ pravidelné platby plynoucí z druhého úvěru, máme pro druhý úvěr

$$V'_{1j'} = \sum_{\tau=1}^{t'} \frac{D_\tau}{(1 + r_{\tau j'})^{\tau-1}}. \quad (1.29)$$

²Odhadu sdružených pravděpodobností přechodu se budeme věnovat ve třetí kapitole.

KAPITOLA 1. PRVNÍ ÚVAHY TÝKAJÍCÍ SE VÝPOČTU KREDITNÍHO RIZIKA 20

V případě, že druhý dlužník zdefaultuje, odhadujeme podobně jako v (1.7) výtěžnost nesplaceného úvěru, označíme ji V'_{1d} .

Můžeme tedy přistoupit k výpočtu střední hodnoty portfolia tvořeného dvěma úvěry v čase $\tau = 1$:

$$\begin{aligned}\mu_{1,ij} &= \sum_{i'=1}^n \sum_{j'=1}^n p_{(i,j)(i',j')} V_{1(i,j)(i',j')} + \sum_{i'=1}^n p_{(i,j)(i',d)} (V_{1i'} + V'_{1d}) \\ &\quad + \sum_{j'=1}^n p_{(i,j)(d,j')} (V_{1d} + V'_{1j'}) + p_{(i,j)(d,d)} (V_{1d} + V'_{1d}).\end{aligned}\quad (1.30)$$

Podobně jako pro μ_{1i} , které je dáno vztahem (1.13), máme pro μ'_{1j}

$$\mu'_{1j} = \sum_{j'=1}^n p_{jj'} \sum_{\tau=1}^{t'} \frac{D_\tau}{(1+r_{\tau j'})^{\tau-1}} + p_{jd} V'_{1d}. \quad (1.31)$$

Směrodatná odchylka hodnoty portfolia

Při výpočtu směrodatné odchylky hodnoty portfolia vyjdeme opět ze základního vzorce

$$\text{var}(Z + Z') = \text{var}Z + \text{cov}(Z, Z') + \text{var}Z'. \quad (1.32)$$

V našem případě je $Z = E[V_{1i'}|X_1]$ a $Z' = E[V'_{1j'}|Y_1]$. Indexy i' a j' zdůrazňují fakt, že skóring úvěrů v čase $\tau = 1$ je $s_{i'}$, resp. $s_{j'}$. To znamená, že první a třetí sčítanec v (1.32) se dají po případném „přeindexování“ a záměně C_τ za D_τ spočítat podle vzorce (1.16).

Věnujme se teď chvíli prostřednímu sčítanci v (1.32). Platí

$$\text{cov}(Z, Z') = E(Z - EZ)(Z' - EZ'). \quad (1.33)$$

To znamená, že

$$\text{cov}(E[V_{1i'}|X_1], E[V'_{1j'}|Y_1]) = E(E[V_{1i'}|X_1] - EE[V_{1i'}|X_1])(E[V'_{1j'}|Y_1] - EE[V'_{1j'}|Y_1]). \quad (1.34)$$

Uvědomíme-li si, že $EE[A|B] = EA$, dostaneme z předešlé rovnosti

$$\begin{aligned}\text{cov}(E[V_{1i'}|X_1], E[V'_{1j'}|Y_1]) &= E(E[V_{1i'}|X_1] - EV_{1i'})(E[V'_{1j'}|Y_1] - EV'_{1j'}) \\ &= E(E[V_{1i'}|X_1]E[V'_{1j'}|Y_1]) - EV_{1i'}EV'_{1j'} \\ &= E(E[V_{1i'}|X_1]E[V'_{1j'}|Y_1]) - \mu_{1i}\mu'_{1j}.\end{aligned}\quad (1.35)$$

Tedy směrodatná odchylka hodnoty portfolia v čase $\tau = 1$, tvořeného dvěma úvěry, které měly v čase $\tau = 0$ skóring s_i a s_j je

$$\sigma_{1,ij} = \sqrt{\text{varE}[V_{1i'}|X_1] + E(E[V_{1i'}|X_1]E[V'_{1j'}|Y_1]) - \mu_{1i}\mu'_{1j} + \text{varE}[V'_{1j'}|Y_1]}, \quad (1.36)$$

kde μ_{1i} je dáno vzorcem (1.13) a μ'_{1j} vzorcem (1.31). Přestože by se vzorec (1.36) dal dále upravovat, nebudeme to dělat, protože k významnému zjednodušení zápisu bychom nedospěli. K závislosti mezi hodnotami dvou a obecně více úvěrů v portfoliu se vrátíme ve třetí kapitole.

Poznamenejme ještě, že rozdělení hodnoty úvěrů v čase jsou nedegenerovaná s nenulovým rozptylem.

Value at Risk portfolia

Uspořádejme hodnoty $V_{1(i,j)(i',j')}$, $i', j' = 1, \dots, n$ vzestupně. Nechť nejmenší z takto uspořádaných hodnot odpovídá pravděpodobnost přechodu, kterou pro jednoduchost označíme \tilde{p}_1 . Podobně druhé nejmenší hodnotě nechť odpovídá pravděpodobnost přechodu \tilde{p}_2 atd. Nechť

$$r_k = \min \left\{ r'; \sum_{m=1}^{r'} \tilde{p}_m \geq 0,01k \right\}, \quad (1.37)$$

$$0 < k < 100, \quad 1 \leq r' \leq n.$$

Pak

$$W_{1;k}^* = \sum_{l=1}^{r_k} V_{(i,j)(l,l)} \quad (1.38)$$

je $k\%$ -ní kvantil rozdělení hodnoty portfolia tvořeného dvěma úvěry v čase $\tau = 1$.

Pro Value at Risk tedy máme

$$\text{VaR}_{1,ij} = \mu_{1,ij} - W_{1;1}^*. \quad (1.39)$$

1.4.2 Portfolio tvořené více než dvěma úvěry

V případě portfolia tvořeného více než dvěma úvěry je samozřejmě možné odvodit pro směrodatnou odchylku hodnoty portfolia a Value at Risk portfolia vztahy analogické těm uvedeným v částech 1.3 a 1.4.1.

Je třeba si ale uvědomit, že pro portfolio tvořené obecně N úvěry, kde každý z úvěrů může mít jeden z $n + 1$ skóringů, existuje $(n + 1)^N$ možných skóringových stavů.

Simulační přístup k výpočtu směrodatné odchylky hodnoty portfolia a Value at Risk portfolia se zde jeví jako vhodnější. Podrobně se mu budeme věnovat v kapitole 4.

Kapitola 2

Rizikové náklady

V předchozí kapitole jsme odvodili vztahy pro výpočet kreditního rizika měřeného buď pomocí směrodatné odchylky hodnoty portfolia nebo Value at Risk portfolia. Základním kamenem pro nás byla hodnota prvku portfolia v čase, kterou jsme označili $V_{\tau j}$, $\tau = 0, 1, \dots, t$, $j = 1, \dots, n$ a určovali ji v čase $\tau = 1$. V této a dále pak ve čtvrté kapitole ukážeme, jak je možno V_{1j} počítat podle vzorce (1.10).

Zavedeme následující označení:

X - výše úvěru,

u - úroková sazba, budeme předpokládat spojité úročení,

r_i - rizikové náklady příslušící skóringu s_i , $i = 1, \dots, n^1$,

T - doba do defaultu, náhodná veličina,

L - ztráta z úvěru,

I_t^u - úrokový příjem z úroku u z úvěru se zbývající dobou do splatnosti t ,

I_t^r - příjem z rizikových nákladů r z úvěru se zbývající dobou do splatnosti t ,

$\xi(\tau)$ - zůstatek úvěru v čase τ , $\tau = 0, 1, \dots, t$,

$p = P(T \leq t)$ - pravděpodobnost, že default nastane do doby splatnosti, tedy pravděpodobnost nesplacení.

Úroková sazba u se skládá z několika komponent:

$$u = \text{cena zdrojů} + \text{rizikové náklady} + \text{obchodní marže}. \quad (2.1)$$

Cena zdrojů je nákladem, kterého výši určuje vnitrobankovní oddělení ALM (Assets and Liabilities Management) a závisí na mnoha faktorech. Marže si

¹Defaultu nepřísluší žádné rizikové náklady.

určuje obchodní oddělení a její výše bývá jedním z indikátorů úspěšnosti uzavřeného úvěrového obchodu. V této práci se omezíme na stanovení rizikových nákladů. To jsou náklady, kterými se banka snaží zajistit proti ztrátě, kterou utrpí v případě, že klient zdefaultuje. Je tedy logické, že rizikové náklady přímo závisí na aktuálním skóringovém hodnocení klienta. Banka by je měla pravidelně přehodnocovat, aby znala aktuální marži, která je účtována klientovi a mohla ji porovnat s nominální marží, tedy tou, kterou obchodní oddělení stanovilo při poskytnutí úvěru.

Je-li aktuální marže vyšší než nominální, je to pro banku pozitivní zpráva, protože může očekávat, že na klientovi vydělá více než bylo plánováno v době poskytnutí úvěru. Je-li naopak aktuální marže nižší než nominální, mělo by to být pro banku výzvou k zvýšenému monitorování klienta.

Budeme uvažovat pouze úvěry s fixní úrokovou sazbou, kde cena zdrojů vstupuje do výpočtu úroku právě jednou v okamžiku poskytnutí úvěru. Měnit v čase se budou rizikové náklady a v závislosti na nich marže. Může se stát, že v době trvání úvěru bude marže záporná, v tom případě banka na úvěru prodělává. Rozhodně by ale marže neměla být záporná nebo nulová v okamžiku poskytnutí úvěru.

V právě zavedeném značení budeme pod úrokovým příjemem z úroku u z úvěru se zbývající dobou do splatnosti t rozumět

$$I_t^u = u \int_0^{\min(t,T)} \xi(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

a pod příjemem z rizikových nákladů r_i z úvěru se zbývající dobou do splatnosti t

$$I_t^{r_i} = r_i \int_0^{\min(t,T)} \xi(\tau) d\tau. \quad (2.3)$$

Zřejmě I_t^u i $I_t^{r_i}$ jsou náhodné veličiny. Na tomto místě je nutné uvést, že hlavně z důvodu zjednodušení vzorců budeme uvažovat pouze spojité splácení úvěru. To tedy znamená, že počet období, za které se počítá úrok, označíme jej n , se blíží k nekonečnu a délka těchto období, označíme ji l , se blíží k nule zprava

$$\lim_{n \rightarrow \infty, l \rightarrow 0^+} n \cdot l = t. \quad (2.4)$$

Budeme rozlišovat mezi ztrátou a nerealizovaným výnosem z úvěru. V případě, že klient zdefaultuje, je ztrátou z úvěru

$$L = \xi(T). \quad (2.5)$$

Nerealizovaným výnosem z úvěru je

$$I_{t-T}^u = u \int_T^t \xi(\tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Při výpočtu rizikových nákladů se zaměříme na vztahy (2.3) a (2.5) a na bilanční rovnici (1.11), která porovnává jejich očekávané hodnoty. Popíšeme dva způsoby výpočtu rizikových nákladů:

- Pomocí znalosti rozdělení náhodné veličiny T ,
- Pomocí Markovových řetězců.

2.1 Stanovení rizikových nákladů pomocí rozdělení doby do defaultu

Zapišme formálně bilanční rovnici (1.11). Máme

$$\mathbf{E}L = \mathbf{E}I_t^{r_i}. \quad (2.7)$$

Naším úkolem bude na základě této rovnice určit obecný vztah pro výpočet rizikových nákladů, který pak použijeme k jejich určení pro různé typy úvěrů.

Uvažujme tedy úvěr ve výši X se zbývající dobou do splatnosti t let. Při použití zavedeného označení máme pro zůstatek úvěru v čase

$$\xi(0) = X,$$

$$\xi(\tau) = Xf(\tau), \quad \tau \in (0, t), \quad (2.8)$$

$$\xi(\tau) = 0, \quad \tau \geq t.$$

kde $f(\tau)$ je nějaká nerostoucí, ne nutně spojitá funkce s vlastností $f(\tau) \in (0, 1)$ pro $\tau \in (0, t)$.

Pro očekávanou ztrátu platí

$$\mathbf{E}L = \mathbf{E}[\xi(T)]. \quad (2.9)$$

Pro očekávaný příjem z rizikových nákladů máme

$$\mathbf{E}I_t^{r_i} = \mathbf{E}r_i \int_0^{\min(t, T)} \xi(\tau) d\tau. \quad (2.10)$$

Tedy z (2.7) máme

$$\mathbb{E}[\xi(T)] = \mathbb{E}r_i \int_0^{\min(t,T)} \xi(\tau) d\tau, \quad (2.11)$$

a protože r_i je nenáhodné, můžeme ho vyjádřit jako

$$r_i = \frac{\mathbb{E}[\xi(T)]}{\mathbb{E} \int_0^{\min(t,T)} \xi(\tau) d\tau}. \quad (2.12)$$

Získali jsme poměrně jednoduchý obecný vzorec pro výpočet rizikových nákladů spojených s úvěrem.

Ve vzorci (2.12) jsme u zůstatku úvěru $\xi(\tau)$ vycházejícího z (2.8) nepředpokládali žádné specifické vlastnosti funkce $f(\tau)$, pouze, že tato funkce a tedy ani zůstatek úvěru v čase nerostou. Omezili jsme se tedy na situace, kdy je úvěr čerpán pouze jednou. Úvěrové rámce nebo samoobnovovací (revolvingové) úvěry nebudeme pro jednoduchost uvažovat.

2.1.1 Postupně rovnoměrně splatný úvěr

Budeme-li předpokládat, že $f(\tau)$ na intervalu $\langle 0, t \rangle$ rovnoměrně klesá do nuly, jedná se o postupně rovnoměrně splatný úvěr, kterého zůstatek můžeme tedy vyjádřit jako

$$\xi(\tau) = X \left(1 - \frac{\tau}{t} \right), \quad \tau \in \langle 0, t \rangle. \quad (2.13)$$

Pro očekávanou ztrátu platí

$$EL = \text{Emax} \left(X \left(1 - \frac{T}{t} \right), 0 \right) = X \left(1 - \text{Emin} \left(\frac{T}{t}, 1 \right) \right). \quad (2.14)$$

Pro očekávaný příjem z rizikových nákladů máme

$$\mathbb{E}I_t^{r_i} = r_i \mathbb{E} \int_0^{\min(t,T)} X \left(1 - \frac{\tau}{t} \right) d\tau. \quad (2.15)$$

Popišme podrobněji vzorce (2.14) a (2.15). Ze vzorce (2.13) je ihned vidět, že platí-li $T \leq t$, je realizace náhodné veličiny $X(1 - \frac{T}{t})$ kladná. Z toho dostáváme první rovnost v (2.14), druhá plyne z vlastností maxima a minima.

Je-li $T > t$ nenastane default do okamžiku splacení úvěru a očekávaný příjem z rizikových nákladů je $r_i \int_0^t \xi(\tau) d\tau$. Na druhé straně ale v případě, že $T \leq t$, nastane default v době splácení, a tedy příjem z rizikových nákladů se

realizuje jen v době $(0, T)$. Protože T je náhodná veličina, dostáváme vzorec (2.15).

Pro rizikové náklady dostáváme z rovnice (2.7)

$$r_i = \frac{\text{Emax} \left(X \left(1 - \frac{T}{t} \right), 0 \right)}{\mathbb{E} \int_0^{\min(t, T)} X \left(1 - \frac{\tau}{t} \right) d\tau}. \quad (2.16)$$

Očekávanou ztrátu můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \mathbb{E}L &= \text{Emax} \left(X \left(1 - \frac{T}{t} \right), 0 \right) \\ &= X \text{Emax} \left(\left(1 - \frac{T}{t} \right), 0 \right) \\ &= pX \mathbb{E} \left[1 - \frac{T}{t} \mid T \leq t \right], \end{aligned}$$

očekávaný příjem z rizikových nákladů

$$\begin{aligned} \mathbb{E}I_t^{r_i} &= r_i \mathbb{E} \int_0^{\min(t, T)} X \left(1 - \frac{\tau}{t} \right) d\tau \\ &= r_i X \mathbb{E} \int_0^{\min(t, T)} \left(1 - \frac{\tau}{t} \right) d\tau \\ &= r_i X \left[\mathbb{P}(T > t) \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t} \right) d\tau + \mathbb{P}(T \leq t) \mathbb{E} \left[\int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{t} \right) d\tau \mid T \leq t \right] \right] \\ &= r_i X \left[(1-p) \left[\tau - \frac{\tau^2}{2t} \right]_{\tau=0}^t + p \mathbb{E} \left[\left[\tau - \frac{\tau^2}{2t} \right]_{\tau=0}^T \mid T \leq t \right] \right] \\ &= r_i X \left[(1-p) \frac{t}{2} + p \mathbb{E} \left[T - \frac{T^2}{2t} \mid T \leq t \right] \right]. \end{aligned}$$

Vzorec (2.16) tedy přejde do tvaru

$$r_i = \frac{p \mathbb{E} \left[1 - \frac{T}{t} \mid T \leq t \right]}{(1-p) \frac{t}{2} + p \mathbb{E} \left[T - \frac{T^2}{2t} \mid T \leq t \right]}. \quad (2.17)$$

2.1.2 Jednoletý postupně rovnoměrně splatný úvěr

Uvažujme teď úvěr poskytnutý na 1 rok, postupně rovnoměrně splatný. Tedy $f(\tau) = 1 - \tau$, $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ a pro zůstatek úvěru máme v našem značení

$$\xi(\tau) = X(1 - \tau), \quad \tau \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (2.18)$$

Dosazením do vzorce (2.16) máme

$$r_i = \frac{X(1 - \mathbb{E} \min(1, T))}{\mathbb{E} \int_0^{\min(1, T)} X(1 - \tau) d\tau}. \quad (2.19)$$

Jiné vyjádření plyne ze vzorce (2.17):

$$r_i = \frac{p\mathbb{E}[1 - T \mid T \leq 1]}{\frac{1-p}{2} + p\mathbb{E}\left[T - \frac{T^2}{2} \mid T \leq 1\right]}. \quad (2.20)$$

Zatím jsme se zabývali funkcí $f(\tau)$, $\tau \in \langle 0, t \rangle$. Zůstává nám ještě popsat podmíněné, případně nepodmíněné rozdělení náhodné veličiny T .

Jako nejjednodušší případ u jednoletého postupně rovnoměrně splatného úvěru vezmeme situaci, když podmíněné rozdělení doby do defaultu za podmínky, že default nastane do doby splatnosti úvěru, je rovnoměrné. Pak je

$$1 - \mathbb{E} \min(1, T) = p(1 - \underbrace{\mathbb{E}(T \mid T \leq 1)}_{\frac{1}{2}}) = \frac{p}{2}, \quad (2.21)$$

$$\mathbb{E}L = X \frac{p}{2}. \quad (2.22)$$

Hustotu uvažovaného podmíněného rozdělení označíme $g(\tau)$. Dále formálně označme $\min(1, T) =: T'$. Upravíme rovnost (2.15) pro $t = 1$. Máme

$$\begin{aligned} r_i \mathbb{E} \int_0^{T'} X(1 - \tau) d\tau &= r_i X \mathbb{E} \left(T' - \frac{T'^2}{2} \right) \\ &= r_i X (1 - p) \frac{1}{2} + X p \int_0^1 \left(\tau - \frac{\tau^2}{2} \right) g(\tau) d\tau \\ &= r_i X \left(\frac{1-p}{2} + \frac{p}{2} - \frac{p}{6} \right) \\ &= r_i X \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{6} \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

protože $g(\tau) = 1$ (pracujeme s podmíněným rovnoměrným rozdělením). Máme tedy

$$\mathbb{E}I_t^{r_i} = r_i X \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{6} \right) \quad (2.24)$$

a celkem pro rizikové náklady

$$r_i = \frac{p}{1 - \frac{p}{3}}. \quad (2.25)$$

2.1.3 Jednoletý jednorázově splatný úvěr

Uvedeme dále několik příkladů pro jednorázově splatný úvěr jednotkové výše poskytnutý na jeden rok a různá rozdělení doby do defaultu T . Začneme nejprve jednodušším.

- a) Nechť rozdělení doby do defaultu T , za podmínky, že nastane do jednoho roku, je rovnoměrné. Potom očekávaná ztráta je rovna $p \cdot \xi(0) = p$. Očekávaný příjem z rizikových nákladů je $r_i(1 - p) + r_i \mathbb{E}(T \mid T \leq 1)p$. Protože musí platit

$$r_i(1 - p) + r_i \mathbb{E}(T \mid T \leq 1)p = p \quad (2.26)$$

a $\mathbb{E}(T \mid T \leq 1) = \frac{1}{2}$, dostáváme pro rizikové náklady:

$$r_i = \frac{p}{1 - p + \frac{p}{2}} = \frac{p}{1 - \frac{p}{2}}. \quad (2.27)$$

Všimněme si analogie se vztahem (2.25) pro postupně splatný úvěr. Protože je

$$1 - \frac{p}{3} > 1 - \frac{p}{2},$$

vidíme, že rizikové náklady pro postupně splatný úvěr jsou nižší než pro úvěr, který je jednorázově splatný.

- b) Nechť T má exponenciální rozdělení s distribuční funkcí $F(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$, hustotou $h(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$, $\lambda > 0$ je parametr. Je tedy $p = F(1) = 1 - e^{-\lambda}$. Spočtěme očekávaný příjem z rizikových nákladů:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}I_t^{r_i} &= r_i \mathbb{E} \int_0^{\min(1,T)} d\tau \\ &= r_i \{(1 - p) + p \mathbb{E}(T \mid T \leq 1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r_i \left\{ (1-p) + p \int_0^1 \tau \frac{h(\tau)}{p} d\tau \right\} \\
&= r_i \left\{ (1-p) + \int_0^1 \tau \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau \right\} \\
&= r_i \left\{ (1-p) + \lambda \left(- \left[\frac{\tau e^{-\lambda\tau}}{\lambda} \right]_{\tau=0}^1 + \int_0^1 \frac{e^{-\lambda\tau}}{\lambda} d\tau \right) \right\} \\
&= r_i \left\{ (1-p) - e^{-\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right\} \\
&= r_i \left[(1-p) - e^{-\lambda} + \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \right] \\
&= r_i \left[\underbrace{(1-e^{-\lambda})}_p - p + \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \right] \\
&= r_i \frac{p}{\lambda}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Pro očekávanou ztrátu máme

$$P(T \leq 1) \cdot 1 = F(1) = 1 - e^{-\lambda} = p. \tag{2.29}$$

Pro rizikové náklady tedy dostáváme

$$r_i = \frac{p}{\frac{p}{\lambda}} = \lambda. \tag{2.30}$$

Protože je $p = 1 - e^{-\lambda}$, je $\lambda = -\ln(1-p)$ a tedy

$$r_i = -\ln(1-p). \tag{2.31}$$

2.2 Stanovení rizikových nákladů pomocí Markovových řetězců

Připomeňme označení z kapitoly 1. Množinu možných skóringů úvěru jsme značili S a zavedli jsme $S = \{s_1, \dots, s_n, d\}$, d značil default. Stav úvěru v čase τ pro $\tau = 0, 1, \dots, t$ jsme značili X_τ , t byla doba splatnosti úvěru.

Podobně jako v první kapitole budeme i tady uvažovat homogenní Markovův řetězec. Markovskou vlastnost tedy můžeme zapsat jako:

$$\begin{aligned}
P(X_{\tau+1} = s_j | X_0 = s_0, \dots, X_\tau = s_i) &= P(X_{\tau+1} = s_j | X_\tau = s_i) \\
&= p_{s_i s_j}(\tau, \tau + 1).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

V souladu s tím, co bylo uvedeno v kapitole 1, budeme i zde psát pouze krátce p_{ij} , případně p_{id} nebo p_{dd} .

Pravděpodobnosti p_{ij} můžeme uspořádat do čtvercové matice

$$\mathbf{P}^* = (p_{ij}^*)_{i,j \in S \setminus \{d\}},$$

která má následující vlastnost:

$$\sum_{j \in S \setminus \{d\}} p_{ij}^* \leq 1. \quad (2.33)$$

Matrice \mathbf{P}^* tvoří levý horní blok matice $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$ zavedené v (1.4). Připo- meňme, že matice \mathbf{P} je stochastická.

Uveďme pomocné lemma.

Lemma 2.1 Buděte A, B a C jevy s nenulovou pravděpodobností. Potom

$$P(A | BC) = \frac{P(AB | C)}{P(B | C)}. \quad (2.34)$$

Důkaz. Z definice podmíněné pravděpodobnosti dostáváme

$$P(A | BC) = \frac{P(ABC)}{P(BC)} = \frac{P(AB | C)P(C)}{P(B | C)P(C)} = \frac{P(AB | C)}{P(B | C)}.$$

□

Ze základních vlastností Markovových řetězců (viz. Prášková, Lachout [9]) máme

$$P(X_{\tau+k} = s_j | X_\tau = s_i) = \sum_{m \in S} p_{im}^{(k)} p_{mj} = \mathbf{P}^k. \quad (2.35)$$

Z (2.35) a tvaru matice \mathbf{P} uvedeném v (1.4) dostáváme, že

$$\mathbf{P}^k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{*k} & \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{P}^{*j} \mathbf{p}_d \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{*k} & (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*k})(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{p}_d \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Podobně jako v části 2.1 budeme i zde rizikové náklady značit r_i . Na rozdíl od předchozí části, kde jsme při jejich výpočtu využívali znalosti rozdělení doby do defaultu T , zaměříme se v této části na předpoklad, že skóringové hodnocení úvěru v jednotlivých letech tvoří homogenní Markovův řetězec. Naším cílem je tedy určit výši rizikových nákladů pro klienta, který byl v čase $\tau = 0$ zařazen do skóringového pásma s_i , $i = 1, \dots, n$.

Pro $\nu \geq 1$ zaved'me pomocné indikátory (viz. [2]):

$$\begin{aligned} I_1[\nu] &= I[X_\nu \neq d], \\ I_1[s_i, \nu] &= I[X_0 = s_i, X_\nu \neq d], \end{aligned} \quad (2.37)$$

tedy v čase 0 je klient v stavu (má skóring) s_i a v čase ν (a do času ν) nezdefaultoval,

$$\begin{aligned} I_2[\nu] &= I[X_{\nu-1} \neq d, X_\nu = d] \\ I_2[s_i, \nu] &= I[X_0 = s_i, X_{\nu-1} \neq d, X_\nu = d], \end{aligned} \quad (2.38)$$

tedy v tomhle případě klient v období $(\nu-1, \nu)$ zdefaultuje.

Příjem z rizikových nákladů r_i je v období $(\nu-1, \nu)$ dán vztahem

$$I_{\nu-1, \nu}^{r_i} = I[X_0 = s_i, T > \nu - 1] \int_{\nu-1}^{\min(\nu, T)} \xi(\tau) r_i d\tau. \quad (2.39)$$

Tento vztah je možné využitím indikátorů (2.37) a (2.38) upravit na

$$I_{\nu-1, \nu}^{r_i} = I_1[s_i, \nu] \int_{\nu-1}^{\nu} \xi(\tau) r_i d\tau + I_2[s_i, \nu] \int_{\nu-1}^T \xi(\tau) r_i d\tau. \quad (2.40)$$

Význam vzorce (2.40) je následující: první sčítanec představuje příjem z rizikových nákladů za období $(\nu-1, \nu)$ z úvěru, který měl v čase $\tau = 0$ skóring s_i a současně v období $(\nu-1, \nu)$ nezdefaultoval. Druhý sčítanec je příjem z rizikových nákladů za období $(\nu-1, \nu)$ z úvěru, který měl v čase $\tau = 0$ skóring s_i a default nastal v období $(\nu-1, \nu)$, tedy $T \in (\nu-1, \nu)$.

Očekávaný příjem z rizikových nákladů z úvěru se zbývající dobou do splatnosti t , který měl v čase $\tau = 0$ skóring s_i je

$$\begin{aligned} E I_t^{r_i} &= E \left[\sum_{\nu=1}^t \left(I_1[s_i, \nu] \int_{\nu-1}^{\nu} \xi(\tau) r_i d\tau + I_2[s_i, \nu] \int_{\nu-1}^T \xi(\tau) r_i d\tau \right) \mid X_0 = s_i \right] \\ &= \sum_{\nu=1}^t \left(E \left[I_1(s_i, \nu) \int_{\nu-1}^{\nu} \xi(\tau) r_i d\tau \mid X_0 = s_i \right] \right. \\ &\quad \left. + E \left[I_2(s_i, \nu) \int_{\nu-1}^T \xi(\tau) r_i d\tau \mid X_0 = s_i \right] \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

První sčítanec je možné použitím lemmatu 2.1 upravit následovně:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[I_1(s_i, \nu) \int_{\nu-1}^{\nu} \xi(\tau) r_i d\tau \mid X_0 = s_i \right] = \\
 &= \int_{\nu-1}^{\nu} \xi(\tau) r_i d\tau \cdot \mathbb{E} [I_1(s_i, \nu) \mid X_0 = s_i] \\
 &= \int_{\nu-1}^{\nu} \xi(\tau) r_i d\tau \cdot P [I_1(s_i, \nu) = 1 \mid X_0 = s_i] \\
 &= \int_{\nu-1}^{\nu} \xi(\tau) r_i d\tau \cdot P [I_1(\nu) = 1 \mid X_0 = s_i]. \tag{2.42}
 \end{aligned}$$

Jak je uvedeno v [2], platí, že

- $I_k[s_i, \nu] \in L_1(\Omega, \sigma(I_k[s_i, \nu]))$, $k = 1, 2$,
- $\int_{\nu-1}^T \xi(\tau) d\tau$, $I_k[s_i, \nu] \int_{\nu-1}^T \xi(\tau) d\tau$, $\xi(T)$, $I_k[s_i, \nu] \xi(T) \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $k = 1, 2$.

Kromě toho budeme ještě předpokládat, že platí $\sigma(\{X_0 = s_i\}) \subset \sigma(I_2[s_i, \nu])$, $\sigma(\cdot)$ značí σ -obal.

S využitím těchto předpokladů, vlastností podmíněné střední hodnoty a výsledků uvedených v Lachout [6], věty 7.5 a 7.13, můžeme druhý sčítanec v (2.41) vyjádřit následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[I_2(s_i, \nu) \int_{\nu-1}^T \xi(\tau) r_i d\tau \mid X_0 = s_i \right] = \\
 &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[I_2[s_i, \nu] \int_{\nu-1}^T \xi(\tau) r_i d\tau \mid I_2[s_i, \nu] \right] \mid X_0 = s_i \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[I_2[s_i, \nu] \mathbb{E} \left[\int_{\nu-1}^T \xi(\tau) r_i d\tau \mid I_2[s_i, \nu] \right] \mid X_0 = s_i \right] \\
 &= P(I_2[s_i, \nu] = 1 \mid X_0 = s_i) \cdot 1 \cdot \mathbb{E} \left[\int_{\nu-1}^T \xi(\tau) r_i d\tau \mid I_2[s_i, \nu] = 1 \right] \\
 &\quad + P(I_2[s_i, \nu] = 0 \mid X_0 = s_i) \cdot 0 \cdot \mathbb{E} \left[\int_{\nu-1}^T \xi(\tau) r_i d\tau \mid I_2[s_i, \nu] = 0 \right] \\
 &= P(I_2[s_i, \nu] = 1 \mid X_0 = s_i) \mathbb{E} \left[\int_{\nu-1}^T \xi(\tau) r_i d\tau \mid I_2[s_i, \nu] = 1 \right] \tag{2.43}
 \end{aligned}$$

a je-li $P(X_0 = s_i) > 0$, máme s využitím vztahu (2.34)

$$\begin{aligned} E \left[I_2(s_i, \nu) \int_{\nu-1}^T \xi(\tau) d\tau \mid X_0 = s_i \right] &= \\ = P(I_2[\nu] = 1 \mid X_0 = s_i) E \left[\int_{\nu-1}^T \xi(\tau) r_i d\tau \mid I_2[s_i, \nu] = 1 \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ztráta z úvěru je v období $\langle \nu - 1, \nu \rangle$ rovna

$$L_{\nu-1, \nu} = I_2[s_i, \nu] \xi(T). \quad (2.45)$$

Očekávaná ztráta z úvěru se zbývající dobou do splatnosti t poskytnutého klientovi, který měl v době poskytnutí úvěru skóring s_i je v případě, že použijeme již známou úpravu pomocí vlastností podmíněné střední hodnoty a za předpokladů uvedených výše, rovna

$$\begin{aligned} EL &= E \left[\sum_{\nu=1}^t I_2(s_i, \nu) \xi(T) \mid X_0 = s_i \right] \\ &= \sum_{\nu=1}^t P(I_2[\nu] = 1 \mid X_0 = s_i) \cdot E[\xi(T) \mid I_2[s_i, \nu] = 1]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

V následující části budeme předpokládat, že podmíněné rozdělení doby do defaultu T za podmínky, že počáteční skóring klienta byl s_i a default nastane v období $\langle \nu - 1, \nu \rangle$, je na intervalu $\langle \nu - 1, \nu \rangle$ rovnoměrné. Potom máme

$$E[\xi(T) \mid I_2[s_i, \nu] = 1] = \int_{\nu-1}^{\nu} \xi(\tau) d\tau \quad (2.47)$$

a

$$\begin{aligned} E \left[\int_{\nu-1}^T \xi(\tau) d\tau \mid I_2[s_i, \nu] = 1 \right] &= \int_{\nu-1}^{\nu} \int_{\nu-1}^{\eta} \xi(\tau) d\tau d\eta \\ &= \left[\eta \cdot \int_{\nu-1}^{\eta} \xi(\tau) d\tau \right]_{\eta=\nu-1}^{\nu} - \int_{\nu-1}^{\nu} \eta \xi(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$= \int_{\nu-1}^{\nu} (\nu - \tau) \xi(\tau) d\tau. \quad (2.49)$$

Rovnost (2.48) plyne z věty o integraci per partes (viz. například Veselý [10], věta 10.3.13).

Podmíněné pravděpodobnosti pomocných indikátorů spočítáme využitím marmovské vlastnosti a (2.36):

$$P(I_1[\nu] = 1 \mid X_0 = s_i) = P(X_\nu \neq d \mid X_0 = s_i) = \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu} \mathbf{1}, \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} P(I_2[\nu] = 1 \mid X_0 = s_i) &= P(X_{\nu-1} \neq d, X_\nu = d \mid X_0 = s_i) \\ &= \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu-1} \mathbf{p}_d = \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu-1} (\mathbf{1} - \mathbf{P}^* \mathbf{1}) \\ &= \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*) \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

kde $\mathbf{e}_i^\top = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ je vektor nul s jedničkou na i-tém místě a $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$.

S využitím právě odvozených vztahů dostáváme pro očekávanou ztrátu z úvěru poskytnutého na dobu t

$$EL_t = \sum_{\nu=1}^t \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*) \mathbf{1} \int_{\nu-1}^{\nu} \xi(\tau) d\tau \quad (2.52)$$

a pro očekávaný příjem z rizikových nákladů

$$EI_t^{r_i} = \sum_{\nu=1}^t r_i \left[\mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu} \mathbf{1} \int_{\nu-1}^{\nu} \xi(\tau) d\tau + \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*) \mathbf{1} \int_{\nu-1}^{\nu} (\nu - \tau) \xi(\tau) d\tau \right]. \quad (2.53)$$

Jak je uvedeno v [2], je třeba si uvědomit, že vztahy (2.52) a (2.53) představují pouze approximaci reálných situací. V pokročilejších modelech se zohledňuje také časová hodnota peněz a jak očekávaná ztráta, tak očekávaný příjem z rizikových nákladů se diskontují. Pro naše účely však vyjádření (2.52) a (2.53) postačují. Pro rizikové náklady dostáváme

$$r_i = \frac{\sum_{\nu=1}^t \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*) \mathbf{1} \int_{\nu-1}^{\nu} \xi(\tau) d\tau}{\sum_{\nu=1}^t \left[\mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu} \mathbf{1} \int_{\nu-1}^{\nu} \xi(\tau) d\tau + \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*) \mathbf{1} \int_{\nu-1}^{\nu} (\nu - \tau) \xi(\tau) d\tau \right]} \quad (2.54)$$

2.2.1 Jednorázově splatné úvěry

Vzorce (2.52), (2.53) a (2.54), které platí obecně, se dají upravit pro případ jednorázově splatného úvěru. Pro jeho zůstatek platí

$$\xi(\tau) = X, \quad \tau \in \langle 0, t \rangle. \quad (2.55)$$

Provedeme několik pomocných výpočtů:

$$\begin{aligned} \int_{\nu-1}^{\nu} (\nu - \tau) d\tau &= \left[\nu\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_{\nu-1}^{\nu} = \frac{1}{2}, \\ \sum_{\nu=1}^t \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*) \mathbf{1} &= \mathbf{e}_i^\top (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*) \mathbf{1} = \mathbf{e}_i^\top (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) \mathbf{1}, \\ \sum_{\nu=1}^t \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu} \mathbf{1} &= \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^* (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Pomocí nich dostáváme

$$EL = X \mathbf{e}_i^\top (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) \mathbf{1} \quad (2.57)$$

$$\mathbb{E} I_t^{r_i} = r_i X \left[\mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^* (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{1} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_i^\top (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) \mathbf{1} \right] \quad (2.58)$$

$$r_i = \frac{\mathbf{e}_i^\top (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) \mathbf{1}}{\mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^* (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{1} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_i^\top (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) \mathbf{1}}. \quad (2.59)$$

2.2.2 Postupně rovnoraměrně splatné úvěry

V tomto případě máme zůstatek úvěru v čase τ , $\tau \in \langle 0, t \rangle$, daný vzorcem (2.13). Na úvod zformulujeme a dokážeme pomocné lemma, které využijeme v dalších výpočtech.

Lemma 2.2 Nechť \mathbf{A} je čtvercová matice a \mathbf{I} jednotková matice odpovídajících rozměrů. Dále nechť $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ je regulární matice a $K \in \mathbb{N}$. Potom

$$\sum_{k=1}^K k \mathbf{A}^{k-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^K) (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-2} - K \mathbf{A}^K (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (2.60)$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K k \mathbf{A}^{k-1} &= \sum_{k=1}^K \mathbf{A}^{k-1} \sum_{l=0}^{K-k} \mathbf{A}^l \\ &= \sum_{k=1}^K \mathbf{A}^{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{K-k+1}) (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \\ &= \sum_{k=1}^K \mathbf{A}^{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} - \sum_{k=1}^K \mathbf{A}^K (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}^K) (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-2} - K \mathbf{A}^K (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \end{aligned} \quad \square$$

Dále budeme potřebovat několik pomocných výpočtů. Předně

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \int_{\nu-1}^{\nu} \xi(\tau) d\tau &= \int_{\nu-1}^{\nu} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) d\tau = \left[\tau - \frac{\tau^2}{2t}\right]_{\nu-1}^{\nu} = \frac{2t - 2\nu + 1}{2t} \\ &= \frac{2t+1}{2t} - \frac{\nu}{t}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Dále pak je

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \int_{\nu-1}^{\nu} (\nu - \tau) \xi(\tau) d\tau &= \int_{\nu-1}^{\nu} (\nu - \tau) \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) d\tau \\ &= \left[\nu\tau \left(1 + \frac{\tau}{t}\right) \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3t}\right]_{\tau=\nu-1}^{\nu} = \frac{3t - 3\nu + 2}{6t} \\ &= \frac{t - \nu}{2t} + \frac{1}{3t} = \frac{3t+2}{6t} - \frac{\nu}{2t}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Dosazením do (2.54) dostáváme pro rizikové náklady

$$r_i = \frac{\sum_{\nu=1}^t \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*) \mathbf{1} \left(\frac{2t+1}{2t} - \frac{\nu}{t}\right)}{\sum_{\nu=1}^t \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu} \mathbf{1} \left(\frac{2t+1}{2t} - \frac{\nu}{t}\right) + \sum_{\nu=1}^t \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*) \mathbf{1} \left(\frac{3t+2}{6t} - \frac{\nu}{2t}\right)}. \quad (2.63)$$

Upravme nejdřív čitatele výrazu (2.63). Je

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^t \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*) \mathbf{1} \left(\frac{2t+1}{2t} - \frac{\nu}{t}\right) \\ &= \frac{2t+1}{2t} \mathbf{e}_i^\top (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) \mathbf{1} - \frac{1}{t} \mathbf{e}_i^\top (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{1} + \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*t} \mathbf{1} \\ &= \frac{1}{2t} \mathbf{e}_i^\top \left[(2t+1)(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) - 2(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t})(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} + 2t\mathbf{P}^{*t}\right] \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

První sčítanec ve jmenovateli (2.63) můžeme upravit

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^t \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu} \mathbf{1} \left(\frac{2t+1}{2t} - \frac{\nu}{t}\right) = \frac{2t+1}{2t} \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^* (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{1} \\ &- \frac{1}{t} \mathbf{e}_i^\top \left[\mathbf{P}^* (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-2} - t\mathbf{P}^{*t+1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1}\right] \mathbf{1} \\ &= \frac{1}{2t} \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^* \left[(2t+1)(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) - 2(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t})(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} + 2t\mathbf{P}^{*t}\right] (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Pro druhý sčítanec ve jmenovateli (2.63) máme

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^t \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^{*\nu-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*) \mathbf{1} \left(\frac{3t+2}{6t} - \frac{\nu}{2t} \right) \\ & = \frac{3t+2}{6t} \mathbf{e}_i^\top (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) \mathbf{1} - \frac{1}{2t} \mathbf{e}_i^\top [(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t})(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} - t \mathbf{P}^{*t}] \mathbf{1} \\ & = \frac{1}{6t} \mathbf{e}_i^\top [(3t+2)(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) - 3(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t})(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} + 3t \mathbf{P}^{*t}] \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Tedy

$$r_i = \frac{\mathbf{e}_i^\top \frac{1}{2t} [(2t+1)(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) - 2(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t})(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} + 2t \mathbf{P}^{*t}] \mathbf{1}}{\mathbf{e}_i^\top (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{1}}, \quad (2.67)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2t} \mathbf{P}^* [(2t+1)(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) - 2(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t})(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} + 2t \mathbf{P}^{*t}] (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{6t} [(3t+2)(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) - 3(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t})(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} + 3t \mathbf{P}^{*t}]. \end{aligned}$$

a pro očekávaný příjem z rizikových nákladů

$$\begin{aligned} \mathbb{E} I_t^{r_i} &= r_i X \left[\frac{1}{2t} \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}^* [(2t+1)(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) - 2(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t})(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} \right. \\ &\quad \left. + 2t \mathbf{P}^{*t}] (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{1} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{e}_i^\top \frac{1}{6t} [(3t+2)(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t}) - 3(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{*t})(\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1} + 3t \mathbf{P}^{*t}] \mathbf{1} \right]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

2.3 Výtěžnost

Jedním z klíčových parametrů při stanovování hodnoty úvěrového portfolia je míra získání dlužných prostředků v případě, že klient zdefaultuje, neboli výtěžnost pohledávky.

V momentě, kdy klient zdefaultuje, tedy je 90 dnů po splatnosti, postoupí pobočka banky, která úvěr poskytla a spravuje, svoji pohledávku za klientem útvaru vymáhání pohledávek. Stává se, že se pak podaří obnovit splácení a klient je z tohoto útvaru vrácen zpět na pobočku, která úvěr poskytla. Ve většině případů je však nutné volit alternativní postupy k vyrovnání pohledávky, tedy k tomu, aby banka coby věřitel získala co možná nejvíce z částky, kterou ji její klient dluží.

Pokud je úvěr zajištěn (např. zástavním právem k nemovitosti nebo cennými

předměty), je situace poněkud snazší, než když se jedná o nezajištěnou pohledávku. Poznamenejme, že i v případě zajištěné pohledávky musí banka vyřešit, jak zajištění rychle směnit na peníze, tedy *likviditu* zajištění. Tato problematika už ale překračuje rámec této práce a nebudeme se ji tedy dále věnovat.

Výtěžnost, resp. její míra, je podíl části pohledávky získané útvarem vymáhání pohledávek k celkové výši dlužné částky v momentě defaultu. To znamená, že označíme-li výtěžnost β , pak

$$\beta = \frac{\text{návratnost pohledávky}}{\text{výše úvěru v momentě defaultu}}, \quad (2.69)$$

kde pod návratností rozumíme právě část pohledávky získanou útvarem vymáhání pohledávek, tedy realizaci zajištění, případně částečné splacení dlužné částky. Návratnost se většinou uvažuje diskontovaná.

Vztah (2.69) je však možno použít až potom, co klient zdefaultuje a bance se podaří získat část dlužné částky zpět. Chceme-li výtěžnost odhadnout, tedy zajímá-li nás, kolik můžeme očekávat, že banka získá od klientů, co zdefaultují, stanou se jak z návratnosti pohledávky, tak z výše úvěru v momentě defaultu náhodné veličiny. Je tedy třeba uvažovat jejich střední hodnoty.

Obecně se výtěžnost může pohybovat mezi nulou a jedničkou. Například Česká konsolidační agentura² vykázala za rok 2004 výtěžnost pohledávek 24% a pro rok 2005 předpokládá výtěžnost 43,2%, viz. [13].

V případě, že při výpočtu rizikových nákladů uvažujeme výtěžnost ze zdefaultovaných úvěrů ve výši β , dostáváme pro rizikové náklady příslušící jednorázově splatným úvěrům

$$r_i^\beta = (1 - \beta)r_i, \quad (2.70)$$

kde r_i je dáno vzorcem (2.59), a pro postupně rovnoměrně splatné úvěry

$$r_i^\beta = (1 - \beta)^2 r_i, \quad (2.71)$$

kde r_i je dáno vzorcem (2.67).

²Česká konsolidační agentura (ČKA) byla zřízená zákonem č. 239/2001 Sb., o České konsolidační agentuře a o změně některých zákonů ke dni 1. září 2001. ČKA je finanční instituce nebankovního typu, která nepřijímá vklady od veřejnosti ani neposkytuje úvěry. ČKA je právní nástupcem Konsolidační banky Praha, s.p.ú. ČKA je povinna dokončit veškeré aktivity a obchody, které převzala od Konsolidační banky. Je přitom oprávněna využít veškerá práva, možnosti a nástroje, jimiž disponovala KOB. Za závazky ČKA ručí stát. [12]

Bazilejská dohoda o kapitálové přiměřenosti pro zjednodušený přístup (Standardised Approach) vyžaduje počítat s výtěžností 55% pro nezajištěné a 65% pro zajištěné úvěry, jak je uvedeno v [11]. Pro pokročilejší přístup (Internal rating based Approach – IRB) je třeba odhadnout míru výtěžnosti z historických dat za dobu alespoň 7 let.

Výtěžnosti se budeme jěště věnovat ve čtvrté kapitole, kde ji budeme používat ve zjednodušené formě pro naše odhady rozdělení hodnoty konkrétního portfolia.

Kapitola 3

Další aspekty výpočtu kreditního rizika

3.1 Sdružené pravděpodobnosti přechodu

V části 1.4.1 jsme uvedli vzorce pro výpočet střední hodnoty portfolia tvořeného dvěma úvěry a ukázali jsme, jak je možno spočítat směrodatnou odchylku a value at risk tohoto portfolia. Při bližším prozkoumání těchto vzorců však zjistíme, že mají jedno slabé místo. Tím jsou sdružené pravděpodobnosti přechodu zavedené v (1.27). V případě, že je při výpočtu kreditního rizika portfolia máme předem zadané, není co řešit. To se ale nestává příliš často, a tak stojíme před problémem, jak tyto pravděpodobnosti odhadnout. Hned se nabízí řešení ve formě vynásobení odpovídajících marginálních pravděpodobností přechodu, formálně zapsáno

$$p_{(i,j)(i',j')} = p_{ii'} p_{jj'}. \quad (3.1)$$

Protože marginální pravděpodobnosti přechodu odhadnout umíme (postup uvedeme ve čtvrté kapitole), problém jsme zdánlivě vyřešili. Je třeba si ale uvědomit, že úvěry v portfoliu nejsou na sobě zcela nezávislé. Vzorec (3.1) však nezávislost přímo předpokládá.

Představme si následující situaci: Banka poskytla klientovi úvěr, označme jej U_1 . Klient tento úvěr použije ke koupì nemovitosti, kterou chce využívat k podnikatelským účelùm.

Nezávisle na tom banka poskytla úvěr stavební firmě, označme jej U_2 . Přestože to na první pohled nemusí být zřejmé, mohou být tyto dva úvěry korelované. Může se například stát, že klient s úvěrem U_1 pověří rekonstrukcí své nemovitosti právě stavební firmu, které byl poskytnut úvěr U_2 . Nastane-li u klienta s U_1 default, nebude schopen dostát svým závazkům nejen vůči

bance, ale také vůči stavební firmě. V důsledku toho se může také stavební firma dostat do potíží se splácením úvěru U_2 , nebo dokonce zdefaultovat.

Předchozí úvahu můžeme shrnout konstatováním, že splácení úvěrů tvořících portfolio je ovlivněno stejnými makroekonomickými a částečně také mikroekonomickými faktory. Banka se snaží minimalizovat kreditní riziko svého úvěrového portfolia tím, že sleduje změny v jednotlivých ekonomických odvětvích a adekvátně na ně reaguje.

Jedním z možných způsobů jak se ze závislostmi mezi jednotlivými úvěry vyrovnat, je pokládat default za funkci podkladové (a volatilní) hodnoty firmy. Toto téma zpracoval Robert Merton v [8] a bývá označováno jako *opční teoretické* ocenění dluhu. Na základě Black-Scholesova modelu oceňování opcí Merton tvrdí, že komponentu kreditního rizika při dluhu firmy je možné ocenit jako prodejní opci na hodnotu podkladových aktiv dané firmy. V Mertonově modelu je podkladová hodnota firmy náhodná veličina s nějakým rozdělením. V případě, že hodnota aktiv poklesne pod hodnotu zůstávajících závazků, bude pro firmu nemožné uspokojit své věřitele a tedy zdefaultuje. Mertonovu modelu a jeho rozšíření se budeme blíže věnovat v následující části.

3.2 Závislosti mezi úvěry

3.2.1 Rozšíření Mertonova modelu

V následujících odstavcích přiblížíme postup, který jsme naznačili v části 3.1. Použijeme ho při modelování sdružených pravděpodobností přechodu prvků portfolia mezi jednotlivými skóringovými stavami (označíme krátce jako „změna skóringu“). Naší motivací bude už zmíněná obtížnost přímého odhadu těchto sdružených pravděpodobností. Budeme tedy postupovat nepřímo:

1. Navrheme podkladový proces, který řídí změny skóringu. To vytvoří spojení mezi událostmi, které chceme popsat (změny skóringu), ale které nejsou ihned pozorovatelné, a procesem, který dokážeme pozorovat a popsat.
2. Odhadneme parametry procesu uvedeného v bodě 1. V případě, že jsme byli v první části úspěšní, bude toto jednodušší nežli přímé odhadování sdružených pravděpodobností změn skóringu.

V našem modelu budeme předpokládat, že změna hodnoty aktiv firmy v čase tvoří proces, který řídí změny skóringu. V zásadě je tento model možné přirovnat k Mertonovu opčnímu modelu popsánému v [8]. V následující části tedy popíšeme model, který propojuje změny hodnoty aktiv se změnami skóringu.

Významným faktorem, který určuje hodnotu aktiv společnosti, je právě její schopnost uspokojit své věřitele. Můžeme tedy předpokládat, že společnost nebude schopna dostát svým závazkům a nastane default, poklesnou-li její aktiva pod určitou úroveň, kterou označíme jako prahovou hodnotu. V případě, že by nás zajímal pouze default, vystačili bychom pouze s Mertonovým modelem, kterého základní myšlenku jsme právě uvedli. Protože nás však zajímá obecná změna hodnoty úvěru plynoucí ze změny skóringu dlužníka, budeme potřebovat komplexnější rámec.

Mertonův model je možné snadno rozšířit, aby kromě defaultu obsahoval také změny skóringu. Zobecnění spočívá v tom, že k prahu (threshold) stanovujícímu přechod do defaultu přidáme prahy pro jednotlivé skóringové stavy. Změna hodnoty aktiv firmy vztahující se k těmto prahům pak určuje její budoucí skóring.

To tedy znamená, že budeme předpokládat, že existují úrovně pro hodnotu aktiv, které na konci zkoumaného období určí skóring společnosti. Tento předpoklad můžeme ještě zúžit a uvažovat pouze změnu hodnoty aktiv za jeden rok od aktuálního času. Zdůrazněme, že přesně neznáme hodnoty určující jednotlivé prahy, pouze že právě popsaný vztah mezi skóringem a hodnotou aktiv existuje.

Přestože prahové hodnoty neznáme, dokážeme je odhadnout. Budeme předpokládat, že procentní změny hodnoty aktiv (ve své podstatě kladné nebo záporné „výnosy“ z aktiv, označíme je R) jsou normálně rozdělené a parametrisovány střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou (volatilitou) σ . Tato volatilita není volatilitou hodnoty kreditního instrumentu, ale pouze volatilitou výnosů z aktiv. Pro jednoduchost budeme předpokládat že $\mu = 0$.

Z toho, co bylo dosud uvedeno je zřejmé, že pro úvěr, který má čase $\tau = 0$ skóring s_i existují prahy aktiv $Z_d^i, Z_{s_n}^i, Z_{s_{n-1}}^i$, atd. takové, že když $R < Z_d^i$, potom dlužník v následujícím období zdefaultuje. Je-li $Z_d^i < R < Z_{s_n}^i$, potom se dlužník v následujícím období přesune do nižšího skóringového pásma s_n a podobně pro ostatní pásma. Bylo-li by například Z_d^i rovno -70% hodnoty aktiv, znamenalo by to, že 70% (nebo větší) pokles hodnoty aktiv dlužníka by vedl k jeho defaultu.

Navažme na Příklady 1 a 2 z první kapitoly. Nechť tedy počet skóringových stavů n je 7. Protože jsme předpokládali, že R je normálně rozdělené, můžeme spočítat pravděpodobnosti, že události popsané výše nastanou, například pro

úvěr se skóringem s_5 v čase $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} P(X_1 = d | X_0 = s_5) &= P(R \leq Z_d^5) = \Phi\left(\frac{Z_d^5}{\sigma}\right) \\ P(X_1 = s_7 | X_0 = s_5) &= P(Z_d^5 < R \leq Z_{s_7}^5) = \Phi\left(\frac{Z_{s_7}^5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{Z_d^5}{\sigma}\right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

a tak dále. Φ značí distribuční funkci standardního normálního rozdělení. Tyto pravděpodobnosti jsou uvedeny ve třetím sloupce Tabulky 3.1.

Tabulka 3.1 Jednoleté pravděpodobnosti přechodu
pro dlužníka se skóringem s_5

Skóring	Pravděpodobnost podle matice přechodu (v %)	Pravděpodobnost podle modelu hodnoty aktiv
s_1	0,03	$1 - \Phi(Z_{s_2}^5 / \sigma)$
s_2	0,14	$\Phi(Z_{s_2}^5 / \sigma) - \Phi(Z_{s_3}^5 / \sigma)$
s_3	0,67	$\Phi(Z_{s_3}^5 / \sigma) - \Phi(Z_{s_4}^5 / \sigma)$
s_4	7,73	$\Phi(Z_{s_4}^5 / \sigma) - \Phi(Z_{s_5}^5 / \sigma)$
s_5	80,53	$\Phi(Z_{s_5}^5 / \sigma) - \Phi(Z_{s_6}^5 / \sigma)$
s_6	8,84	$\Phi(Z_{s_6}^5 / \sigma) - \Phi(Z_{s_7}^5 / \sigma)$
s_7	1,00	$\Phi(Z_{s_7}^5 / \sigma) - \Phi(Z_d^5 / \sigma)$
d	1,06	$\Phi(Z_d^5 / \sigma)$

Nyní si stačí jenom uvědomit, že výrazy ve třetím sloupci Tabulky 3.1 se musí rovnat hodnotám ve druhém sloupci. Z toho dostáváme, že pro pravděpodobnost defaultu musí být $\Phi(Z_d^5 / \sigma)$ rovno 1,06 %. Vyjádříme Z_d^5 :

$$Z_d^5 = \Phi^{-1}(1,06\%) \cdot \sigma \doteq -2,30\sigma, \quad (3.3)$$

kde $\Phi^{-1}(p)$ značí kvantil normálního rozdělení odpovídající pravděpodobnosti p .

Tabulka 3.2 Prahouvé hodnoty pro výnosy z aktiv

pro dlužníka se skóringem s_5

Práh	Hodnota
$Z_{s_2}^5$	$3,43\sigma$
$Z_{s_3}^5$	$2,93\sigma$
$Z_{s_4}^5$	$2,39\sigma$
$Z_{s_5}^5$	$1,37\sigma$
$Z_{s_6}^5$	$-1,23\sigma$
$Z_{s_7}^5$	$-2,04\sigma$
Z_d^5	$-2,30\sigma$

Všimněme si, že tabulka 3.2 neobsahuje práh $Z_{s_1}^5$, protože jakýkoliv výnos nad $3,43\sigma$ znamená posun do skóringového pásma s_1 .

Uvažujme teď dalšího dlužníka se skóringem s_3 . Výnosy z aktiv pro tohoto dlužníka označme R' , směrodatnou odchylku výnosů z aktiv σ' a prahy výnosů z aktiv $Z_d^3, Z_{s_7}^3$ atd. Pravděpodobnosti přechodu a prahy výnosů z aktiv jsou uvedeny v následující tabulce 3.3.

Tabulka 3.3 Pravděpodobnosti přechodu a prahy výnosů z aktiv pro skóring s_3

Skóring	Pravděpodobnost	Práh	Hodnota
s_1	0,09 %		
s_2	2,27 %	$Z_{s_2}^3$	$3,12\sigma'$
s_3	91,05 %	$Z_{s_3}^3$	$1,98\sigma'$
s_4	5,52 %	$Z_{s_4}^3$	$-1,51\sigma'$
s_5	0,74 %	$Z_{s_5}^3$	$-2,30\sigma'$
s_6	0,26 %	$Z_{s_6}^3$	$-2,72\sigma'$
s_7	0,01 %	$Z_{s_7}^3$	$-3,19\sigma'$
d	0,06 %	Z_d^3	$-3,24\sigma'$

V této chvíli máme popsány možné pohyby mezi skóringovými pásmi pro jednotlivé dlužníky v závislosti na procesech řídících hodnotu aktiv. Abychom mohli popsat sdružený vývoj obou skóringů, budeme předpokládat, že výnosy z aktiv jsou korelovány. Je tedy ještě třeba specifikovat korelační koeficient ρ mezi výnosy z aktiv. Varianční matice dvourozměrného normálního rozdělení v našem případě je:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma\sigma' \\ \rho\sigma\sigma' & \sigma'^2 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Příklad 4. Předpokládejme, že chceme určit pravděpodobnost, že oba dlužníci zůstanou ve svých současných skóringových pásmech. To je pravděpodobnost, že výnosy z aktiv dlužníka se skóringem s_5 budou mezi $Z_{s_6}^5$ a $Z_{s_5}^5$ a zároveň výnosy z aktiv dlužníka se skóringem s_3 budou mezi $Z_{s_4}^3$ a $Z_{s_3}^3$. Jsou-li výnosy z aktiv nezávislé (t.j. $\rho = 0$), je tato pravděpodobnost součinem marginálních pravděpodobností. Je-li $\rho \neq 0$, je:

$$P(Z_{s_6}^5 < R < Z_{s_5}^5, Z_{s_4}^3 < R' < Z_{s_3}^3) = \int_{Z_{s_6}^5}^{Z_{s_5}^5} \int_{Z_{s_4}^3}^{Z_{s_3}^3} f(r, r'; \Sigma) dr' dr, \quad (3.5)$$

kde $f(r, r'; \Sigma)$ je hustota dvourozměrného normálního rozdělení s varianční maticí Σ . Viz. [4]. \triangle

Předtím, než popíšeme odhad parametrů, všimněme si ještě důležité skutečnosti, a sice že rovnice (3.5) nezávisí na volatilitách σ a σ' . Může se zdát neobvyklé, že v modelu rizika ignorujeme volatilitu aktiva. V zásadě ale všechna volatilita, kterou potřebujeme modelovat je zachycena pravděpodobnostmi přechodu pro každého dlužníka. Jako příklad uvažujme 2 dlužníky se stejným skóringem a tedy stejnými pravděpodobnostmi přechodu, ale různými volatilitami hodnoty aktiv. Volatilita hodnoty aktiv prvního dlužníka nechť je desetkrát větší než volatilita hodnoty aktiv druhého dlužníka. Víme, že kreditní riziko spojené z každým z dlužníků je stejné. Proces, který řídí hodnotu aktiv prvního dlužníka je sice volatilnější než proces, který řídí hodnotu aktiv druhého dlužníka. To ale pouze znamená, že vzdálenosti mezi prahy příslušícími prvnímu dlužníkovi jsou větší. Důsledkem toho je možnost uvažovat pouze standardizované výnosy z aktiv, tedy takové, které mají nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl. Jediným a zároveň klíčovým parametrem, který zbývá odhadnout, je tedy korelační koeficient výnosů z aktiv.

3.2.2 Odhad korelací aktiv

Existuje několik způsobů odhadu korelací mezi aktivity. Jedním z nich je využití specifických informací, které mají firmy k dispozici, a sice informace o výnosech z vlastního kapitálu – ukazatel ROE (Returns on equity).

Metody odhadu korelací mezi aktivity (například uváděné v Guptin, Finger a Bhatia [4]) předpokládají dostatek historických pozorování. V případě výpočtů s reálnými daty v rámci této práce se právě tento předpoklad ukázal být nesplnitelný. Bylo tedy nutno zvolit alternativní postup, který popíšeme v kapitole 4.

3.3 Marginální riziko

Rozhodnutí, jestli bude úvěr poskytnut nebo nikoliv, se velmi často dělá v širším kontextu již existujícího portfolia. Z toho plyne, že kromě výpočtu kreditního rizika pro samostatný úvěr je neméně důležitý výpočet marginálního přírustku rizika způsobeného přidáním nového úvěru do již existujícího portfolia.

Marginálním rizikem tedy rozumíme změnu value at risk portfolia způsobenou rozšířením portfolia o nový prvek.

Kapitola 4

Simulace

V předchozích částech jsme se zabývali analytickým odhadem rizika, tedy odhadem, který je možné přímo spočítat použitím vzorců, které plynou z předpokládaného modelu. Tento přístup má dvě velké výhody:

1. **Rychlosť.** Hlavně pro menší portfolia vyžaduje přímý výpočet méně operací, a tedy není náročný na čas.
2. **Přesnost.** Do výpočtů nevstupuje náhodná chyba (šum), takže odhady rizika nejsou zatíženy nepřesnostmi.

Na druhé straně má ale tento přístup dvě poměrně zásadní nevýhody. Jednou je to, že pro velká portfolia přestává bod 1. platit. Tou druhou to, že omezením se pouze na analytický přístup zároveň omezujeme množství statistik, které je možné odhadnout.

V této kapitole postupně uvedeme tři hlavní kroky výpočtu Value at Risk konkrétního portfolia pomocí simulační metody:

Simulační postup – Tři hlavní kroky

1. **Generování scénářů.** Po každé simulaci získáme pro každý úvěr v našem portfoliu jeho nový skóring v čase $\tau = 1$.
2. **Stanovení hodnoty portfolia.** Pro každou simulaci stanovíme nové hodnoty jednotlivých úvěrů odpovídající novým skóringům. Při výpočtu hodnot úvěrů použijeme metodu rizikových nákladů popsanou v kapitole 2, avšak počítaných vzhledem k času $\tau = 1$. Hodnota portfolia je součtem hodnot jednotlivých úvěrů.
3. **Shrnutí a zpracování získaných výsledků.** Máme-li hodnoty generované simulacemi v předešlých krocích, máme odhad rozdělení hodnot

portfolia. Jednoduchým výpočtem pak získáme Value at Risk našeho portfolia.

V této části, kde budeme pracovat s daty nejmenované banky, bude $n = 5$, tedy budeme mít 5 kreditních skóringových stavů a default.

Jako první potřebujeme odhadnout matici pravděpodobností přechodu \mathbf{P} , zavedenou vzorcem (1.3), se kterou budeme při generování scénářů a stanovení hodnoty portfolia pracovat.

4.1 Matice pravděpodobností přechodu

4.1.1 Odhad matice pravděpodobností přechodu

Připomeňme, že uvažujeme homogenní Markovův řetězec s diskrétním časem $\{X_\tau, \tau \in \{1, \dots, t\}\}$ a množinou stavů $S = \{s_1, \dots, s_n, d\}$. X_τ je stav prvku portfolia v čase τ . Označme formálně n^* počet prvků množiny S , tedy $n^* = n + 1$.

Počáteční rozdělení tohoto řetězce je dáno (1.1), matice pravděpodobností přechodu (1.3).

Zabýváme se situací, kdy matici \mathbf{P} neznáme a chceme ji odhadnout z řetězce délky $n + 1$

$$X_0 = s_{i_0}, X_1 = s_{i_1}, \dots, X_{\tilde{n}} = s_{i_{\tilde{n}}} \quad (4.1)$$

$$s_{i_0} \in S \setminus \{d\}, \quad s_{i_k} \in S, \quad k = 1, \dots, \tilde{n}$$

Jak je uvedeno v Mandl [7], platí

$$P(X_0 = s_{i_0}, X_1 = s_{i_1}, \dots, X_{\tilde{n}} = s_{i_{\tilde{n}}}) = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{\tilde{n}-1} i_{\tilde{n}}} = p_{i_0} \prod_{ij} p_{ij}^{N_{ij}}, \quad (4.2)$$

kde N_{ij} jsme označili četnost přechodů $i \rightarrow j$ v (4.1) a pro přehlednost jsme u pravděpodobností v (4.2) vynechali index s .

Stanovme maximálně věrohodné *odhady pravděpodobností přechodu*. Podle výsledků uvedených v Mandl [7] máme

$$\begin{aligned} L &= \log P(X_0 = s_{i_0}, \dots, X_{\tilde{n}} = s_{i_{\tilde{n}}}) \\ &= \log p_{i_0} + \sum_{i=1}^{n^*} \left(\sum_{j=1}^{n^*} N_{ij} \log p_{ij} + N_{in^*} \log \left(1 - \sum_{j=1}^{n^*-1} p_{ij} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Označme

$$N_{i \cdot} = \sum_j N_{ij}$$

počet přechodů ze stavu i . Při $N_{i \cdot}$ máme pro odhadu pravděpodobnosti

$$p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in^*-1}, p_{in^*} = 1 - \sum_{j=1}^{n^*-1} p_{ij}$$

rovnice

$$0 = \frac{\partial}{\partial p_{ij}} L = \frac{N_{ij}}{p_{ij}} - \frac{N_{in^*}}{1 - \sum_{j=1}^{n^*-1} p_{ij}}, \quad j = 1, \dots, n^* - 1. \quad (4.4)$$

Řešením dostáváme

$$\hat{p}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_{i \cdot}}, \quad j = 1, \dots, n^*. \quad (4.5)$$

Při $N_{i \cdot} = 0$, kdy pozorování neposkytuje podklad k odhadu pravděpodobností přechodu ze stavu i , klademe $\hat{p}_{ij} = 0$, $j = 1, \dots, n^*$.

V našem případě je N_{ij} počet přechodů ze stavu i do stavu j v průběhu daného roku a $N_{i \cdot}$ je počet klientů, kteří byli na začátku roku ve stavu i a v průběhu roku zůstali klienty banky. Matici pravděpodobností přechodu tedy odhadneme podle vzorce (4.5).

Pro odhad $\hat{\mathbf{P}}$ matice (1.3) jsme měli k dispozici data o 568 klientech banky za období 2000 až 2003. Banka klientovi přiřadila jednu z pěti interních skóringových kategorií, a to na základě posouzení finančních výkazů pravidelně předkládaných klientem bance. Dále bylo u každého klienta uvedeno, zda ho banka považuje za „splácejícího“ či „nesplácejícího“.

V dalším zachováme označení skóringových pásem s_1, \dots, s_5 . Poznamenejme, že v bance má každý klient svoji klasifikaci. Například klasifikační stupnice České národní banky má pět pásem:

1	standardní
2	sledovaný
3	nestandardní
4	pochybný
5	ztrátový

Ukazatel klientovy platební morálky byl podobně jako v [2] vytvořen sloučením dvou podmínek – klient, který je označen za „nesplácejícího“ musí být alespoň

90 dnů po splatnosti a nebo musí být klasifikován jako minimálně „nestandardní“ na výše uvedené stupnici.

V případě, že je klient považován za „nesplácejícího“, budeme předpokládat, že je v defaultu a k našim pěti pásmům přidáme šesté, *default*, které nahradí klientův dosavadní skóring. Z našeho předpokladu tedy plyne, že všechny klientovy stávající závazky vůči bance přecházejí do režimu nesplacených pohledávek. Nebudeme předpokládat, že by bylo možné, aby klient opustil default a zařadil se zpátky do jednoho z kreditních skóringových pásem. Poznamenejme, že taková situace se v našich datech sice vyskytla, ale pouze dvakrát a proto ji nebudeme uvažovat a budeme předpokládat, že je ošetřena prostřednictvím procentní výtěžnosti.

Protože pro některé klienty máme k dispozici skóringové hodnocení pouze pro jeden rok a k odhadu pravděpodobností přechodu to tedy nebude relevantní, vyřadili jsme je z původního vzorku. Zůstalo nám 342 klientů, pro které jsme měli k dispozici skóringové hodnocení alespoň pro dva po sobě jdoucí roky. Celkově bylo pro analýzu použito 576 změn nebo setrvání v skóringovém pásmu. V následující tabulce jsou uvedeny četnosti přechodů mezi jednotlivými skóringovými stavami za období 2000-2003.

Tabulka 4.1: Četnosti meziročních přechodů mezi skóringovými pásmi.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	d	Celkem
s_1	60	31	9	2	1	0	103
s_2	22	64	40	6	1	3	136
s_3	9	44	114	27	12	10	216
s_4	1	5	17	19	7	9	58
s_5	1	2	13	7	16	7	46
d	0	0	0	0	0	17	17
Celkem	93	146	193	61	37	46	576

V tabulce jsou uvedeny pouze přechody mezi stavami. Odpadá tedy kontrola, zda některý klient v průběhu roku z banky odešel. Sloupec *Celkem* zároveň udává počet klientů, kterým byl v předcházejícím roce přidělen daný skóring a zůstali klienty banky. Pomocí vztahu (4.5) tedy můžeme spočítat matici $\hat{\mathbf{P}}$:

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0,583 & 0,301 & 0,087 & 0,019 & 0,010 & 0,000 \\ 0,162 & 0,471 & 0,294 & 0,044 & 0,007 & 0,022 \\ 0,042 & 0,204 & 0,528 & 0,125 & 0,056 & 0,046 \\ 0,017 & 0,086 & 0,293 & 0,328 & 0,121 & 0,155 \\ 0,022 & 0,043 & 0,283 & 0,152 & 0,348 & 0,152 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Je vidět, že nejvyšší pravděpodobnost má scénář, kdy klient s daným skóringovým stavem v tomto stavu také setrvá (diagonální matice $\widehat{\mathbf{P}}$). Již na první pohled je ale také zřejmé, že matice $\widehat{\mathbf{P}}$ není přesně taková jak by se dalo intuitivně očekávat. Velmi podstatným problémem je, že pravděpodobnost defaultu neroste monotónně v závislosti na skóringovém pásmu. Zjevně je $p_{s_4d} > p_{s_5d}$, co není v souladu s předpokladem, že čím lepší je skóring (a tedy i bonita klienta), tím nižší je pravděpodobnost defaultu.

Zkusme proto alternativní model, viz. [5], a předpokládejme, že stavy portfolia tvoří homogenní Markovův řetězec se spojitým časem a maticí intenzit Λ (viz. [9]):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} & \lambda_{1d} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} & \lambda_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} & \lambda_{nd} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Pro matici Λ platí, že $0 \leq \lambda_{ij} \leq 1$, $\forall i \neq j$ a $\lambda_{ii} = -\sum_{i \neq j} \lambda_{ij}$. Tuto matici odhadneme podobným způsobem jako jsme uvedli v předchozích odstavcích.

Předpokládejme, že pravděpodobnost přechodu mezi stavy s_i a s_j , $i \neq j$ v časovém období $(\tau, \tau + h)$ je přímo úměrná délce období h , tedy

$$p_{ij}(\tau, \tau + h) = \lambda_{ij}h + o(h), \quad (4.8)$$

kde λ_{ij} je příslušná intenzita přechodu mezi stavy i a j . Přechody v tomto Markovově řetězci mají Poissonovo rozdělení s intenzitou λ_{ij} ([9]). Díky tomu, že známe empirické pravděpodobnosti přechodu za období jednoho roku, můžeme odhadnout mimodiagonální prvky matice intenzit Λ jako

$$\widehat{\lambda}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i}, \quad \forall i \neq j, \quad (4.9)$$

kde opět N_{ij} je počet přechodů ze stavu i do stavu j v průběhu roku a N_i označuje počet subjektů, které se na začátku nacházely ve stavu i a v průběhu roku zůstaly klienty banky. Diagonální prvky potom dopočteme podle vzorce

$$\widehat{\lambda}_{ii} = - \sum_{i \neq j} \widehat{\lambda}_{ij}. \quad (4.10)$$

Matici pravděpodobností přechodu získáme pak z matice intenzit pomocí vzorce ([9], věta 3.10):

$$\widehat{\mathbf{P}}(\tau) = e^{\Lambda\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda\tau)^k}{k!}. \quad (4.11)$$

Tedy podle vzorce (4.11) máme

$$\widehat{\mathbf{P}}(\tau) = \begin{pmatrix} 0,677 & 0,198 & 0,089 & 0,020 & 0,010 & 0,007 \\ 0,107 & 0,625 & 0,193 & 0,037 & 0,011 & 0,026 \\ 0,039 & 0,135 & 0,661 & 0,078 & 0,038 & 0,049 \\ 0,020 & 0,070 & 0,188 & 0,528 & 0,068 & 0,126 \\ 0,021 & 0,049 & 0,183 & 0,091 & 0,531 & 0,126 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Zdá se, že matice $\widehat{\mathbf{P}}(\tau)$ odpovídá více realitě než matice $\widehat{\mathbf{P}}$. Pravděpodobnost defaultu je nenulová i pro skóringové pásmo s_1 a pásmá s_4 a s_5 mají nyní pravděpodobnost defaultu stejnou. Rovněž se zvýšila pravděpodobnost setrvání ve stávajícím skóringovém stavu. Většina prvků obou matic také odpovídá intuitivnímu předpokladu, že pravděpodobnost přechodu do „bližšího“ skóringového stavu je vyšší než pravděpodobnost přechodu do stavu „vzdálenějšího“.

4.2 Generování scénářů

V této části popíšeme první krok našeho simulačního postupu, a to simulaci skóringových stavů jednotlivých úvěrů v našem portfoliu v čase $\tau = 1$. Způsobem uvedeným v části 3.2.1 zavedeme prahy odpovídající skóringům v čase $\tau = 0$ a pravděpodobnostem přechodu v matici (4.12), přičemž v matici (4.12) nebudeme ze zřejmých důvodů uvažovat poslední řádek a z důvodů popsaných v části 3.2.1 ani první sloupec.

V následující tabulce uvádíme prahy odpovídající skóringům v čase $\tau = 0$. Tabulkou je třeba číst „zleva doprava po řádcích“. Například druhý řádek odpovídá skóringu s_2 v čase $\tau = 0$ a jsou v něm postupně uvedeny prahy $Z_d^2, Z_{s_5}^2, Z_{s_4}^2, Z_{s_3}^2, Z_{s_2}^2$, kde horní index značí právě skóring v čase $\tau = 0$ a dolní index odpovídá skóringu v čase $\tau = 1$.

Tabulka 4.2 Prahy pro jednotlivé skóringy

Skóring	Z_d^i	$Z_{s_5}^i$	$Z_{s_4}^i$	$Z_{s_3}^i$	$Z_{s_2}^i$
s_1	-2,4572630	-2,1200717	-1,7866134	-1,1455051	-0,4565424
s_2	-1,9431340	-1,7866134	-1,4466321	-0,6219116	1,2372346
s_3	-1,6546280	-1,3594627	-0,9741139	0,9384757	1,7624103
s_4	-1,1455050	-0,8632501	0,5887932	1,3407550	2,0537489
s_5	-1,1455050	0,4042893	0,6682093	1,4832801	2,0537489

Podle skóringu úvěru v čase $\tau = 0$ zvolíme odpovídající řádek v tabulce 4.2. Prahy v daném řádku dělí reálnou osu na 6 intervalů, kterým (zleva doprava)

přiřadíme skóringy d, s_5, \dots, s_1 . Výstupem ze simulace je pro každý úvěr číslo z $N(0, 1)$ rozdělení, které patří do jednoho z šesti intervalů. Nový skóring tedy stanovíme podle toho, do kterého intervalu patří vygenerované číslo.

Klíčovou se při simulaci ukázala být volba varianční matice normálního rozdělení. Kvůli nedostatku vhodných dat bylo nemožné odhadnout závislosti mezi jednotlivými úvěry v portfoliu, proto jsme za varianční matici zvolili matici jednotkovou. Pro alespoň základní možnost porovnání jsme provedli další simulaci s jinak zvolenou varianční maticí, kterou popíšeme v další části.

4.2.1 Varianční matice

Jedním ze vstupů do simulace je taky varianční matice Σ normálního rozdělení. Díky tomu, co bylo uvedeno na konci části 3.2.1 můžeme uvažovat jednotkové rozptyly. Varianční matici tedy můžeme ztotožnit s korelační maticí příslušného rozdělení. Protože byl ale odhad korelací mezi jednotlivými úvěry v portfoliu mimořádně obtížný, ne-li nemožný, rozhodli jsme se pro následující postup: Data obsahovala informaci o tom, v jakém průmyslovém odvětví klient podniká. Následující tabulka uvádí seznam všech odvětví zastoupených v našem portfoliu.

Tabulka 4.3 Průmyslová odvětví zastoupená v datovém souboru

Industry index	Odvětví
1	Zemědělství
2	Těžba nerostných surovin
3	Potravinářství
4	Textilní a oděvný průmysl
5	Dřevospracující průmysl
6	Papírenství
7	Chemický průmysl
8	Hutnictví
9	Strojírenství
10	Elektrotechnický průmysl
11	Stavebnictví
12	Výroba elektřiny, plynu a vody
13	Obchod a cestovní ruch
14	Doprava a spoje
15	Ostatní činnosti

Simulaci jsme rozdělili na dvě části. V první jsme jako varianční matici použili matici jednotkovou. V druhé části jsme předpokládali, že úvěry ze stejné „industry“ skupiny jsou korelované s korelačním koeficientem 0,3 a korelační

koeficient úvěrů z různých „industry“ skupin je 0,05. Výsledky, které jsme získali jsou shrnuty v části 4.4.

Nyní přejdeme ke kroku 2 našeho simulačního postupu a pro každý úvěr v portfoliu stanovíme jeho hodnotu v čase $\tau = 1$ odpovídající vygenerovanému skóringu. Následně pak stanovíme hodnotu celého portfolia v čase $\tau = 1$.

4.3 Stanovení hodnoty portfolia

4.3.1 Poskytnutá data

Objem poskytnutých dat

Data poskytnuta bankou obsahovala údaje celkem o 11055 klientech, kterým banka založila dohromady 15833 úvěrových účtů. Poskytnutá data byla za období prosinec 2002 až srpen 2004. Kromě jiného data obsahovala výši jistiny po měsících, datum poskytnutí úvěru, dobu do splatnosti, celkovou dlužnou částku, počet dní zpoždění se splácením, jak velkou část úroku klient nesplatil a penále za nesplacený úrok, celkový úrok, měnu, ve které klient splácí, interní identifikační číslo klienta a úvěru a průmyslové odvětví, ve kterém klient podniká.

Skóringové třídy

Dále jsme obdrželi údaje o přechodech klientů mezi skóringovými kategoriemi v období 2000 až 2003. Přechody se odehrávaly vždy po celém roce mezi pěti kreditními skóringovými třídami a defaultem. Většinou byly klienty banky fyzické osoby, pro které banka nestanovovala skóringové třídy. Námi užívaná metodika se týka pouze těch klientů, u nichž víme, do kterého skóringového pásmá patří, proto jsme klienty bez skóringu nezařadili do našeho vzorku. Data se tedy týkala jenom 567 klientů. V roce 2003 máme celkem 304 klientů se známým skóringem. Tito klienti splácejí dohromady 464 úvěrů. Dále se tedy budeme zabývat pouze těmito klienty a úvěry.

Typy úvěrů a způsob jejich splácení

V našem portfoliu se vyskytují 2 běžné typy úvěrů – komerční úvěr a kontokorent právnických osob. Období, za které se počítají úroky je většinou 1 nebo 3 měsíce. Pro zjednodušení budeme uvažovat spojité splácení.

Portfolio jsme tedy dál rozdělili na 413 komerčních úvěrů a 51 kontokorentů právnických osob. U komerčních úvěrů jsme jako ztrátu brali výši nespla-

cené jistiny v okamžiku klientova defaultu. V případě kontokorentů je situace složitější, protože výše nesplacené jistiny může narůstat v závislosti na čerpání kontokorentu. Jako ztrátu jsme tedy brali úvěrový rámec (maximální hodnotu, jakou si klient může půjčit), protože předpokládáme, že se klient před defaultem co nejvíce zadluží.

V poskytnutých datech nebyla uvedena informace o způsobu splácení úvěrů, tedy zda se jedná o úvěry jednorázově či postupně splatné. Bylo tedy nutné určit způsob splácení nějakou vhodnou metodou. Jako nejjednodušší se jevilo užití změn výše jistiny v době trvání úvěru.

Výše jistiny většiny klientů se však chovala zdánlivě zcela náhodně. Pokud si klient půjčil další peníze, hodnota jistiny narostla. Bylo nutno jistinu od těchto dalších půjček očistit (viz. [2]):

$$\xi'(\tau) = \xi(\tau) - \sum_{i=1}^{\tau} d_i, \quad \tau = 1, \dots, t, \quad (4.13)$$

kde d_i je výše zapůjčené částky v období $\langle i-1, i \rangle$.

Pokud takto upravená jistina klesala, předpokládáme, že jde o postupně splatný úvěr. V opačném případě budeme předpokládat, že se jedná o úvěr jednorázově splatný. Jednorázově splatných úverů jsme v portfoliu identifikovali 219, postupně splatných 245.

Úvěry poskytnuté v cizích měnách

Data obsahovala i klienty, kterým byly poskytnuty úvěry v jiné než domácí měně. Data, která se týkala těchto klientů jsme upravili podle kurzu vyhlášovaného centrální bankou, v našem případě ze dne 1.8.2003 tak, aby všechny úvěry byly v domácí měně. Kurzovní zisky nebo ztráty plynoucí pro banku z toho, že má část úvěrového portfolia vedenou v cizích měnách nebude uvažovat.

Klienti s úvěrovým příslibem

Data obsahovala také údaje o 9 klientech, kteří měli k 1.8.2003 své závazky vůči bance vyrovnané, nicméně stále si mohou půjčit. Očekávaný příjem z těchto klientů je samozřejmě roven nule, naproti tomu očekávaná ztráta nulová není. Podle námi užívané metody nelze pro tyto klienty určit rizikové náklady (ve jmenovateli zlomku by byla nula), proto tyto klienty nebude uvažovat v portfoliu, jehož střední hodnotu budeme počítat.

4.3.2 Hodnoty V_{1j} pro $j \neq d$

Vyjdeme z úvahy uvedené v části 1.3.2, hlavně z rovnosti (1.10). Označíme t^* dobu, která zbývá do splatnosti úvěru v čase $\tau = 1$, tedy $t^* = t - 1$ z rovnosti (1.10). Výpočet očekávaného úrokového příjmu a očekávané ztráty z úvěru založíme na vztazích odvozených v druhé kapitole. Pro úvěr se skóringem s_j v čase $\tau = 1$, který měl v čase $\tau = 0$ skóring s_i , $i, j = 1, \dots, n$, budeme tedy dále pod aktuálními rizikovými náklady r a obchodní marží m rozumět jejich hodnoty právě k času $\tau = 1$, tedy k času, ke kterému určujeme očekávanou hodnotu úvěru a jeho Value at Risk. Cenu peněz vyjádřenou v procentech budeme značit c .

Pro stanovení aktuálních rizikových nákladů použijeme pro jednorázově splatné úvěry vztah (2.70) a pro postupně rovnoměrně splatné úvěry vztah (2.71). Obchodní marži m dostaneme podle vzorce

$$m = u - c - r. \quad (4.14)$$

Předpokládáme, že celková úroková sazba u je po dobu trvání úvěru neměnná. Celkově tedy ve smyslu značení používaném v druhé kapitole máme

- $EI_{t^*}^u$ očekávaný úrokový příjem banky z úroku u za období t^* . Očekávaný úrokový příjem představuje střední hodnotu částky vybrané bankou na úrokových platbách za období t^* od klienta, který v čase $\tau = 1$ nebyl v defaultu, nebo pouze do času T , zdefaultuje-li klient před splacením úvěru. Spočteme ho podle vzorce (2.2), na který aplikujeme na obě strany střední hodnotu.
- $EI_{t^*}^r$ očekávaný příjem banky z aktuálních rizikových nákladů r za období t^* . Tyto klientovy platby mají pokryt kreditní riziko. Dostaneme je podle vzorce (2.10).
- $EI_{t^*}^m$ očekávaný příjem banky z aktuální obchodní marže m za období t^* . Tato část představuje pro banku očekávaný zisk z úvěru. Samozřejmě, pokud je $EI_{t^*}^m < 0$, je úvěr pro banku ztrátový. Očekávaný příjem z marže dostaneme obecně podle vzorce (2.10), ve kterém rizikové náklady r_i nahradíme marží m .
- $EI_{t^*}^c$ očekávaný příjem banky z procentuálně vyjádřené ceny peněz c za období t^* . Klient tímto pokrývá cenu, kterou musí banka zaplatit za peníze potřebné k financování úvěru. Očekávaný příjem z ceny peněz dostaneme obecně opět podle vzorce (2.10), ve kterém rizikové náklady r_i nahradíme cenou peněz c .

- EL_{t^*} očekávaná ztráta je střední hodnota nesplacené částky, pokud klient zdefauktuje před splacením úvěru v čase t^* . Dostaneme ji podle vzorce (2.9).
- C cena peněz, kterou banka platí za zdroje pro financování úvěru. Je tedy nutné ji od očekávaného úrokového příjmu odečíst spolu s očekávanou ztrátou EL_{t^*} .

Tím tedy pro naš úvěr se skóringem s_j v čase $\tau = 1$ získáváme rovnost

$$V_{1j} = EI_{t^*}^u - EL_{t^*} - C,$$

kde V_{1j} má stejný význam jako v (1.10). Díky vztahu (4.14) a linearitě a aditivitě vztahu (2.41) dostáváme

$$V_{1j} = EI_{t^*}^r + EI_{t^*}^m + EI_{t^*}^c - EL_{t^*} - C.$$

Dále budeme předpokládat, že cena zdrojů C je plně pokryta očekávaným příjmem z procentuálně vyjádřené ceny peněz $EI_{t^*}^c$, tedy $EI_{t^*}^c - C = 0$. Z bilanční rovnice dostaneme $EI_{t^*}^r - EL_{t^*} = 0$. Dostáváme finální vztah pro očekávanou hodnotu úvěru, kterému do splatnosti zbývá t^* let, má v čase $\tau = 1$ skóring s_j a zůstatek $\xi(1)$

$$V_{1j} = EI_{t^*}^m, \quad (4.15)$$

kde $EI_{t^*}^m$ můžeme spočítat podle vztahu (2.53), kde rizikové náklady r_i nahradíme marží m . Tento vztah můžeme samozřejmě tak jako v druhé kapitole upravit pro jednorázově a postupně rovnoměrně splatné úvěry.

Tedy pro jednorázově splatné úvěry vyjádříme očekávané příjmy z aktuální obchodní marže od klienta, který se nachází ve skóringovém pásmu s_i podle vztahu (2.58), kde místo rizikových nákladů r_i máme aktuální marži m a místo zůstávající doby do splatnosti t použijeme t^* .

U postupně rovnoměrně splatných úvěrů postupujeme podobně, vyjdeme však ze vztahu (2.68).

4.3.3 Hodnoty V_{1d}

Vzhledem k tomu, že jsme o zajištění jednotlivých úvěrů v portfoliu neměli bližší informace, rozhodli jsme se předpokládat, že rozložení počtu zajištěných a nezajištěných úvěrů je rovnoměrné. U obou typů úvěrů v našem portfoliu, tedy u jednorázově i postupně rovnoměrně splatných jsme pro jednoduchost uvažovali jednotnou výtěžnost ve výši 32,5 %. Toto číslo jsme dostali jako aritmetický průměr výtěžností zajištěných, kde jsme předpokládali výtěžnost 40 % a nezajištěných úvěrů, u kterých jsme předpokládali výtěžnost 25 %.

Jednorázově splatné úvěry

U jednorázově splatných úvěrů, kterým do splatnosti zbyvá 1 rok nebo méně, mohou v zásadě nastat dvě možnosti:

- klient splatí celou zůstávající výši úvěru,
- klient v jistém momentě mezi časem $\tau = 0$ a $\tau = 1$ zdefaultuje a tedy úvěr v čase $\tau = 1$ nesplatí.

Je-li k času $\tau = 1$ celý úvěr splacen, je jeho očekávaná hodnota k tomuto času 0. Zdefaultuje-li klient do času $\tau = 1$, je očekávaná hodnota úvěru

$$V_{1d} = -(1 - \beta)\xi(0), \quad (4.16)$$

kde β je uvažovaná výtěžnost, tedy v našem případě 32,5 % a $\xi(0)$ zůstatek úvěru v čase $\tau = 0$.

U jednorázově splatných úvěrů se splatností delší než jeden rok od aktuálního času může mít klient v čase $\tau = 1$ jeden z pěti kreditních skóringů nebo může zdefaultovat. V případě, že klient zdefaultuje, spočítá se očekávaná hodnota úvěru stejně jako u úvěru splatného do 1 roka podle vzorce (4.16).

Postupně rovnoměrně splatné úvěry

U úvěrů se splatností 1 rok nás opět bude zajímat hlavně default, protože nezdefaultovali klient do času $\tau = 1$, je úvěr splacen a jeho očekávaná hodnota je tudíž nula. Nastal-li default mezi časem 0 a 1, předpokládáme, že klient do momentu defaultu splatil odpovídající část úvěru. To tedy znamená, že

$$V_{1d} = -(1 - \beta) \cdot \frac{\xi(0)}{2}. \quad (4.17)$$

Pro hodnotu úvěru, kterému do splatnosti zbyvá více než jeden rok máme

$$V_{1d} = -(1 - \beta) \cdot \left(\xi(0) - \frac{\xi(0)}{t} \right) \cdot \frac{1}{2}, \quad (4.18)$$

kde t je zůstávající doba do splatnosti od času $\tau = 0$ a β je opět 32,5 %.

Pro víceleté úvěry, které do času $\tau = 1$ nezdefaultovaly, stanovíme rizikové náklady podle vzorce (2.71) a podle části 4.3.2 novou hodnotu úvěru.

4.3.4 Hodnota portfolia

Hodnota portfolia v rámci jedné simulace se získá jako součet hodnot jednotlivých úvěrů.

4.3.5 Cena zdrojů

V poskytnutých datech nebyla informace o tom, jaká byla cena zdrojů určených k financování jednotlivých úvěrů. Předpokládali jsme, že banka si v době poskytnutí úvěru půjčí peníze na mezibankovním trhu, aby měla úvěr čím financovat. Tuto svou půjčku pak splácí pomocí peněz, které dostává ve formě klientových splátek úvěru. Cena peněz by se tedy měla pro každý úvěr lišit, a to podle doby poskytnutí úvěru, avšak v čase zůstává konstantní. Jako cenu peněz se tedy jeví vhodné brát úrokovou sazbu na mezibankovním trhu z období poskytnutí úvěru o délce celkové doby trvání úvěru. To je ale možné pouze u úvěrů se splatností do jednoho roku, protože úrokové sazby na mezibankovním trhu se nad jeden rok nestanovují.

Rozhodli jsme se proto pro jiný postup a jako cenu peněz jsme vzali úrokovou sazbu na vklady v roce vzniku úvěru. Úrokové sazby na vklady byly k dispozici pro jednoleté, dvouleté, tříleté, čtyřleté, pětileté a delší než pětileté vklady. Každému úvěru byla tedy přiřazena cena peněz podle roku poskytnutí a doby splatnosti zaokrouhlené na celé roky. V případě, že splatnost byla kratší než jeden rok, zaokrouhlili jsme ji nahoru na jeden rok.

Nyní přejdeme ke třetímu kroku našeho simulačního postupu.

4.4 Shrnutí a zpracování získaných výsledků

Naším úkolem bylo spočítat VaR portfolia úvěrů v daném budoucím časovém okamžiku na základě informací vztahujících se k aktuálnímu času. V našem případě je aktuální čas srpen 2003. To pro nás znamená, že žádné z údajů, které banka získala po tomto datu jsme nemohli použít. Budoucím časovým okamžikem byl srpen 2004. Prvním krokem k určení VaR portfolia úvěrů je stanovení střední hodnoty tohoto portfolia. Označme $V^{(1)}, V^{(2)}, V^{(3)}, \dots$ hodnoty portfolia v jednotlivých simulacích. Protože výběrový průměr je nestranný a konzistentní odhad střední hodnoty rozdělení (viz. například Dupač, Hušková [3], věta 5.1), máme:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V^{(i)},$$

kde N značí počet simulací, který je v našem případě 100000 pro obě variánční matice a $\tilde{\mu}$ značí odhad střední hodnoty portfolia. Rychlosť konvergence zvoleného algoritmu výpočtu je uvedena v Dodatku A. Zvolené kvantily rozdělení hodnoty portfolia jsme spočítali podle vzorce (1.21) a konečně Value

at Risk portfolia podle vzorce (1.22). Pro všechny výpočty byl použit software S-PLUS 6, pro přípravu dat byl použit software MS Excel, verze 2003. Výsledky simulací v tisících měnových jednotek jsou shrnuty v následující části.

- a) Při stanovování hodnoty úvěru jsme brali do úvahy výtěžnost ve výši 32,5%. Do výpočtu jsme nezahrnuli čtyři největší a mimořádně ztrátové úvěry, které jsou v čase $\tau = 0$ zařazeny do nejhoršího skóringového pásma a u kterých účtovaný úrok nepokrývá cenu zdrojů ani rizikové náklady.

Tabulka 4.4 Střední hodnota portfolia

Varianční matice	Střední hodnota
Jednotková	-324 566
Stanovená	-335 338

Tabulka 4.5 Kvantily rozdělení hodnoty portfolia

Kvantil	Varianční matice	
	Jednotková	Stanovená
1%	-2 350 788	-2 722 117
0,5%	-2 625 028	-3 014 696
0,1%	-3 208 420	-3 678 460
0,05%	-3 463 700	-3 965 765
0,01%	-4 152 901	-4 403 461

Tabulka 4.6 Value at Risk hodnoty portfolia v závislosti na použité varianční matici

Kvantil	Value at Risk	
	Varianční matice	
	Jednotková	Stanovená
1%	2 026 222	2 386 778
0,5%	2 300 462	2 679 357
0,1%	2 883 854	3 343 121
0,05%	3 139 134	3 630 427
0,01%	3 828 335	4 068 122

- b) Při stanovování hodnoty úvěru jsme nebrali do úvahy výtěžnost a do výpočtu jsme opět nezahrnuli čtyři největší úvěry.

Tabulka 4.7 Střední hodnota portfolia

Varianční matice	Střední hodnota
Jednotková	-409 816
Stanovená	-425 838

Tabulka 4.8 Kvantily rozdělení hodnoty portfolia

Kvantil	Varianční maticce	
	Jednotková	Stanovená
1%	-2 579 482	-2 988 891
0,5%	-2 831 028	-3 309 342
0,1%	-3 355 695	-4 048 704
0,05%	-3 634 475	-4 343 447
0,01%	-4 144 409	-4 819 556

Tabulka 4.9 Value at Risk hodnoty portfolia v závislosti na použité varianční matici

Kvantil	Value at Risk	
	Varianční maticce	
	Jednotková	Stanovená
1%	2 169 667	2 563 053
0,5%	2 421 213	2 883 503
0,1%	2 945 879	3 622 866
0,05%	3 224 660	3 917 608
0,01%	3 734 593	4 393 717

Z tabulek 4.4 a 4.7 je vidět, že očekávaná hodnota portfolia závisí na výtěžnosti úvěrů, které zdefaultují před časem, ke kterému očekávanou hodnotu portfolia počítáme.

Je také zřejmé (tabulky 4.6 a 4.9), že Value at Risk pro portfolio nezávislých úvěrů je menší než pro portfolio tvořené úvěry, které jsou korelovány.

- c) Při stanovování hodnoty úvěru jsme brali do úvahy výtěžnost ve výši 32,5%. Do výpočtu jsme zahrnuli čtyři největší úvěry.

Tabulka 4.10 Střední hodnota portfolia

Varianční maticce	Střední hodnota
Jednotková	-3 048 358
Stanovená	-3 058 987

Tabulka 4.11 Kvantily rozdělení hodnoty portfolia

Kvantil	Varianční maticce	
	Jednotková	Stanovená
1%	-5 293 292	-5 625 652
0,5%	-5 610 867	-5 977 712
0,1%	-6 185 430	-6 782 525
0,05%	-6 454 760	-7 029 417
0,01%	-6 949 582	-7 539 179

Tabulka 4.12 Value at Risk hodnoty portfolia v závislosti na použité varianční matici

Kvantil	Value at Risk	
	Varianční matice	
	Jednotková	Stanovená
1%	2 244 934	2 566 665
0,5%	2 562 509	2 918 725
0,1%	3 137 072	3 723 538
0,05%	3 406 402	3 970 430
0,01%	3 901 223	4 480 191

- d) Při stanovování hodnoty úvěru jsme nebrali do úvahy výtěžnost a do výpočtu jsme zahrnuli čtyři největší úvěry.

Tabulka 4.13 Střední hodnota portfolia

Varianční matice	Střední hodnota
Jednotková	-3 328 636
Stanovená	-3 343 008

Tabulka 4.14 Kvantity rozdělení hodnoty portfolia

Kvantil	Varianční matice	
	Jednotková	Stanovená
	1%	-5 914 810
0,5%	-6 279 468	-6 857 697
0,1%	-6 945 615	-7 808 838
0,05%	-7 175 355	-8 203 983
0,01%	-7 592 818	-8 932 888

Tabulka 4.15 Value at Risk hodnoty portfolia v závislosti na použité varianční matici

Kvantil	Value at Risk	
	Varianční matice	
	Jednotková	Stanovená
1%	2 586 174	3 055 169
0,5%	2 950 832	3 514 689
0,1%	3 616 979	4 465 829
0,05%	3 846 719	4 860 974
0,01%	4 264 182	5 589 879

Porovnáním hodnot v tabulkách 4.4, 4.7, 4.10 a 4.13 vidíme, že zahrnutí čtyř největších a ztrátových úvěrů do výpočtu velmi výrazně ovlivní konečný výsledek. Protože se zřejmě jedná o odlehlá pozorování, jevilo se jako vhodné provést také výpočet bez těchto úvěrů.

Fakt, že očekávaná hodnota portfolia nám ve všech čtyřech případech vyšla záporná, vyžaduje bližší komentář. Jedním z faktorů ovlivňujících očekávanou hodnotu portfolia je procentuálně vyjádřená cena zdrojů určených k financování daného portfolia. Nejreálnější odhad, který se nám podařilo zkonstruovat (popsaný v části 4.6) je poměrně vysoký a jeho výše v mnoha případech není pokryta účtovaným úrokem. Po odečtení procentuálně vyjádřené ceny peněz a rizikových nákladů od celkového úroku jsme tak v mnoha případech (262 z celkem 451 úvěrů) dostali zápornou obchodní marži, a tedy i zápornou očekávanou hodnotu úvěru.

Závěr

Na počátku této práce byly vytvořeny dva hlavní cíle. Prvním byla formalizace metodiky Creditmetrics, tím druhým pak aplikace získaných poznatků při stanovení Value at Risk konkrétního portfolia úvěrů k danému časovému okamžiku.

Metodiku Creditmetrics jsme rozvedli pomocí rizikových nákladů rozpracovaných v druhé kapitole. Popis vlastního výpočtu Value at Risk konkrétního portfolia tvoří čtvrtou kapitolu.

Mezi největší problémy, na které jsme při výpočtu očekávané hodnoty a Value at Risk portfolia narazili, se řadí odhad procentuálně vyjádřené ceny zdrojů financování úvěrů, jejíž hodnota v poskytnutých datech chyběla. Cena zdrojů však hraje velmi významnou roli při určování rozdělení hodnoty portfolia, a tedy i při stanovování jeho střední hodnoty. Proto by bylo potřebné, aby banka tyto data systematicky uschovávala ve svých databázích.

Dalším problémem byly korelace mezi jednotlivými úvěry v portfoliu. Z poskytnutých dat nebylo možné korelace rozumně odhadnout. Pro podporu hypotézy, že Value at Risk portfolia závisí na korelacích mezi úvěry tvořícími portfolia jsme provedli výpočet s dvěma variančními maticemi – s jednotkovou maticí, tedy za předpokladu nezávislosti úvěrů a se stanovenou varianční maticí.

Z výsledků uvedených v části 4.8 je vidět, že Value at Risk portfolia tvořeného nezávislými úvěry a portfolia tvořeného korelovanými úvěry se liší. Ukazuje se tedy, že je podstatné zabývat se odhady korelací mezi jednotlivými úvěry v portfoliu.

Tato práce využívá moderní matematický aparát, jako jsou podmíněné střední hodnoty či Markovovy řetězce, a aktuální poznatky v dané problematice. Nepředkládá model, který by se dal označit za dokonalý, často se bylo nutné uchýlit k approximaci (např. roční spojité splácení úroků nebo spojité splácení úvěrů). Je také zanedbána časová hodnota peněz, protože určení vhodného diskontního faktoru se ukázalo být mimořádně problematické.

Na druhou stranu uvedené postupy mohou sloužit pro approximaci potřebných odhadů kreditního rizika portfolia, kterými banka v současné době ne-disponuje. Bude je však potřebovat k obhájení IRB přístupu navrhovanému v práci Basel II.

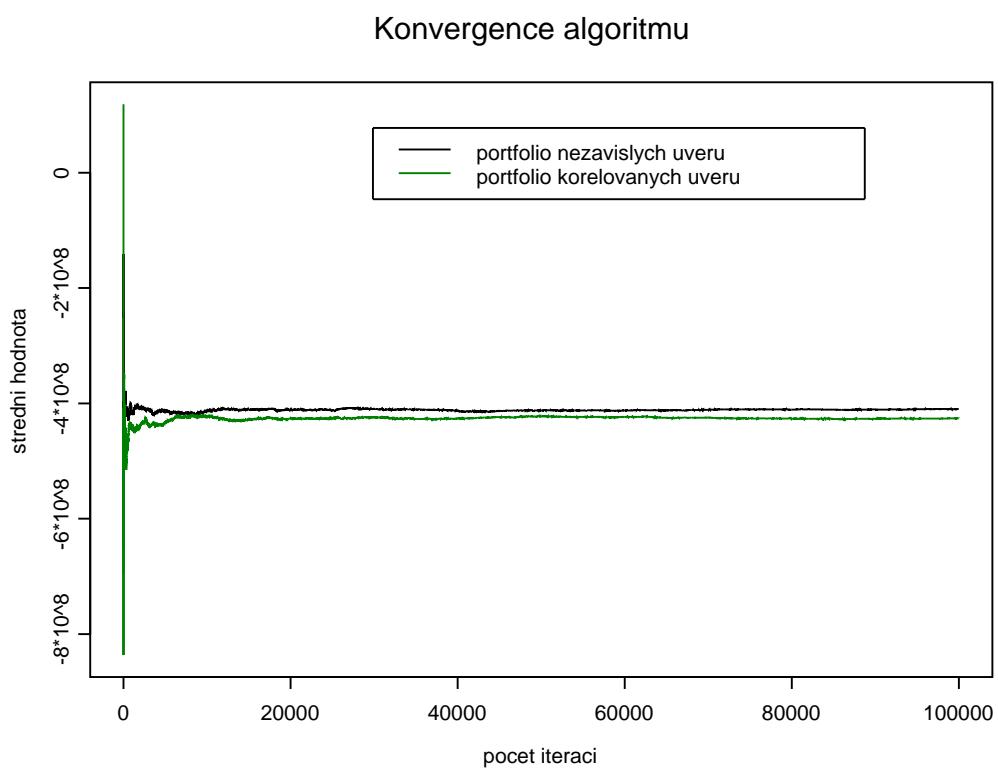
Literatura

- [1] Anděl, J.: *Základy matematické statistiky*, Preprint, MFF UK, Praha, 2002
- [2] Branda, M., Charamza, P., Jeřábek, J.: *Očekávaná hodnota portfolia*, Seminární práce, KPMS, MFF UK, 2006
- [3] Dupač, V., Hušková, M.: *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Skripta MFF UK, Karolinum 2001
- [4] Guptin, G. M., Finger, Ch. C., Bhatia, M.: *Creditmetrics - Technical Document*, J.P. Morgan&Co. Inc., 1997
- [5] Jarrow, R. A., Lando, D., Turnbull, S. M.: *A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads*, Review of Financial Studies, Vol. 10, No. 2, str. 481-523, 1997
- [6] Lachout, P.: *Teorie pravděpodobnosti*, Skripta MFF UK, Karolinum, 2. vydání, 2004
- [7] Mandl, P.: *Pravděpodobnostní dynamické modely*, Academia Praha, 1985
- [8] Merton, R. C.: *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates*, The Journal of Finance, Vol. 29, str. 449-470, 1974
- [9] Prášková, Z., Lachout P.: *Základy náhodných procesů*, Skripta MFF UK, Karolinum, Praha, 2001
- [10] Veselý, J.: *Matematická analýza pro učitele, druhý díl*, MATFYZPRESS, Praha, 2001
- [11] *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*. Basel Committee on Banking Supervision, Bank for International Settlements, 2004
- [12] <http://www.czka.cz/cz/profil/kdojsme.htm>
- [13] http://www.czka.cz/vyrz/vyrz2004/vz_cz/vz/11_text.htm#4

Dodatek A

A.1 Rychlosť konvergencie simulácií

Následujúci obrázek ukazuje rychlosť konvergencie algoritmu pre výpočet bez čtyř největších úvěrů a s nulovou výtěžností.



Další obrázek znázorňuje rychlosť konvergencie algoritmu pro výpočet bez čtyř největších úvěrů a s jednotnou výtěžností 32,5 %.

