

Posudek na bakalářskou práci ©árky Stejskalové

Název: The Continuum Function on Singular Cardinals / Funkce kontinua na singulárních kardinálech

Univerzita, katedra: Univerzita Karlova v Praze, Filozofická fakulta, katedra logiky

Vedoucí práce: Mgr. Radek Honzík, Ph.D.

Práce je psaná v anglickém jazyce a měla za úkol rozebrat dva důkazy Silverovy věty, která tvrdí za předpokladu pouze ZFC, že je-li κ singulární kardinál s nespočetnou kofinalitou a GCH platí pod κ , tak platí rovněž na κ . To kontrastuje s funkcí kontinua (přiřazuje každému kardinálu μ kardinál 2^μ) na regulárních kardinálech, o které Easton dokázal na počátku 70. let, že je prakticky nezávislá na axiomech ZFC. Silverova věta naznačuje, že totiž se zobecněním Eastonovy konstrukce na singulární kardinály nejsou pouze technického charakteru, ale souvisí s hlubšími výsledky dokazatelnými již v ZFC. Jak se ukázalo, s funkcí kontinua na singulárních kardinálech sice s pomocí forcingu manipulovat lze, ale mnohem obtížněji než v původní Eastonově konstrukci, a navíc jsou nutně potřeba velké kardinály.

Práce je organizována následovně.

V krátkém úvodu (Kapitola 1) autorka popisuje pozadí a souvislosti Silverovy věty a zmiňuje Eastonův výsledek. Formuluje rovněž axiom SCH (Singular Cardinal Hypothesis) – tvrdí, že $\kappa^{\text{cf}(\kappa)} = \max(\kappa^+, 2^{\text{cf}(\kappa)})$ pro singulární kardinál κ – a uvádí, že negace SCH implikuje konzistenci velkých kardinálů.

V Kapitole 2 shrnuje základní fakta o stacionárních množinách; věty důležité pro další expozici uvádí i s důkazy.

Kapitola 3 je věnována oběma důkazům Silverovy věty – původního důkazu s využitím generického elementárního vnoření a druhého čistě kombinatorického důkazu. Kombinatorický důkaz je od Baumgartnera a Příkrého a izoluje základní kombinatorické techniky, které se objevují v Silverově důkazu (je zajímavé sledovat, které vlastnosti potřebné pro práci s ultramocninou a vnořením a jakým způsobem se přetransformují do kombinatorických tvrzení).

V Kapitole 4 autorka sestruje za předpokladu κ^{++} -superkompaktního kardinálu model, který je protipříkladem na Silverovu větu, pokud bychom ji chtěli rozšířit na singulární kardinály se spočetnou kofinalitou. Tento model sestrojí kombinací reverzní Eastonovy iterace Cohenova forcingu následovaného Příkrého forcingem, který singularizuje měřitelný kardinál na singulární kardinál se spočetnou kofinalitou. Ve výsledném modelu tak platí $2^\kappa = \kappa^{++}$ a κ je silně limitní singulární kardinál se spočetnou kofinalitou. V tomto modelu neplatí SCH.

Autorka prokázala schopnost zvládnout velmi složitý důkaz dostupný pouze v anglickém jazyce. Její výklad je jasný a přehledný a soustředí se na podstatné věci. Zadáání práce beze zbytku splnila.

Mezi drobné nedostatky patří občasné chyby v angličtině (často chybí členy) a nepřesnosti (např. v Definici 4.1 chybí předpoklad, že ultrafilter je neprincipální). Tyto nedostatky však nesnižují celkovou kvalitu práce.

Práci hodnotím známkou *v ý b o r n ě*.

Radek Honzík, 8. září 2012.