UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Techniky výpočtu limit posloupností

Calculations of limits of sequences

Autor: Marek Fiala

Vedoucí práce: Mgr. Derek Pilous

Praha 2012

Prohlašuji, že jsem tento text vypracoval samostatně, pouze za použití uvedené literatury a pod vedením vedoucího práce.

V Praze dne 21.6.2012 Marek Fiala:

Abstrakt (Čj)

Tato bakalářská práce shrnuje a rozšiřuje teoretické základy kalkulu posloupností a jejich limit. Text, rozdělený na teoretickou a praktickou stať, nabízí základní přehled oboru posloupností v rámci matematické analýzy spolu s pokročilými výpočetními technikami. Aniž by bylo použito více z kalkulu funkcí, než je nezbytné, text přesahuje běžný rozsah vyučované látky na bakalářském stupni. Čtenář by si měl významně rozšířit vědomosti týkající se postupů vyšetřování limit posloupností a prohloubit své porozumění posloupnostem jako matematickým objektům.

Jádro práce spočívá v důkazu početních technik analogickým k větě o limitě složené funkce, substitucí a ekvivalencí vybraných funkcí pro posloupnosti.

Abstract (Eng)

This Bachelor's thesis aims to summarize and enrich theoretical foundations for calculus of sequences and their limits. Divided in two parts – theoretical and practical – text provides basic overview over sequence's branch of mathematical analysis as well as advanced calculation technics. By avoiding using as much of functional calculus as possibile this text reaches beyond standard curriculum of sequences as they are teached on bachelor's degree. Reader should substantialy broaden his or her knowledge of limit finding methods and deepen his or her understanding of sequences as mathematical objects.

Main core of this thesis is composed of proofs of calculus technics analogic to limit of composed function thesis, substitution and equivalences of selected functions for sequences.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Současný model výuky na vysokých školách klade silný důraz na examinaci studentů. Není záměrem této práce zabývat se důsledky tohoto fenoménu v celé jejich šíři, a ani nabízet alternativy. Důvod, proč tuto skutečnost zmiňuji je, že ji považuji za původce úzce vymezených zadání testovacích úloh, které nutí řešitele použít pouze stanovené postupy. Není neobvyklé, že se pod zadáním úlohy setkáme s klauzulí:

„Vyřešte bez použití L'Hospitalova pravidla.“

Takovéto zúžení arzenálu poznatků, jež student může použít při řešení, jakkoli ospravedlněné úmyslem autora testu ověřit znalosti konkrétních matematických nástrojů, nutně snižuje studentovu motivaci samostatně studovat „napřed“, nad rámec výuky. Tato práce vznikla jako reakce na popisovaný jev na poli posloupností, které k tomu z celého oboru úvodu do matematické analýzy považuji za nejvhodnější. Vzhledem ke skutečnosti, že posloupnost vyhovuje definici funkce, lze snadno nazřít, že nástroje pro vyšetřování vlastností funkcí lze uplatnit i při zjišťování téhož u posloupností. V této práci zavádím některé z nástrojů analýzy funkcí pro posloupnosti, aniž bych použil poznatků analýzy funkcí a ultimativně by takový postup měl postavit na hlavu klauzule typu:

„Vyřešte bez použití pojmu spojitosti a věty o limitě složené funkce.“

Nekoncipuji však tuto práci jako útok na zaběhané metody examinace studentů matematiky, tím méně na jejich kantory. Za účel této práce považuji sestrojení „berličky“, jejíž pomocí může slabší student zdolat test z posloupnostní analýzy, protože mu umožní použít silnější řešitelský aparát v souladu s restriktivními dodatky v zadání.

Pozn.: Považuji za vhodné objasnit obsah slova „*kalkulus*“, které v textu užívám. Důkazem toho, že tento termín proniká do odborné matematické češtiny je skutečnost, že Matematycko-fyzikální fakulta Karlovy univerzity v Praze ve školním roce 2006/2007 vyučovala předmět s názvem „proseminář z kalkulu“.

S termínem kalkulus se setkáváme ve dvojím významu, buď se kalkulem chápe podobor matematické analýzy popisující početní operace zejména s posloupnostmi a funkcemi, nebo obecněji jakékoli provádění operací na nějaké množině matematických objektů.

Kapitola 2

Teoretická stať

V této části nabízím soupis relevantních definic a matematických vět, které uplatním v praktické části práce. Není možno uvést všechny definice a věty, které budou v práci použity, proto soupis doplňuji seznamem znalostí, které podrobněji nerozepisuji.

2.1 Definice

2.1.1 Pomocné definice a ustanovení

Předpokládané znalosti

Zejména předpokládám znalost následujících pojmů: výroková logika a predikátový počet, důkazové techniky v matematice, množina a množinové operace, uspořádaná n-tice, relace, uspořádání, reflexivita, tranzitivita, symetrie, obor přirozených, celých, racionálních a reálných čísel ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$), množina iracionálních čísel ($\mathbb{I}$), zavedení elementárních funkcí a operace s nimi, fuknce $\operatorname{sgn} x$, absolutní hodnota, horní a dolní celá část čísla, trojúhelníková nerovnost, základy diferenciálního počtu aj..

Poznámka k číselným oborům

Mezi jednotlivými matematickými disciplínami není shoda ve způsobu zavedení oboru přirozených čísel ($\mathbb{N}$). *Peanovy axiomy*, které přirozená čísla definují, obecně postulují existenci prvního přirozeného čísla (takového, jež není následníkem žádného jiného přirozeného čísla). Nepřiřazují mu však ani symbol 0, ani 1. S nulou tento znak ztotožnila matematická algebra, oproti tomu matematická analýza první přirozené číslo značí symbolem 1.

Nechat tuto nejednoznačnost bez komentáře by však učinilo mnoho úvah obsažených v tomto textu zmatečnými. Jednou z relevantních vlastností posloupností je jejich největší, resp. nejmenší člen. I bez dalšího studia lze nahlédnout, že množina $\{\frac{3+n}{1+n}; n \in \mathbb{N}\}$ má jiný největší prvek, chápeme-li 0 jako prvek přirozených čísel, či nikoli.

Proto zavádím úmluvu, že v celém textu budu obor přirozených čísel chápat jako množinu $\{1, 2, 3, ...\}$, a teprve symbol $\mathbb{N}_0$ bude množina $\{0, 1, 2, ...\}$.

O notaci podmnožin číselných oborů

Části číselných oborů budu v textu značit analogicky k následujícímu:

$$\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N}; n \geq k\}$$
$$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} = \langle 0; \infty)$$
$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\} = (-\infty; 0)$$

Definice

Def 1. ***Zobrazení:***

Nechť $X, Y \neq \emptyset$ a nechť $f \subset X \times Y$, pro kterou platí

1. $\forall x \in X, \exists y \in Y : (x, y) \in f$,
2. $(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f) \Rightarrow y_1 = y_2$.

Potom f je *zobrazení X do Y*. Budeme ho značit $f : X \to Y$.
[*mapu (str.: 33)*]

Def 2. ***Restrikce zobrazení na množinu:***

Buď $f : X \to Y$ zobrazením a $M \subset X$ neprázdná množina. *Restrikcí* zobrazení f na množinu M rozumíme zobrazení $f \bigcap (M \times Y)$ a značíme $f|_M$.

Def 3. ***Rozšířená reálná čísla:***

Množinu $\mathbb{R}^*$ nazveme *rozšířená reálná čísla*, pokud $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$. Uspořádání a operace sčítání a násobení z oboru reálných čísel $\mathbb{R}$ dodefinujeme takto:

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x \qquad \wedge \qquad x < \infty \qquad \wedge \qquad -\infty < \infty$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : \infty + x = x + \infty = \infty \qquad -\infty + x = x - \infty = -\infty$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty \qquad x \cdot -\infty = -\infty \cdot x = -\infty$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^- : x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty \qquad x \cdot -\infty = -\infty \cdot x = \infty$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x}{\infty} = 0$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : (x+1)^\infty = \infty \qquad \left(\frac{1}{x+1}\right)^\infty = 0$$
$$\forall x \in (1; \infty) : x^\infty = \infty \qquad \forall x \in (0; 1) : x^\infty = 0$$

[*mapu (str.: 64)*]

Pozn.: Nedefinovány jsou výrazy: $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $\frac{x}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $0 \cdot \pm\infty$, 1^∞, ∞^0.

Pozn.: Oproti tomu jsou definovány výrazy: $\infty^\infty = \infty$, $\infty^{-\infty} = 0$, $0^\infty = 0$.

Pozn.: Řekneme, že výraz má smysl, nenabývá-li jeho výsledek nedefinovaného výrazu.

Def 4. ***Skoro všechna*** n**:**

Spojení „*pro skoro všechna n*“ užíváme v tomto smyslu: *predikát* $V(n)$ *platí pro skoro všechna* n, pokud množina $\{n \in \mathbb{N}; V(n)$ neplatí $\}$ je *konečná*. To lze pomocí kvantifikátorů vyjádřit tak, že

$$\exists k \in \mathbb{N},\ \forall n \geq k :\ V(n) \text{ platí.}$$

[*mapu (str.: 51)*]

Def 5. ***Okolí bodu:***

Je-li dáno $\varepsilon > 0$, pak množinu všech řešení nerovnice

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

nazýváme ε-okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ (čteme „epsilonovým okolím bodu a“) a používáme pro ni symbol $U(a, \varepsilon)$, resp. $U_\varepsilon(a)$.

[*mapu (str.: 50)*]

Platí následující označení:

$$U(+\infty) = P(+\infty) := (k, +\infty); \text{ kde } k < +\infty,$$
$$U(-\infty) = P(-\infty) := (-\infty; k); \text{ kde } k > +\infty.$$

Def 6. ***Prstencové okolí bodu:***

Množina

$$P_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x - x_0| < \varepsilon\} = U_\varepsilon(x_0) - \{x_0\}$$

se nazývá *prstencové ε-okolí bodu x_0*.

[*mapu (str.: 110)*]

Def 7. ***Horní a dolní závora množiny:***

Číslo $M \in \mathbb{R}^*$ se nazývá *horní odhad* (nebo též horní závora) množiny $A \subset \mathbb{R}$, jestliže platí

$$\forall x \in A : x \leq M.$$

Je-li horní odhad x_0 množiny A prvkem A, tedy platí-li pro $x_0 \in A$ tvrzení

$$\forall x \in A : x \leq x_0,$$

říkáme, že x_0 je *maximem množiny* A. Zapisujeme to pomocí vztahu $x_0 = \max A$.

Číslo $M \in \mathbb{R}^*$ se nazývá *dolní odhad* (nebo též dolní závora) množiny $A \subset \mathbb{R}$, jestliže platí

$$\forall x \in A : x \geq M.$$

Je-li dolní odhad x_0 množiny A prvkem A, tedy platí-li pro $x_0 \in A$ tvrzení

$$\forall x \in A : x \geq x_0,$$

říkáme, že x_0 je *minimem množiny A*. Značíme $x_0 = \min A$
[*mapu (str.: 23)*]
Pozn.: Říkáme, že množina $A \subset \mathbb{R}$ je *shora omezená*, pokud existuje v $\mathbb{R}$ alespoň jeden její horní odhad. Podobně říkáme, že množina $A \subset \mathbb{R}$ je *zdola omezená*, pokud existuje v $\mathbb{R}$ alespoň jeden její dolní odhad. Množina, která je současně shora omezená i zdola omezená, se nazývá krátce *omezená množina*.
[*mapu (str.: 24)*]

Def 8. ***Supremum a infimum:***

Říkáme, že číslo $S \in \mathbb{R}$ je *největší dolní odhad* množiny $A \subset \mathbb{R}$ neboli *infimum* množiny $A \subset \mathbb{R}$, jestliže platí

(1)$\forall x \in A, x \leq S$, tj. S je dolní odhad A, a

(2)$\forall S' \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq S' \Rightarrow S \leq S'$, tj. S je nejmenší horní odhad.

Říkáme, že číslo $S \in \mathbb{R}$ je *nejmenší horní odhad* množiny $A \subset \mathbb{R}$ neboli *supremum* množiny $A \subset \mathbb{R}$, jestliže platí

(1)$\forall x \in A, x \geq s$, tj. s je dolní odhad A, a

(2)$\forall s' \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq s' \Rightarrow s \geq s'$, tj. S je nejmenší horní odhad.

K označení užíváme pro S symbol sup A a pro s symbol sup A. [*mapu (str.: 24)*]

Věta 1. ***Bernoulliho nerovnost:***

$$\forall x \geq -2 \ \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Důkaz:

$$(1+x)^n - 1 = (1+x)^n - 1^n = x \sum_{i=0}^{n-1} (1+x)^i$$

$$x \geq 0 \Rightarrow 1 + x \geq 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} (1+x)^i \geq n \Rightarrow (1+x)^n - 1 \geq nx$$

$$-2 \leq x \leq 0 \Rightarrow |1+x| \leq 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} (1+x)^i \leq \sum_{i=0}^{n-1} |1+x|^i \leq n \Rightarrow (1+x)^n - 1 \geq nx$$

q.e.d.

[*převzato od D.Pilouse*]

2.2 Posloupnosti

Def 9. ***Posloupnost:***

Je-li každému n z $\mathbb{N}$ přiřazeno číslo a_n z $\mathbb{R}$, pak toto zobrazení nazýváme *posloupnost reálných čísel*, kratčeji jen posloupnost. Čísla a_n nazýváme členy, nebo prvky posloupnosti (někdy o a_n hovoříme jako o n-tém členu poslupnosti). Pro zápis posloupnosti používáme symbolů

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, nebo $\{a_k\}_1^{\infty}$, nebo $\{a_k\}$.

[*mapu (str.: 49)*]

V praxi kalkulu posloupností se však ponejspíše budeme setkávat s posloupnostmi, které vzorcem, nebo pravidlem definovat lze.

Takové zápisy pak dělíme na

- rekurentní

  rekurentně zadaná posloupnost je zadaná hodnotou prvního členu, nebo několika prvních a vzorcem pro hodnotu následujícího členu a_{n+1}.

  [*mapu (str.: 269)*]

- explicitním předpisem, vzorcem po částech[1]

  vzorec udávající hodnotu n-tého členu posloupnosti jako hodnotu funkce závislé na n, případně dva a více vzorců, každý pro nějakou podmnožinu $\mathbb{N}$.

Explicitním předpisem zadanou posloupnost lze vždy převést na posloupnost danou rekurentně, zpětně to však obecně nelze. V této práci se omezím na množinu posloupností zadaných vzorcem, neboť při vyšetřování vlastností nějaké posloupnosti v rámci vysokoškolského kalkulu tvoří drtivou většinu.

Zůstává otázkou, jakým matematickým objektem je množina prvků $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ daných předpisem $a_n = \frac{1}{(n-5)(n-3)}$. Ve smyslu uvedené definice nejde o posloupnost, neboť není splněna podmínka, aby *každému* $n \in \mathbb{N}$ bylo přiřazeno nějaké

[1]) Tento název jsem si vypůjčil z bakalářské práce Davida Jandy - Funkce v příkladech a protipříkladech, kterou obhájil v roce 2011 na PedF UK v Praze.

číslo. Vzorec není definován pro hodnoty $n = 5$ a $n = 3$. Přesto tuto množinu za posloupnost považovat budeme. Z hlediska konvergence posloupnosti nezáleží na hodnotě ani pořadí konečně mnoha členů posloupnosti[2], a tak lze „chybějící“ členy libovolně dodefinovat či přečíslovat, abychom dosáhli přiřazení hodnoty pro každé n.

Idea zobrazit všechna přirozená čísla při zadávání posloupnosti vychází ze snahy uchopit posloupnost jako *uspořádananou* množinu a tedy, že je možné říci, který člen je první, který druhý a tak dále. Oproti tomu matematický zápis posloupnosti, který proměnnou n chápe jako vzor zobrazení, jemuž je předpisem přiřazen nějaký obraz, již nemusí být definován pro všechny hodnoty n a přesto vytvářet nekonečnou uspořádanou množinu čísel – posloupnost. „Děravou“ posloupnost lze vždy přečíslovat tak, aby chybějící členy neměly přiřazeno žádné přirozené číslo.

Příklad: Posloupnost z předchozího odstavce zapišme výčtem několika prvních členů:

$$a_n = \frac{1}{(n-5)(n-3)} = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \frac{1}{24}, \ldots\}$$

Z výčtu prvků již hravě vidíme, který člen posloupnosti je první, který druhý atd. Při takovém přečíslování však ztrácíme informaci o původním předpisu, který posloupnost generoval. Navíc dochází k podivné situaci, kdy třetí člen posloupnosti vznikl dosazením čtvrtého přirozeného čísla do předpisu, a to je velmi neintuitivní a nepohodlné. Proto se vzdalme od původní ideje posloupnosti a definiční obor posloupnosti nepožadujme celé $\mathbb{N}$;

Def 10. *Posloupnost (obecněji):*

Nechť $\mathbb{N}_k \subset \mathbb{Z}$ má nekonečně prvků a nechť $a_n : \mathbb{N}_k \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované pro všechny prvky $\mathbb{N}_k$, pak množinu

$$\{a_n; n \in \mathbb{N}_k\}$$

nazveme *posloupností.*

Def 11. *Monotonie posloupnosti:*

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá

[2]) Matematický důkaz tohoto tvrzení přímo vyplývá z vlastností podposloupností a hromadných bodů posloupnosti, které uvádím níže.

- *rostoucí*, pokud

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n,$$

- *klesající*, pokud

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n,$$

- *nerostoucí*, pokud

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n,$$

- *neklesající*, pokud

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n,$$

- *konstantní*, pokud

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_{n+1}.$$

[*psm (str.: 272)*]

Pozn.: Lze snadno nazřít, že jsem výše zmíněnými pěti případy nevyčerpal všechny možnosti. Jsou např. posloupnosti, které svou monotonii mění periodicky[3], v každé trojici po sobě jdoucích členů, obecně nekonečněkrát. Chtěl bych zde varovat před intuitivním použitím slova *oscilující*. Jakkoli chování takovýchto „skákajících“ posloupností může svádět k použití tohoto termínu, může být jeho použití zavádějící vzhledem k jeho definici pro číselné řady.

Pozn.: Posloupnost nerostoucí nebo neklesající nazveme obecně *monotónní*, rostoucí nebo klesající posloupnost pak označíme za *ryze monotónní*.

---

[3]) Ve smyslu pozdější definice monotonie funkce;
V praxi se s výroky typu „posloupnost je rostoucí jen na nějaké podmnožině přirozených čísel“ skutečně setkáváme. Striktně vzato je takový výrok nesmysl, neboť definice monotonie posloupnosti požaduje monotonii na celém $\mathbb{N}$, nicméně pro funkce je zavedena monotonie na nějaké podmnožině definičního oboru, což se někdy přenáší i na posloupnosti. Často se proto spokojíme s výrokem, že posloupnost je monotónní pro skoro všechna n. Jinými slovy, existuje takové n_0, že pro všechna $n > n_0$ je posloupnost monotónní.

Def 12. ***Omezená posloupnost:***

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *shora omezená*, pokud

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq K,$$

dále řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *zdola omezená*, pokud

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq K.$$

Je-li posloupnost zároveň omezená shora i zdola, řekneme, že je *omezená*.

Def 13. ***Vybraná posloupnost, Podposloupnost:***

Budiž dána posloupnost $\{a_n\}$; budiž $\{k_n\}$ posloupnost přirozených čísel taková, že $k_1 < k_2 < k_3 < ...$ (obecně $k_n < k_{n+1}$). Potom posloupnost

$$a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, ...(n\text{-tý člen je } a_{k_n})$$

nazýváme posloupností *vybranou* z posloupnosti $\{a_n\}$ Posloupnost $\{a_{k_n}\}$ vzniká tedy tím, že z posloupnosti $\{a_n\}$ podržíme pouze členy s indexy $\{k_n\}$. Poznamenejme, že $k_n \geq n$.
[*dp1 (str.: 87)*]

Věta 2. ***Rovnost posloupností:***

Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti. Pak řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ *se rovná* posloupnosti $\{b_n\}$ právě tehdy, když

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = b_n.$$

Důkaz: Vyplývá z rovnosti zobrazení. *q.e.d.*

Def 14. ***Limita posloupnosti:***

Říkáme, že číslo a je limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže má číslo a tuto vlastnost: Ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo n_0 tak, že pro každé přirozené číslo n, jež je větší než n_0, platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$. [*dp1 (str.: 75)*] Symbolicky:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N} :\ n > n_0; |a_n - a| < \varepsilon$$

Zde je nanejvýš příhodné připomenout geometrickou interpretaci absolutní hodnoty rozdílu. Nerovnice v definici totiž neříká nic jiného, než že *všechny členy posloupnosti po* a_{n_0} *se již od hodnoty limity a nevzdálí o více, než o* ε.

Pozn.: Skutečnost, že číslo a je limitou posloupnosti $\{a_n\}$ značíme jednou z následujících dvou možností:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \equiv a_n \to a$$

Ačkoli to není explicitně řečeno, z definice vyplývá, že $+\infty$ a $-\infty$ nemohou být limitami. Zvolíme-li libovolné reálné kladné ε a položíme-li $lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, nabyde nerovnost v definici tvaru $|a_n \mp \infty| < \varepsilon$ tj $| \mp \infty| < \varepsilon$ podle aritmetiky nekonečen a výrok $\infty < \varepsilon \in \mathbb{R}$ je zřejmý spor s tím, jak je symbol ∞ zaveden. Přesto se však se zápisem $lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ setkáváme, jeho význam vysvětlím bezprostředně:

Def 15. ***Nevlastní limita posloupnosti v*** $+\infty$***:***

Nechť ke každému číslu A existuje n_0 tak, že pro každé $n > n_0$ je $a_n > A$. Potom říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má nevlastní limitu $+\infty$ a vyjadřujeme to znakem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Def 16. ***Nevlastní limita posloupnosti v*** $-\infty$***:***

Nechť ke každému číslu A existuje n_0 tak, že pro každé $n > n_0$ je $a_n < A$. Potom říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má nevlastní limitu $-\infty$ a vyjadřujeme to znakem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

[*dp1 (str.: 89)*]

Skutečnost, že čísla $\pm\infty$ nevyhovují definici limity, ale jsou jí nazývány, glosuje prof. Jarník brilantní poznámkou: *„Také v obecné mluvě se vyskytují podobné úkazy. Definujeme-li pojem „matka“ slovy „matka osoby A je žena, která osobu A porodila“ (což je obvyklý smysl slova matka), není nevlastní matka osoby A matkou osoby A.“ [dp1 (str.: 90)]*

Tento přístup je však nyní překonán a zavádí se souhrnná definice limity posloupnosti pomocí okolí bodu, jíž vyhovují všechny body $\mathbb{R}^*$.

Def 17. ***Hromadný bod posloupnosti:***

Číslo $\psi \in \mathbb{R}^*$ nazýváme *hromadným bodem (hromadnou hodnotou)* posloupnosti $x_n (n = 1, 2, ...)$, jestliže existuje její podposloupnost x_{p_n} tak, že platí

$$\lim_{n \to \infty} x_{p_n} = \psi.$$

[*sucma (str.: 15)*]

Def 18. ***Hromadný bod posloupnosti (ekvivalentní):***

Číslo ψ (nebo symbol $\pm\infty$) nazýváme *hromadným bodem (hromadnou hodnotou)* posloupnosti $\{x_n\}$, jestliže v každém okolí $U(\psi)$ leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{x_n\}$.

Def 19. ***Konvergentní posloupnost:***

O posloupnosti, jež má limitu (vlastní), říkáme, že je *konvergentní.* [*dp1 (str.: 76)*]

Def 20. ***Divergentní posloupnost:***

Nemá-li posloupnost vlastní limitu, nazývá se divergentní. [*dp1 (str.: 76)*]

Pozn.: Oscilující posloupnost: V dostupné literatuře není pojem *oscilující posloupnost* definován. Setkáme se s ním až u číselných řad, pro které platí, že řadu nazveme konvergentní, pokud konverguje posloupnost jejích *částečných součtů*, pokud ovšem posloupnost částečných součtů diverguje, „*jsou možné tyto tři případy: je-li* $\lim s_n = +\infty$*, říkáme, že řada diverguje k* $+\infty$*; je-li* $\lim s_n = -\infty$*, říkáme, že řada diverguje k* $-\infty$*, neexistuje-li* $\lim s_n$ *(vlastní ani nevlastní), říkáme, že řada osciluje.*“ [*dp1 (str.: 119)*]

Intuitivně se tedy pojem *oscilující posloupnost* chápe jako taková divergentní posloupnost, která má alespoň dva hromadné body (tj. nemá limitu). Takto zavedené označení posloupností odpovídá následujícímu schématu.

$$\lim a_n \in \begin{cases} \mathbb{R} & \text{konvergentní} \\ \{-\infty; \infty\} & \text{divergentní} \\ \emptyset & \text{oscilující} \end{cases}$$

Def 21. ***Limita posloupnosti (souhrnná):***

Číslo L nazveme limitou posloupnosti $\{a_n\}$ právě tehdy, když $\forall \varepsilon > 0 : a_n \in U_\varepsilon(L)$ pro s.v.n.

Ekvivalence s předchozími definicemi vlastní i nevlastní limity posloupnosti je zřejmá. Bod L ze souhrnné definice je zřejmě jediný hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$.

Věta 3. ***O vztahu limity a hromadného bodu posloupnosti:***

Nechť číslo $L \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\{a_n\}$ je libovolná posloupnost. Pak $\lim a_n = L$ právě tehdy, když L je jediný hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$.

Důkaz:

„$\Rightarrow$“ plyne z věty o jednoznačnosti limit, každá limita je jistě hromadným bodem posloupnosti.

„$\Leftarrow$“ L je *jediný* hromadný bod $\Rightarrow \exists n_0 : \forall n > n_0 \forall a_n \in U(L) \Leftrightarrow$ s.v.$n \quad a_n \in U(L) \Rightarrow L = \lim a_n$.

q.e.d.

Věta 4. ***O limitě vybrané posloupnosti:***

Nechť $\lim a_n = L, L \in \mathbb{R}^*$. Pak pro každou podposloupnost a_{n_k} platí $\lim a_{n_k} = L$.

Důkaz: $k \to \infty \Rightarrow n_k \to \infty \Rightarrow \forall n_0 :$ s.v.$n_k > n_0$ a proto

$$\forall \varepsilon > 0 : a_n \in U_\varepsilon(L) \text{ pro s.v.} n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : a_{n_k} \in U_\varepsilon(L) \text{ pro s.v.} n_k.$$

q.e.d.

Věta 5. ***O vztahu limity posloupnosti a limit posloupností z ní vybraných:***

Nechť $\lim a_{n_k} \neq \lim a_{n_l}$, pak $\lim a_n$ neexistuje.

Důkaz: Podle definice hromadného bodu musí $\lim a_{n_k}$ i $\lim a_{n_l}$ tvořit hromadné body posloupnosti $\{a_n\}$, pak ale $\{a_n\}$ má více než jeden hromadný bod, a proto nemá limitu.

q.e.d.

Def 22. ***Geometrická posloupnost:***

Geometrická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně vztahy

$a_1 = a,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n \cdot q;$

kde $a, q \in \mathbb{R}$. Číslo q se nazývá *kvocient geometrické posloupnosti.*
[*psm (str.: 273)*]
Pozn.: n-tý člen geometrické posloupnosti lze vyjádřit vzorcem $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
[*psm (str.: 274)*]
Pozn.: Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti platí

$$s_n = a_1 \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}, \text{ je-li } q \neq 1$$

[*psm (str.: 274)*]
Pozn.: název geometrické posloupnosti je odvozen od skutečnosti, že její člen (kromě prvního) je tzv. geometrický průměr svého předchůdce a následníka. Další obdobně význačnou posloupností je posloupnost aritmetická[4].
Pozn.: Pro $a = 0$ tvoří geometrická posloupnost bez ohledu na hodnotu kvocientu posloupnost samých nul. Někdy se taková posloupnost ani za geometrickou nepovažuje, neboť není možné jednoznačně stanovit kvocient. Při $q = 0$ je geometrická posloupnost nulová nejpozději od druhého členu.

[4]) **Aritmetická posloupnost:** *Aritmetická posloupnost* je každá posloupnost určená rekurentně vztahy

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d;\ \forall n \in \mathbb{N},$$

kde $a, d \in \mathbb{R}$. Číslo d se nazývá *diference aritmetické posloupnosti* a n-tý člen aritmetické posloupnosti lze vyjádřit vzorcem $a_n = a_1 + (n+1)d$. Každý člen aritmetické posloupnosti tvoří tzv. aritmetický průměr svého předchůdce a následníka. [*psm (str.: 273-4)*]

2.2.1 Některé další důležité věty o posloupnostech

Věta 6. ***Jednoznačnost limity:***

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz: Sporem:

Nechť $\lim a_n = a \wedge \lim a_n = b$, kde $a < b$. Položme $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, pak z definice limity posloupnosti:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, n > n_1 : |a_n - a| < \varepsilon \wedge \exists n_2 \in \mathbb{N}, n > n_1 : |a_n - b| < \varepsilon$$

Pak pro všechna $n > \max(n_1; n_2)$ dostáváme spor

$$\begin{aligned} b - \varepsilon < a_n &< a + \varepsilon \\ b - \varepsilon &< a + \varepsilon \\ b - a &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

což je spor se zvoleným $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. *q.e.d.*

[*dp1 (str.: 76)*]

Věta 7. ***o aritmetice limit (slabší verze):***

Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti. Potom platí

(1) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$

(2) $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$

(3) nechť navíc $\lim b_n \neq 0$, pak i $\lim(a_n/b_n) = \lim a_n / \lim b_n$

Důkaz:

(1) Nechť $\varepsilon > 0$, pak jistě existuje číslo k_1 takové, že $\forall n > k_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, a dále takové číslo k_2, že $\forall n > k_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak z trojúhelníkové nerovnosti pro $k = \max(k_1; k_2)$ platí:

$$\forall n > k : \quad |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|,$$

kde pravou stranu nerovnosti můžeme odhadnout součtem $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| < \varepsilon.$$

a rovnost (1) je dokázána.

(2) $\{a_n\}$ konvergentní $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < M$. Dále platí

$$|(a_n \cdot b_n) - (a \cdot b)| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$$

$$|a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq M \underbrace{|b_n - b|}_{<\varepsilon} + |b| \cdot \underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon}.$$

$$\Rightarrow |(a_n \cdot b_n) - (a \cdot b)| \leq \underbrace{(M + |b|)}_{\text{konstantní}} \varepsilon.$$

(3) Pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|a_n b - a b_n|}{|b_n| \cdot |b|} = \frac{|a_n b - ab + ab - a b_n|}{|b_n| \cdot |b|} \leq 2\frac{|b| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|}{|b|^2}.$$

Protože pro libovolné $\varepsilon > 0$ jsou výrazy $|a_n - a|, |b_n - b|$ menší než toto ε pro skoro všechna n, odhadneme výraz vpravo hodnotou $2 \cdot (|a| + |b|) \cdot \varepsilon / |b|^2$, což stačí k dokončení důkazu.
q.e.d.
[*mapu (str.: 60, 62)*]

Věta 8. ***o aritmetice limit (obecnější):***

Nechť $a_n \to a, b_n \to b$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b, \tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \tag{2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = a / b, \tag{2.3}$$

mají-li výrazy na pravé straně smysl.
Důkaz: Důkaz z valné části vyplývá z předchozí věty, pro divergentní a_n, b_n je pak triviální. *q.e.d.*

[*mapu (str.: 70, 71)*]

Věta 9. ***Limita monotónní posloupnosti:***

Neklesající shora omezená posloupnost reálných čísel má limitu a platí

$$\lim a_n = sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$$

Důkaz: Nechť $a = sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$, pak existuje k $\varepsilon > 0$ takové k, že

$$a - \varepsilon < a_k \leq a.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající, platí proto tato nerovnost i pro $k+1, k+2, \dots$ a zřejmě platí $a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon$ pro skoro všechna n. *q.e.d.*
[*mapu (str.: 59)*]
Pozn.: analogicky pro nerostoucí zdola omezenou posloupnost a infimum.

Některé jednoduché případy limit posloupností:

Věta 10. ***Limita konstantní posloupnosti:***

Limita konstantní posloupnosti $\{a_n\}; a_n = a; \forall n \in \mathbb{N}$ je rovna číslu a.
Důkaz: Z definice limity, pro libovolné $\varepsilon > 0$ položme $n_0 = 1$ a zřejmě dostáváme pravdivý výrok, neboť $|a_n - a| = 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. *q.e.d.*

Věta 11. ***Limita monotónní posloupnosti:***

Každá monotónní posloupnost má limitu v $\mathbb{R}^*$. [*mapu (str.: 66)*] Důkaz neuvádím, neboť ho nepovažuji za relevantní vzhledem k záměru práce, lze jej najít v odkazovaném zdroji.

Věta 12. ***Limita omezené monotónní posloupnosti:***

Neklesající shora omezená posloupnost reálných čísel má limitu a platí

$$\lim a_n = sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$$

Důkaz: Definujme a takto:

$$a = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}, \text{ pak } \exists a_k : \forall \varepsilon > 0 : a - \varepsilon < a_k < a.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ neklasající $\Rightarrow a - \varepsilon < a_k \leq a < a + \varepsilon$ pro s.v.n . *q.e.d.*
[*mapu (str.: 59)*]

Věta 13. ***o limitě sevřené funkce[5]:***

Nechť pro posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$, platí pro (skoro) všechna $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq c_n \leq b_n.$$

Potom:

[5]) též zvaná „věta o dvou policajtech“, nebo „Sendvič-lemma“

1. Nechť $a_n \to a$ a $b_n \to a$. Pak platí $c_n \to a$.

2. Nechť platí $c_n \to +\infty$. Potom i $b_n \to +\infty$

3. Nechť platí $c_n \to -\infty$. Potom i $b_n \to -\infty$

Důkaz:

1. Pro $a \in \mathbb{R}$ zvolme libovolně $a' < a < a''$. Pak pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n > a'$ a taktéž pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $b_n < a''$. Proto též pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je

   $$a' < a_n \leq c_n \leq b_n < a''$$

   a tedy $c_n \to a$.

Body 2. a 3. vyplývají ze stejné úvahy s a' pro $a = +\infty$ a a'' pro $a = -\infty$. *q.e.d.*
[*mapu (str.: 68)*]

Pozn.: Víme-li, že pro s.v.n je posloupnost kladná, lze jednu ze „svírajících“ posloupností nahradit konstantní posloupností $\{z_n\}; z_n = 0; \forall n \in \mathbb{N}$. Tento postup je účinný pouze v případě, že limita vyšetřované posloupnosti je 0, i tak se ale často uvádí jako zvláštní věta.

2.2.2 Funkce

Při podrobnějším pohledu na definici funkce zjistíme, že jí vyhovují i posloupnosti tak, jak jsou zavedeny výše. Lze říci, že množina všech posloupností je podmnožina funkcí. Mezi pojmy jako jsou monotonie, limita, omezenost a dalšími pro posloupnosti a funkce existuje určitý vztah, ne vždy je však jednoduchý.

Skutečnost, že posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$, značíme symbolem pro proměnnou, který je v případě posloupností n, zatímco v případě funkcí jedné reálné proměnné je tradičně x. Tato konvence nám umožňuje redukovat použitou symboliku, kdy není třeba vyznačovat, zda předpis popisuje funkci, či posloupnost, ačkoli redukovaná symbolika není zcela jednoznačná. Samotný výskyt symbolu n (a absence symbolu x) v zápisu funkce obvykle dává dostatečně najevo, že se jedná o posloupnost. Ostatní abecední znaky v zápisech bývají parametry.

Situace se však komplikuje, vyskytují-li se v zápisu vybrané posloupnosti, jež je třeba indexovat jinou proměnnou, než n. Pak už je třeba objekty pojmenovat důkladně.

Potřeba odlišit posloupnost od funkce vyvstává např. z definice jejich limit. Existují předpisy, které interpretované jako posloupnosti mají nějakou limitu v ∞, zatímco uchopíme-li je jako funkci, jejich limita v ∞ neexistuje.

Dále, není-li řečeno jinak, předpokládáme, že n nabývá všech hodnot z $\mathbb{N}$ a pro úsporu místa můžeme vynechat výraz „$n \to \infty$" tak, že platí ekvivalence symbolů:

$$\lim_{n \to \infty} a_n \equiv \lim a_n.$$

Podobně jako je mnoho pojmů definovaných pro posloupnosti rozšířených na funkce, „dědí" posloupnosti od funkcí několik podstatných matematických vět a nelze proto při studiu posloupností úplně abstrahovat od funkcí. Podrobněji se příbuzností posloupností a funkcí zabývám v části O podobnosti posloupností a funkcí.

Def 23. ***Funkce:***

Zobrazení libovolné množiny $A \neq \emptyset$ do nějakého číselného oboru budeme obecně nazývat *funkce*. [*mapu (str.: 101)*]

Množinu A nazveme *definičním oborem funkce* f, množinu $\{y;\ \exists x \in A : f(x) = y\}$ *oborem hodnot funkce* f.

Def 24. ***Monotonie funkce:***

Nechť f je funkce, M podmnožina jejího definičního oboru $D(f)$.
Funkce se nazývá *funkce rostoucí na množině M*, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 z M platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce se nazývá *funkce klesající na množině M*, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 z M platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce se nazývá *funkce neklesající na množině M*, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 z M platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkce se nazývá *funkce nerostoucí na množině M*, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 z M platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.
[*psm (str.: 120)*]

Pozn.: Funkce se nazývá *funkce konstantní na množině M*, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 z M platí: $f(x_1) = f(x_2)$.

Def 25. ***Limita funkce:***

Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in P_\delta(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

[*mapu (str.: 110)*]

Pozn.: Ve smyslu této definice limity funkce nemá žádná posloupnost limitu. Uvedená definice vyžaduje, aby funkce byla definována na okolí bodu x_0 a to žádná posloupnost interpretovaná jako funkce není. Lze však zavést definici limity funkce, která pojem limity posloupnosti a funkce sjednotí:

Def 26. ***Limita funkce vzhledem k množině M:***

Řekneme, že funkce f má v bodě A, který je hromadným bodem $\mathrm{D}(f)$, limitu L vzhledem k množině M, pro níž $M \subset \mathrm{D}(f)$ a navíc je bod A jejím hromadným bodem, jestliže

$$\forall U_\varepsilon(L), \; \exists U_\delta(A) : \; f(U_\delta(A)) \cap M) \subset U_\varepsilon(L).$$

Def 27. ***Limita funkce (Heine):***

Pro funkci f platí $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}, x_n \in D(f)$ platí

$$x_0 \neq x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to A.$$

[*mapu (str.: 111)*]

Věta 14. ***O limitě složené funkce:***

Nechť existuje vlastní limita $\lim_{x \to a} g(x) = A$ a nechť existuje $\lim_{y \to A} f(y) = B$. Potom platí

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = B,$$

jestliže je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

1. funkce f je spojitá v A, nebo

2. existuje takové $P_\delta(a)$, ve kterém g nenabývá hodnoty A.

Pozn.: Větu uvádím čtenáři pro informaci a ponechávám ji bez důkazu, který vybočuje z rámce práce. Je k nalezení v odkazované literatuře.
[*mapu (str.: 121)*]

Def 28. ***symbol*** O**:**

1. Zápisem

   $$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ pro } x \in X$$

   vyjadřujeme, že existuje konstanta $A \in \mathbb{R}$ taková, že

   $$|\varphi(x)| \leq A|\psi(x)| \text{ pro každé } x \in X. \tag{2.4}$$

   Analogicky píšeme:

   $$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ pro } x \to a \tag{2.5}$$

   platí-li nerovnost (2.4) v nějakém okolí $P(a)$ bodu a. Navíc, je-li $\psi(x) \neq 0$ pro $x \in P(a)$, pak vztah (2.5) platí, existuje-li vlastní limita $\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \neq 0$. Je-li

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0 \ (p > 0), \ (k \in \mathbb{R})$$

   nazýváme funkci $\varphi(x)$ *nekonečně malou stupně* p vzhledem k nekonečně malé proměnné x. Analogicky, je-li

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x^p} = k \neq 0(p > 0),$$

   nazýváme funkci $\psi(x)$ *nekonečně velkou stupně* p vzhledem k nekonečně velké proměnné x.

2. Zápis

   $$\varphi(x) = o(\psi(x)) \text{ pro } x \to a$$

   vyjadřuje, že platí rovnost

   $$\varphi(x) = \alpha(x)(\psi(x)) \ (x \in P(a)), \tag{2.6}$$

kde $\alpha(x) \to 0$ pro $x \to a$. Je-li $\psi(x) \neq 0$ pro $x \in U(a)$, je rovnost (2.6) ekvivalentní tvrzení

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

3. Funkce $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ se nazývají *ekvivalentní* ($\varphi(x) \cong \psi(x)$) pro $x \to a$, jestliže

$$\varphi(x) - \psi(x) = o(\psi(x)) \text{ pro } x \to a. \tag{2.7}$$

Je-li $\psi(x) \neq 0$ pro $x \in P(a)$, vyplývá z rovnosti (2.7), že

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

[*sucma (str.: 62)*]

2.3 O podobnosti posloupností a funkcí

Již na několika místech v teoretické stati jsem se nevyhnul zmínce o souvislosti posloupností a funkcí. Z definice jsou to obě zobrazení, na střední škole z pravidla do oboru reálných čísel, která se liší jen definičními obory. Tento rozdíl je ovšem velmi podstatný. Pro posloupnosti nemá smysl uvažovat žádné vlastnosti funkcí, které vyžadují spojitost, neboť posloupnosti nejsou spojité na žádném okolí žádného svého bodu. Přesto funkce do posloupnostního kalkulu vstupují.

Pozn.: Mějme funkci $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pak se funkce $f(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se stejným předpisem rovná posloupnosti $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ funkčních hodnot funkce $f(x)$.

Této operaci se obecně říká *restrikce funkce na množinu* (zde na množinu přirozených čísel $\mathbb{N}$) a značí se

$$f/_{\mathbb{N}}.$$

Funkci definovanou pro s.v.n tedy lze vždy převést restrikcí na posloupnost. Obráceně, pro každou posloupnost vždy existuje nějaké funkce, která všemi jejími body prochází, což je ovšem tautologie, neboť posloupnost je funkce. Ne vždy však předpis funkce $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která na množině bodů $\{x; x \in \mathbb{N}\}$ má hodnoty rovné členům posloupnosti $\{f(n)\}$ lze nejít jednoduše. Navíc takových předpisů existuje nekonečně.

Příklad: posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ nelze převést na funkci $f(x) = (-1)^x$, neboť ta není definována pro žádné $x \in \mathbb{I}$, lze ji však „proložit“ fuknci $\cos(\pi x)$, nebo $\cos^3(\pi x)$.

Věta 15. ***o dědění monotonie:***

Nechť je funkce $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotónní na celém svém definičním oboru, pak je monotónní i posloupnost $f(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $(\{f_n\})$. (Obrácená implikace ale neplatí)

Důkaz:

$$\begin{aligned} f(x) \text{ rostoucí } &\Rightarrow \forall x_{1,2} \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : f(x_1) \overset{(1)}{<} f(x_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall n_{1,2} \in \mathbb{N}, n_1 < n_2 : f(n_1) \overset{(2)}{<} f(n_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, f(m) \overset{(3)}{<} f(m+1) \Rightarrow \{f_n\} \text{ je rostoucí.} \end{aligned}$$

Pro nerostoucí, klesající, neklesající resp. konstantní stačí nahradit znaky (ne)rovností (1), (2) a (3) za $\geq, >, \leq$ resp. $=$.

q.e.d.

Pozn.: Neplatnost zpětné implikace $\{f_n\}$ rostoucí $\Rightarrow$ $f(x)$ rostoucí je vidět na příkladu

$$f(x) = \sin(\pi x) - \frac{1}{x}$$

kde f(x) tvoří pro $x \in \mathbb{N}$ rostoucí posloupnost $a_n = -\frac{1}{n}$, zatímco pro $x \in \mathbb{R}$ tvoří spojitou funkci, která nekonečněkrát nabývá hodnoty 0 a -1, pročež nemá na celém definičním oboru stálou monotonii.

Věta 16. ***o dědění limity:***

Nechť má funkce $f(x) : \langle n_0; \infty) \to \mathbb{R}$ vlastní, nebo nevlastní limitu L v ∞, pak i posloupnost $f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $(\{f_n\})$ má v ∞ limitu L. (Opět neplatí obrácená implikace)

Důkaz:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, x > x_0 : |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0 : |f(n) - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = L$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \substack{+\\-}\,\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in R, x > x_0 : f(x) \substack{>\\<} K \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall K \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in N, n > n_0 : f(n) \substack{>\\<} K \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = \substack{+\\-}\,\infty.$$

q.e.d.

Pozn.: Neplatnost zpětné implikace $\lim_{n\to\infty} f(n) = L;\ L \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = L$ je vidět na příkladu

$$f(x) = \sin(\pi x)$$

kde pro $x \in \mathbb{N}$ dostáváme posloupnost samých nul $\{0, 0, 0, ...\}$, pročež $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$, zatímco pro $x \in \mathbb{R}$ nabývá funkce $f(x)$ nekonečněkrát každé hodnoty z intervalu $\langle 0; 1\rangle$ s periodou 2, a proto limitu nemá.

Není pravdou, ač by se tak mohlo na první pohled zdát, že kalkulus funkcí nabízí odpovědi na všechny otázky kalkulu posloupností. Např. funkce *faktoriál* není převeditelná na žádnou funkci reálné proměnné, neboť je definovaná jen pro přirozená čísla. Existují tedy výrazy, jejichž limitu lze vyšetřovat pouze samostatným posloupnostním aparátem.

Kapitola 3

Praktická stať

3.1 Základní techniky vyšetřování limity posloupnosti

Tato část práce má za cíl stručně shrnout a demonstrovat základní metody výpočtu limit posloupností. Není důvod extenzivněji jednotlivé zde popisované techniky rozebírat, mnohdy jsou vyučovány již na středních školách.

3.1.1 Vybraná posloupnost

Pozn.: $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.
Příklad: $\lim_{n\to\infty} n^2$
protože posloupnost $\{n^2\}$ je podposloupností $\{n\}$, platí

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Příklad: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}$
posloupnost $\{\sqrt{n}\}$ je rostoucí, proto má právě jeden hromadný bod. Současně je posloupnost $\{n\}$ podposloupností $\{\sqrt{n}\}$ a proto platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

3.1.2 Použití věty o aritmetice limit

Příklad: $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}$

posloupnost $\{\sqrt{n}\}$ je monotónní, proto má výraz $\lim(\sqrt{n})^2$ smysl. Současně platí

$$\lim(\sqrt{n})^2 = \lim n = \infty$$

a rovnici $x^2 = \infty$ splňuje pouze $x = \infty$, proto $\lim \sqrt{n} = \infty$.

3.1.3 Aplikace věty o limitě sevřené posloupnosti

Příklad: $\lim \frac{\sin x}{x}$

Víme, že $-1 \leq \sin x \leq 1$,

odtud $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$,

a tedy $\lim \dfrac{-1}{x} \leq \lim \dfrac{\sin x}{x} \leq \lim \dfrac{1}{x}$.

Nyní použijeme větu o limitě sevřené posloupnosti
$$\begin{array}{ccccc} \lim \frac{-1}{x} & \leq & \lim \frac{\sin x}{x} & \leq & \lim \frac{1}{x} \\ \downarrow & \Rightarrow & \downarrow & \Leftarrow & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Čímž jsme dokázali, že $\lim \frac{\sin x}{x} = 0$.

3.2 Pokročilé techniky vyšetřování limity posloupnosti

Základní techniky nestačí na mnoho složitějších případů. Následující nástroje pro hledání limit posloupností však již přímo neplynou z vět teoretické stati a je třeba je odvodit podrobněji.

3.2.1 Podílové kritérium

Odvození podílového kritéria

Podílové kritérium je v literatuře, ze které jsem čerpal, definováno až pro řady, jako d'Alembertovo, případně Cauchyho podílové kritérium konvergence řad. Přesto se jeho obdoba při vyšetřování limit posloupností často používá.

Ačkoli by se jistě dalo odvodit jako speciální případ Bolzano-Cauchyho podmínky konvergence posloupností, zvolil jsem pro jednoduchost a transparentnost důkaz vycházející z definice limity posloupnosti.

Věta 17. ***podílové kritérium konvergence posloupností:***

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = p \in \mathbb{R}^*$, pak

1. $p \in (-1; 1) \Rightarrow \lim a_n = 0$
2. $p \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \Rightarrow \lim a_n \notin \mathbb{R}$ (tj. posloupnost diverguje.)

Důkaz:

1.

$$\left|\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \exists q \in \langle 0; 1) : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \text{ pro s.v.} n$$

$$|a_{n_0+1}| \leq |q \cdot a_{n_0}|$$

$$|a_{n_0+2}| \leq |q \cdot a_{n_0+1}| \leq |q^2 \cdot a_{n_0}|$$

$$|a_{n_0+k}| \leq |q^k \cdot a_{n_0}|$$

$$\Rightarrow \lim |q^k \cdot a_{n_0}| = \lim |q^k| \cdot |a_{n_0}| = |a_{n_0}| \cdot \lim |q^k| = |a_{n_0}| \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim |a_{n_0+k}| = 0 \Rightarrow \lim a_n = 0.$$

2.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \forall q \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq q$$

$$|a_{n_0+1}| \geq |q \cdot a_{n_0}|$$

$$|a_{n_0+2}| \geq |q \cdot a_{n_0+1}| \geq |q \cdot a_{n_0}|$$

$$|a_{n_0+k}| \geq |q^k \cdot a_{n_0}|$$

$$\Rightarrow \lim |q^k \cdot a_{n_0}| = |a_{n_0}| \cdot \lim |q^k| = |a_{n_0}| \cdot \infty = \infty \Rightarrow \lim |a_{n_0+k}| = \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n = \infty.$$

q.e.d.

Uvedený důkaz si jistě zaslouží podrobnější komentář. Idea důkazu je vyšetřovanou posloupnost od nějakého n_0 odhadnout geometrickou posloupností s kvocientem menším, než jedna. Taková posloupnost totiž jistě konverguje k nule. Že takový krok můžeme udělat, je vidět ze skutečnosti, že $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Z definice limity vyplývá, že n_0, od kterého dále je podíl každých dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti menší než jedna, určitě existuje. Pak už stačí takovou hodnotu zafixovat a použít pro konstrukci porovnávací posloupnosti b_n, kde $b_1 = a_{n_0}$ a $q = \frac{a_{n_0+1}}{a_{n}0}$. Absolutní hodnoty lze použít, protože platí, že pokud posloupnost konverguje k nule absolutně, pak konverguje k nule. Neošetřeny zůstávají možnosti $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ a $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = -1$. Ve skutečnosti je však nelze bez dalších předpokladů ošetřit žádnou větou, protože pro tyto hodnoty může nastat kterýkoli z případů:

- $\lim a_n \in \mathbb{R}$
- $\lim a_n \in \{-\infty; \infty\}$ (pouze pro $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$)
- $\lim a_n \notin \mathbb{R}^*$.

Důkazem budiž tyto dvě trojice příkladů:

Pro $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$:

posloupnost	$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$	$\lim a_n$
$a_n = n$	$\lim \frac{n+1}{n} = \lim 1 + \frac{1}{n} = 1$	$\lim n = \infty$
$a_n = 3$	$\lim \frac{3}{3} = 1$	$\lim 3 = 3$
$a_n = \frac{1}{n}$	$\lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$	$\lim \frac{1}{n} = 0$

a analogicky pro $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = -1$:

posloupnost	$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$	$\lim a_n$
$a_n = (-1)^n \cdot n$	$\lim \frac{n+1 \cdot (-1)^{n+1}}{n \cdot (-1)^n} = -\lim 1 + \frac{1}{n} = -1$	$\lim(-1)^n \cdot n$ neexistuje
$a_n = (-1)^n \cdot 3$	$\lim \frac{3 \cdot (-1)^{n+1}}{3 \cdot (-1)^n} = -1$	$\lim(-1)^n \cdot 3$ neexistuje
$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$	$\lim \frac{\frac{1}{n+1} \cdot (-1)^{n+1}}{\frac{1}{n} \cdot (-1)^n} = -\frac{n}{n+1} = -\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = -1$	$\lim(-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$

Pozn.: Přestože posloupnosti $a_n = (-1)^n \cdot n$ a $a_n = (-1)^n \cdot 3$ obě divergují (a nejedná se tedy striktně řečeno o dva různé případy), rozhodl jsem se je uvést obě, kvůli analogii s prvním případem.

Takto formulované podílové kritérium se nazývá limitní. Pokud však dokážeme ověřit podmínku $\exists q \in \langle 0; 1) : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ pro s.v.n pro konvergenci, resp.

$\forall q \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq q$ pro divergenci, obejdeme se bez nacházení limity výrazu $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Taková verze věty o podílovém kritériu se nazývá nelimitní a je obecně silnější.

Odmocninové kritérium

Věta 18. ***Odmocninové kritérium konvergence posloupností:***

Mějme posloupnost $\{a_n\}$ takovou, že skoro všechna $a_n > 0$ a číslo $q \in \langle 0; 1)$, pak

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \text{ pro s.v.} n \ \Rightarrow \lim a_n = 0.$$

Důkaz: $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ pro s.v.n $\Rightarrow a_n < q^n$ pro s.v.n , pak

$$0 \leq a_n \leq q^n \text{ pro s.v.} n$$

A z věty o limitě sevřené posloupnosti:

$$\begin{array}{ccccc} \lim 0 & \leq & \lim a_n & \leq & \lim q^n \\ \downarrow & \Rightarrow & \downarrow & \Leftarrow & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

q.e.d.

Limitní verze existuje i pro odmocninové kritérium a vychází ze skutečnosti, že $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \exists q \in \langle 0; 1) : q > \sqrt[n]{a_n}$ pro skoro všechna n.

3.2.2 Dominance

Definice 28 zavádí symboly o a O pro libovolný bod a, na jehož okolí popisuje chování podílu dvou funkcí. Pro účely posloupností však stačí symboly o a O zavést pro ∞. V praxi se však pro posloupnosti vyvinulo jiné značení, které zřetelněji znázorňuje tranzitivitu relace *býti nekonečně malý vůči*.

Def 29. ***Dominance:***

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}, a_n \neq 0$ pro s.v.n je *dominantní* vůči posloupnosti $\{b_n\}$, pokud platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$$

Tuto skutečnost zapíšeme $\{a_n\} \gg \{b_n\}$ a čteme „a je mnohem větší než b“, analogicky pak $\{b_n\} \ll \{a_n\}$ čteme „b je mnohem menší než a“.

Pozn.: Výraz „je mnohem větší“ resp „menší“ se váže k absolutní hodnotě. Jistě platí, že posloupnost $a_n = -n$ je pro s.v.n větší, než $b_n = -n^2$, ačkoli podle definice řekneme, že je mnohem menší, protože

$$\lim \frac{-n}{-n^2} = \lim -\frac{n}{n^2} = -\frac{n}{n^2} = -\frac{1}{n} = -0 = 0.$$

Nechť funkce $f, g(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou takové, že pro všechna n platí $f(n) = a_n$, $g(n) = b_n$, pak definice dominance je pro posloupnosti ekvivalentní se zápisem $g(x) = o(f(x))$.

Věta 19. ***o vlastnostech relace dominance:***

Operace „$\ll$“ tvoří na množině posloupností *ostré částečné uspořádání*, tedy *slabě antisymetrickou*, *antireflexivní* a *tranzitivní* relaci.

Důkaz:

- tranzitivní:

$$a_n \ll b_n \wedge b_n \ll c_n \overset{?}{\Rightarrow} a_n \ll c_n$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0 \wedge \lim \frac{b_n}{c_n} = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \lim \frac{a_n}{c_n} = 0$$

implikace platí, protože

$$\lim \frac{a_n}{c_n} = \lim \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} = \lim \frac{a_n}{b_n} \cdot \lim \frac{b_n}{c_n},$$

kde podle předpokladů $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{b_n}{c_n} = 0.$

- antisymetrické:

  sporem, nechť $a_n \ll b_n \Rightarrow b_n \ll a_n$, pak

  $\lim a_n b_n = 0 \Rightarrow \lim b_n a_n = 0$

  pro s.v.n $b_n > a_n \Rightarrow \lim a_n b_n = 0 \Rightarrow \lim b_n a_n = 0 \Rightarrow$ pro s.v.n $a_n > b_n$

  pro s.v.n $b_n > a_n \Rightarrow$ pro s.v.n $a_n > b_n$

  $b_n > a_n \wedge a_n > b_n$ je nepravdivé tvrzení a výchozí předpoklad je neplatný.

- antireflexivní:

  $$\lim \frac{a_n}{a_n} = 1 \neq 0$$

q.e.d.

Pro účely kalkulu posloupností se zavedení pojmu dominance hodí zejména pro úsporu času. Často se totiž setkáváme s úkolem najít limitu podílu dvou posloupností, jež lze porovnat pomocí dominancí, a ačkoli takové situace můžeme řešit a dokazovat *ad hoc*, je výhodné si vzhledem k omezenému množství typů takto porovnávaných posloupností některé z nich rozhodnout a dokázat předem. Jsou to zejména: $\ln^{k_1} n, n^{k_2}, q^n, n!$ a n^n; pro $k_{1,2} > 0; q > 1$, ačkoli $\ln^{k_1} n$ si musíme nechat na později. Zatím nemáme zavedené nástroje pro důkaz příslušné dominance.

Věta 20. ***dominanční fronta pro posloupnosti (neúplná):***

Pro všechna $k > 0$ a $q > 1$ platí:

$$\ll n^k \overset{(1)}{\ll} q^n \overset{(2)}{\ll} n! \overset{(3)}{\ll} n^n.$$

Důkaz: Vycházíme ze skutečnosti, že všechny vyšetřované posloupnosti divergují k ∞.

(1) $n^k \ll q^n \Leftarrow \lim \dfrac{n^k}{q^n} = 0.$

$$\text{podílové krit.: } \lim \frac{\frac{(n+1)^k}{q^{n+1}}}{\frac{n^k}{q^n}} = \lim \frac{(n+1)^k}{q^{n+1}} \cdot \frac{q^n}{n^k} = \lim \frac{1}{q^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{k_2} = \frac{1}{q} < 0.$$

Pozn.: $\lim \frac{n+1}{n} = \lim 1 + \frac{1}{n} = 1$

Čímž je splněna podmínka podílového kritéria a opravdu $\lim \dfrac{n^{k_2}}{q^n} = 0$ pro všechna $k_2 > 0$ a $q > 1$.

(2) $q^n \ll n! \Leftarrow \lim \dfrac{q^n}{n!} = 0$.

opět užijeme podílového kritéria:

$$\lim \frac{\frac{q^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{q^n}{n!}} = \lim \frac{q \cdot q^n}{n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{n!}{q^n} = \lim \frac{q}{n+1} = 0,$$

protože q je konstantní.

Čímž je splněna podmínka podílového kritéria a opravdu $\lim \dfrac{q^n}{n!} = 0$ pro všechna $q > 1$.

(3) $n! \ll n^n \Leftarrow \lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

i zde lze použít podílové kritérium;

$$\lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1) \cdot (n+1^n)} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right)^n = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

Pozn.: Pozoruhodné je, že zde limita nevyšla 0, ale „pouze“ $\frac{1}{e}$. Dominance mezi posloupnostmi $n!$ a n^n je tedy „slabší“, nicméně stále platná, a tak ji můžeme při výpočtech použít stejně univerzálně jako předchozí. *q.e.d.*

Příklad: $\lim \frac{n^2 - 2^n}{\ln^3 n - n!}$

$$\lim \frac{n^2 - 2^n}{\ln^3 n - n!} = \lim \frac{2^n \left(\frac{n^2}{2^n} - 1 \right)}{n! \left(\frac{\ln^3}{n!} - 1 \right)} = \lim \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{\frac{n^2}{2^n} - 1}{\frac{\ln^3}{n!} - 1} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Uvažme, že bez zavedení dominancí by řešení této úlohy bylo podstatně pracnější, ne-li nemožné.

3.3 Techniky analogické k nástrojům pro vyšetřování limity funkcí

Již několikrát jsem předznamenal, že posloupnosti vyhovují definici funkce. Tato skutečnost jasně napovídá, jaké nástroje pro kalkulus posloupností hledat – musí být analogické. Jejich důkaz pro posloupnosti je však postavit na definicích teorie posloupností.

3.3.1 Substituční metody v posloupnostech

Silným nástrojem v kalkulu funkcí je věta o limitě složené funkce, která mj. umožňuje substituce při výpočtech limit. V této části práce odvodím analogickou větu pro posloupnosti.

Věta 21. ***o „substitucích“ ve větách o limitách posloupností:***

Mějme posloupnost $\{m_n\}$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$ a $\forall n \in \mathbb{N}$ $m_n \in \mathbb{Z}$ a nechť členy posloupnosti $\{a_m\}$ mají nějakou vlastnost $P(a_m)$ pro s.v.n . Pak platí

$$P(a_{m_n}) \text{ pro s.v.} n \ .$$

Důkaz:

$$P(a_m) \text{ pro s.v.} n \ \Rightarrow \exists m_0 \quad \forall m > m_0 : P(a_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \infty \Rightarrow \exists n_0 \quad \forall n > n_0 : m_n > m_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n > n_0 \quad P(a_{m_n}) \Rightarrow P(a_{m_n}) \text{ pro s.v.} n \ .$$

q.e.d.

Slovy tato věta říká, že pokud dokážeme nějakou vlastnost P pro všechny členy posloupnosti $\{a_m\}$ od nějakého pevného m_0 (říkáme pro s.v.m), pak stačí, aby posloupnost některých indexů $\{m_n\}$ (které se mohou i opakovat) divergovala do nekonečna, a jistě pak od nějakého pevného n_0 bude P platit pro všechny členy posloupnosti $\{a_{m_n}\}$.

Věta 22. ***Věta o limitě složené posloupnosti:***

Nechť $\lim_{m\to\infty} a_m = L \in \mathbb{R}^*$ a (m_n) je posloupnost přirozených čísel divergující k ∞. Pak $\lim_{n\to\infty} a_{m_n} = L$.

Důkaz: Věta je přímým důsledkem předchozí - vlastností $P(a_m)$ je náležení nějakému okolí limity L. *q.e.d.*

Tato věta rozšiřuje to, co víme o podposloupnostech, resp. jejich limitách. Je-li totiž $\{m_n\}$ podposloupností $\mathbb{N}$, říká věta 22 to, co věta o limitě vybrané posloupnosti. Navíc však platí obecněji. Jistě nevyhovuje definici vybrané posloupnosti přirozených čísel taková posloupnost, která některý člen konečněkrát opakuje. Chování takové posloupnosti pak můžeme popsat až pomocí věty 22.

Příklad: Dokažte bez použití vět o limitách funkcí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^{k_1} n}{n^{k_2}} = 0 \text{ pro } k_{1,2} \in \mathbb{R}_+.$$

Nejprve si dokažme pomocné tvrzení:

Lemma: $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^{k_1} n}{n^{k_2}} = 0$ pro $k_{1,2} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \ln^{k_1} n < n^{k_2}$ pro s.v.n .

Důkaz:

„$\Rightarrow$“ zřejmé.

„$\Leftarrow$“: $\forall k_1, k_2 > 0 : \ln^{k_1} n < n^{k_2}$ pro s.v.n

Nechť je $k_2 > 0$ pevné, pak podle $\ln^{k_1} n < n^{k_2}$ pro s.v.n platí pro $\forall k_1$:

$\ln^{k_1} n < n^{\frac{k_2}{2}}$ pro s.v.n

a $\lim \dfrac{\ln^{k_1} n}{n^{k_2}} = \lim \dfrac{\ln^{k_1} n}{n^{\frac{k_2}{2}}} \cdot \dfrac{n^{\frac{k_2}{2}}}{n^{k_2}} = 1 \cdot 0 = 0.$

q.e.d.

V dokazované nerovnosti $\ln n < n^{\frac{k_2}{k_1}}$ pro přehlednost označme $c = \frac{k_2}{k_1}$. Jistě pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje jednoznačně dané $m_n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\mathrm{e}^{m_n} \leq n < \mathrm{e}^{m_n+1}$$

odkud

$$m_n \leq \ln n < m_n + 1 \quad \wedge \quad \mathrm{e}^{cm_n} \leq n^c < \mathrm{e}^{c(m_n+1)} .$$

Protože:

$$m+1 \ll \mathrm{e}^{cm} = (\mathrm{e}^c)^m \Rightarrow m+1 < \mathrm{e}^{cm} \text{ pro s.v.} m$$

je z věty o „substitucích“

$$m_n + 1 < \mathrm{e}^{cm_n} \text{ pro s.v.} n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln n < m_{n+1} < \mathrm{e}^{cm_n} \leq n^c \text{ pro s.v.} n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln n < n^c \text{ pro s.v.} n$$

a pro pořádek upravme zpět dokázanou nerovnost podle $c = \frac{k_2}{k_1}$

$$\ln n < n^c$$
$$\ln n < n^{\frac{k_2}{k_1}}$$
$$\ln^{k_1} n < n^{k_2}$$

Co jsme při výpočtech provedli je, že jsme nalezli takovou posloupnost, se kterou bychom mohli vyšťřovanou posloupnost srovnat. Když pro skoro všechny členy srovnávací posloupnosti dokážeme nějakou vlastnost, a zároveč jsou splněny předpoklady věty o „substitucích“ ve větách o limitách posloupností, máme dokázáno, že vlastnost platí i pro skoro všechny členy srovnávané posloupnosti. Od skutečnosti, že vyšetřovanou posloupnost nahradíme srovnávací, je odvozen název „substituce“, který však uvádím v uvozovkách.

Díky právě vyřešenému příkladu můžeme doplnit větu 20 takto:

Věta 23. ***dominanční fronta pro posloupnosti:***

Pro všechna $k_{1,2} > 0$ a $q > 1$ platí:

$$\ln^{k_1} n \ll n^{k_2} \ll q^n \ll n! \ll n^n.$$

Následující příklady odhalují, jak mocný nástroj jsme právě vytvořili:

Příklad: $\lim \sqrt{n}$

$$\lim \sqrt{n} = \lim \sqrt{m_n} = \lim \sqrt{n^2} = \lim n = \infty.$$

Příklad: $\lim \ln n$

$$\lim \ln n = \lim \ln m_n = \lim \ln \lceil e^n \rceil \geq \lim \ln e^n = \lim n = \infty \Rightarrow \lim \ln n = \infty$$

Příklad: $\lim \frac{\ln \ln n}{\ln n}$

$$\lim \frac{\ln \ln n}{\ln n} \leq \lim \frac{\ln \lceil \ln n \rceil}{\lceil \ln n \rceil - 1} \stackrel{(1)}{=} \lim \frac{\ln n}{n+1} = \lim \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \stackrel{domin.}{=} 0 \cdot 1 = 0.$$

A odtud

$$\lim \frac{\ln \ln n}{\ln n} = 0$$

Krok (1) je možno provést díky větě o limitě složené posloupnosti, $lceil \ln n \rceil$ jistě nabývá nekonečně mnoha členů posloupnosti přirozených čísel a diverguje k nekonečnu.

3.3.2 Věty o limitách superpozice funkce a posloupnosti

Věta 24. ***o posloupnosti složené z funkce a posloupnosti:***

Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je zobrazením $a : \mathbb{N} \to M, \quad M \subset \mathbb{R}$ a nechť funkce $f(x)$ je zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované pro skoro všechna $a_n \in M$. Pak složené zobrazení $f(a_n)$ je posloupnost reálných čísel.

Důkaz.: zřejmý.

Pozn.: složit posloupnost a funkci můžeme ještě tak, že „vnějším“ předpisem bude posloupnost. To má smysl jen tehdy, když je nekonečně mnoho funkčních hodnot přirozených. Toto složení pak nezobrazuje přirozená čísla na reálná, ale jen generuje posloupnost reálných hodnot, která jsou obrazy funkčních hodnot „vnitřní“ funkce, které vůbec nemusejí být celočíselné. Při přečíslování pak ztratíme informaci o vnitřní funkci a tak se ukazuje, že toto složení nemá z hlediska kalkulu posloupností žádný dobrý smysl. Dále se tedy budu zabývat pouze posloupností, jejíž hodnoty dále zobrazuje nějaká funkce, ale ne naopak.

Věta 25. ***o limitě superpozice funkce a posloupnosti:***

Nechť funkce f je definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\lim a_n = L \in (a, b)$. Nechť dále f je monotónní na $\langle a, L\rangle$ a $\langle L, b\rangle$ a každá z množin $f(\langle a, L\rangle)$, $f(\langle L, b\rangle)$ je interval nebo jednoprvková množina. Pak

$$\lim f(a_n) = f(L).$$

Důkaz: Zkoumanou situaci pro názornost rozdělím na případy podle monotonií:

- Nejprve, nechť je f rostoucí na celém $\langle a;b\rangle$:

  $\lim f(a_n) = f(L) \overset{Def.}{\equiv} \forall\varepsilon > 0 : f(a_n) \in U_\varepsilon(f(L))$ pro s.v.n

  Mějme $\varepsilon > 0$ a předpokládejme nejprve, že $f(L) - \varepsilon > f(a) \wedge$

  $\wedge\, f(L) + \varepsilon < f(b)$.

  $f|_{\langle a;b\rangle}$ rostoucí $\Rightarrow f|_{\langle a;b\rangle}$ prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$ na $\langle a;b\rangle$,

  podle předpokladů $f(a;b)$ je interval. Tedy $f(\langle a;b\rangle) = \langle f(a); f(b)\rangle$

  a navíc z předchozího plyne, že $\exists f^{-1}(f(L)-\varepsilon)$ a $\exists f^{-1}(f(L)+\varepsilon)$.

  Pak jistě $f(L) - \varepsilon < f(L) < f(L) + \varepsilon \Rightarrow$

  $\Rightarrow f^{-1}(f(L)-\varepsilon) < L < f^{-1}(f(L)+\varepsilon) \Rightarrow$

  $\Rightarrow f((f^{-1}(f(L)-\varepsilon); f^{-1}(f(L)+\varepsilon))) \subset U_\varepsilon(f(L))$

  Nyní buď

  $f(L) - \varepsilon < f(a) \;\vee\; f(L) + \varepsilon > f(b)$.

  Zřejmě z $a < L < b \quad \exists\widetilde{\varepsilon} > 0 : U_{\widetilde{\varepsilon}}(f(L)) \subset \langle f(a); f(b)\rangle$

  z čehož $U_{\widetilde{\varepsilon}}(f(L)) \subset U_\varepsilon(f(L))$.

  Podle předchozího $f((f^{-1}(f(L)-\widetilde{\varepsilon}); f^{-1}(f(L)+\widetilde{\varepsilon}))) \subset U_{\widetilde{\varepsilon}}(f(L)$

  a tedy $f(a_n) \in U_{\widetilde{\varepsilon}}(f(L)) \subset U_\varepsilon(f(L))$ pro s.v.n .

- Dále, nechť je f na celém $\langle a;b\rangle$ neklesající:

  Definujme funkci $g(x) := f(x) + x$, pak f neklesající $\Rightarrow g$ rostoucí.

  Pak podle předchozího $g(L) = \lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(f(a_n) + a_n) \overset{VOAL}{=}$

  $\overset{VOAL}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) + L$

  A rovnost dále upravíme:

$$g(L) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) + L$$
$$f(L) + L = \lim_{n\to\infty} f(a_n) + L$$
$$f(L) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

- f nyní zvolme na celém $\langle a; b\rangle$ nerostoucí:

  Zaveďme funkci $h(x) := -f(x)$, pak f nerostoucí $\Rightarrow h$ neklesající.

  A podle předchozího $\lim\limits_{n\to\infty} h(a_n) = -f(L)$,

  odkud

$$\lim_{n\to\infty} -f(a_n) = -f(L)$$
$$-\lim_{n\to\infty} f(a_n) = -f(L)$$
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

- Vyšetřeme dále případ, kdy funkce f na intervalu $\langle a; L\rangle$ roste a na $(L; b)$ klesá:

  z předpokladů plyne, že funkce f má v L lokální maximum.

  Označme $g := f|_{\langle a;L\rangle}$ a $h := f|_{\langle L;b\rangle}$,

  pak už na příslušných intervalech existují inverzní funkce g^{-1} a h^{-1}.

Mějme $\varepsilon > 0$ a nechť nejprve

$\varepsilon < \min\{|f(a) - f(L)|; |f(b) - f(L)|\}$

pak jistě $\exists g^{-1}(f(L) - \varepsilon) \;\wedge\; \exists h^{-1}(f(L) - \varepsilon)$ a navíc

$(g^{-1}(f(L) - \varepsilon); h^{-1}(f(L) - \varepsilon)) \subset (a; b)$.

Z předchozího a z neprázdnosti intervalů $g((a; L))$ a $h((L; b))$ plyne

$g^{-1}(f(L) - \varepsilon) < L < h^{-1}(f(L) + \varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow f((g^{-1}(f(L) - \varepsilon); h^{-1}(f(L) + \varepsilon))) \subset U_\varepsilon(f(L))$.

Odkud již bez dalšího s.v.$a_n \in U(L) \Rightarrow U_\varepsilon(f(L))$

Nyní buď

$f(L) - \varepsilon < f(a) \;\vee\; f(L) - \varepsilon < f(b)$.

Zřejmě z $a < L < b \quad \exists\widetilde{\varepsilon} > 0 : (g^{-1}(f(L) - \widetilde{\varepsilon}); h^{-1}(f(L) - \widetilde{\varepsilon})) \subset (a; b)$.

z čehož $U_{\widetilde{\varepsilon}}(f(L)) \subset U_\varepsilon(f(L))$.

Podle předchozího $f((f^{-1}(f(L) - \widetilde{\varepsilon}); f^{-1}(f(L) - \widetilde{\varepsilon}))) \subset U_{\widetilde{\varepsilon}}(f(L)$

a tedy $f(a_n) \in U_{\widetilde{\varepsilon}}(f(L)) \subset U_\varepsilon(f(L))$ pro s.v.n.

- Mějme dále $f(x)$ na $\langle a;L\rangle$ neklesající a na $\langle L;b\rangle$ nerostoucí.
  Definujme funkci g tak, že $g(x) := f(x) - |x-L|$. Funkce g je jistě na $\langle a;L\rangle$ rostoucí, neboť funkce $\widetilde{g}(x) = -|x-L|$ roste pro $\forall x < L$. A analogicky je g na $\langle L;b\rangle$ klesající, neboť pro $\forall x > L$ je $\widetilde{g}(x) = -|x-L|$ klesající.
  Pak

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} g(a_n) &= f(L) - |L-L| \\
\lim_{n\to\infty} (f(a_n) - |a_n - L|) &= f(L) - 0 \\
\lim_{n\to\infty} f(a_n) - \lim_{n\to\infty} |a_n - L| &= f(L) \\
\lim_{n\to\infty} f(a_n) - 0 &= f(L)
\end{aligned}
$$

- Mějme dále f nerostoucí na $(a;L)$ a neklesající na $(L;b)$.
  Vytvořme funkci v tak, že $v(x) := -f(x)$.
  Pak zřejmě v je na $\langle a;L\rangle$ neklesající a na $\langle L;b\rangle$ nerostoucí, odkud vyplývá rovnost:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} -f(a_n) &= -f(L) \\
-\lim_{n\to\infty} f(a_n) &= -f(L) \\
\lim_{n\to\infty} f(a_n) &= f(L)
\end{aligned}
$$

q.e.d.

Pozn.: : Předpoklady pro funkci f v předchozí větě nesplňují např. funkce $\operatorname{sgn} x$ a $\sin \frac{1}{x}$ pro každou posloupnost $a_n \to 0$.

- Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ zobrazí interval $(-1;1) = U_1(0)$ na tříprvkovou množinu $\{-1;0;1\}$. Proto mohou nastat situace, kdy důsledek uvedené věty neplatí, např. $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn} a_n \neq \operatorname{sgn}(\lim_{n\to\infty} a_n)$ pro posloupnost $a_n = \frac{1}{n}$. Podrobněji:

$$0 = \operatorname{sgn}(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}) \neq \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn} \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

- Funkce $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ není definovaná pro $x = 0$, ale protože to není jediný problém, nedefinovanost odstraníme takto:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}; & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

Pak funkce $\overline{f}$ splňuje všechny předpoklady, kromě předpokladu monotonie na nějakém okolí bodu 0.

Zvolme posloupnost $\{a_n\} \to 0$ takto:

$$a_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}.$$

Pak na intervalu $\langle -\frac{2}{\pi}; \frac{2}{\pi}\rangle$ je funkce $\overline{f}$ jistě definovaná a platí, že

$$f(-\tfrac{2}{\pi}) = \sin\frac{-\pi}{2} = -1 \qquad\qquad f(\tfrac{2}{\pi}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

navíc, protože funkce $\sin x$ nabývá všech hodnot mezi 1 a -1 např. na intervalu $\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\rangle$, nabývá $\sin\frac{1}{x}$ všech hodnot z intervalu $\langle -1; 1\rangle$ na intervalu $\langle \frac{2}{3\pi}; \frac{2}{\pi}\rangle \subset \langle -\frac{2}{\pi}; \frac{2}{\pi}\rangle$, a tedy

$$\sin\left(\left\langle \frac{1}{-\frac{2}{\pi}}; \frac{1}{\frac{2}{\pi}} \right\rangle\right) = \langle -1; 1\rangle.$$

Funkce $\overline{f}$ tedy splňuje všechny předpoklady kromě monotonie na libovolně malém okolí bodu 0. Proto se na limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}}\right)$$

věta o limitě superpozice posloupnosti a funkce nevztahuje a pro uváděnou situaci skutečně neplatí:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sin[(2n+\tfrac{1}{2})\pi] = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}}\right) \neq$$
$$\neq \sin \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}\right)} = \sin\infty$$

Pozn.: Předpoklady ve větě o limitách superpozice funkce a posloupnosti se mohou na první pohled zdát nezvyklé, a proto si zaslouží podrobnější vysvětlení. Tato věta představuje analogii k větě o limitě složené funkce, kterou však ze zřejmých důvodů nemohu použít. Spolu s ní se musíme při formulování a dokazování příslušné věty obejít i bez pojmu spojitosti funkce, který je předpokladem pro vnější funkci ve větě o limitě složené funkce. Pokud je však funkce na pravém a levém okolí bodu L monotónní a obrazy těchto okolí jsou intervaly, nebo jednoprvkové množiny[1], je již funkce na okolí L spojitá.

Zřejmě tedy předpoklady věty o limitách superpozice funkce a posloupnosti splňuje každá elementární, goniometrická a cyklometrická funkce ve všech vlastních bodech svého definičního oboru.

Dále bych se chtěl zaměřit na některé limity superpozic funkce a posloupnosti v nevlastních bodech.

Věta 26. ***o vybraných limitách superpozic posloupnosti a funkce v nevlastních bodech:***

Mějme posloupnost $\{a_n\}$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak platí

- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} a_n = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arccotg} a_n = 0$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n)^r = \infty$, pro $r \in \mathbb{R}^+$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n)^r = 0$, pro $r \in \mathbb{R}^-$
- $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{a_n} = \infty$

Důkaz:

---

[1]) v některých případech považované za speciální případ intervalu, tzv „degenerovaný interval“.

- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} a_n = \frac{\pi}{2}$

  $$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} a_n = \frac{\pi}{2} \overset{def.}{\equiv} \forall\varepsilon > 0 : \operatorname{arctg}(a_n) \in U_\varepsilon(\frac{\pi}{2}) \text{ pro s.v.}n$$

  Víme, že $\operatorname{arctg} x$ je shora omezená $\frac{\pi}{2}$ a rostoucí na celém $\mathbb{R}$

  a navíc $\operatorname{arctg}^{-1} = \operatorname{tg}|_{\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle}$.

  Mějme $\varepsilon > 0$ a předpokládejme nyní, že $\varepsilon < \pi$, pak jistě

  $\operatorname{arctg}((\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varepsilon); \infty)) \subset (\frac{\pi}{2} - \varepsilon; \frac{\pi}{2}) \subset U_\varepsilon(\frac{\pi}{2})$.

  Dále $\lim a_n = \infty \Rightarrow$ skoro všechna $a_n > \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)$

  a spolu s předchozím $\Rightarrow \operatorname{arctg}(a_n) \in U_\varepsilon(\frac{\pi}{2})$ pro s.v.n.

  Předpoklad $\varepsilon < \pi$ nepůsobí žádnou újmu na obecnosti uvedeného důkazu, neboť pro všechna $\varepsilon \geq \pi$ jsou v $U_\varepsilon(\frac{\pi}{2})$ všechny hodnoty $\operatorname{arctg}(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arccotg} a_n = 0$

  $$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arccotg} a_n = 0 \overset{def.}{\equiv} \forall\varepsilon > 0 : \operatorname{arccotg}(a_n) \in U_\varepsilon(0) \text{ pro s.v.}n$$

  Víme, že $\operatorname{arccotg} x$ je zdola omezená 0 a klesající na celém $\mathbb{R}$

  a navíc $\operatorname{arccotg}^{-1} = \operatorname{cotg}|_{\langle 0;\pi\rangle}$.

  Mějme $\varepsilon > 0$ a předpokládejme nyní, že $\varepsilon < \pi$, pak jistě

  $\operatorname{arccotg}((\operatorname{cotg}(\varepsilon); \infty)) \subset (0; \varepsilon) \subset U_\varepsilon(0)$.

  Dále $\lim a_n = \infty \Rightarrow$ skoro všechna $a_n > \operatorname{cotg}(\varepsilon)$

  a spolu s předchozím $\Rightarrow \operatorname{arccotg}(a_n) \in U_\varepsilon(0)$ pro s.v.n.

  Předpoklad $\varepsilon < \pi$ nepůsobí žádnou újmu na obecnosti uvedeného důkazu, neboť pro všechna $\varepsilon \geq \pi$ jsou v $U_\varepsilon(\frac{\pi}{2})$ všechny hodnoty $\operatorname{arccotg}(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{n\to\infty} (a_n)^r = \infty$, pro $r \in \mathbb{R}^+$

  Vzhledem ke skutečnosti, že obecná mocnina je definována pouze pro kladné základy, je nutno se omezit na kladná a_n. To však není problém, protože pokud dokazujeme tvrzení pro posloupnosti divergující do nekonečna, víme jistě, že skoro všechny jejich členy jsou kladné.

Víme, že $f(x) = x^r$ je rostoucí na celém $(0;\infty) \Rightarrow f$ je prostá na celém $(0;\infty)$ a proto k ní existuje inverzní funkce $f^{-1}(x) = x^{r^{-1}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^r = \infty \stackrel{def.}{\equiv} \forall\varepsilon > 0 : (a_n)^r > \varepsilon$ pro s.v.n $\Leftrightarrow$ s.v.$(a_n)^r \in U_\varepsilon(\infty)$

Mějme $\varepsilon > 0$, pak jistě $\exists\varepsilon^{\frac{1}{r}} : f(\varepsilon^{\frac{1}{r}}) = \varepsilon$ a dále

f rostoucí $\Rightarrow \forall x > \varepsilon^{\frac{1}{r}} : f(x) > f(\varepsilon^{\frac{1}{r}})$a odtud spolu s větou 21

$a_n \to \infty \Rightarrow$ s.v.$a_n > \varepsilon^{\frac{1}{r}} \Rightarrow$ s.v.$(a_n)^r > \varepsilon$.

- $\lim_{n\to\infty}(a_n)^r = 0$, pro $r \in \mathbb{R}^-$

  Mějme $r < 0$ pak z položme $s = -r$ a z vlastností mocninné funkce dostáváme $(a_n)^{-s} = \frac{1}{(a_n)^s} = ((a_n)^s)^{-1}$ kde podle VOLSPF

  $\lim((a_n)^s)^{-1} = (\lim(a_n)^s)^{-1}$ a podle předchozího $(\lim(a_n)^s)^{-1} =$

  $= \frac{1}{\infty} = 0$.

- $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \infty$

  Víme, že funkce $\ln(x)$ je rostoucí na celém $(0;\infty) \Rightarrow \ln(x)$ je prostá na celém $(0;\infty)$ a proto k ní existuje inverzní funkce $\ln^{-1}(x) = \mathrm{e}^x$.

  $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(a_n) = \infty \stackrel{def.}{\equiv} \forall\varepsilon > 0 : \ln(a_n) > \varepsilon$ pro s.v.n

  Mějme $\varepsilon > 0$, pak jistě $\exists \ln\varepsilon : \mathrm{e}^(\ln\varepsilon) = \varepsilon$ a dále

  e^x rostoucí $\Rightarrow \forall x > \ln\varepsilon : \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^(\ln\varepsilon)$ a odtud spolu s větou 21

  $a_n \to \infty \Rightarrow$ s.v.$a_n > \ln\varepsilon \Rightarrow$ s.v.$(\mathrm{e}^{a_n}) > \varepsilon$.

- $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{a_n} = \infty$

  Víme, že funkce e^x je rostoucí na celém $\mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{e}^x$ je prostá na celém $\mathbb{R}$ a proto k ní existuje inverzní funkce $(\mathrm{e}^x)^{-1} = \ln(x)$.

  $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{a_n} = \infty \stackrel{def.}{\equiv} \forall\varepsilon > 0 : \mathrm{e}^{a_n} > \varepsilon$ pro s.v.n

  Mějme $\varepsilon > 0$, pak jistě $\exists\,\mathrm{e}^\varepsilon : \ln(\mathrm{e}^\varepsilon) = \varepsilon$ a dále

  $\ln(x)$ rostoucí $\Rightarrow \forall x > \mathrm{e}^\varepsilon : \ln(x) > \ln(\mathrm{e}^\varepsilon)$ a odtud spolu s větou 21

  $a_n \to \infty \Rightarrow$ s.v.$a_n > \mathrm{e}^\varepsilon \Rightarrow$ s.v.$(\ln(a_n)) > \varepsilon$.

q.e.d.

Věta 27. ***doplnění vybraných limit superpozic posloupnosti a funkce v nevlastních bodech(1. část):***

Mějme posloupnost $\{a_n\}$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, pak platí

- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} a_n = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arccotg} a_n = \pi$
- $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{a_n} = \infty$

Důkaz:

- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} a_n = -\frac{\pi}{2}$

  z lichosti funkce $\operatorname{arctg} a_n$:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} a_n = \left| \begin{array}{c} b_n := -a_n \\ a_n \to -\infty \Rightarrow b_n \to \infty \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} -b_n = -\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} b_n = -\tfrac{\pi}{2}.$$

- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arccotg} a_n = \pi$

  Využijeme vztahu arctg + arccotg $= \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arccotg} a_n = \lim_{n\to\infty} \tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a_n = \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2} = \pi.$$

- $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{a_n} = \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{a_n} = \left| \begin{array}{c} b_n := -a_n \\ a_n \to -\infty \Rightarrow b_n \to \infty \end{array} \right| = \frac{1}{\mathrm{e}^{b_n}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

q.e.d.

Věta 28. ***doplnění vybraných limit superpozic posloupnosti a funkce v nevlastních bodech(2. část):***

Mějme posloupnost $\{a_n\}$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pak platí

- $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = -\infty$

Důkaz:

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \ln(\tfrac{1}{a_n})^{-1} = \left| \begin{array}{c} b_n := \frac{1}{a_n} \\ a_n \to 0 \Rightarrow b_n \to \infty \end{array} \right| = \lim \ln(b_n)^{-1} =$$

$$= -\lim \ln b_n = -\infty.$$

q.e.d.

Pozn.: Pro $\lim_{n\to\infty}(a_n)^r$ při $a_n \to 0$ dostáváme triviálně $\lim_{n\to\infty}(a_n)^r = 0$.
Příklad: $\lim \sqrt[n]{n^k}$

$$\lim \sqrt[n]{n^k} = \lim \mathrm{e}^{\frac{k \ln n}{n}} \overset{VOLSFP}{=} \mathrm{e}^0 = 1.$$

3.3.3 Eulerovo číslo e

Eulerovo číslo je žákům představeno na středních školách jako základ přirozených logaritmů, exponenciální funkce, příklad iracionálního čísla s přibližnou hodnotou, a někdy i jako součást jediného výrazu, jehož derivace je rovna jemu samému. Přesto jsem se nesetkal s jeho zavedením ani v Přehledu středoškolské matematiky [psm], ani v řadě učebnic Doc. Oldřicha Odvárka - Matematika pro gymnázia.

Z tohoto důvodu začínám následující oddíl příkladem, který - ač silně přitažený za vlasy - naznačuje potřebu zavedení čísla e jako řešení úlohy z reálného světa a doplňuje tak arbitrární definici, se kterou se čtenář mohl setkat jako s jedinou. Snažím se tak ukázat výsadní postavení čísla e, neboť neznalost jeho definice může značně zkomplikovat, nebo i znemožnit řešení některých úloh posloupnostního kalkulu.

Konstrukce čísla e

Příklad: Představme si banku, která nám umožní uložit si peníze na účet se 100%-ním úrokem. Není třeba zabíhat příliš hluboko do finanční matematiky, abychom si spočítali, že pokud na účet vložíme x peněz, bude na účtu rok od vkladu $2x$. Bude-li však úrokovacích období za rok více, získáme ještě více peněz.

Nechť tedy máme stále 100%-ní úrok za úrokovací období, ale ta mějme do roka dvě. Pak po roce od vkladu budeme na účtu mít

$$\frac{3}{2}x + \frac{\frac{3}{2}x}{2} = \frac{9}{4}x = \frac{3^2}{2^2}x.$$

Přidáme-li další úrokovací období, bude stav účtu rok od vkladu:

$$\frac{4}{3}x + \frac{\frac{4}{3}x}{3} + \frac{\frac{4}{3}x + \frac{\frac{4}{3}x}{3}}{3} = \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x + \frac{16}{27}x = \frac{64}{27}x = \frac{4^3}{3^3}x.$$

Představme si, že naše už tak štědrá banka bude ještě štědřejší a náš vklad bude úročit v obecně n obdobích v roce, až pro $n \to \infty$ získáme spojité úrokování. Z předchozích kroků snadno odvodíme obecný vzorec pro takové roční zhodnocení:

$$\begin{aligned}
n = 1 &\Rightarrow 2x = \frac{2^1}{1^1}x = \left(\frac{2}{1}\right)^1 x \\
n = 2 &\Rightarrow \frac{3^2}{2^2}x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 x \\
n = 3 &\Rightarrow \frac{4^3}{3^3}x = \left(\frac{4}{3}\right)^3 x \\
&\vdots \quad \vdots \\
n = n &\Rightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n}x = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n x
\end{aligned}$$

Při spojitém úrokování tedy dostáváme RPSN rovnou $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. Prozatím si však s výpočtem takovéto limity nedokážeme poradit. Vraťme se však k našemu příkladu, zdá se z něj, že posloupnost $\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right\}$ je rostoucí. Dokažme tuto vlastnost vyšetřované posloupnosti matematicky pro všechna n:

$$\begin{aligned}
a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\overset{binom.v.}{=} 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \\
&+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Pro následující $n+1$. člen, dostáváme:

$$\begin{aligned} a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Při pečlivějším pohledu na rozklady členů a_n a a_{n+1} odhalíme, že se jejich první dva sčítance rovnají, každý následující až do n je větší u a_{n+1}-ího členu a a_{n+1}-í člen je ještě větší o $n+1$-í ščítanec. Dokázali jsme tak, že naše posloupnost roste. [*dp1 (str.: 97,98)*]

Dalším přínosem uvedené úvahy je následující nerovnost:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{3.1}$$

která přímo plyne z výše uvedených rozkladů, vezmeme-li v potaz skutečnost, že n je nekonečně velké a každá závorka ve tvaru $\left(1 - \dfrac{k}{n}\right)$; $k \in \mathbb{R}$ tak nabývá hodnoty z intervalu $\langle 0; 1)$.

Lehkým vykročením z problematiky této práce můžeme použít *d'Alembertovo podílové kritérium konvergence řad*, abychom ověřili, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ má konečný součet a tedy, že vyšetřovaná posloupnost $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je omezená takto:

Obecně:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \overset{d'Alembert}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \qquad [\textit{súcma (str.: 206)}]$$

pro naší řadu:

$$\lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)n!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{1}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{1} = \lim \frac{1}{n+1} < 1 \Rightarrow \text{řada konverguje.}$$

Je-li posloupnost $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ současně omezená a rostoucí, musí mít vlastní limitu. Matematika číslo, které je touto limitou značí e a nazývá Eulerovo číslo.

Zatím o tomto číslu mnoho nevíme, ale z hlediska kalkulu nám stačí pojmout ho jako konstantu, jež je iracionální a její přibližná hodnota je

$$\mathrm{e} = 2,7182818284\ldots \qquad [\textit{súcma (str.: 15)}].$$

Iracionalita čísla e plyne z následují úvahy;
Zvolíme-li pevné m a převedemeli prvních m členů sumy $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ na druhou stranu nerovnosti (3.1), dostaneme:

$$\mathrm{e}-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{m!}\right)=\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

výraz na pravé straně upravíme vytknutím $\frac{1}{(m+1)!}$, před sumu:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{(m+1)!}\cdot\left(1+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+3)(m+2)}+\ldots\right)$$

a dostáváme následující důležitý odhad:

$$e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{m!}\right)<\frac{1}{(m+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^n}.$$

[*mapu (str.: 89)*]
Ze vzorce pro součet geometrické řady dostaneme, že $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^n}=\frac{m+1}{m}$. Označme dále závorku na levé straně nerovnosti znakem s_m, který značí, že se jedná o součet m sčítanců. Celá nerovnice tak nabývá tvaru:

$$e-s_m<\frac{1}{m\cdot m!}.$$

Samotnou iracionalitu čísla e dokážeme sporem. Předpokládejme e racionální, tedy, že ho lze vyjádřit ve tvaru $e=\frac{p}{q}$; kde $p\in\mathbb{Z}$ a $q\in\mathbb{N}$. Zvolme pak v poslední nerovnici $m=q$, dostáváme:

$$\begin{aligned}(e-s_q)&<\frac{1}{q\cdot q!}\quad /\cdot q!\\(e-s_q)q!&<\frac{1}{q}\end{aligned}$$

Výraz na levé straně nerovnosti je podle předpokladů celé číslo, ostře menší než 1 a kladné. To je ovšem spor, neboť mezi jedničkou a nulou žádné celé číslo neleží, a e je tedy iracionální. [*mapu (str.: 89)*]

Kalkulus Eulerova čísla

Tuto část prezentuji tak, jak ji sestavil vedoucí práce D. Pilous. Je to mnohem obecněji a matematicky elegantněji pojatá úvaha, než jakou jsem dokázal sestavit sám. V práci je začleněna v zájmu úplnosti výčtu technik kalkulu posloupností.

„**Lemma:** [$\lim_{|x|\to\infty}(1+1/x)^x$ podle Heineho] Nechť $\lim|a_n| = \infty$. Pak

$$\lim\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e}\,. \tag{3.2}$$

Důkaz: Nejprve poznamenejme, že z podmínky $\lim|a_n| = \infty$ plyne, že skoro všechna a_n jsou nenulová a výraz v limitě (3.2) tedy má pro skoro všechna n smysl.

Mějme nejprve reálné $x > 1$. Pak

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\lfloor x\rfloor} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\lfloor x\rfloor+1} \le \left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1},$$

přičemž nerovnosti plynou z toho, že $\lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x\rfloor + 1$ a funkce $x \mapsto 1 + 1/x$ je na $(0,\infty)$ klesající (první a poslední nerovnost) a větší než 1 a funkce $x \mapsto a^x$ je pro $a > 1$ rostoucí na $\mathbb{R}$ (prostřední nerovnosti). Analogicky pro $x < -1$

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor+1} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\lfloor x\rfloor+1} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\lfloor x\rfloor} \le \left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor},$$

protože $x \mapsto 1+1/x$ je klesající i na $(-\infty, 0)$ a je tam menší než 1 a funkce $x \mapsto a^x$ je pro $a < 1$ klesající na $\mathbb{R}$.

Dosaďme nyní za x členy posloupnosti (a_n). To jistě lze pro s. v. n, neboť z divergence $(|a_n|)$ k ∞ plyne, že $|a_n| > 1$ pro s. v. n. Dostáváme omezení vyšetřované posloupnosti shora a zdola:

$$\min\left\{\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n\rfloor+1}, \left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n\rfloor}\right\}$$
$$\le \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le$$
$$\max\left\{\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor}\right)^{\lfloor a_n\rfloor}, \left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor}\right)^{\lfloor a_n\rfloor+1}\right\}$$

$(\lfloor a_n\rfloor)$ je posloupnost celých čísel divergující k ∞, a tedy podle Věty 22 je

$$\lim\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor}\right)^{\lfloor a_n\rfloor} = \lim\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n\rfloor+1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}$$

a odtud

$$\lim\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n\rfloor} = \lim\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n\rfloor+1}\cdot\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{-1} = \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e},$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor}\right)^{\lfloor a_n\rfloor+1}=\lim\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor}\right)^{\lfloor a_n\rfloor}\cdot\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$$

A podle věty o dvou policajtech

$$\lim\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=\mathrm{e}\,.$$

q.e.d.

Věta 29. ***limity posloupností vedoucí k*** e***:***

Nechť $\lim|a_n|=\infty$. Pak

$$\lim\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{b_n}=\mathrm{e}^{\lim\frac{b_n}{a_n}}, \tag{3.3}$$

pokud má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz: Označme pro jednoduchost

$$e(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

a

$$r_n=\frac{b_n}{a_n}.$$

Upravíme nejprve výraz v limitě na levé straně (3.3):

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{b_n}=\left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right)^{\frac{b_n}{a_n}}=\left(e(a_n)\right)^{r_n}$$

Protože $e(a_n)$ má podle Lemmatu 3.3.3 limitu e, platí

$$\forall\delta\in\mathbb{R}^+ : |e(a_n)-\mathrm{e}|<\delta \text{ pro s. v. } n.$$

Mějme nyní pevné $\delta\in\mathbb{R}^+$. Pak $\mathrm{e}-\delta<e(a_n)<\mathrm{e}+\delta$ pro s. v. n a $(e(a_n))^{r_n}$ je tudíž pro s. v. n sevřeno mezi $(\mathrm{e}\pm\delta)^{r_n}$ (kterým je shora a kterým zdola je dáno znaménkem r_n). Předpokládejme bez újmy na obecnosti $\delta<1$ a označme $r=\lim r_n$ (pokud existuje). Nyní rozebereme jednotlivé případy:

1. Je-li $r=\infty$, je podle věty o limitě základních elementárních funkcí v krajních bodech definičního oboru $\lim(\mathrm{e}\pm\delta)^{r_n}=\infty$ a tedy $\lim\left(e(a_n)\right)^{r_n}=\infty=\mathrm{e}^r$, cbd.

2. Nechť $r \in \mathbb{R}^+$. Chceme dokázat, že v každém okolí e^r jsou skoro všechny členy posloupnosti $(e(a_n))^{r_n}$. Mějme tedy libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Najdeme k němu takové δ, aby

$$\mathrm{e}^r - \frac{\varepsilon}{2} < (\mathrm{e} - \delta)^r < (e(a_n))^{r_n} < (\mathrm{e} - \delta)^r < \mathrm{e}^r + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sevření $(\mathrm{e} \pm \delta)^r$ pomocí $\mathrm{e}^r \pm \frac{\varepsilon}{2}$ má dobrý smysl: protože podle VOLSFP $\lim (\mathrm{e} \pm \delta)^{r_n} = (\mathrm{e} \pm \delta)^r$, jsou s. v. členy $(e(a_n))^{r_n}$ své limitě $(\mathrm{e} \pm \delta)^r$ blíže než $\frac{\varepsilon}{2}$, takže jistě $\mathrm{e} - \varepsilon < (\mathrm{e} - \delta)^{r_n}$ a $(\mathrm{e} + \delta)^{r_n} < \mathrm{e} - \varepsilon$ pro s. v. n. A protože podle předchozího $(\mathrm{e} \pm \delta)^{r_n}$ omezují vyšetřovanou posloupnost shora a zdola, máme pro s. v. n

$$\mathrm{e} - \varepsilon < (\mathrm{e} - \delta)^{r_n} < (e(a_n))^{r_n} < (\mathrm{e} + \delta)^{r_n} < \mathrm{e} - \varepsilon,$$

což chceme dokázat.

Kýžené δ jistě existuje; chceme-li, můžeme jej přímo vyjádřit:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^r - \frac{\varepsilon}{2} &< (\mathrm{e} - \delta)^r & \qquad (\mathrm{e} - \delta)^r &< \mathrm{e}^r + \frac{\varepsilon}{2} \\ \delta &< \mathrm{e} - \left(\mathrm{e}^r - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{r}} & \qquad \delta &< \left(\mathrm{e}^r + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{r}} - \mathrm{e} \end{aligned}$$

a naše podmínky jsou tedy splněny pro libovolné δ splňující

$$0 < \delta < \min\left\{\mathrm{e} - \left(\mathrm{e}^r - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{r}}, \left(\mathrm{e}^r + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{r}} - \mathrm{e}\right\}.$$

3. Je-li $r = 0$, je podle VOLSFP $\lim (\mathrm{e} \pm \delta)^{r_n} = (\mathrm{e} \pm \delta)^0$ a tedy $\lim (e(a_n))^{r_n} = 1 = \mathrm{e}^r$, cbd.

4. Je-li $r < 0$, je podle předchozího a věty o aritmetice limit

$$\lim (e(a_n))^{r_n} = \lim \left((e(a_n))^{-r_n}\right)^{-1} = \left(\lim (e(a_n))^{-r_n}\right)^{-1} = \left(\mathrm{e}^{-r}\right)^{-1} = \mathrm{e}^r$$

5. Předchozí případy pokrývají všechny situace, kdy r existuje; víme tedy, že pokud má smysl pravá strana (3.3), má ji i levá. Zbývá dokázat, že pokud r neexistuje, neexistuje ani limita na levé straně (3.3). To je jednoduché: z neexistence r plyne existence posloupností r'_n, r''_n vybraných z r_n takových, že $\lim r'_n = r' \neq r'' = \lim r''_n$. Pak z předchozího a prostoty exponenciely plyne

$$\lim (e(a_n))^{r'_n} = \mathrm{e}^{r'} \neq \mathrm{e}^{r''} = \lim (e(a_n))^{r''_n},$$

přičemž $(e(a_n))^{r'_n}$ a $(e(a_n))^{r''_n}$ jsou posloupnosti vybrané z $(e(a_n))^{r_n}$, která tudíž limitu nemá.“

q.e.d.

[*zdroj: D.Pilous*]

Příklad: $\lim \left(1 + \frac{\ln n}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

$$\lim \left(1 + \frac{\ln n}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \lim \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{\ln n}}\right)^{\sqrt{n}}$$

předpoklady věty 29 jsou splněny, neboť $\lim \frac{n}{\ln n} = \infty$ podle dominancí.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{\ln n}}\right)^{\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{\lim \frac{\sqrt{n}}{\frac{n}{\ln n}}} = \mathrm{e}^{\lim \frac{\ln n}{\sqrt{n}}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

3.3.4 Ekvivalence

Ekvivalence je vágně řečeno vztah dvou funkcí (zde přirozené proměnné), které lze v předpisu posloupnosti zaměnit, aniž by se tím změnila limita posloupnosti, kterou předpis definuje. Toho se využívá při vyšetřování limity takových posloupností, které dosazením za n dávají nedefinovaný výraz.

Def 30. ***Ekvivalence:***

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$, $a_n \neq 0$ pro s.v.n je *ekvivalentní* vůči posloupnosti $\{b_n\}$, pokud platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$$

Tuto skutečnost zapíšeme $\{a_n\} \cong \{b_n\}$ a čteme „a je ekvivalentní k b“.

Věta 30. ***o vlastnostech relace ekvivalence:***

Relace $\cong$ („být ekvivalentní“) je na množině posloupností *ekvivalencí*, tedy *reflexivní*, *tranzitivní* a *symetrická* relace.

Důkaz:

- reflexivní:

$$\lim \frac{a_n}{a_n} = 1.$$

- tranzitivní:

$$a_n \cong b_n \wedge b_n \cong c_n \overset{?}{\Rightarrow} a_n \cong c_n$$

$$\lim \frac{c_n}{a_n} = \lim \frac{c_n}{b_n} \cdot \lim \frac{b_n}{a_n} = 1 \cdot 1 = 1.$$

- symetrická:

$$a_n \cong b_n \overset{?}{\Rightarrow} b_n \cong a_n$$

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = 1$$

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{-1} = 1^{-1} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = 1 \Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

q.e.d.

Tím jsme hotovi s popisem obecných vlastností relace ekvivalence. Nyní zavádím několik množin vzájemně ekvivalentních složení funkce a posloupnosti. Jejich výběr není náhodný, a ačkoli nevyčerpává všechny možnosti, popisuje nejčastěji používané ekvivalence a pro řešení úloh v rozsahu příslušného předmětu na Pedagogické fakultě Karlovy univerzity dostačuje.

Věta 31. ***Ekvivalence vybraných posloupností u 0 (1. část):***

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $a_n \neq 0$ pro s.v.n, pak následující superpozice funkce a posloupnosti jsou si po dvou ekvivalentní:

$$e^{a_n} - 1 \cong ln(a_n + 1) \cong a_n \cong \sin a_n \cong \arcsin a_n \cong \operatorname{tg} a_n \cong \operatorname{arctg} a_n.$$

Důkaz:

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{a_n - 1}}{a_n} = 1$

vyjděme z definice eulerova čísla: $\mathrm{e}^x = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Výraz v limitě rozložme pomocí binomické věty:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{x^2}{n^2} + ... = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n(n-1)}{n^2} x^2 + ...$$

a pro pevné n: $a_n = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n(n-1)}{n^2} x^2 + ... + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{(n-n)! \cdot n^n} x^n$

Předpokládejme nyní $x > 0$ a dosaďme právě odvozený vztah do zadání:

$$\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1}{x} = \frac{\left(1 + x + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}x^2 + ... + \frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{(n-n)!\cdot n^n}x^n\right) - 1}{x} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}x + ... + \frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{(n-n)!\cdot n^n}x^{(n-1)} \leq$$
$$\leq 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ... + \frac{x^{n-1}}{n!} =$$
$$= 1 + \frac{x}{2}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3\cdot 4} + \frac{x^3}{3\cdot 4\cdot 5} + ... + \frac{x^{n-2}}{\frac{n!}{2}}\right) \leq$$
$$\leq 1 + \frac{x}{2}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} + ... + \frac{x^{n-2}}{3^{n-2}}\right) = 1 + \frac{x}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{x}{3}} \leq$$
$$\leq 1 + \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

Tím jsme postupným zvětšováním nalezli výraz, který ten vyšetřovaný omezuje shora. Najdeme-li smysluplný dolní odhad, můžeme použít větu o limitě sevřené funkce.

Dolní odhad odvodíme takto:

$$\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1}{x} = \frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} + \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-2} + ... + 1\right) \geq 1.$$

A skutečně jsme se propracovali k dvojnerovnosti, kterou potřebujeme:

$$1 \leq \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1}{x} \leq 1 + \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}};\ \text{pro } x \in (0;3).$$

Převeďme x na nějakou posloupnost $\{a_m\}$ jdoucí k 0 podle věty 21. Vzhledem k podmínce kladného x, mějme naší posloupnost kladnou pro skoro všechna m. Pak jistě skoro všechna $a_m \in (0;3)$. A tedy:

$$\begin{array}{ccccc}
\lim 1 & \leq & \lim\left(\frac{\left(1+\frac{a_m}{n}\right)^n - 1}{a_m}\right) & \leq & \lim\left(1 + \frac{a_m}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{a_m}{3}}\right) \\
\downarrow & \Rightarrow & \downarrow & \Leftarrow & \downarrow \\
1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Že tento závěr můžeme zobecnit i na posloupnosti, které konvergují k 0 a skoro všechny členy mají záporné, plyne z následující věty.

Věta 32. ***o vztahu e a*** e^{-1}**:**

Pro eulerovo číslo e a všechna $x \in \mathbb{R}$ platí: $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$

Důkaz: $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{e}^x = 1$

$$\lim(1 - \frac{x}{n})^n \cdot \lim(1 + \frac{x}{n})^n = \lim\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n$$

$$1 \overset{(1)}{\leq} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \overset{(2)}{\leq} 1 - n \cdot \frac{x^2}{n^2} = 1 - \frac{x^2}{n}$$

Nerovnost (1) je zřejmá, uvážíme-li, že $|1 - \frac{x^2}{n^2}| < 1$ pro skoro všechna n.

Nerovnost (2) vyplývá z tzv. Bernoulliho nerovnosti.

A dále z věty o limitě sevřené funkce:

$$\begin{array}{ccccc} \lim 1 & \leq & \lim\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n & \leq & \lim 1 - \frac{x^2}{n} \\ \downarrow & \Rightarrow & \downarrow & \Leftarrow & \downarrow \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

q.e.d.

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(a_n + 1)}{a_n} = 1$

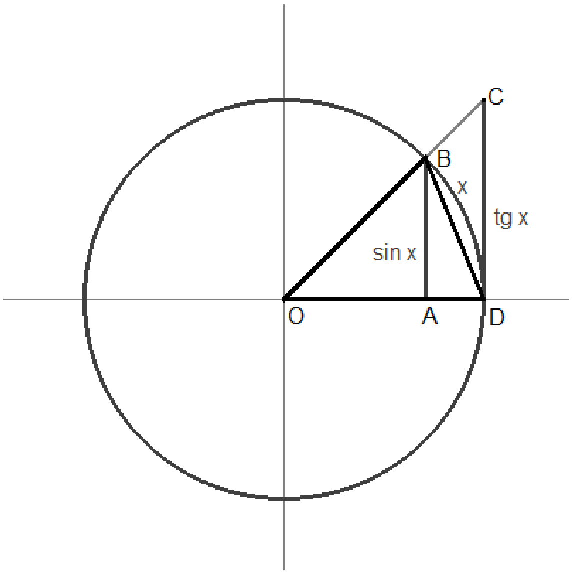
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a_n + 1)}{a_n} = \left| \begin{array}{c} b_n = \ln(a_n + 1) \\ a_n = \mathrm{e}^{b_n} - 1 \\ a_n \to 0 \Rightarrow b_n \to 0 \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\mathrm{e}^{b_n} - 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{b_n} - 1}{b_n}\right)^{-1} \overset{volspf}{=} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{b_n} - 1}{b_n}\right)^{-1} = 1^{-1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Čímž jsme s důkazem první ekvivalence hotovi.

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin a_n}{a_n} = 1$

Vzhledem ke skutečnosti, že vycházíme ze středoškolské definice funkce $\sin x$, musíme pro důkaz použít geometrie. Mějme jednotkovou kružnici a na ní vyznačený poloměr OB svírající úhel x s poloměrem OD (tzn. s osou x) takto:



pak |OD|=|OB|=1 a pro obsahy plošných útvarů ΔODB, ΔODC a kruhovou výseč $\widehat{\mathrm{ODB}}$ dostáváme:

$$\mathrm{S}_{\mathrm{ODB}} = \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{OD}| \cdot |\mathrm{AB}| = \frac{\sin x}{2}$$

$$\mathrm{S}_{\widehat{\mathrm{ODB}}} = \frac{r^2 x}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\mathrm{S}_{\mathrm{ODC}} = \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{OD}| \cdot |\mathrm{DC}| = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

a z obrázku je vidět, že pro $\forall x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$

$$\mathrm{S}_{\mathrm{ODB}} \leq \mathrm{S}_{\widehat{\mathrm{ODB}}} \leq \mathrm{S}_{\mathrm{ODC}}$$

a tedy

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\operatorname{tg} x}{2}, \text{ pro } \forall x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle.$$

a dvoj-nerovnici dále upravíme:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{2} &\leq \frac{x}{2} \leq \frac{\operatorname{tg} x}{2} \\
\sin x &\leq x \leq \operatorname{tg} x \\
\frac{\sin x}{\sin x} &\leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} \\
1 &\leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}
\end{aligned}$$

Tuto dvojnerovnost můžeme rozšířit i na interval $\langle -\frac{\pi}{2}; 0\rangle$, protože všechny funkce v ní obsažené jsou liché.

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}, \text{ pro } x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$$

A z věty o „substitucích“ ve větách o limitách posloupností:

Nechť $a_n \to 0$, pak

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \text{ pro } x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow 1 \leq \frac{a_n}{\sin a_n} \leq \frac{1}{\cos a_n} \text{ pro s.v.} n\ .$$

Odkud z věty o limitě sevřené funkce:

$$\begin{array}{ccccc} \lim 1 & \leq & \lim \frac{a_n}{\sin a_n} & \leq & \lim \frac{1}{\cos a_n} \\ \downarrow & \Rightarrow & \downarrow & \Leftarrow & \downarrow \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{tg} a_n}{a_n} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} a_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin a_n}{\cos a_n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{\cos x \cdot a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin x}{a_n} \cdot \frac{1}{\cos a_n}\right) \overset{VOAL}{=}$$

$$\overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{a_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cos a_n} = 1 \cdot 1 = 1.$$

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\arcsin a_n}{a_n} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin a_n}{a_n} = \left| \begin{array}{c} b_n = \arcsin a_n \\ a_n = \sin b_n \\ a_n \to 0 \Rightarrow b_n \to 0 \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\sin b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin b_n}{b_n}\right)^{-1} \overset{volspf}{=}$$

$$\overset{volspf}{=} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin b_n}{b_n}\right)^{-1} = 1^{-1} = \frac{1}{1} = 1.$$

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} a_n}{a_n} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} a_n}{a_n} = \left| \begin{array}{c} b_n = \operatorname{arctg} a_n \\ a_n = \operatorname{tg} b_n \\ a_n \to 0 \Rightarrow b_n \to 0 \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\operatorname{tg} b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\operatorname{tg} b_n}{b_n}\right)^{-1} \overset{volspf}{=}$$

$$\overset{volspf}{=} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} b_n}{b_n}\right)^{-1} = 1^{-1} = \frac{1}{1} = 1.$$

q.e.d.

Věta 33. ***Ekvivalence vybraných posloupností u 0 (2. část):***

Následující superpozice funkce a posloupnosti jsou si po dvou ekvivalentní pro $\forall a_n$; $\lim a_n = 0 \wedge a_n \neq 0$ pro s.v.n:

$$1 - \cos a_n \cong \frac{(a_n)^2}{2}.$$

Důkaz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos}{\frac{(a_n)^2}{2}} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \lim \frac{1}{(1+\cos x)} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = 1.$$

q.e.d.

Věta 34. ***Ekvivalence vybraných posloupností u*** ∞***:***

Následující funkce jsou si po dvou ekvivalentní pro $\forall a_n; \lim a_n = \infty$:

$$\operatorname{arccotg} a_n \cong \frac{1}{a_n}.$$

Důkaz: Využijeme rovnosti $\operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg} a_n}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot \operatorname{arccotg} a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{a_n}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{c} b_n = \frac{1}{a_n} \\ a_n \to \infty \Rightarrow b_n \to 0 \end{array} \right| = \frac{\operatorname{arctg} b_n}{b_n} = 1, \text{ již dokázaná ekvivalence.}$$

q.e.d.

Věta 35. ***Ekvivalence vybraných posloupností u*** 0_+***:***

Nechť $\lim a_n = 0$ a $a_n > 0$ pro s.v.n , pak jsou následující superpozice funkce a posloupnosti ekvivalentní:

$$\arccos(1 - a_n) \cong \sqrt{2a_n}.$$

Důkaz:

$$\lim \frac{\arccos(1-a_n)}{\sqrt{2a_n}} = \left| \begin{array}{c} b_n = \arccos(1-a_n) \\ a_n = 1-\cos b_n \end{array} \right| = \lim \frac{b_n}{\sqrt{2(1-\cos b_n)}} =$$

$$= \lim \frac{\frac{(b_n)^2}{2}}{1-\cos b_n} = 1,$$ již dokázaná ekvivalence, resp. její podoba vyplývající ze symetrie ekvivalencí.

Pozn.: umocnit čitatele i jmenovatele vyšetřovaného výrazu jsme mohli díky předpokladu, že skoro všechny členy posloupnosti a_n jsou kladné nenulové.
q.e.d.

Na začátku práce jsem si stanovil, že se budu zabývat posloupnostmi, aniž bych přitom použil více než nutné minimum z analýzy funkcí. Má snaha vyhnout se funkcím však ztroskotala na překvapivé pointě: poslední kapitola o ekvivalencích je ve skutečnosti o funkcích. Ačkoli celou její motivací je definovat ekvivalenční fronty posloupností, ukazuje se, že učiněné závěry lze přímo pomocí Heineho definice limity funkce rozšířit na funkce.

3.4 Uzavření

V praktické stati jsem zavedl analogie substituce, věty o limitě složené funkce a ekvivalence pro posloupnosti. Dalším nástrojem v řadě, jejíž začátek jsem touto prací popsal, by pro funkce bylo *L'Hospitalovo pravidlo*. Jeho ekvivalencí pro posloupnosti je *Stolzova věta*.

Zde však své bádání zakončím rezignací na popis Stolzovy věty a pátrání po dalších, mocnějších nástrojích posloupnostního kalkulu.

Faktem zůstává, že touto prací vytyčený postup zavádění postupů pro výpočet limit posloupností nikdy nepokryje množinu všech posloupností, dokonce ani ne posloupností definovaných elementárními funkcemi. Některé problémy posloupnostního kalkulu je totiž nutno řešit nástroji z teorie čísel. Jako jeden příklad za všechny uvádím následující úlohu:

Příklad: $\sin^n n$

Kapitola 4

Závěr

Z historického hlediska tvoří posloupnosti významnou kapitolu matematického bádání. Ačkoli i v současnosti lze o posloupnostech mnoho zjišťovat, je jejich důležitost – alespoň v rámci bakalářského studia matematiky – umenšena silným tématickým překryvem s funkcemi.

Další posloupnostem příbuzná kapitola matematické analýzy, řady, dále odsává posloupnostem prostor zejména tím, že společné nástroje pro vyšetřování vlastností posloupností a řad jsou často zařazovány až do výkladu řad, jak dokládá literatura, již jsem při sepisování této práce použil.

Hlavním záměrem této práce bylo rozpracovat odpřednášenou i v knihách obsaženou látku tak, aby studium tohoto textu významně rozšířilo počtářské schopnosti čtenáře v oboru posloupností, aniž by bylo použito více z analýzy funkcí, než nabízí střední škola.

Nebylo záměrem této práce toto rozšíření nikterak kvantifikovat, či empiricky ověřovat, avšak věřím, že nabídnutá paleta nástrojů pro vyšetřování limit posloupností nade vší pochybnost přesahuje běžnou znalost absolventa kurzu matematické analýzy na matematicky naspecializovaných oborech.

Hlavním přínosem práce je zformulování, dokázání a předvedené použití následujících nástrojů:

- Podílové a odmocninové kritérium konvergence posloupností
- Dominance vybraných posloupností
- Formulace a důkaz věty o substitucích ve větách o limitě posloupností

- Věta o limitě superpozice funkce a posloupnosti
- Popis mocniny Eulerova čísla jako limity posloupnosti
- Ekvivalence vybraných posloupností

Vedlejším přínosem jsou zejména:

- Sumarizace nutných poznatků z oboru posloupností v teoretické stati
- Prohloubení pochopení problematiky posloupností u čtenáře - studenta
- Srovnání vlastností posloupností a funkcí
- Dokázání ekvivalenčních front vybraných funkcí

Omezení práce vidím hlavně v nevyužité možnosti některé důkazy a tvrzení zobecnit, zkrátit, či vést jiným způsobem, vedoucím k úspoře místa, větší přehlednosti a čistotě matematizace. Uvedené formulace však uvádím dle svého nejlepšího vědomí a svědomí, stylem odpovídajícím mým schopnostem.

Práci omezuje i rozsah. V popisovaném tématu by bylo jak pokračovat jak intenzivně (Stolzova věta), tak extenzivně (podrobnější popis základních metod vyšetřování posloupností, např. vytýkání dominantního členu, důkazy konvergence/ divergence z definice, atp.), nicméně věřím, že tématický záběr práce pokryl všechny důležité problémy. Za největší úspěch této bakalářské práce bych považoval využití některých jejích závěrů při výuce a v případě úspěšné obhajoby toto navrhnu svému vedoucímu. Dopady takového využití na výkony posluchačů příslušných ročníků by mohly představovat vhodný předmět bádání diplomové práce.

Kapitola 5

Zdroje

Citace jsou často nepřímé, protože jsem se z ohledu na komfort čtenáře rozhodl sjednotit značení, v němž se jednotliví autoři rozcházejí. Mimo změn notace jsem se však snažil zachovat doslovné znění formulací tak, jak jsou v literatuře uvedeny.

5.0.1 Literatura

1. [sucma] BORIS PAVLOVIČ DĚMIDOVIČ *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.* Brno: Fragment, 2003. ISBN 80-7200-587-1

2. [dp1] VOJTĚCH JARNÍK *Diferenciální počet I.* 6. neměněné vydání. Praha: Academia 1974. ISBN 21-101-74

3. [mapu] JIŘÍ VESELÝ *Matematická analýza pro učitele, První díl.* Druhé, upravené vydání. Praha: MATFYZPRESS, 2001. ISBN 80-85863-23-5

4. [psm] JOSEF POLÁK *Přehled středoškolské matematiky.* 8. vydání. Havlíčkův Brod: Prometheus, 2003. ISBN 80-7196-267-8

5.0.2 Elektronické zdroje

1. Math Tutor - Sequences - Method survey - Limits, In: *Math Tutor* [online]. ČVUT, Katedra matematiky, [cit 2012-5-3].
   Dostupné z: http://math.feld.cvut.cz/mt/txta/2/txc3ab2g.htm

2. Wikipedie, otevřená encyklopedie. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 15. 1. 2001, 17. 3. 2011 [cit. 2012-03-17]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Hlavní_strana

3. Wolfram Alpha. In: *Wolfram Alpha, computational knowledge engine* [online]. A Wolfram Research Company. Dostupné z: http://www.wolframalpha.com/

5.0.3 Použité softwareové vybavení

1. Sazba provedena v programu LaTeX
2. Tvorba a úprava obrázků nástrojovou sadou GIMP
3. Konstrukce geometrické grafiky: Cabri II Plus 1.4