# UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE – PEDAGOGICKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

## POSUDEK VEDOUCÍHO BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

| | |
|---|---|
| Autor práce | *Marek FIALA* |
| Název práce | *Techniky výpočtu limit posloupností* |
| Autor posudku | *Mgr. Derek PILOUS* |

| | Kritérium hodnocení | Hodnocení 1 – 10 bodů *) |
|---|---|---|
| 1. | **Formulace cílů** (cíle jsou jasně formulované a adekvátní typu a charakteru práce). | *5* |
| 2. | **Prostředky k dosažení cílů** (použité metody jsou vhodné vzhledem k cílům a dalším parametrům práce). | *10* |
| 3. | **Postup řešení** (postup zpracování odpovídá zvoleným cílům a metodám práce, text je jasně a logicky strukturován). | *6* |
| 4. | **Splnění cílů** (cíle práce byly splněny v přiměřeném rozsahu a na úrovni, která odpovídá charakteru práce). | *10* |
| 5. | **Orientace autora v pojednávané problematice** (práce odráží znalost relevantních pramenů a literatury). | *6* |
| 6. | **Originalita zpracování** (práce vykazuje prvky, které svědčí o tvůrčím zaujetí autora a o jeho samostatném uvažování o řešené problematice). | *8* |
| 7. | **Obsahová náplň** (volba obsahových prvků práce je relevantní, jsou postiženy jejich vzájemné vazby a souvislosti a obsah vytváří logický celek). | *2* |
| 8. | **Úroveň jazykového projevu** (pravopisná a stylistická úroveň odpovídá nárokům na bakalářskou práci, terminologie je korektní a jednotná). | *4* |
| 9. | **Práce s informačními zdroji, dodržení formálních pravidel** (zdroje v přiměřeném množství jsou vhodně zvoleny a správně citovány a interpretovány; práce má náležitou úpravu a respektuje příslušné normy). | *3* |
| 10. | **Přínos práce** (výsledky práce mohou nalézt konkrétní smysluplné uplatnění v teorii či praxi daného oboru). | *6* |

*) 1 bod vyjadřuje nejnižší možnou úroveň splnění daného kritéria, 10 bodů nejvyšší možnou úroveň

| Otázky k obhajobě |
|---|
| Jak byly vybírány definice, věty a důkazy do teoretické části?<br>Proč je zařazena kapitola o Eulerově čísle, resp. proč je zařazena tam, kde je? |

Předložená práce vychází z jednoho ze dvou používaných přístupů k výuce základů teorie limit, který vede přes limity posloupností a Heineho definici k limitám funkcí. Tento přístup je velmi názorný a zjednodušuje studentům pochopení definice limity tím, že (z mentálního hlediska) redukuje počet kvantifikátorů v její definici (pomocí konstrukce „pro skoro všechna $n$“), z hlediska kalkulu je však omezující, protože před zavedením limit funkcí neumožňuje užití jednoho z nejdůležitějších nástrojů limitního kalkulu, věty o limitě složené funkce. Práce tento problém řeší odvozením sady vět, které pro elementární posloupnosti (které tvoří absolutní většinu úloh v rámci výuky analýzy řešených) tuto větu ekvivalentně nahrazují.

Autor ve svém cíli uspěl, výsledkem jeho práce je metoda umožňující snadno řešit velkou část úloh tradičními metodami neřešitelných, resp. řešitelných jen ad hoc. Autorův matematický přínos proto hodnotím jako vynikající. Práci však znehodnocuje velké množství chyb všeho druhu. Většina z nich je důsledkem toho, že práce byla napsána ve velkém chvatu a prakticky bez redakční kontroly. Tím vzniklo kromě gramatických (jako „fuknce“, „vyštřovaná“, „zárovečׅ“) a interpunkčních chyb (především chybějící čárky) i značné množství chyb typografických (odsazení, zlomy řádků uprostřed výrazů, nejednotná a většinou chybná úprava matematických konstant, mezery před interpunkčními znaménky, neodpovídající velikost závorek, místy dokonce nahrazení znaků jejich špatně zapsanými konstrukčními příkazy v sázecím systému LaTeX) bohužel i vážné chyby matematické – vzorovým příkladem je definice suprema a infima, kde autor kopíroval jednu část definice na druhou, avšak bez řádné opravy, takže nakonec definuje dvakrát supremum, a to chybně. Další chyby vznikly při práci s literaturou. Autor čerpal potřebné definice z více zdrojů a pokusil se o jejich kompilaci a úpravu tak, aby teoretická část práce tvořila logický a kompaktní celek. Tuto úlohu bohužel nezvládl. Příkladem je definice operací na rozšířené reálné ose, jejíž výsledná podoba je neúplná, duplicitní a dokonce vnitřně sporná. Jde o projev obecnějšího rysu práce, nepoměru mezi hloubkou a kvalitou matematických výsledků, které jsou na studenta bakalářského studia velmi dobré, a jejich formalizací, která – zvláště v teoretické části, které autor zjevně nevěnoval tolik pozornosti – naopak vážně pokulhává. Vzácně se vyskytují i matematické chyby vzniklé nepochopením či chybnou úvahou, jako v důkazu antisymetrie relace dominance – ve skutečnosti je dokazována negace symetrie, a to špatně.

Kromě těchto lokálních chyb má práce i vady strukturální. Není například zřejmé, podle jakého klíče autor vybíral definice a věty do teoretické části, neboť s následující částí praktickou příliš nekorespondují, proč se některé s definic rozhodl zařadit pouze do poznámek, resp. poznámek pod čarou, a proč některá z uvedených tvrzení dokazuje a jiná nikoli. Velmi zvláštní je zařazení kapitoly o Eulerově čísle, které působí neorganicky. Autor se také ne vždy drží zavedeného značení (např. zavádí značení posloupnosti ve složených závorkách, někdy ale použije značení bez závorek, jednou dokonce v závorkách kulatých). Přinejmenším nestandardní jsou také názvy textových celků (kapitoly „Teoretická stať“ a „Praktická stať“, poslední podkapitola „Uzavření“). Naopak chválu zaslouží autorův vyspělý a čtivý styl, kterému lze vytknout jen jistou vágnost v literárnějších partiích.

Vzhledem k tomu, jak velké množství chyb práce obsahuje, uvádím pro účely obhajoby seznam těch nejzávažnějších (především matematických), které jsem v práci nalezl.

str. 7, Definice 3: neúplná (chybí např. ∞+∞), částečně duplicitní (poslední dva řádky) a sporná (podle předposledního řádku je $1^{\infty}$ rovno ∞ i 0)
str. 8, Definice 5: chybí přiřazení názvu k okolím nevlastních bodů a jejich index;
v důsledku je výraz $U(\infty)$ definován nekonečně mnoha různými způsoby
str. 8, Definice 6: definice je chybná pro nevlastní $x_0$
str. 9, Definice 8: místo suprema a infima je definováno dvakrát supremum, a to špatně
str. 10, nahoře: odstavec začínající „V praxi kalkulu posloupností“ nenavazuje na předchozí text
str. 10, dole: jestliže nějaký objekt není posloupnost, neměl by tak být značen
str. 11, Příklad: rovnost mezi číslem a množinou, která je navíc považována za posloupnost
str. 11, Definice 10: předpoklady o $\boldsymbol{N}_k$ jsou zmatečné a zbytečné, množina je korektně definována jinde
str. 13, Definice 13: ač nadpis slibuje definici podposloupnosti, není tento pojem v definici použit a zůstává tedy fakticky nedefinován; v dalším textu je ovšem používán
str. 13, Definice 14: místo značky implikace je středník
str. 16, Důkaz Věty 3: je chybný, implikace vpravo vyplývá z definice, nikoli z jednoznačnosti limity; ta je naopak potřebná v důkazu opačné implikace, kde není uvedena
str. 27, dole: tvrzení o faktoriálu nepravdivé
str. 29, 3.1.3: použita $x$ místo $n$
str. 29, dole: zmatení názvů kritérií konvergence řad
str. 30, nahoře: tvrzení, že kritérium konvergence je speciálním případem Bolzano-Cauchyho podmínky, je chybné
str. 32, Důkaz Věty 18: v prvním řádku vpravo je ostrá nerovnost místo neostré
str. 34, nahoře: důkaz antisymetrie zcela nesmyslný

str. 35, uprostřed: $(n + 1^n)$ místo $(n + 1)^n$
str. 35, dole: za $\ln^3$ dvakrát chybí $n$; tamtéž se užívá výsledku $\forall k_1, k_2 \in \boldsymbol{R}^+ : \lim \ln^{k_1} n / n^{k_2} = 0$, který je odvozen až dále
str. 36, Věta 21 a Důkaz: několikrát záměna $m$ a $n$
str. 37, pod Důkazem Věty 22: „podposloupnost $\boldsymbol{N}$“ je nesmysl, přirozená čísla jsou množina, nikoli posloupnost
str. 37, Lemma a jeho Důkaz: znění neodpovídá důkazu, neboť je v něm (skrytě) $k_1, k_2$ kvantifikováno vně pro celou ekvivalenci, zatímco v důkazu se používá znění s kvantifikací na každé straně zvlášť; výpočet na konci Důkazu navíc sugeruje, že $\lim \ln^{k_1} n / n^{k_2/2} = 1$, což není pravda
str. 37, pod Důkazem Lemmatu: logický skok, autor uvádí jako „dokazovanou“ nerovnost, která není v původním tvrzení; je s ní na základě Lemmatu ekvivalentní, to však není uvedeno
str. 42, nahoře: formulace „funkce … roste pro $\forall x < L$“ nemá smysl, protože autor v celé práci užívá výhradě monotonii na množině, nikdy v bodě
str. 43, dole: uvedena rovnost mezi dvěma výrazy, které nemají smysl, aniž by byla zavedena konvence smysluplnosti takového zápisu
str. 44, druhý odstavec: formulace „každá elementární, goniometrická a cyklometrická funkce …“ působní dojmem, že goniometrické a cyklometrické funkce nejsou elementární.
str. 46, první bod: použita zkratka VOLSPF (Věta o limitě superpozice posloupnosti a funkce), aniž by byla zavedena; zkratka se opakovaně vyskytuje i v dalším textu, a to někdy velkým, jindy malým písmem
str. 46, druhý bod: typografická chyba změnila $\mathrm{e}^{(\ln \varepsilon)}$ na $\mathrm{e}^{(}\ln \varepsilon)$ s možnou změnou interpretace
str. 47, Věta 28: chybí předpoklad kladnosti posloupnosti $a_n$, bez něj není tvrzení „$a_n \to 0 \Rightarrow b_n \to \infty$“ na str. 48 nahoře platné
str. 50, za „Obecně:“: sumě chybí obsah
str. 53, Důkaz: obsahuje odkaz na Lemma 3.3.3, žádné lemma však toto označení nemá
str 55, Definice 30: zásadní chyba, v definiční rovnosti je na pravé straně místo jedničky nula (dále je však správně užívána jednička)
str. 57, nahoře: poslední rovnost v odvození předpokládá $x \neq 3$, poslední nerovnost $x < 3$, tento předpoklad je však uveden až dále
str. 58, Důkaz: formulace „Nerovnost … vyplývá z tzv. Bernoulliho nerovnosti“ působí dojmem, jako by Bernoulliho nerovnost byla použita poprvé, přitom je uvedena v teoretické části jako Věta 1 i s důkazem; v témže důkazu se užívá „středoškolské definice“ funkce sinus, což nelze považovat za jednoznačné označení, takže by měla být uvedena
str. 59, dole: poslední dva řádky odvození mají smysl jen na $(0, \pi/2)$, nikoli na $\langle 0, \pi/2 \rangle$, jak je uvedeno
str. 60 nahoře: místo „liché“ má být sudé
str. 60, první bod: místo $a_n$ několikrát použito $x$, totéž str. 61, Důkaz
str. 61 Důkaz Věty 34: rovnost $\operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg} 1/x$ platí jen pro $x \in \boldsymbol{R}^+$, což není uvedeno (použití je však korektní)
str. 62, Důkaz: v posledním výrazu s limitou chybí vnější odmocnina

Celkové hodnocení práce je v tomto případě obtížné, protože je z hlediska odborného přínosu vynikající, z formálního však velmi problematická. U práce diplomové, přestože by odborný přínos byl i na této úrovni velmi dobrý, by takové porušení formálních pravidel nebylo akceptovatelné. Bakalářskou práci však považuji především za příležitost k odbornému růstu studenta, a tento cíl byl naplněn. Proto jsem se po dlouhém váhání rozhodl doporučit, aby předložená práce byla uznána jako práce bakalářská.

| **Celkové hodnocení** | ***Práci doporučuji k obhajobě.*** |
|---|---|

Datum a podpis autora posudku bakalářské práce: