

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Přírodovědecká fakulta

Katedra aplikované geoinformatiky a kartografie



**GEOMORFOLOGICKÁ INTERPOLÁCIA
VRSTEVNÍC NAD NEPRAVIDELNOU
TROJUHOLNÍKOVOU SIEŤOU**

Diplomová práca

Andrej Morávek

august 2012

Vedúci diplomovej práce: Ing. Tomáš Bayer, Ph.D.

Vysoká škola: Univerzita Karlova v Praze

Fakulta: Přírodovědecká

Katedra: Aplikované geoinformatiky a kartografie

Školní rok: 2011/2012

Zadání diplomové práce

pro Bc. Andrej Morávek

obor Kartografie a geoinformatika

Název tématu : Geomorfologická interpolace vrstevnic nad trojúhelníkovou sítí

Zásady pro vypracování

Diplomová práce se zabývá problematikou geomorfologické interpolace vrstevnic nad nepravidelnou trojúhelníkovou sítí (TIN). Cílem práce bude navrhnout, implementovat a otestovat algoritmus umožňující geomorfologickou interpolaci vhodnou pro kartografickou reprezentaci vrstevnic v topografických mapách velkých měřítek.

Interpolace bude prováděna s využitím Beziérova kubického trojúhelníkového plátu. Algoritmus umožní navazovat sousední pláty se zachováním C^0 , C^1 a pseudo- C^2 spojitosti s možností vkládání povinných hran do modelu. Algoritmus bude také umožňovat regulaci tvaru s vrstevnic prostřednictvím „faktoru geomorfologičity“, tj. potlačit či zdůraznit vliv geomorfologické interpolace s využitím vhodné váhové funkce navržené diplomantem.

V praktické části bude provedena implementace algoritmů ve zvoleném programovacím jazyce a ověření funkcionality jak z informatického, tak z kartografického pohledu. Pro generování triangulace bude využita knihovna CGAL. Testování bude provedeno na jak na matematicky definované etalonové ploše, tak i na různých datových sadách ALS. Součástí práce bude zhodnocení výsledků poskytovaných algoritmem a jejich porovnání s běžnou lineární interpolací.

Rozsah grafických prací:

Rozsah průvodní zprávy:

Seznam odborné literatury:

[1] Costantinia, P., Kaklis, P.D., Mannic, C.: Polynomial cubic splines with tension properties. Computer Aided Geometric Design Volume 27, Issue 8, November 2010, pp 592-610

[2] Bastl B., Jüttler B., Lávička M., Schicho J., Šír Z.: Spherical quadratic Bézier triangles with chord length parameterization and tripolar coordinates in space. Computer Aided Geometric Design 28 (2011) pp. 127–134

[3] Farin, G.: Curves and Surfaces for CAGD. A practical guide. Academic press, San Diego, London, Boston, New York, Sydney, Tokyo, Toronto, 1997, fourth edition edition.

[4] Rusinkiewicz, S.: Estimating curvatures and their derivatives on triangle meshes. In 3D Data Processing, Visualization and Transmission, 3DPVT 2004 Proceedings. pp. 486-493.

[5] Vlachos, A, Peters, J, Boyd, C., Mitchell, JL: Curved PN Triangles, ACM Symposium on Interactive 3D Graphics, 2001, pp. 159-166.

Vedoucí diplomové práce: Ing. Tomáš Bayer, Ph.D.

Konzultant diplomové práce: Prof. Dr. Ing. Ivana Kolingerová

Datum zadání diplomové práce: 20. listopadu 2011

Termín odevzdání diplomové práce:

Platnost tohoto zadání je po dobu jednoho akademického roku.

.....
Vedoucí diplomové práce

.....
Vedoucí katedry

V Praze dne 20. listopadu 2011

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne a že som všetky použité pramene riadne citoval.

Som si vedomí toho, že prípadné použitie výsledkov, získaných v tejto práci, mimo Univerzitu Karlovu v Praze je možné iba s písomným súhlasom tejto univerzity.

Povoľujem k zapožičaniu tejto práce pre štúdijné účely a súhlasím s tým, aby bola riadne vedená v evidencii vypožičiavateľov.

V Bratislave dňa 21. augusta 2012

.....
Andrej Morávek

Pod'akovanie

Na tomto mieste by som sa veľmi rád poďakoval predovšetkým svojmu vedúcemu práce Ing. Tomášovi Bayerovi, Ph.D. za čas, ktorý mi venoval počas mesiacov prípravy tejto práce, za všetky ochotne poskytnuté konzultácie, za postrehy a pripomienky pri odborných korektúrach.

Geomorfologická interpolácia vrstevníc nad nepravidelnou trojuholníkovou sieťou

Abstrakt

Cieľom tejto diplomovej práce je vytvoriť aplikáciu na generovanie hladkých vrstevníc metódou nelineárnej, tzv. geomorfologickej interpolácie nad nepravidelnou trojuholníkovou sieťou s využitím plátovej techniky. Úvodná časť pozostáva z prehľadu odbornej literatúry z oblasti plátových modelov a popisu georeliéfu vo forme digitálnych terénnych modelov. Jadro práce zahŕňa najmä matematické pozadie Bézierových trojuholníkových plátov s využitím barycentrických súradníc a interpolačné techniky s definovaním spojitosti. Hlavným prínosom je vlastný návrh algoritmu primeraného vyhladenia plátov za účelom generovania hladkých vrstevníc ako formy reprezentácie georeliéfu. Súčasťou je aj popis lineárnej interpolácie vrstevníc z nepravidelných trojuholníkových sietí ako metódy nepriamej geomorfologickej interpolácie. Finálna časť popisuje implementáciu algoritmov, z ktorých aplikácia pozostáva, prezentuje a hodnotí výsledky na syntetických a reálnych dátach.

Kľúčové slová: digitálna kartografia, TIN, Bézierov trojuholníkový plát, geomorfologická interpolácia, vrstevnice

Geomorphological contour interpolation over triangulated irregular network

Abstract

The aim of this master thesis is to create an application to generate smooth contours with the method of non-linear, so-called geomorphological interpolation over triangulated irregular network using patch technique. The introductory part consists of the state of art in the field of patch modelling and description of georelief in the form of digital terrain models. The core of the work comprises the mathematical background of Bézier triangle patches using barycentric coordinates and interpolation techniques with definition of continuity. The main contribution is a proper algorithm of balanced patch smoothing in order to generate smooth contours as form of georelief representation. Description of linear contour interpolation over triangulated irregular network as a method of indirect geomorphological interpolation is also part of the core. Finally, the last part describes the implementation of algorithms that forms the application, presents and evaluates the results on synthetic and real data.

Keywords: digital cartography, TIN, Bézier triangle patch, geomorphological interpolation, contours

OBSAH

PREHĽAD POUŽITÝCH SKRATIEK.....	7
ZOZNAM OBRÁZKOV.....	8
ZOZNAM TABULIEK.....	9
ZOZNAM DIAGRAMOV.....	9
1 Úvod.....	10
2 Ciele práce.....	11
3 Prehľad literatúry.....	12
3.1 Nepravidelné trojuholníkové siete a extrakcia vrstevníc.....	12
3.2 Plátové modely.....	13
3.2.1 Vývoj plátových modelov.....	13
3.2.2 Trojuholníkové plátové modely.....	14
4 Georeliéf a jeho digitálny model.....	16
4.1 Georeliéf ako množina morfometrických veličín.....	16
4.2 Digitálne terénne modely.....	17
4.3 Znázornenie georeliéfu pomocou vrstevníc.....	18
5 Bézierov trojuholníkový plát.....	22
5.1 Definícia Bézierovho trojuholníkového plátu.....	22
5.1.1 Barycentrický súradnicový systém.....	24
5.1.2 Vlastnosti Bézierových trojuholníkových plátov.....	26
5.1.3 Spojitosť kubických trojuholníkových plátov.....	27
5.2 Spojitosť C^0	27
5.2.1 Jednoduchý interpolant.....	28
5.3 Spojitosť C^1	31
5.3.1 Clough-Tocher interpolant.....	34
5.3.2 Konštrukcia Clough-Tocher interpolantu.....	34
5.3.3 Problém určenia mikro ťažísk.....	36
5.4 Spojitosť C^2	39
5.4.1 Lagrange-ova minimalizácia nespojitosti C^2	41
5.5 Lomové línie.....	42
5.6 Úroveň vyhladenia.....	44
5.6.1 Uhlovo závislá úroveň vyhladenia.....	47
6 Geomorfologická interpolácia vrstevníc.....	50
6.1 Lineárna interpolácia nad TIN.....	50
6.1.1 Algoritmus založený na topológii TIN.....	53

7 Implementácia.....	56
7.1 Knižnica CGAL.....	56
7.1.1 Triangulačná dátová štruktúra.....	57
7.2 Štruktúra aplikácie.....	59
7.2.1 Definícia vstupov.....	62
7.2.2 Primárna triangulácia vstupných dát.....	63
7.2.3 Odhad dotykových rovín.....	65
7.2.4 Jednoduchý interpolant C^0	69
7.2.5 Clough-Tocher interpolant C^1	71
7.2.6 Minimalizácia odchýlky C^2 nespojitosti.....	78
7.2.7 Nerovnomerná úroveň vyhladenia plátového modelu.....	81
7.2.8 Vizualizácia a export v OpenGL.....	81
8 Hodnotenie výsledkov.....	83
8.1 Syntetické dáta.....	83
8.1.1 Konfigurácia a spôsob hodnotenia testov.....	84
8.1.2 Numerické a vizuálne hodnotenie testov.....	87
8.2 Reálne dáta	93
9 Diskusia a záver.....	95
ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ODKAZOV.....	96
ZOZNAM PRÍLOH.....	101

PREHĽAD POUŽITÝCH SKRATIEK

ASCII	American Standard Code for Information Interchange	Americký štandardný kód pre výmenu informácií
CAGD	computer aided geometric design	počítačový geometrický dizajn
CW	clockwise	v smere hodinových ručičiek
CCW	counterclockwise	v protismere hodinových ručičiek
CDT	constrained Delaunay triangulation	Delaunay-ho triangulácia s obmedzeniami
CGAL	Computational Geometry Algorithms Library	knižnica algoritmov výpočtovej geometrie
DTM	digital terrain model	digitálny terénny model
TDS	triangulation data structure	triangulačná dátová štruktúra
TIN	triangular irregular network	nepravidelná trojuholníková sieť

ZOZNAM OBRÁZKOV

Obr. 4.1 Celkové elementárne formy reliéfu.....	20
Obr. 4.2 Príklady tvarov georeliéfu.....	21
Obr. 5.1 Rozmiestnenie a indexácia kontrolných bodov.....	24
Obr. 5.2 Barycentrické súradnice kontrolných bodov.....	25
Obr. 5.3 Bézierov plát v kontrolnom polyédri s priemetom do roviny.....	27
Obr. 5.4 Odhad normály vo vrchole z normál príľahlých trojuholníkov.....	29
Obr. 5.5 Ukážka povrchu a vrstevníc vyprodukovaných C^0 interpolantom.	31
Obr. 5.6 Páry kontrolných podmieňujúcich zachovanie C^1 spojitosti na hrane.....	32
Obr. 5.7 Definícia vektorov roviny pre zachovanie spojitosti C^1	33
Obr. 5.8 Rozmiestnenie kontrolných bodov v makro trojuholníku	35
Obr. 5.9 Ukážka povrchu a vrstevníc generovaných Clough-Tocher interpolantom. ...	36
Obr. 5.10 Normála v strede hrany s lineárnou (1) a kvadratickou (2) varianciou.....	37
Obr. 5.11 Metóda určenia mikro ťažísk štvoruholníkovým Bézierovým plátom.	39
Obr. 5.12 Páry trojuholníkov podmieňujúcich zachovanie C^2 spojitosti na hrane.....	40
Obr. 5.13 Ukážka povrchu a vrstevníc s aplikáciou minimalizácie C^2 nespojitosti.	42
Obr. 5.14 Odhad normál vo vrchole so zavedením lomovej línie.....	43
Obr. 5.15 Ukážka povrchu a vrstevníc s aplikáciou lomových línií.	44
Obr. 5.16 Efekt „hviezdic“ a ich vplyv na tvar vrstevníc.....	46
Obr. 5.17 Organizácia vrcholov mikro trojuholníkov podľa barycentrických súradníc.	47
Obr. 5.18 Uhol zvieraný normálami ako kritériu vyhladenia plátov.....	48
Obr. 5.19 Ukážka povrchu a vrstevníc s uhlovo závislou úrovňou vyhladenia.	49
Obr. 6.1 Pretínanie trojuholníka rovinami pri lineárnej interpolácii.....	52
Obr. 6.2 Proces generovania vrstevníc s využitím topológie.....	54
Obr. 7.1 Konečná (šedá) a nekonečná časť triangulačnej dátovej štruktúry.....	57
Obr. 7.2 Organizácia TDS v CGAL-e	58
Obr. 7.3 Postupnosť cirkulátora po trojuholníkoch (tr) a podmnožinách (s).....	67
Obr. 7.3 Organizácia generovania bodov na troch plátoch makro trojuholníka.....	77
Obr. 7.4 Vizualizácia vrstevníc - grafický výstup aplikácie.....	82
Obr. 8.1 Výrez vrstevníc generovaných interpolantom C^0	87
Obr. 8.2 Výrez vrstevníc generovaných interpolantom C^1 s pravidelným plátom.....	88
Obr. 8.3 Porovnanie interpolantu C^1 s pravidelným a nepravidelným plátom.....	89
Obr. 8.4 Výrez vrstevníc generovaných interpolantom C^1 s nepravidelným plátom.....	89
Obr. 8.5 Výrez vrstevníc generovaných interpolantom C^1 s nepravidelným plátom.....	90
Obr. 8.6 Výrez vrstevníc generovaných interpolantom C^1 s minim. C^2 nespojitosti.....	91
Obr. 8.7 Porovnanie výsledkov algoritmu s výstupmi z programu ArcGIS.....	92
Obr. 8.8 Ukážky tvarov reliéfu zo severného Slovenska generovaných algoritmom	93

ZOZNAM TABULIEK

Tab. 5.1 Barycentrické súradnice kontrolných bodov.....	26
Tab. 5.2 Identifikácia koplanárnych bodov napre zaručenie C^1 spojitosti.....	33
Tab. 5.3 Identifikácia štvoríc bodov ležiacich na spoločnej rovine v okolí hrán.....	35
Tab. 5.4 Identifikácia zvyšných kontr. bodov a určujúcich rovín.....	36
Tab. 7.1 Prehľad možných prípadov pri odhade dotykových rovín.....	66
Tab. 8.1 Koeficienty funkcie znázorňujúcej etalónovú plochu.....	83
Tab. 8.2 Konfigurácie testovaných variantov.....	86
Tab. 8.3 Numerické výsledky testov.....	86
Tab. 8.2 Priemerná odchýlka od C^2 spojitosti vzhľadom na iteráciu.....	90

ZOZNAM DIAGRAMOV

Diag. 6.1 Proces generovania vrstevníc s využitím topológie.....	55
Diag. 7.1 Štruktúra aplikácie na geomorfologickú interpoláciu vrstevníc nad TIN.....	60
Diag. 7.2 Definícia vstupných súborov a parametrov.....	61
Diag. 7.3 Primárna triangulácia povinných hrán a bodového poľa.....	64
Diag. 7.4 Odhad dotykových rovín vo vrcholoch TIN.....	67
Diag. 7.5 Spracovanie trojuholníka ako súčasť odhadu dotykových rovín.....	68
Diag. 7.6 Jednoduchý interpolant C^0	69
Diag. 7.7 Tvorba trojuholníkového plátu jednoduchým interpolantom C^0	70
Diag. 7.8 Clough-Tocher interpolant so spojitosťou C^1	72
Diag. 7.9 Výpočet vektora sklonu pre interpolant C^1	73
Diag. 7.10 Výpočet kontrolných bodov pre interpolant C^1	75
Diag. 7.11 Tvorba trojuholníkových plátov interpolantom C^1	76
Diag. 7.12 Minimalizácia odchýlky C^2 nespojitosti.....	79
Diag. 7.13 Nerovnomerná úroveň vyhladenia plátového modelu.....	80

KAPITOLA 1

Úvod

Niet pochýb, že tvar povrchu Zeme podmieňuje mnohé prírodné procesy, ako aj ľudské aktivity. Preto jeho znázorňovanie hrá v kartografii už od svojich počiatkov veľmi dôležitú úlohu. Využívali sa pritom rôzne techniky, od intuitívnych kresieb pohorí a údolí, cez šrafy až po vrstevnice. Tie sa stali neoddeliteľnou súčasťou topografických máp pri znázorňovaní výškopisu a boli vždy hrdými výtvormi veľmi precíznej práce kartografov. Pri ich správnom čítaní dávajú človeku výbornú predstavu o tvaroch zemského povrchu.

Aj s nástupom informačných technológií sa vrstevnice dodnes považujú za jeden z najvýstižnejších spôsobov, ako povrch na mape opísať. Jediné, čo sa pri tom mení je spôsob ich vytvárania. Od manuálnych interpolácií z bodových polí a náčrtkov kostry terénu a analógových máp sa postupne prešlo k digitalizácií a automatizovaným procesom. Tak isto aj zber dát prešiel od hoci postupne sa zlepšujúceho, ale stále časovo veľmi náročného terénneho zberu po metódy leteckej fotogrametrie, leteckého laserového skenovania a diaľkového prieskumu Zeme, čo vedie k zvyšovaniu kvality a najmä kvantity dát, pokrývajúc aj ťažko dostupné miesta.

Pri tvorbe vrstevníc je okrem kritéria polohovej presnosti kladený veľký dôraz aj na estetickosť. Prírodou vytvorený povrch je mimo skalných útvarov väčšinou hladký, čo by sa malo prejavovať aj na hladkosti vrstevníc. Na druhej strane, najmä formy ovplyvnené ľudskou aktivitou, ako sú oblasti ťažby nerastných surovín alebo cestná sieť, vytvárajú v teréne singularity, ktoré by sa mali vo vrstevniciach odraziť v ostrých zárezoch narušujúcich ich hladký priebeh.

Existuje rada metód na generovanie vrstevníc, založených ako na pravidelných, tak aj nepravidelných bodových poliach. Klasické metódy na báze lineárnej interpolácii nepravidelných trojuholníkových sietí však nedávajú uspokojujúce výsledky, tie je nutné ďalej spracovávať buď manuálne ale aplikáciou vyhladzovacích algoritmov, ktoré však spôsobujú radu ďalších problémov. Pretože väčšina primárnych bodových dát má nepravidelný charakter, tak metódy nad pravidelnými mriežkami, hoci s vysokým rozlíšením, závisia od medzikroku, ktorým je tvorba mriežky.

V digitálnej kartografii sú stále pomerne málo zaužívané metódy generovania vrstevníc geomorfologickou interpoláciou, ktorá je založená na plátových modeloch. Predkladaná práca prezentuje práve vlastné riešenie na báze trojuholníkových plátov.

KAPITOLA 2

Ciele práce

V zmysle zadania je hlavným cieľom práce je navrhnuť, implementovať a v neposlednom rade otestovať aplikáciu na automatizované generovanie hladkých vrstevníc metódou nelineárnej, tzv. geomorfologickej interpolácie nad nepravidelnou trojuholníkovou sieťou (TIN) s využitím plátovej techniky.

V prvom rade práca ponúka literárny prehľad existujúcich prác, tak ako v oblasti generovania trojuholníkových sietí za účelom reprezentácie georeliéfu spolu s tvorbou vrstevníc, tak v oblasti plátových modelov, predovšetkým trojuholníkových. V krátkosti charakterizuje georeliéf a možnosti jeho znázornenia vo forme digitálnych terénnych modelov, najmä však technikou vrstevníc.

Nosnou časťou práce je teoreticko-matematický popis techniky plátovania v podobe Bézierových trojuholníkových kubických plátov s využitím kontrolných bodov a barycentrických súradníc, veľká pozornosť je pritom venovaná spojitostiam na úrovniach C^0 až C^2 . Podľa nich práva opisuje definuje dva základné typy interpolantov na úrovniach C^0 a C^1 s možnosťou dosiahnutia pseudo C^2 napojenia ako aj narúšania spojitosti za účelom zachytenia singularít v podobe lomených hrán.

Pretože plát je vo svojej najhladšej forme množinou nekonečného počtu bodov, na aproximáciu georeliéfu a pre generovanie vrstevníc je dôležité určiť „správnu“ mieru vyhladenia. Vyhladzovaním vzniká nad pôvodnou TIN de facto nová TIN zložená z bodov interpolovaných na pláte. Ako kritérium miery vyhladenia je preto navrhnutý uhol, ktorý majú zvierajú normály nových susedných trojuholníkov a to predovšetkým na miestach pôvodných hrán. Týmto spôsobom sa viac vyhladia tie pláty, ktoré boli definované nad dvojicami trojuholníkov s najväčšími odchýlkami normál. Tento uhol možno chápať ako faktor alebo kritérium geomorfologicity.

Geomorfologická interpolácia je teda v konečnom dôsledku chápaná a popísaná ako klasická lineárna interpolácia takej TIN, ktorá vznikla pridávaním bodov interpolovaných z plátov do tej pôvodnej.

Práca využíva nepravidelné trojuholníkové siete, ich tvorba je však len akýmsi podkladom pre neskoršie definovanie trojuholníkových plátov, pri implementácii algoritmu bol prebraný existujúci algoritmus z knižnice CGAL. Z tohto dôvodu je triangulácia popísaná len v nevyhnutnej forme v praktickej časti, ktorá popisuje spôsob implementácie teoreticko-matematickej časti v podobe užívateľskej aplikácie, rieši konkrétnu podobu algoritmov, z ktorých sa skladá. Aplikácia je písaná v programovacom jazyku C++.

Záverečná časť ponúka prehľad výsledkov na syntetických a reálnych dátach, ich vizuálne a pri syntetických aj numerické hodnotenie presnosti.

KAPITOLA 3

Prehľad literatúry

Táto kapitola ponúka prehľad publikovanej literatúry z oblastí, do ktorých téma tejto práce zasahuje. Vybrané boli dve kľúčové oblasti. Prvou je tvorba nepravidelných trojuholníkových sietí z rozptýlených bodových dát, ktoré vytvárajú vstupnú sieť do interpolačného algoritmu. Dôraz sa pritom kladie najmä na práce v oblasti digitálnej kartografie, teda na triangulácie za účelom tvorby DTM a generovania vrstevníc. Hoci táto oblasť nie je technicky priamo riešená autorom (algoritmus je prebratý z knižnice algoritmov CGAL), je pre interpoláciu jednou z kľúčových, keďže konfigurácia trojuholníkovej siete ovplyvňuje kvalitu interpolovaných vrstevníc.

Druhá oblasť je nosnou časťou tejto práce, predstavuje plátové modely, ktoré možno definovať nad trojuholníkovými sieťami. Plátové modely ako aproximačné plochy vychádzajú z aproximačných kriviek a využívajú sa najmä v oblasti počítačovej grafiky, je však možné pomocou nich aproximovať aj DTM s využitím rovnakých algoritmov. Pláty sa v praxi využívali najmä so štvoruholníkovými pôdorysmi, pláty nad trojuholníkmi však taktiež predstavujú dôležitú oblasť a na ne je zameraná táto rešerš.

3.1 Nepravidelné trojuholníkové siete a extrakcia vrstevníc

Tvorba triangulácií, čiže trojuholníkových teselácií, je problémom spadajúcim do oblasti výpočtovej geometrie. V kontexte digitálnej kartografie sa oblasti venuje monografia [Bayer, 2008]. Práca popisuje viaceré druhy triangulácií z hľadiska posudzovania vlastností a hodnotenia kvality na základe globálnych a lokálnych kritérií. Podrobnejšie popisuje Greedy a Delaunay-ho triangulácie s konštrukčnými postupmi spolu so zavádzaním povinných hrán. Iná kapitola ďalej rieši generovanie vrstevníc najmä lineárnou interpoláciou TIN.

Jedným z kľúčových autorov publikácii v oblasti generovania vrstevníc z DTM vo forme TIN je Marc van Kreveld. Jeho práce [van Kreveld 1994, 1996, 1997] podrobne riešia problematiku tvorby TIN metódou Delaunay-ho triangulácie a extrakciu vrstevníc. Ide o štandardnú geometrickú trianguláciu v 2D bez využitia atribútu nadmorskej výšky. Práce popisujú okrem algoritmov aj typy dátových štruktúr.

K ďalším typom triangulácií patria tzv. dátovo závislé triangulácie (Data dependent triangulations). Jedná sa tiež o 2D triangulácie, v ktorých kritériom výsledného tvaru je okrem polohy bodov aj atribút nadmorskej výšky. Tento typ triangulácií je zväčša založený na prvotnej polohovo závislej triangulácii a následnej optimalizácii podľa vybraných kritérií. Práca [Alboul, Kloosterman, Traas, van Damme, 2000] spomína tzv. tesné triangulácie (Tight triangulation) s využitím kritéria Gausovej

alebo priemernej krivosti vo vrcholoch triangulácie. Iným popísaným kritériom je minimálny povrch, práca sa však nešpecializuje na geografické dáta.

Možné riešenie pre geografické dáta ponúka práca [Feciskanin, 2007], ktorá popisuje optimalizáciu TIN na základe lokálnych kritérií pre dvojice susedných trojuholníkov. Jedná sa o Lawsonovu lokálnu optimalizáciu, ktorá spočíva vo vymieňaní diagonál dočasných štvoruholníkov. Týmito kritériami môže byť uhol medzi normálami susedných trojuholníkov, rozdiel ich priemetov a i. Zároveň však poukazuje na nedostatky pri zachytávaní terénnej kostry a preto ponúka kritérium správnej konfigurácie trojuholníka. Ide o minimalizáciu odchýlky normály trojuholníka v jeho ťažisku od odhadovanej normály reliéfu v tom istom bode na základe hodnôt parciálnych derivácií.

Za iný typ optimalizácie TIN možno považovať prístup popísaný v [Kolingerová, Dolák, Strych, 2009]. Táto metóda popisuje spätnú optimalizáciu Delaunay-ho alebo Greedy TIN z detekcie neprirodzených tvarov vrstevníc. Zameriava sa najmä na ploché, vodorovné trojuholníky, ktoré vrstevnice nepretínajú, čím vznikajú neprirodzené rovne na svahoch, najmä na chrbátniciach. V týchto plochých oblastiach tak dôjde k automatickej zmene konfigurácie hrán. Práca ponúka jednoduché riešenie založené na zámene hrán v smere spádu alebo s využitím stredovej osi. Hladkosť vrstevníc následne dosahuje s využitím splinovej funkcie na vyhladenie línií.

Dôležitou a komplexnou monografiou v oblasti DTM so zameraním na TIN je [Krho 2001]. Zameraná je na polohovú a numerickú presnosť geomorfometrických veličín, obzvlášť druhých parciálnych derivácií a krivostí. Rieši problematiku lokalizácie reprezentatívneho diskrétného bodového poľa pre tvorbu trojuholníkovej siete. Ako jedno zo základných kritérií uvádza dupinovú indikatrix charakterizujúcu zakrivenie reliéfu, aby toto pole čo najvernejšie vystihovalo jeho vlastnosti.

3.2 Plátové modely

Staršiemu vývoju aproximačných kriviek a povrchov využívaných v CAGD sa venuje komplexná publikácia [Böhm, Farin, Kahmann, 1984], [Farin, Hoschek Kim, 2002] a okrajovo aj [Drs, 1984].

3.2.1 Vývoj plátových modelov

História plátových modelov siaha na začiatok 60tych rokov do automobilového priemyslu (konkrétne ide o navrhovanie tvarov karosérií), kedy boli matematické aproximácie založené na Bernsteinových polynómoch prvýkrát popísané v publikácii *Surfaces à pôles* od francúzskeho fyzika a matematika Paul de Casteljaou pôsobiacom v automobilovom závode Citroën. Plátom pochopiteľne predchádzala definícia kriviek (*Courbes à pôles* z roku 1959).

Nezávisle na ňom boli krivky a povrchy definované aj ďalším francúzskym automobilovým inžinierom Pierre Bézier-om, ktorý pôsobil v konkurenčnom závode Renault. Práve on túto oblasť rozšíril a popularizoval, preto po ňom krivky a povrchy nesú jeho meno.

V 60tych rokoch prichádza aj prvá zmienka o tzv. spline-och od J. Fergusona z leteckého priemyslu z firmy Boeingu, americký matematik Coons definoval plochy z ľubovoľných okrajových kriviek, ktoré poňom nesú meno Coons-ove pláty. Dochádza aj k vylepšeniu spline-ov na Basis Spline-y (tzv. B-spline-y) od C. de Boor-a (General Motors), ktoré sú aj zovšeobecnením Bézierových kriviek a povrchov. Iným inžinierom pre British Aircraft corporation bol maďarský matematik M. Sabin zaoberajúci sa najmä spojitostami plátov. Koncom 60tych rokov prichádza NURBS (Nonuniform rational B-spline) ako zovšeobecnenie B-Spline-ov.

3.2.2 Trojuholníkové plátové modely

Najväčší rozmach povrchov začína práve s rozmachom počítačov a odboru CAGD v 70tych rokoch. Pri konštrukcii vozidiel, lietadiel a lodí sa využívali najmä štvoruholníkové pláty, aj keď definované boli aj trojuholníkové. Tie boli sprvu rozvíjané s metódami hľadania konečných elementov a v súvislosti s trianguláciami. Od konca 70tych rokov sa trojuholníkovým plátom ako interpolačným plochám venuje hlavne Gerald Farin, z ktorého viacerých publikácií čerpá táto práca.

Jednou z prvých detailne rozpracovaných prác definujúcich kubické trojuholníkové pláty s globálnou spojitosťou C^0 a podmienkami pre lokálnu C^1 spojitosť je [Farin, 1982], kde je popísaná podmienka spojitosti založená na koplantarite kontrolných trojuholníkov na spoločnej hrane. Podobne zameraná je aj práca [Sablonnière, 1982], ktorá sa zameriava na kvadratický plát a Lagrange-ovu interpoláciu. V ďalšej práci [Farin, 1985] je algoritmus vylepšený zavedením metódy Clough-Tocher delenia trojuholníkov, ktorá spočíva v delení každého trojuholníka triangulácie 3 menšie a v zavedení dodatočných kontrolných bodov, pre ktoré je možné podmienky C^1 spojitosti splniť globálne po celej sieti. Okrem toho popisuje podmienky C^2 spojitosti a ponúka možnosť lokálnej minimalizácie C^2 nespojitosti zavádzaním obmedzenej minimalizácie s využitím Lagrange-ových multiplikátorov. Metódu Clough-Tocher je možné použiť aj pri tvorbe spojitých štvoruholníkových plátov prvotným rozdelením na trojuholníky [Farin, 1986] alebo ju je možné generalizovať pre n -simplexy [Worsey, Farin, 1987].

Ďalšia práca [Worsey, Farin, 1990] prináša robustnú exaktnú metódu na generovanie izolínií nad kvadratickým trojuholníkovým plátom, [Zheng, Wang, Liang, 1992] predkladá definíciu spojitosti štvoruholníkových aj trojuholníkových plátov pri zachovávaní krivosti. S alternatívou k metóde Clough-Tocher nad trojuholníkom prichádza [Lai, 1996a] s C^1 spojitosťou kubických plátov nad nepravidelnou štvoruholníkovou teseláciou. [Kashyap, 1996] popisuje možnosť globálnej minimalizácie C^2 nespojitosti nad kubickým trojuholníkovým plátom a neskôr ten istý

autor v [Kashyap, 1998] popisuje predpoklady spojitosti vyšších rádo (C² až C⁴). Zovšeobecnenie a zlepšenie Coons-ových plátov pre lineárne systémy definovanými tromi alebo štyrmi hraničnými krivkami s využitím bilineárneho spojenia zavádza [Farin, Hansford, 1999]. Jednoduchšiu parametrizáciu kvadratických sférických trojuholníkových plátov prostredníctvom tetív na guľi prináša [Bastl, Jüttler, Lávička, Schicho, Šír, 2011].

Možnosť dosiahnutia C² spojitosti je popísaná v práci [Alfeld, 1984], kde sa zavádza dvojité delenie trojuholníkov metódou Clough-Tocher a Bézierov plát piateho stupňa (quintic patche). Jeden trojuholník sa tak delí na 9 menších. Nad rovnakým plátom predkladá [Liu, Fan, 2009] možnosť využitia Lagrangeovej interpolácie. Toto delenie bolo v [Wang, 1992] zjednodušené na 7 trojuholníkov pri zachovaní globálnej C² spojitosti. Ďalšia redukcia delených trojuholníkov na 6 so zachovaním C² spojitosti je popísaná v [Lai, 1996b], kde sa využíva delenie Powell-Sabin. Iný postup k dosiahnutiu C² spojitosti popisuje [Chang, Said, 1997], kedy sa nad každým trojuholníkom definujú 3 sústavy 27 kontrolných bodov, každá pre inú hranu, ktoré sa následne zjednotia konvexnou kombináciou do jednej 27 bodovej. Metóda je od predošlých rýchlejšia, ale vyžaduje odhad aj druhých parciálnych derivácií vo vrcholoch.

Uplatnenie C⁰ Bézierových kubických trojuholníkových plátov s využitím interpolovaných normál v bodoch plátu (Point normal – PN) rieši [Vlachos, Peters, Boyd, Mitchell, 2001] na úrovni grafických procesorov a túto možnosť rozširuje [Funfzig, Muller, Hansford, Farin, 2008] na spojitost' C¹.

Plátovým modelom sa venujú aj mnohé monografie a skriptá rámci problematiky grafického dizajnu. Azda najkomplexnejšou monografiou je [Farin, 2002], ktorá zhŕňa poznatky a aproximačných a interpolačných krivkách a povrchoch ako B-Spline-och a Bézierových aj Coonsových plátoch, veľký dôraz pritom kladie práve na trojuholníkové pláty a spojitost' modelov. Monografia s podobným, avšak širším záberom je [Farin, Hoschek, Kim, 2002]. Problematike sa venuje aj skriptum [Sederberg, 2011], ktorá navyše rieši aj vzájomné polohy kriviek a povrchov alebo T-spline-y.

Trojuholníkovým plátovým modelom rámci GIS sa venuje niekoľko záverečných prác. Dizertačná práca [Mönchaltorf, 2004] rieši modelovanie reliéfu vo forme Coons-ových a Bézierových plátov s lomovými hranami, pri Bézierových plátoch s využitím Clough-Tocher delenia trojuholníkov.

Za účelom generovania vrstevníc pomocou TIN vznikla diplomová práca [Čermák, 2002], ktorá porovnáva viacero prístupov. Opisuje metódy lineárnej interpolácie s využitím vyhladzovacích algoritmov a algoritmus nelineárnej interpolácie s využitím Zienkiewiczovej kubiky. Príbuzná diplomová práca [Bezděk, 2009] je zameraná na tvorbu TIN a extrakciu vrstevníc z Bézierových trojuholníkových plátov spolu so zavádzaním lomových hrán.

KAPITOLA 4

Georeliéf a jeho digitálny model

Túto kapitolu možno chápať ako úvod do problematiky reprezentácie georeliéfu vo forme digitálnych terénnych modelov (DTM). Jej prvá časť stručne charakterizuje georeliéf ako množinu morfológických veličín pomocou odbornej literatúry, druhá časť porovnáva základné typy DTM a záverečná časť sa zaoberá znázorňovaním georeliéfu vo forme vrstevníc, ktorých tvorba z TIN je hlavným cieľom práce.

4.1 Georeliéf ako množina morfometrických veličín

Podľa Krcho, 1990, 2001, je georeliéf z geografického hľadiska chápaný ako súčasť krajinej sféry, ktorá tvorí celoplanetárny priestorovo organizovaný systém. Z hľadiska teórie systémov sa o ňom uvažuje ako o zvláštnom priestorovom subsysteme $S_{RF}(P,T)$ systému geografickej sféry $S_G(P,T)$, kde P predstavuje polohu vo vymedzenom reálnom priestore v čase T . Z tohto uhla pohľadu ho možno definovať na určitej rozlišovacej úrovni ako pevné, ale dynamické rozhranie medzi litosférou, resp. pedosférou na jednej strane a atmosférou, hydrosférou, biosférou, resp. antroposférou na strane druhej. Z geomorfologického hľadiska je jeho tvar výsledkom pôsobenia endogénnych a exogénnych síl v každom časovom okamihu, zároveň však spätne na tieto procesy aj pôsobí. Preto je georeliéf jednou z najdôležitejších súčastí krajinej sféry, podmieňuje v nej totiž prírodné procesy ako aj ľudské aktivity. V istom časovom úseku ΔT_i môžeme georeliéf považovať za nemennú, statickú priestorovú plochu $S_{RF}(P)$.

Po zavedení karteziánskeho súradnicového systému $\langle 0, x, y, z \rangle$ môžeme nad touto oblasťou georeliéf opísať ako funkciu dvoch nezávislých premenných:

$$z = f(x, y) \quad . \quad [4.1]$$

Touto funkciou možno vyjadriť topografickú plochu georeliéfu E_{RF} , ktorá je tvorená množinou bodov A s indexom i z indexovej množiny I predstavujúcej plochu P :

$$E_{RF} = \{A_i(x_i, y_i, z_i)\} ; i \in I \quad . \quad [4.2]$$

Pretože konkrétny analytický tvar funkcie nie je v skutočnosti známy, nahrádza sa interpolačnou funkciou, pomocou ktorej možno vypočítať podrobný priebeh nadmorských výšok. Pre interpoláciu je potrebné mať vstupné diskkrétne bodového pole nadmorských výšok ${}_D E_{RF}$ s N_i bodmi:

$${}_D E_{RF} = \{B_i(x_i, y_i, z_i)\}; 1 < i < N_I; i \in \mathbf{N} \quad . \quad [4.3]$$

Subsystém $S_{RF}(P)$ možno z hľadiska morfolometrie vyjadriť ako množinu G_{RF} , ktorej prvky sú morfolometrickými veličinami georeliéfu:

$$G_{RF} = \{\Delta z, \gamma_N, A_N, \omega, K_r, \dots\} \quad , \quad [4.4]$$

kde Δz predstavuje relatívnu výšku georeliéfu v smere spádových kriviek, γ_N veľkosť sklonu georeliéfu v smere spádových kriviek, A_N orientáciu georeliéfu voči svetovým stranám, ω normálovú krivosť georeliéfu v smere spádových kriviek a K_r horizontálnu krivosť georeliéfu v smere vrstevníc.

4.2 Digitálne terénne modely

Podľa Urban, 1991 a Bayer, 2008 je možné DTM rozdeliť do troch kategórií podľa typov elementárnych plôch, ktorými je reprezentovaný

1. Rastrové modely: Ide o pravidelnú mriežku (grid), najčastejšie štvorcovými bunkami so spoločnými hranami na obdĺžnikovom území. Polohovo lokalizovaná je zvyčajne jedna bunka, od nej sa poloha ostatných odvádza implicitne podľa definovaného rozlíšenia. Hodnotou bunky je nadmorská výška a táto je priradená stredu bunky pre možnosť vytvárania pravidelných štvorcových rovinných plôch. Vďaka pravidelnému usporiadaniu umožňuje raster jednoducho a rýchlo vykonávať priestorové analýzy a iné operácie. Pravidelnosť však častokrát spôsobuje prebytok alebo naopak nedostatok bodov pre reprezentáciu georeliéfu a nezachytáva singularity. Ďalšou nevýhodou je pamäťová náročnosť pri veľkom rozlíšení. Rastrové modely vznikajú buď priamo zo snímok z diaľkového prieskumu Zeme alebo nepriamo z nepravidelne rozmiestnených bodov s využitím interpolačných metód (Kriging, Spline a i.).
2. Polyédrické modely: Patria medzi vektorové modely, jedná sa o trojuholníkové teselácie tvoriace polyéder, ktorý sa primyká georeliéfu. Nepravidelná trojuholníková sieť (TIN) je definovaná vstupnými trojrozmernými bodmi a pravidlami na jej zostrojenie – triangulačným algoritmom. Pravidlá je možné doplniť o povinné hrany, ktoré v konečnom dôsledku ovplyvnia tvar triangulácie. Vstupné body sú rozmiestnené nerovnomerne, väčšia hustota býva spravidla na členitých a zakrivených formách. Trojuholníky predstavujú roviny, ktoré na seba ostro nadväzujú, lepšie však vystihujú priebeh povrchu pri menšom pamäťovom zaťažení. Tento model však nie je vhodný pri priestorových analýzach, vtedy sa zvykne interpolačnými metódami prevádzať na rastrový model.

3. Plátové modely: Tieto modely sa od predošlých odlišujú tým, že štvorcové alebo trojuholníkové rovinné plochy s ostrými prechodmi sú nahradené hladkými plátmi, ktoré sú na hranách siete hladko prepojené. Pôsobia tak prirodzeným dojmom a pri vhodnej konfigurácii dokážu najdôverihodnejšie aproximovať terén. Zároveň je možné v prípade terénnych zlomov túto spojitosť narušiť. Vznikajú metódou plátovania, ktoré definujú nad jednotlivými rovinnými plochami plát ako polynóm istého stupňa. Najčastejšie sa využívajú tzv. Bézierove alebo Coonsove pláty.

Cieľom práce je vytvoriť aplikáciu na generovanie vrstevníc s využitím trojuholníkového plátového modelu, ktorého nevyhnutnou súčasťou je aj tvorba TIN. Pretože sa jedná o pomerne rozsiahlu problematiku technického charakteru a triangulačný algoritmus je v zmysle zadania prebraný z knižnice algoritmov CGAL, nie je mu venovaná teoretická časť, triangulácia je v menšom rozsahu popísaná v implementačnej časti.

4.3 Znázornenie georeliéfu pomocou vrstevníc

Vrstevnice sú obecné čiary spájajúce na topografickej ploche body rovnakej nadmorskej výšky. Sú to obrazy prieniku tejto plochy so sústavou hladinových (vodorovných) plôch, vedených v určitých intervaloch. Na topografických mapách sa objavujú od druhej polovice 19. storočia, kedy rýchlo vytlačili šrafy. Vrstevnice dávajú v kombinácii s kótami najpresnejší spôsob zachytenia reliéfu v mape. Slúžia ako podklad pre radu ďalších metód kartografickej interpretácie reliéfu (tieňovanie, farebná hypsometria, a i.). Mapu zo všetkých spôsobov najmenej graficky zaťažujú. Tvoria geometrický základ pre projekčné práce s mapou (napr. tvorba profilov). Vrstevnice nad zvolenou základnou nulovou plochou sa nazývajú izohypsy, pod touto plochou sa označujú ako izobaty (hlbnice). V mape bývajú vrstevnice znázornené hnedou farbou, hlbnice spolu s vrstevnicami na snehu a lade modrou.

Rozostupy medzi vrstevnicami sa nazýva základný interval (i). V rámci topografických máp rovnakej mierky býva konštantný. Pri jeho voľbe je nutné rešpektovať sklonové pomery reliéfu. Z nich vyplýva krajná hranica zobraziteľnej vzdialenosti dvoch susedných vrstevníc, daná hodnotou cca. 0,3 mm. Úlohu najvhodnejšieho intervalu možno riešiť viacerými spôsobmi. Jednou z možností je Imhofov empirický vzorec:

$$i = n \log(n) \tan(\alpha_{max}) \quad , \quad [4.5]$$

kde α_{max} je najväčší uhol sklonu v danom krajinnom type (napr. v rovine, vrchovine, hornatine a i.) a n je konštanta vzťahujúca sa na mierkové číslo M , určená výrazom :

$$n = 0.1 \sqrt{M} \quad , \quad [4.6]$$

Častokrát však býva volená jednoduchá varianta, napr.:

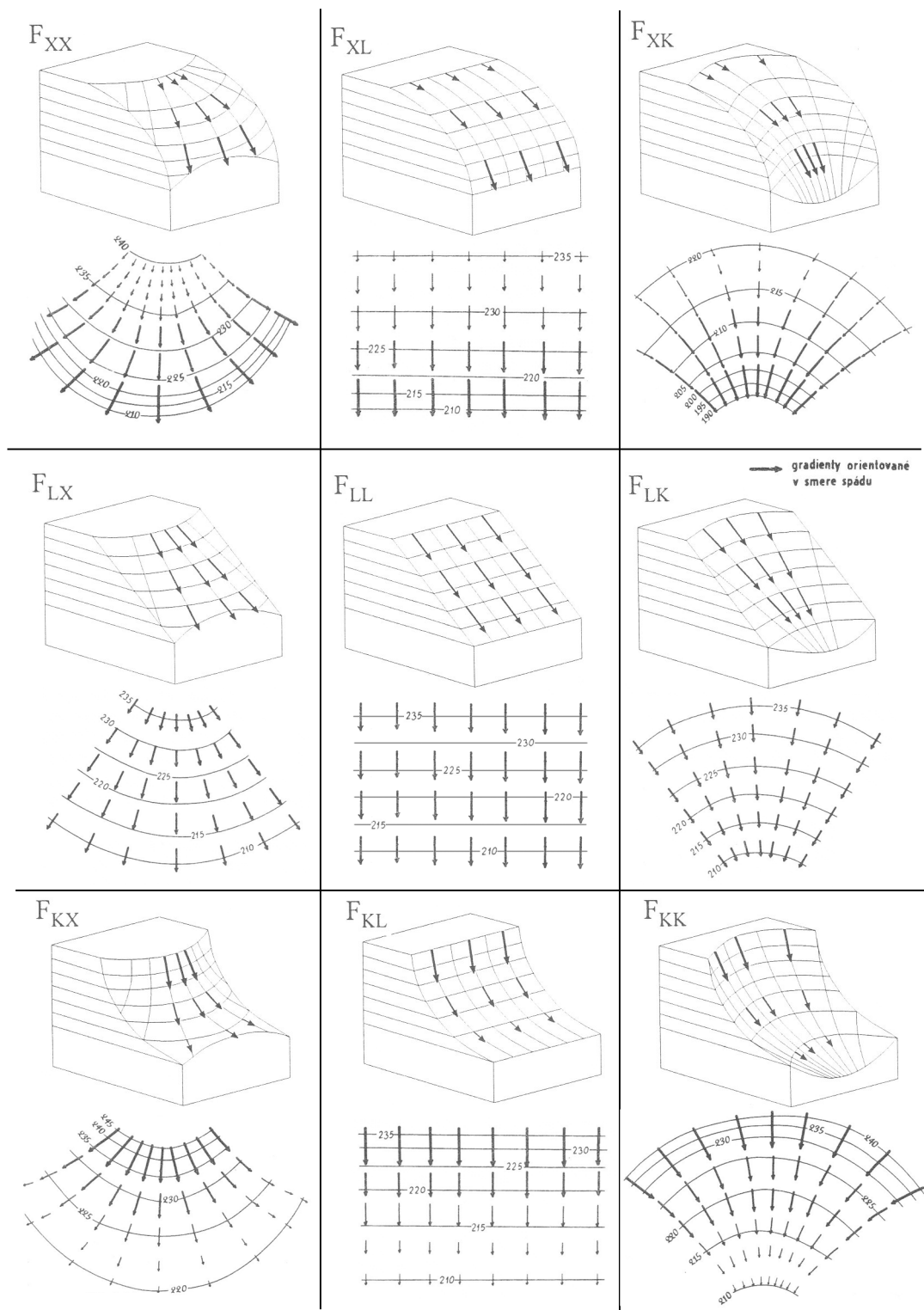
$$i = \frac{M}{5000} \quad , \quad [4.7]$$

Na zlepšenie čitateľnosti vrstevnicového obrazu sa zvyrazňuje a kótuje kresba každej piatej vrstevnice. Kóty sa orientujú v smere stúpania a po ploche mapy sa prehľadne rozptyľujú. Ak sa v teréne vyskytujú tvary, ktoré základný interval nezachytáva, zachytávajú sa pomocou doplnkových vrstevníc v polovičnom alebo inom vhodnom zlomku základného intervalu. V mape sa používajú len v nevyhnutných prípadoch. V plochom a nevýraznom teréne je možné použiť aj pomocné vrstevnice. Tie majú všeobecnú kótu a svojim priebehom naznačujú tvar priebehu terénnej plochy.

Vrstevnice je možné získať priamo fotogrametrickým vyhodnotením alebo nepriamo interpoláciou medzi body rozmiestnenými v pravidelných mriežkach alebo rozptýlene. Pri rozptýlených bodoch je možné vrstevnice interpolovať lineárne, ak má na danom mieste topografická plocha konštantný spád v rovnakom smere. Prevažujú však terénne plochy s meniacim sa smerom aj hodnotou spádu. Preto je nutné používať geomorfologickú interpoláciu s plynulo premennými rozstupmi vrstevníc v závislosti na smere spádu. Vrstevnice bývajú na mapách často dopĺňované kótovanými vrcholovými bodmi.

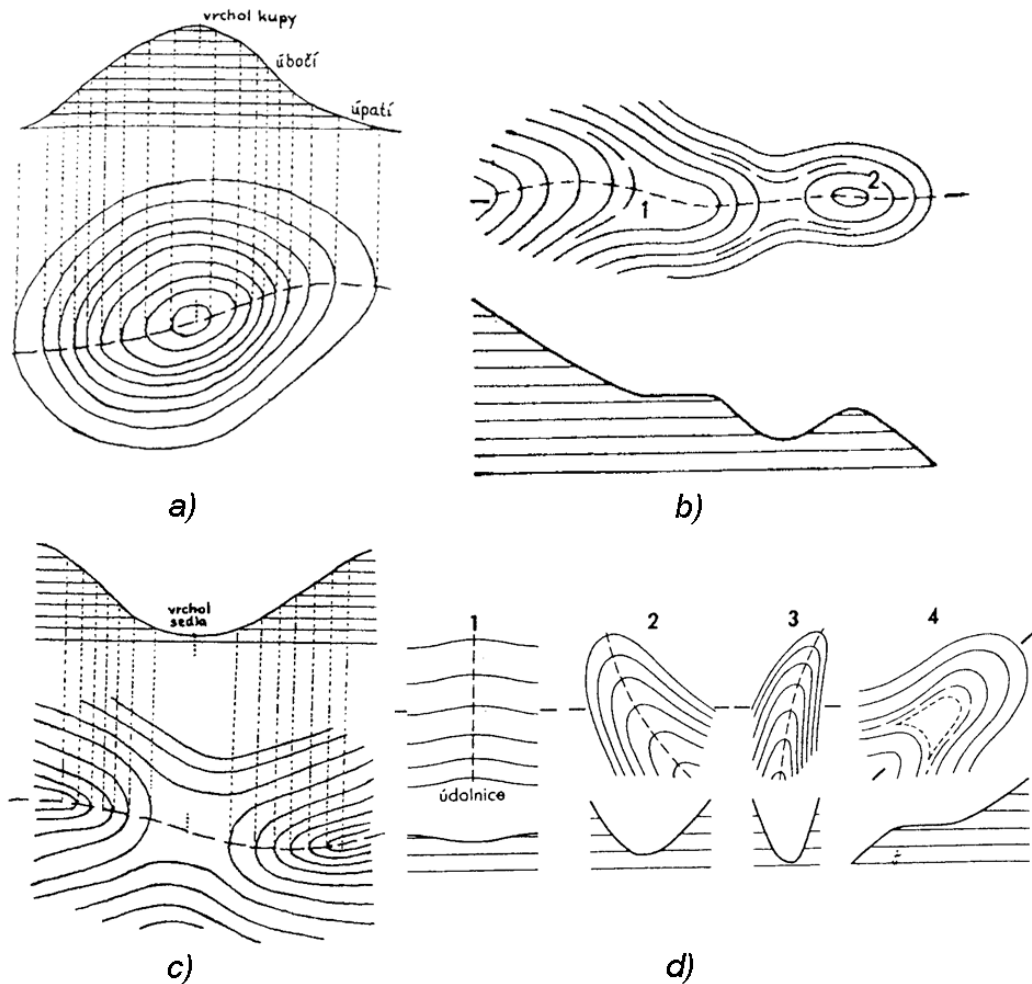
Vrstevnice, resp. ich tvar a usporiadanie najlepšie vystihujú tvary zemského povrchu. Umožňujú ľahko identifikovať terénnu kosť (chrátnice a údolnice), elementárne a komplexné formy reliéfu. Elementárnymi formami sa myslia základné geometrické tvary plochy, kombinácie konvexných (vypuklých, X), lineárnych (L) a konkávných (vydutých, K) tvarov kriviek v dvoch smeroch. Jedná sa o vertikálnu (normálovú) krivosť v smere spádových kriviek a horizontálnu krivosť v smere vrstevníc, uvádzané ako v [4.4] ako morfometrické veličiny georeliéfu. Spádové krivky sú pritom myslené čiary vždy kolmé na vrstevnice. Kombinácie týchto krivostí v uvedených dvoch smeroch dávajú dohromady deväť celkových elementárnych foriem georeliéfu (obr. 4.1):

1. F_{XX}: Konvexno-konvexné (vypuklo-vypuklé) – urýchľujú a rozptyľujú tok látok
2. F_{XL}: Konvexno-lineárne (vypuklo-lineárne) – urýchľujú tok látok
3. F_{XK}: Konvexno-konkávne (vypuklo-vydaté) – urýchľujú a sústreďujú tok látok
4. F_{LX}: Lineárno-konvexné (lineárno-vydaté) – rozptyľujú tok látok
5. F_{LL}: Lineárno-lineárne – bez dodatočného vplyvu na zmenu toku látok
6. F_{LK}: Lineárno-konkávne (lineárno-vydaté) – sústreďujú tok látok
7. F_{KX}: Konkávno-konvexné (vyduto-vypuklé) – spomaľujú a rozptyľujú tok látok
8. F_{KL}: Konkávno-lineárne (vyduto-lineárne) – spomaľujú tok látok
9. F_{KK}: konkávno-konkávne (vyduto-vydaté) – spomaľujú a sústreďujú tok látok



Obr. 4.1 Celkové elementárne formy reliéfu
vyjadrené vrstevnicami a gradientmi v smere spádu
Zdroj obr.: Krcho, 1990, 2001, upravené autorom

Tieto elementárne formy sú stavebnými jednotkami komplexnejších tvarov, ako napr. vrcholové tvary (kopy, chrbáty, plošiny, sedlá), vypuklé tvary na úbočiach (svahové chrbáty, rovne – spočinky), vyduté (ryhy, žľaby, zárezy), doliny a i (obr. 4.2). Zo vzdialeností medzi vrstevnicami je možné určiť sklon terénu.



Obr. 4.2 Príklady tvarov georeliéfu

a) vrchol – kopa, b) horský chrbát s rovňou (1) a svahovou kopou (2), c) sedlo d) žľaby

Zdroj obr.: Hojovec, et al., 1987

KAPITOLA 5

Bézierov trojuholníkový plát

V tejto kapitole je podrobne popísané matematické pozadie problematiky týkajúcej sa Bézierových trojuholníkových plátov. Jej prvá podkapitola rieši pláty samostatne, definované ako bivariantný kubický Bernsteinov polynóm spolu s problematikou barycentrických súradníc, približuje dôležité vlastnosti plátov spolu s krátkym úvodom k spojitostiam plátového modelu.

Ďalšie podkapitoly riešia samostatné úrovne spojitosti Bézierových plátov nad TIN na úrovniach C^0 až C^2 . Druhá podkapitola sa venuje základnej spojitosti C^0 , ktorá zodpovedá spojitosti bez generovania prázdnych miest, v úvode popisuje základné podmienky a definuje interpolant, ktorý ju zaručuje.

Tretia podkapitola je venovaná spojitosti na úrovni C^1 , ktorá zachováva prvú deriváciu, definuje jej podmienky. Popisuje princíp metódy Clough-Tocher delenia trojuholníkov, ktorá túto spojitosť zachováva a detailný postup konštrukcie interpolantu s viacerými variantmi, ktorý si na tejto metóde zakladá.

Posledná, štvrtá podkapitola ide o krok ďalej, definuje podmienky C^2 spojitosti, ktorá zachováva na hranách druhú deriváciu. Túto spojitosť nie je možné v tomto postupe docieľiť, ale je možné sa k nej priblížiť využitím Lagrangeovej minimalizácie odchýlky.

Východiskovým zdrojom pre túto kapitolu je najmä Farin, 1985, ale taktiež Kashyap, 1996, Vlachos et al., 2001, Hugentobler von Mönchaltorf, 2004 a Funfzig et al., 2008.

5.1 Definícia Bézierovho trojuholníkového plátu

Obdobne ako georeliéf z kapitoly 4, možno Bézierov plát chápať ako funkciu dvoch premenných $f(x,y)$ v karteziánskom súradnicovom systéme $\langle 0, x, y, z \rangle$, avšak len vo vymedzenej oblasti ohraničenej hranami trojuholníka T :

$$z = f(x, y); \quad x, y \in T \quad . \quad [5.1]$$

Aby bolo možné jednoducho brať do úvahy uzatvorenú trojuholníkovú oblasť, je možné ju vyjadriť pomocou barycentrických súradníc:

$$z = f(x, y) \equiv f(u, v, w) \quad . \quad [5.2]$$

Prevod medzi karteziánskym a barycentrickým súradnicovým systémom je popísaný v časti 5.1.1. Nad barycentrickým súradnicovým systémom je možné definovať Bézierov trojuholníkový plát n -tého stupňa pomocou sady kontrolných bodov:

$$b^n(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} b_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(u, v, w) \quad [5.3]$$

kde $b^n(u, v, w)$ je bod n -tého rádu vyjadrený barycentrickými súradnicami (u, v, w) vzhľadom na príslušný trojuholník, $b_{i,j,k}$ je kontrolný bod s indexmi $i, j, k \in \mathbb{N}$, pričom platí $0 \leq i, j, k \leq n$; $i+j+k=n$ a $B_{i,j,k}^n(u, v, w)$ je bivariantný Bernsteinov polynóm:

$$B_{i,j,k}^n(u, v, w) = \binom{n}{i,j,k} u^i v^j w^k; \quad \binom{n}{i,j,k} = \frac{n!}{i!j!k!} \quad [5.4]$$

Kontrolné body sú po trojuholníku rozmiestnené rovnomerne. Každý vrchol predstavuje jeden kontrolný bod, $3(n+1)$ kontrolných bodov je na každej hrane. Vzdialenosť susedných bodov na hrane je možné vyjadriť nasledovne:

$$d_v = \frac{|h_v|}{n}; \quad 1 \leq v \leq 3; \quad v \in \mathbb{N} \quad [5.5]$$

kde v je index vrcholu trojuholníka, $|h_v|$ je dĺžka hrany oproti vrcholu s indexom v a d_v je hľadaná vzdialenosť dvoch susedných kontrolných bodov na hrane h_v . Ďalšie kontrolné body sa nachádzajú aj na priesečníkoch spojnic protiľahlých bodov, ich všeobecné rozmiestnenie a indexácia pre polynóm tretieho stupňa sú zobrazené na obr. 5.1. Celkový počet kontrolných bodov na trojuholník $|b_{i,j,k}|$ závisí od stupňa polynómu:

$$|b_{i,j,k}| = \sum_{x=1}^{n+1} x = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad [5.6]$$

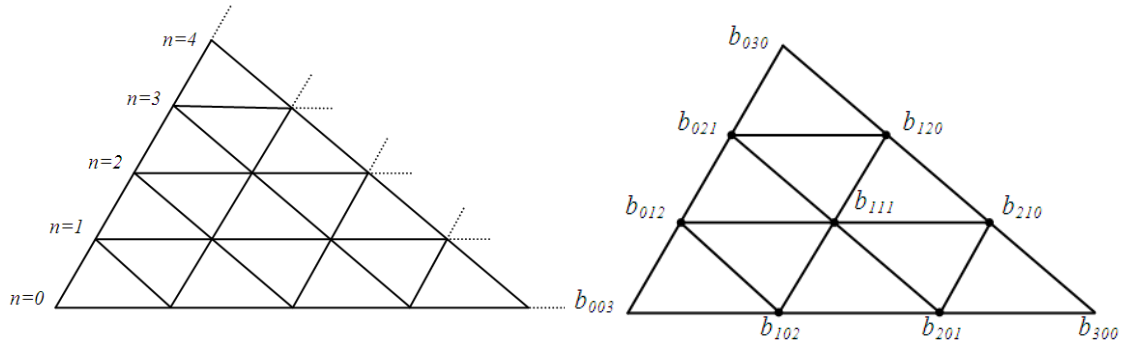
Zo vzťahu [5.6] vyplýva, že kubický plát ($n=3$) je definovaný 10 kontrolnými bodmi: 3 body vo vrcholoch, 6 bodov na hranách a 1 v ťažisku trojuholníka. Vzťah [5.3] s využitím [5.4] môžeme prepísať do tvaru:

$$b^3(u, v, w) = \sum_{i+j+k=3} \frac{3!}{i!j!k!} u^i v^j w^k b_{i,j,k} \quad [5.7]$$

z čoho po rozpísaní a zjednodušení dostaneme:

$$\begin{aligned} b^3(u, v, w) = & u^3 b_{300} + v^3 b_{030} + w^3 b_{003} + \\ & + 3u^2 v b_{210} + 3u v^2 b_{120} + 3v w^2 b_{012} + 3v^2 w b_{021} + \\ & + 3u^2 w b_{201} + 3u w^2 b_{102} + 6u v w b_{111} \end{aligned} \quad [5.8]$$

Pre identifikáciu kontrolných bodov a bodov nachádzajúcich sa na pláte, je ďalej nutné vysvetliť pojem barycentrické súradnice bodu vzhľadom na trojuholník.



Obr. 5.1 Rozmiestnenie a indexácia kontrolných bodov.

Rozmiestnenie kontrolných bodov v Bézierovom trojuholníku podľa stupňa polynómu (vľavo) a indexácia kontrolných bodov v kubickom Bézierovom trojuholníku (vpravo)

5.1.1 Barycentrický súradnicový systém

Barycentrický súradnicový systém je taký systém, v ktorom poloha ľubovoľného bodu je daná vrcholmi n -simplexu (v prípade 2-simplexu sa jedná o trojuholník). Poloha ľubovoľného bodu P vzhľadom na referenčný trojuholník T (obr. 5.2) môže byť jednoducho vyjadrená pomocou skalárnych barycentrických súradníc u, v, w :

$$P = uA + vB + wC ; u, v, w \in \mathbb{R} , \quad [5.9]$$

kde A, B, C sú vrcholy trojuholníka T vyjadrené v karteziánskych súradniciach v rovine xy . Súčet barycentrických súradníc určuje vzájomnú polohu P a T :

$$u + v + w \begin{cases} P \in T \vee P \notin T & < 1 \\ P \in T & = 1 \\ P \notin T & > 1 \end{cases} . \quad [5.10]$$

Pretože prvý prípad nedáva jednoznačné výsledky, v praxi sa nepoužíva.

Hodnotu barycentrických súradníc pre druhý a tretí prípad je možné vypočítať nasledovným spôsobom:

$$u = \frac{\text{sgn}(|P, \overline{BC}|) |P, \overline{BC}|}{\text{sgn}(|A, \overline{BC}|) |A, \overline{BC}|} , \quad v = \frac{\text{sgn}(|P, \overline{CA}|) |P, \overline{CA}|}{\text{sgn}(|B, \overline{CA}|) |B, \overline{CA}|} , \quad [5.11]$$

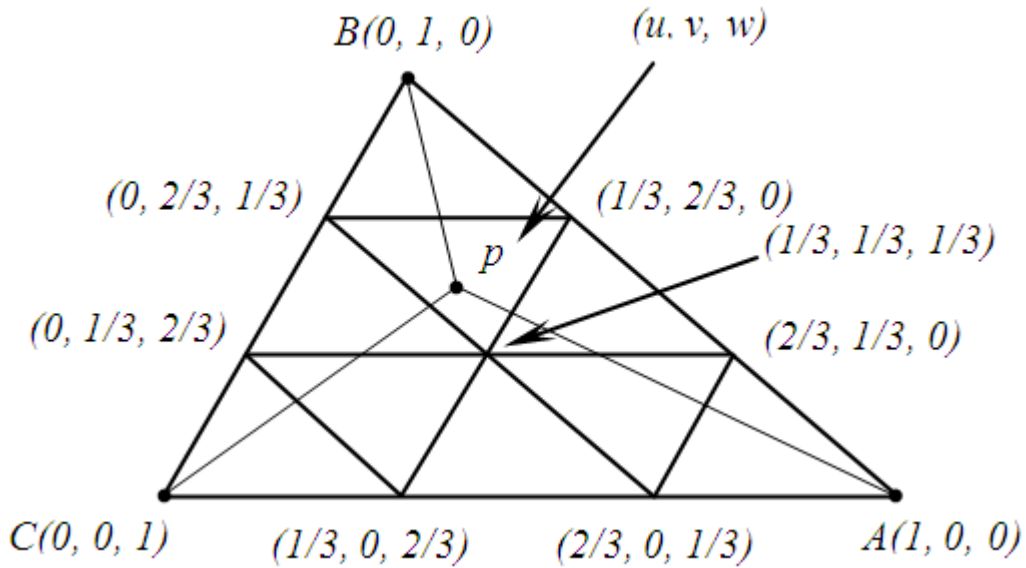
$$w = \frac{\text{sgn}(|P, \overline{AB}|) |P, \overline{AB}|}{\text{sgn}(|C, \overline{AB}|) |C, \overline{AB}|} ,$$

kde $\text{sgn}(|P, \overline{AB}|)$ predstavuje funkciu signum bodu P vzhľadom na priamku definovanej bodmi AB a $|P, \overline{AB}|$ predstavuje euklidovskú vzdialenosť od bodu P k priamke definovanej bodmi AB . Signum je možné určiť na základe vzájomnej polohy bodu a priamky pomocou tzv. half plane testu: vektorového súčinu udávajúceho orientáciu vektorov:

$$\operatorname{sgn}(|P, \overline{AB}|) = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sgn}(|P, \overline{AB}|) < 0 & P \text{ je vľavo od } \overline{AB} \\ \operatorname{sgn}(|P, \overline{AB}|) = 0 & P \in \overline{AB} \\ \operatorname{sgn}(|P, \overline{AB}|) > 0 & P \text{ je vpravo od } \overline{AB} \end{cases} \quad [5.12]$$

kde

$$A = [x_A, y_A]; \quad B = [x_B, y_B]; \quad P = [x_P, y_P] .$$



Obr. 5.2 Barycentrické súradnice kontrolných bodov
vzhľadom na referenčný trojuholník ABC

Podľa [5.9] až [5.11] uvedeného ďalej platí:

- ak je bod P totožný s niektorým z vrcholov trojuholníka, jeho príslušná barycentrická súradnica je rovná jednej, ostatné nule:

$$u=1 \wedge v, w=0 \Rightarrow P \equiv A \quad , \quad [5.13]$$

- ak bod P leží na niektorej hrane, súčet barycentrických súradníc bodov tvoriacich danú hranu je rovný jednej, tretia súradnica prislúchajúca bodu oproti hrane je rovná nule:

$$u+v=1 \wedge w=0 \Rightarrow P \in \overline{AB} \quad [5.14]$$

- bod P je totožný s ťažiskom trojuholníka G , pokiaľ sa všetky jeho tri barycentrické súradnice rovnajú jednej tretine, jedná sa teda o ich aritmetický priemer:

$$u, v, w=1/3 \Rightarrow P = \frac{A+B+C}{3} \Rightarrow P \equiv G \quad [5.15]$$

Pretože rozmiestnenie kontrolných bodov je rovnomerné, ich barycentrické súradnice je možné jednoducho určiť a podľa [5.9] prepočítať na karteziánske. Pri porovnávaní obr. 5.2 a obr. 5.1 a podľa tab 5.1 je zjavná analógia medzi indexmi kontrolných bodov a príslušnými barycentrickými súradnicami:

$$b_{ijk} = \frac{i}{3}A + \frac{j}{3}B + \frac{k}{3}C, \quad [5.16]$$

kde pre i, j, k platí to čo pre [5.3]. Treba však mať na pamäti, že týmto spôsobom získame len ich priestorové súradnice xy , súradnicu z je nutné dopočítať (viď kap. 5.2).

bod	u	v	w	bod	u	v	w
b_{300}	1	0	0	b_{012}	0	1/3	2/3
b_{210}	2/3	1/3	0	b_{003}	0	0	1
b_{120}	1/3	2/3	0	b_{102}	1/3	0	2/3
b_{030}	0	1	0	b_{201}	2/3	0	1/3
b_{021}	0	2/3	1/3	b_{111}	1/3	1/3	1/3

Tab. 5.1 Barycentrické súradnice kontrolných bodov

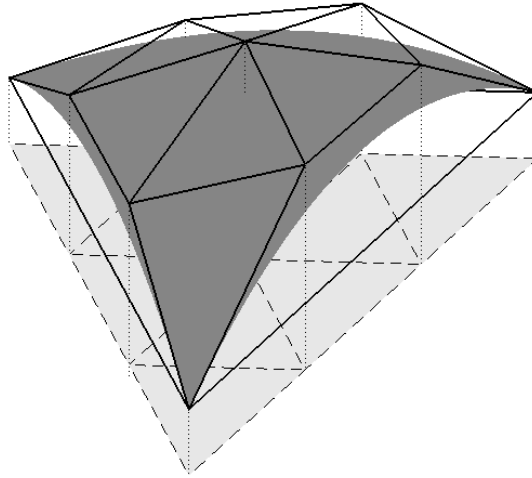
5.1.2 Vlastnosti Bézierových trojuholníkových plátov

Bézierove pláty možno charakterizovať radom vlastností, táto časť predstavuje len najdôležitejšie z nich:

1. hraničné krivky plátu n -tého (nad hranami trojuholníka) sú Bézierovými krivkami n -tého rádu, definovanými $n+1$ kontrolnými bodmi a tieto body prislúchajú príslušnej hrane. Rovnicu jednej takej krivky dostaneme dosadením vzťahu [5.14] do [5.8], čo dáva:

$$b^3(u, v, w) = u^3 b_{300} + 3u^2 v b_{210} + 3u v^2 b_{120} + v^3 b_{030}; \quad u + v = 1 \wedge w = 0 \quad [5.17]$$

2. pre každú túto krivku je možné určiť jej dotyčnicu, čiže deriváciu v počiatočnom a koncovom bode. Je ňou spojnica počiatočného (koncového) bodu, ktorý je kontrolným bodom a susedného kontrolného bodu definujúceho túto krivku.
3. celá plocha plátu sa nachádza v tzv. kontrolnom polyédri (obr 5.3), ktorý je tvorený obáľkou kontrolných bodov a jeho podstavou je pôvodný trojuholník



Obr. 5.3 Bézierov plát v kontrolnom polyédri s priemetom do roviny

5.1.3 Spojitosť kubických trojuholníkových plátov

Ďalej budeme v práci uvažovať už len o kubickom pláte. Vlastnosti povrchu ako celku, definovanom množinou plátov nad TIN, vychádzajú z definície kontrolných bodov pre všetky trojuholníky a z ich vzťahu medzi susednými trojuholníkmi. Okrem daných polohovo lokalizovaných bodov a normál trojuholníkov, ktorých štruktúra je výsledkom triangulačného algoritmu, je nutné ostatné parametre z týchto odvodiť, resp. lepšie povedané, odhadnúť. Preto najdôležitejším krokom je spôsob odvodu kontrolných bodov.

Základnou vlastnosťou plátových povrchov je ich spojitosť C^n na hranách, ktorej stupeň n hovorí o zachovávaní derivácie príslušného stupňa a pri DTM teda aj ďalších vlastností z nich odvodených. Problematika spojitosti je pri plátových modeloch DTM veľmi dôležitá a preto sú jej venované samostatné podkapitoly.

5.2 Spojitosť C^0

C^0 spojitosť znamená, že množina plátov je spojitá na základnej úrovni priestorovej premennej [5.1]. To je zaručené už samotnými vlastnosťami TIN:

- prienikom dvoch ľub. trojuholníkov z TIN τ , $T_i, T_j \in \tau$; $i \neq j$ je nanajvýš jedna hrana
- zjednotením všetkých trojuholníkov z τ v \mathbb{R}^2 súvislá množina

Z vlastností vyplýva, že každá hrana, pokiaľ sa nenachádza na konvexnej obálke modelu, prináleží práve dvom susedným trojuholníkom. Z [5.17] ďalej vyplýva, že pokiaľ sú na oboch susedných trojuholníkoch na spoločnej hrane identické kontrolné body, ich nadmorská výška sa interpoluje totožne zo strany oboch susedov.

5.2.1 Jednoduchý interpolant

Dôležitý je teda rovnaký postup pri určovaní kontrolných bodov na hranách:

- kontrolné body b_{300} , b_{030} , b_{003} sú identické s vrcholmi:

$$b_{300} \equiv A ; b_{030} \equiv B ; b_{003} \equiv C \quad [5.18]$$

- kontrolné body na hranách ležia v rovine definovanej ako dotyková rovina ρ v najbližšom vrchole. Podľa [5.16] vieme, že poznáme ich priestorové súradnice xy , no je nutné dopočítať ich z -ovú súradnicu podľa príslušnosti k danej rovine:

$$b_{210}, b_{201} \in \rho_{300} ; b_{120}, b_{021} \in \rho_{030} ; b_{012}, b_{102} \in \rho_{003} , \quad [5.19]$$

kde ρ_{300} , ρ_{030} , ρ_{003} sú dotykové roviny definované vo vrcholech b s totožným spodným indexom a kontrolné body sú identické s tými z obr. 5.1. Jedná sa o problematiku rovnobežného premietania z konštruktívnej geometrie, kde dotykové roviny ρ sú priemetňami, smer priemetu je daný osou z . Ak poznáme rovnice daných rovín a súradnice x_P a y_P ľubovlného bodu P , jeho súradnicu z_P je možné dopočítať podľa vzťahov platných pre roviny:

$$P: \quad z_P = \frac{-(a x_P + b y_P + d)}{c} , \quad [5.20]$$

kde a , b , c , d sú parametre všeobecnej rovnice roviny:

$$0 = a x + b y + c z + d . \quad [5.21]$$

Rovinu je možné definovať aj bodom Q , ktorý v nej leží a normálovým vektorom \vec{n} , ktorý je na ňu kolmý. Ak poznáme takýto bod a vektor, vieme parametre roviny dopočítať, pretože platí:

$$a = x_n ; b = y_n ; c = z_n ; \vec{n} = [x_n, y_n, z_n] . \quad [5.22]$$

Posledný parameter je možné dopočítať podľa Q a [5.21]:

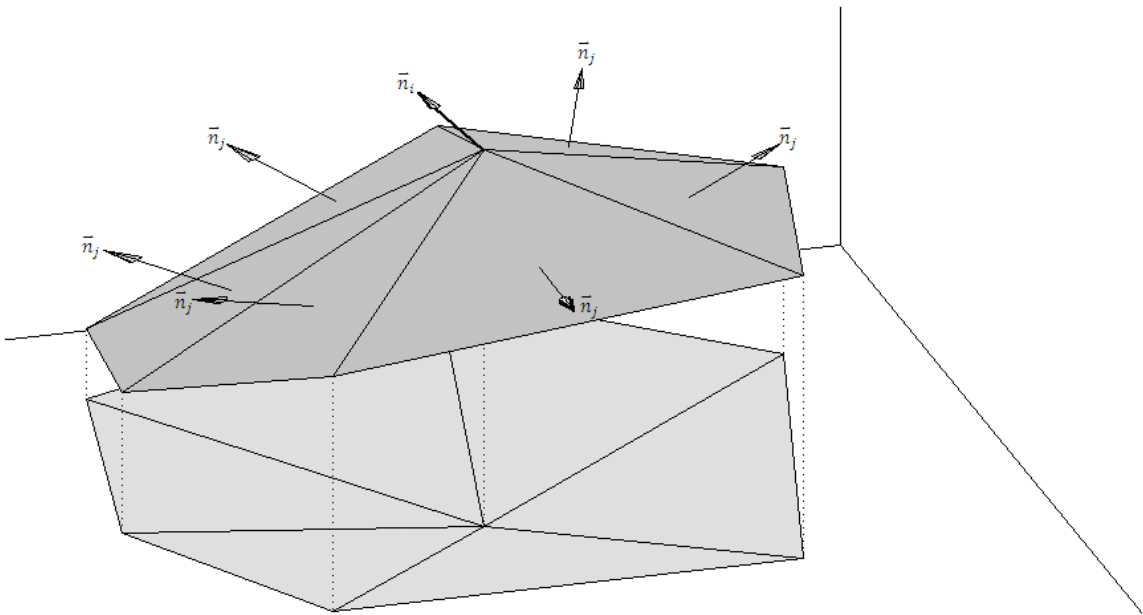
$$d = -(a x_Q + b y_Q + c z_Q) . \quad [5.23]$$

Takáto normála nie je vo všeobecnosti známa, je však možné ju odhadnúť. Najčastejšie sa určuje ako vážený priemer normál trojuholníkov, ktoré daný vrchol obklopujú. Pokiaľ sú dané normály jednotkové, ich priemerná normála je ich súčtom:

$$V_i: \quad \vec{n}_i = \sum_{j=1}^{N_{Ti}} w_j \vec{n}_j ; V_i \in \tau ; 1 \leq i \leq N_V ; 1 \leq j \leq N_{Ti} ; i, j \in \mathbf{N} , \quad [5.24]$$

kde \vec{n}_i je odhadovaná normála vo vrchole V_i z množiny vrcholov tvoriacich τ z celkového počtu vrcholov N_V , \vec{n}_j je jednotková normála trojuholníka incidentného k vrcholu V_i z celkového počtu incidentných trojuholníkov N_{Ti} , w_j predstavujú váhu. Takto

vypočítaná normála \vec{n}_i však nie je jednotková, treba ju normalizovať podľa neskoršieho vzťahu [5.26]. Situácia je znázornená na obr. 5.4.



Obr. 5.4 Odhad normály vo vrchole z normál príľahlých trojuholníkov

Váha vychádza najčastejšie z vektorov incidentných hrán k vrcholu trojuholníka \vec{v}_1, \vec{v}_2 , prípadne aj z protíľahlého \vec{v}_3 a z nich odvodených veličín. Môže sa jednať napr. o plochu trojuholníka S , obvod trojuholníka o , vnútorný uhol trojuholníka α v danom vrchole alebo dĺžky hrán. Základných typov váh existuje niekoľko, je možné ich kombinovať, váha môže vyjadrovať priamu alebo nepriamu úmeru. V aplikácii boli testované 4 formy váh:

$$w_1 = S = \frac{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|\sin \alpha}{2}, \quad [5.25a]$$

$$w_2 = \alpha = \arccos \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} \quad [5.25b]$$

$$w_3 = \frac{1}{|\vec{v}_1|^2|\vec{v}_2|^2} \quad [5.25c]$$

$$w_4 = \frac{S}{o} = \frac{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|\sin \alpha}{2(|\vec{v}_1|+|\vec{v}_2|+|\vec{v}_3|)} \quad [5.25d]$$

Váha w_1 a predstavuje priamu úmeru k obsahu trojuholníka, čiže čím má trojuholník väčší obsah, tým väčší vplyv má jeho normála. Nijako však nezaväzuje jeho tvar. Váha w_2 predstavuje priamu úmeru k vnútornému uhlu trojuholníka v incidentnom vrchole, čiže čím „tupejší“ je trojuholník v danom vrchole, tým je jeho váha väčšia. Váha w_3 je obdobná váhe w_1 , súčin štvorcov hrán je však váhe nepriamo úmerný, takže väčší trojuholník má nižšiu váhu. Posledná váha w_4 reprezentuje celkový

tvar trojuholníka. Čím nižší je pomer obsahu a obvodu trojuholníka, tým je jeho tvar „pretiahlejší“, čiže deformovanejší a tým menší je jeho vplyv.

Ak normály trojuholníkov nie sú jednotkové, treba ich na jednotkové previesť:

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}}, \quad [5.26]$$

kde \vec{n}_1 je hľadaná jednotková normála všeobecnej normály \vec{n} . Tú je možné získať vektorovým súčinom vektorov dvoch ľubovoľných hrán trojuholníka T :

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}. \quad [5.27]$$

Determinant môžeme rozpísať na subdeterminanty, ktoré predstavujú zložky \vec{n} :

$$x_n = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad y_n = -\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}, \quad z_n = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix},$$

a

$$\begin{aligned} \vec{u} &= B - A = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A] = [x_u, y_u, z_u] \\ \vec{v} &= C - A = [x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A] = [x_v, y_v, z_v] \end{aligned}$$

Pretože normály v našom prípade reprezentujú rovinné plôšky polyédrického DTM, hodnota ich z -ovej súradnice má zvláštny význam:

$$z \begin{cases} < 0 & \vec{n} \equiv \vec{n}_- \\ = 0 & \vec{n} \parallel \vec{xy} \\ > 0 & \vec{n} \equiv \vec{n}_+ \end{cases}, \quad [5.28]$$

kde \vec{n}_- je normála smerujúca „do zeme“ a \vec{n}_+ je normála smerujúca „von“. Pre DTM je nevyhnutné, aby normála smerovala smerom „von“, prepočet je jednoduchý:

$$\vec{n}_+ = -\vec{n}_- = -[x_{n-}, y_{n-}, z_{n-}]. \quad [5.29]$$

Nakoniec ostáva určenie posledného kontrolného bodu b_{111} , ležiaceho v ťažisku G trojuholníka, čo je druhý odhad. Možností odhadu je niekoľko. Farin, 1985 používa odhad, ktorý robí z plátu kvadratický polynóm (odvádza sa len nadmorská výška z):

$$b_{111} = E + \frac{(E - V)}{2}, \quad [5.30]$$

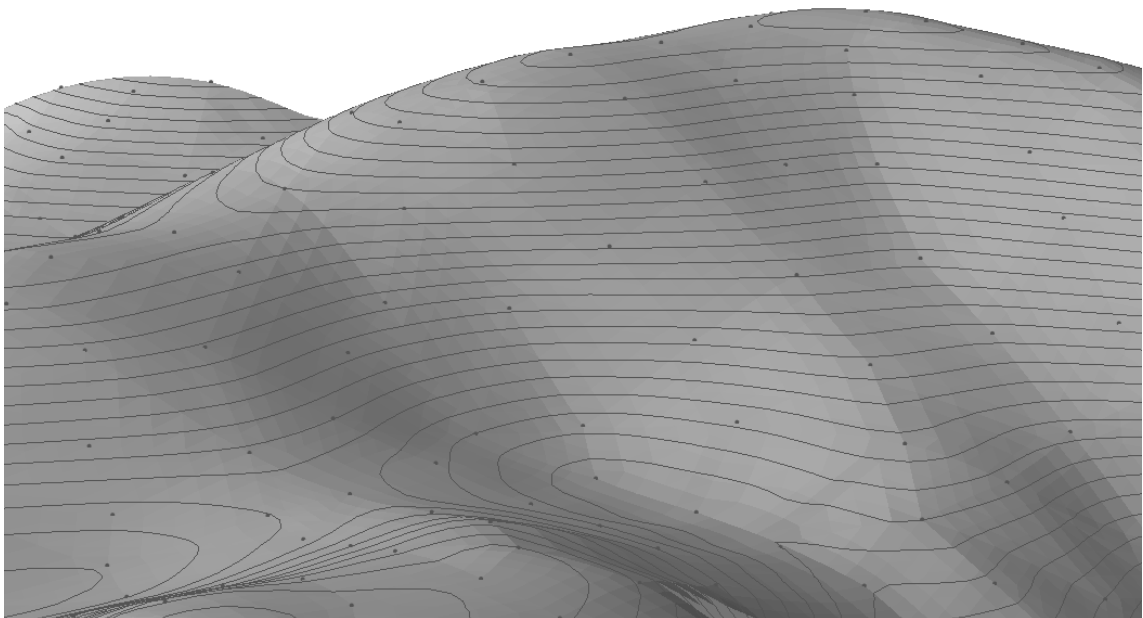
kde

$$E = \frac{b_{210} + b_{120} + b_{021} + b_{012} + b_{012} + b_{102}}{6} \quad \text{a} \quad V = \frac{b_{300} + b_{030} + b_{003}}{3}.$$

Pri tomto jednoduchom výpočte nie je nutné sa odkazovať na susedné trojuholníky, výpočet je časovo veľmi nenáročný a využíva sa v počítačovej grafike pri interpolácii farieb renderovaním. Jednou z takýchto metód je tzv. point normal (PN) triangles, kedy sa pomocou vyššie definovaného plátu navyše určujú pre jednotlivé body plátu normály interpoláciou s lineárnou alebo kvadratickou variáciou (Vlachos et al., 2001). Podobnú možnosť ponúka Kashyap, 1996, ktorý píše o interpolante s kvadratickou presnosťou :

$$b_{111} = \frac{E}{4} - \frac{V}{6} \quad [5.31]$$

Obe uvedené možnosti na mnohých pôvodných hranách produkujú lomové hrany a nezachovávajú prvú deriváciu, na hladkosť vrstevníc to však nemusí mať príliš veľký dopad. Dôkazom je obr. 5.5.

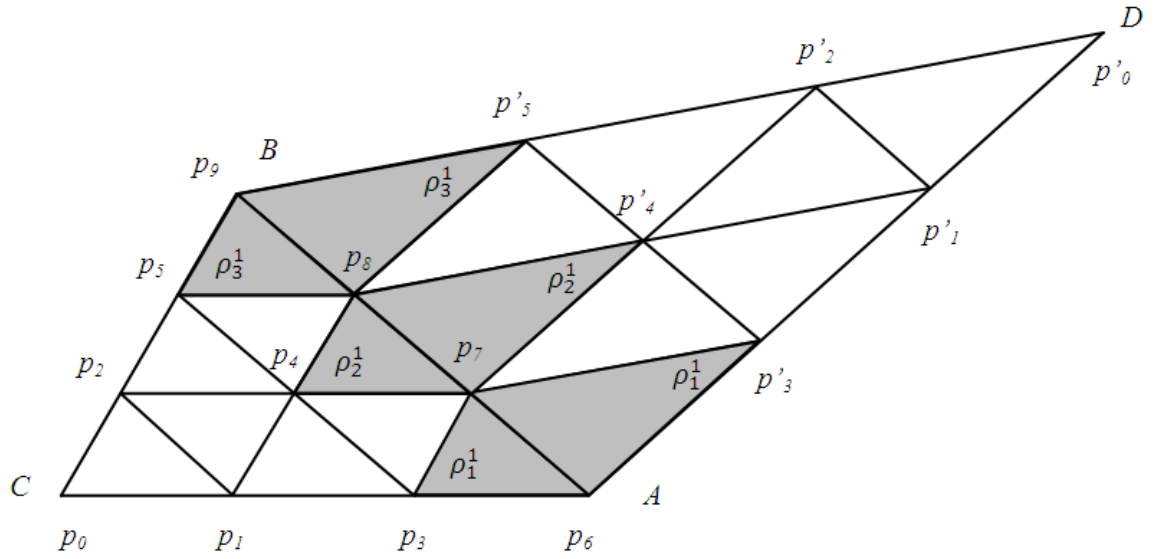


Obr. 5.5 Ukážka povrchu a vrstevníc vyprodukovaných C^0 interpolantom. Hrany pôvodnej triangulácie sú badateľné, avšak vrstevnice nadobúdajú hladké tvary

5.3 Spojitosť C^1

Pláty so spojitostou C^1 vytvárajú povrch, ktorý okrem vlastností C^0 spojitosti zaisťuje aj zachovávanie prvej derivácie na hranách susedných trojuholníkov, teda aj sklon a orientáciu reliéfu voči svetovým stranám, čo je pri DTM obzvlášť dôležité.

Aby sa na ľubovolnej hrane zachovala spojitosť C^1 , je nutné, aby páry kontrolných trojuholníkov podľa obr 5.6 ležali v jednej rovine. Kontrolnými trojuholníkmi sa myslia dielčie časti kontrolných polyédrov tvorené najbližšími kontrolnými bodmi:



Obr. 5.6 Páry kontrolných podmieňujúcich zachovanie C^1 spojitosti na hrane

$$p_3, p_6, p_7, p'_3 \in \rho_1^1; \quad p_4, p_7, p_8, p'_4 \in \rho_2^1; \quad p_5, p_8, p_9, p'_5 \in \rho_3^1, \quad [5.32]$$

kde $p_i, p'_j; 0 \leq i \leq 9; 0 \leq j \leq 5; i, j \in \mathbb{N}$ sú kontrolné body susedných trojuholníkov a $\rho_k^1; 1 \leq k \leq 3; k \in \mathbb{N}$ sú spomínané roviny pre danú dvojicu kontrolných trojuholníkov k , ktoré tieto roviny tvoria.

Dvojica plátov je C^1 spojitá práve vtedy, ak C^1 nespojitost' na jednotlivých dvojiciach kontrolných trojuholníkov, je rovná nule (Kashyap, 1996):

$$\forall C_k^1; 1 \leq k \leq 3 \wedge k \in \mathbb{N} : C_k^1 = 0, \quad [5.33]$$

kde

$$\begin{aligned} C_1^1 &= z_3 - (u z_3 + v z_6 + w z_7), \\ C_2^1 &= z_4 - (u z_4 + v z_7 + w z_8), \\ C_3^1 &= z_5 - (u z_5 + v z_8 + w z_9) \end{aligned}$$

a C_k^1 predstavuje hodnotu odchýlky v spojitosti pre danú dvojicu kontrolných trojuholníkov k , z_i, z'_j sú nadmorské výšky prislúchajúce kontrolným bodom p_i, p'_j z [5.32] podľa obr. 5.6, u, v, w sú barycentrické súradnice bodu D vzhľadom na trojuholník CAB . C^1 spojitost' možno chápať ako test koplanarity štyroch bodov s využitím barycentrických súradníc a podobnosti trojuholníkov a štvoruholníkov podľa obr. 5.6 a 5.7:

$$ABC \simeq A'_k B'_k C'_k, \quad ABD \simeq A'_k B'_k D'_k \Rightarrow ABCD \simeq A'_k B'_k C'_k D'_k. \quad [5.34]$$

C^1 spojitost' je možné docieľiť tak, že normály rovín ρ_k^1 budú definované ako vektorový súčin, kde vektory pozostávajú z bodov z [5.32]. Prvým je vektor zdieľanej

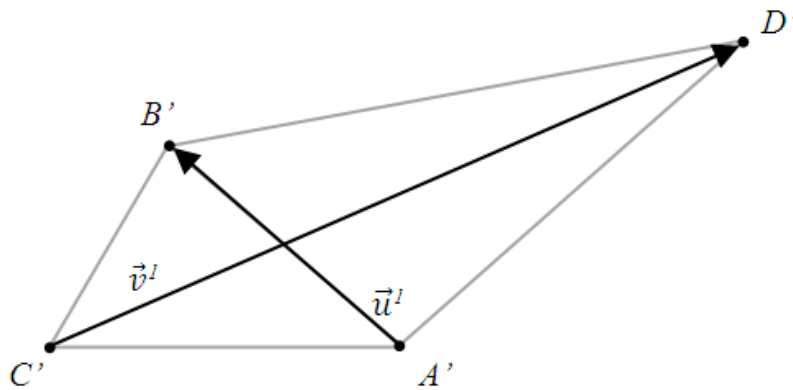
hrany susedných kontrolných trojuholníkov a druhým je vektor tvorený tretími bodmi kontrolných trojuholníkov (ležiace oproti ich zdieľanej hrane), ako na obr. 5.7. Vzťah vychádza z [5.27] s úpravou pri určovaní dielčích vektorov \vec{u}^1, \vec{v}^1 :

$$\rho_k^1 : \vec{n}_k^1 = \vec{u}_k^1 \times \vec{v}_k^1 , \quad [5.35]$$

kde

$$\vec{u}_k^1 = B'_k - A'_k , \quad \vec{v}_k^1 = D'_k - C'_k$$

a body A'_k, B'_k, C'_k, D'_k sú práve štvorice bodov z troch rovín ρ_k^1 podľa tab.5.2:



Obr. 5.7 Definícia vektorov roviny ρ_k^1 pre zachovanie spojitosti C^1

bod	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
A'_k	p ₆	p ₇	p ₈
B'_k	p ₇	p ₈	p ₉
C'_k	p ₃	p ₄	p ₅
D'_k	p' ₃	p' ₄	p' ₅

Tab. 5.2 Identifikácia koplanárnych bodov na ρ_k^1 pre zaručenie C^1 spojitosti

Výpočet [5.35] je nutné riešiť len pre body na ρ_2^1 , pretože body na zvyšných dvoch rovinách danú podmienku spĺňajú automaticky, keďže sú totožné s rovinami príslušných vrcholov:

$$\rho_1^1 \equiv \rho_{300} ; \quad \rho_3^1 \equiv \rho_{030} , \quad [5.36]$$

Podľa [5.36] je zjavné, že problém nastáva len pri C_2^1 , zato dosť závažný. Pri TIN s desiatimi kontrolnými bodmi na každý trojuholník nie je možné dosiahnuť globálnu C^1 spojitosť, pretože 9 kontrolných bodov (vo vrcholoch a na dotykových rovinách, čiže na hranách) je pevne daných a posledný nemožno dopočítať tak, aby podmienka spojitosti platila globálne pre všetky susedné dvojice.

5.3.1 Clough-Tocher interpolant

Z dôvodu nedostatku kontrolných bodov sa zavádza tzv. Clough-Tocher rozdelenie trojuholníkov. Táto metóda bolo pôvodne vymyslená v 70tych rokoch ako metóda na určenie konečných elementov, koncom 70tych rokov sa použila prvýkrát pri interpolácii v CAGD (Farin, 1985).

Táto metóda spočíva v delení trojuholníka pôvodnej TIN (nazývaného makro trojuholník) v jeho ťažisku na tri menšie trojuholníky (nazývané mikro trojuholníky), spojením ťažiska s pôvodnými vrcholmi. Hrany medzi susednými makro trojuholníkmi (resp. medzi susednými mikro trojuholníkmi vrámci susedných makro trojuholníkov) budú ďalej označené zjednodušene ako makro hrany, hrany medzi susednými mikro trojuholníkmi vrámci jedného makro trojuholníka možno analogicky nazvať mikro hranami. Každý mikro trojuholník teda pozostáva z dvoch mikro hran a jednej makro hrany a možno v ňom identifikovať mikro ťažisko.

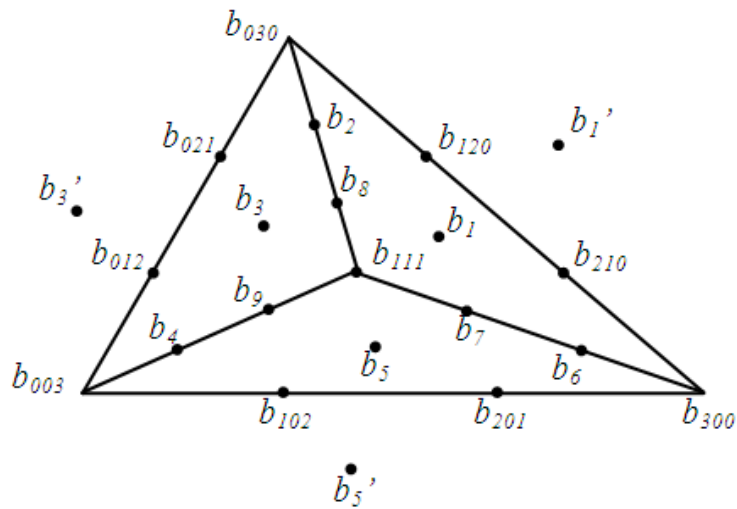
V konečnom dôsledku každý mikro trojuholník bude reprezentovať samostatný Bézierov plát podľa vyššie uvedených podmienok pre spojitosť C^1 , rovnako pre makro hrany ako aj mikro hrany. Kontrolné body sa však budú postupne určovať pre makro trojuholník ako pre celok. Na každý makro trojuholník teda pripadajú tri mikro trojuholníky s 10timi kontrolnými bodmi, čo dáva súčet 30 kontrolných bodov, z ktorých je možné odstrániť viacero duplicit. Medzi dvojicami mikro trojuholníkov sú 3 zdieľané vo vrcholoch makro trojuholníka, 6 je zdieľaných na mikro hranách, jeden, pôvodný b_{111} je zdieľaný medzi všetkými tromi. Celkový počet duplicit je rovný 11tim bodov, v konečnom dôsledku tak makro trojuholník pozostáva z 19tich kontrolných bodov.

5.3.2 Konštrukcia Clough-Tocher interpolantu

Táto časť ponúka spôsob, akým je možné skonštruovať Clough-Tocher interpolant. Uvedený spôsob je nutné aplikovať na každý makro trojuholník:

1. V prvom rade je nutné rozdeliť makro tr. na tri mikro tr. a určiť všetkých 19 kontrolných bodov v rovine xy (obr 5.8) s využitím ich známej polohy v barycentrických súradniciach. To je možné podľa [5.16], body na makro hranách a v makro ťažisku sú totožné s pôvodnými, body na mikro hranách a v mikro ťažiskách je možné získať analogicky.
2. Následne, podobne ako pri jednoduchom interpolante, je nutné odhadnúť dotykové roviny ρ vo vrcholoch makro trojuholníka podľa [5.24].
3. Ďalej treba na týchto troch tangenciálnych rovinách ρ určiť rovnobežné priemety (nadmorskú výšku z) najbližších kontrolných bodov podľa [5.20]:

$$b_{210}, b_6, b_{201} \in \rho_{300} ; b_{120}, b_2, b_{021} \in \rho_{030} ; b_{012}, b_4, b_{102} \in \rho_{003} , \quad [5.37]$$



Obr. 5.8 Rozmiestnenie kontrolných bodov v makro trojuholníku

4. Problematický je štvrtý krok, ktorým je odhad ťažísk mikro trojuholníkov b_1 , b_3 a b_5 . Podľa podmienok C^1 spojitosti (konkrétne pre $C_2^1=0$ z [5.33]) o nich vieme toľko, že musia ležať v jednej rovine s príslušnými bodmi na makro hranách a mikro ťažiskami, ktoré sa nachádzajú za makro hranou (ide o spomínané susedné kontrolné trojuholníky), podľa tab. 5.3. Možností výpočtu týchto rovín a bodov je niekoľko. Pretože ide o závažný problém, bude popísaný samostatne v časti 5.3.3.

Mikro ťažisko	Opačné mikro ťažisko	Spoločná hrana
b_1	b_1'	b_{210}, b_{120}
b_3	b_3'	b_{021}, b_{012}
b_5	b_5'	b_{102}, b_{201}

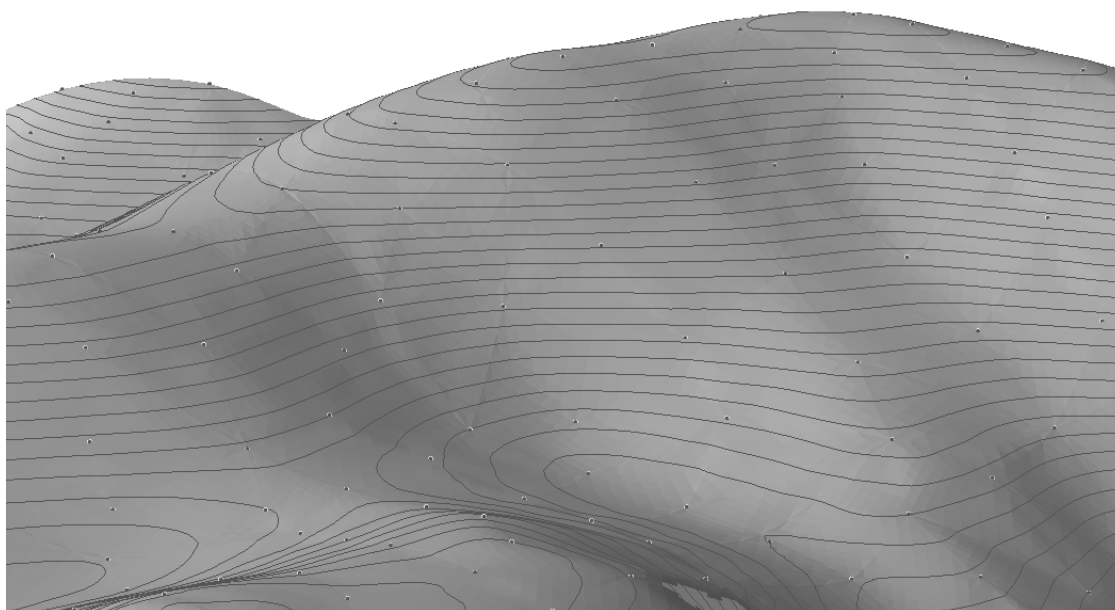
Tab. 5.3 Identifikácia štvoric bodov ležiacich na spoločnej rovine v okolí hrán makro trojuholníka pre zachovanie C^1 spojitosti

5. Zvyšné kontrolné body na mikro hranách dopočítame už jednoducho, vždy z trojice bodov zo susedných mikro trojuholníkov možno určiť rovinu (priemetňu) ktorej normálu určíme podľa [5.27], jej rovnicu dopočítame podľa [5.23] a body b_7 , b_8 , b_9 premietneme podľa [5.20]. Jednotlivé priemetne sú určené v tab. 5.4.
6. Na záver ostáva bod b_{111} ktorého priemetňou sú body b_7 , b_8 , b_9 (tab. 5.4) a postup je totožný s predošlým bodom. Keďže bod b_{111} je zároveň aj vrcholom mikro trojuholníkov, ktoré predstavujú samostatné Bézierove pláty, tie sa v ňom stretávajú a tak je zároveň prvým reálne interpolovaným bodom v makro trojuholníku.

Kontrolný bod	Určujúca rovina
b_7	b_1, b_5, b_6
b_8	b_1, b_2, b_3
b_9	b_3, b_4, b_5
b_{111}	b_7, b_8, b_9

Tab. 5.4 Identifikácia zvyšných kontr. bodov a určujúcich rovín

Tento postup zaručuje podmienky C^1 spojitosti definované v úvode podkp. 5.3, čiže zachováva na hranách prvú deriváciu a teda aj sklon a orientáciu reliéfu voči svetovým stranám. Spojitosť je globálna nielen na makro hranách, ale aj mikro hranách. Každopádne nezaručuje C^2 spojitosť, čiže spojitosť druhých derivácií a teda krivostí reliéfu. Výsledkom je hladší povrch ako pri C^0 interpolante, stále sú však badateľné hrany na krivých formách reliéfu. Vplyv na vrstevnice však nie je badateľný (obr 5.9)



Obr. 5.9 Ukážka povrchu a vrstevníc generovaných Clough-Tocher interpolantom. Hrany pôvodnej triangulácie sú badateľné len na zakrivených miestach, vrstevnice nadobúdajú hladké tvary

5.3.3 Problém určenia mikro ťažísk

Na určenie rovín ρ_2^1 z [5.35] pre každé mikro ťažisko je nutné poznať dva vektory: vektor spoločnej hrany kontrolných trojuholníkov \vec{u}^1 a vektor daný dvojicou protihľých mikro ťažísk \vec{v}^1 . Ten druhý je pre nás neznámy a je preto nutné ho odhadnúť. Existuje niekoľko možností odhadu, od jednoduchých po sofistikovanejšie. Možno ich rozdeliť na lokálne alebo susedské podľa toho, či na výpočet je nutné nahliadnuť k susednému trojuholníku alebo nie.

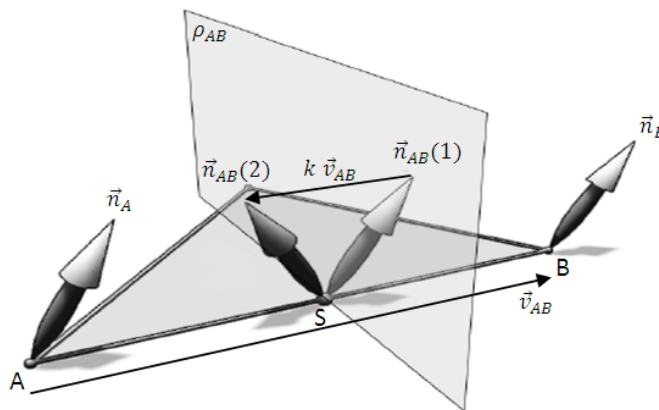
Lokálne metódy

C^1 spojitosť je možné zaručiť aj bez nutnosti vyhľadávania suseda, s ktorým daný mikro trojuholník zdieľa hranu a to len s využitím normál v incidentných vrcholoch, ktoré sú totožné pre oba susedné trojuholníky, susednosť je tak použitá nepriamo. Využíva sa pri tom práve metóda používaná v už spomenutých PN trojuholníkoch (Vlachos, 2001) využívaných v počítačovej grafike. V tomto odbore sa na vykresľovanie hladkých osvetlených objektov odhaduje normála v bodoch plátu tzv. Phongovou interpolačnou metódou. Práve rovina definovaná normálou v strede hrany môže byť chápaná ako rovina, v ktorej leží hľadaný vektor \vec{v}^1 . Túto normálu je možné vypočítať interpoláciou jednotkových normál vo vrcholoch s lineárnou alebo kvadratickou variáciou. Pri lineárnej variácii ide o jednoduchý prímer, čiže súčet. Pre stred hrany tak môžeme vypočítať normálu:

$$\vec{n}_{AB} = \vec{n}_A + \vec{n}_B \quad [5.38]$$

kde \vec{n}_{AB} je interpolovaná normála v bode S , ktorý je stredom úsečky \overline{AB} , ktorá je hranou, v ktorej vrcholoch poznáme jednotkové normály \vec{n}_A, \vec{n}_B . Podľa (Funfzig, 2008) je potom možné určiť hľadaný vektor ďalším vektorovým súčinom:

$$\vec{v}^1 = \vec{n}_{AB} \times \vec{u}^1 \quad [5.39]$$



Obr. 5.10 Normála v strede hrany s lineárnou (1) a kvadratickou (2) variáciou
Zdroj obr.: Vlachos, 2001, upravený autorom

Lineárna variácia však nezachytáva ohyb krivky, preto je vhodnejšie použiť kvadratickú variáciu, ktorá priebeh krivky zachytáva vhodnejšie:

$$\vec{n}_{AB} = (\vec{n}_A + \vec{n}_B) + k \vec{v}_{AB} \quad [5.40]$$

kde

$$k = -2 \frac{\vec{v}_{AB} \cdot (\vec{n}_A + \vec{n}_B)}{\vec{v}_{AB} \cdot \vec{v}_{AB}} \quad , \quad \vec{v}_{AB} = (B - A)$$

a \cdot je skalárny súčin. Vzťah [5.40] znamená, že vypočítaný vektor je odrazom lineárne interpolovanej normály v rovine ρ_{AB} definovanej stredom úsečky \overline{AB} a normálou, ktorá je vektorom úsečky, čiže \vec{v}_{AB} . Skalárny koeficient k predstavuje vzdialenosť o ktorú je nutné hodnotu priemernej normály $\vec{n}_A + \vec{n}_B$ zmeniť, aby bola svojim vlastným odrazom cez rovinu ρ_{AB} . Normály s lineárnou a kvadratickou varianciou sú znázornené na obr 5.10.

Susedské metódy

Priame susedské metódy sú vo všeobecnosti časovo náročnejšie, môžu však prispieť väčším množstvom informácií a priniesť podľa miery sofistikovanosti lepšie výsledky. Jednoduchou možnosťou je predpokladať, že daný \vec{v}^1 vektor leží v rovine určenej normálou, ktorá býva označovaná ako normála hrany. Tú možno vypočítať ako vážený priemer jednotkových normál trojuholníkov, ktoré majú danú hranu spoločnú:

$$h: \quad \vec{n}_h = w_i \vec{n}_i + w_j \vec{n}_j; \quad T_i, T_j \in \tau; \quad i \neq j; \quad T_i \cap T_j = h, \quad [5.41]$$

kde \vec{n}_h je normálou hrany h , \vec{n}_i, \vec{n}_j sú normály trojuholníkov T_i, T_j s príslušnými váhami w_i a w_j . Váhy môžu byť podobne ako pri odhadovaní normál vo vrcholoch odvodené od plôch trojuholníka, incidentných hrán alebo môžu byť rovnaké. Ak trojuholník T_i leží na obálke siete, \vec{n}_h je možné nahradiť normálou \vec{n}_i . Hľadaný vektor získame obdobne ako pri [5.39]:

$$\vec{v}^1 = \vec{n}_h \times \vec{u}^1, \quad [5.42]$$

Alternatívny a sofistikovanejší prístup popisuje Hugentobler von Mönchaltorf, 2004 a Schneider, 1998 a je zavedený aj v tejto práci. Východiskom tejto metódy je dočasný štvoruholníkový Bézierov plát z dvoch susedných makro trojuholníkov. Na ňom možno identifikovať okrem kontrolných bodov na štyroch hranách štvoruholníka aj ďalšie body cp_1 a cp_2 . Pre určenie ich polohy treba plát premietnuť do roviny xy , kde je ich poloha určená na priesečníkoch spojnic kontrolných bodov protiľahlých hrán (obr. 5.11):

$$\begin{aligned} cp_1 &= \overline{b_{CA}, b_{BD}} \cap \overline{b_{CB}, b_{AD}}, \\ cp_2 &= \overline{b_{AC}, b_{DB}} \cap \overline{b_{BC}, b_{DA}}. \end{aligned} \quad [5.43]$$

Ich nadmorskú výšku z možno opäť určiť s využitím dotykových rovín vo vrcholoch oproti pôvodnej spoločnej hrane obdobne ako v [5.20]:

$$cp_1 \in \rho_C; \quad cp_2 \in \rho_D. \quad [5.44]$$

Základným predpokladom je, že sklon týchto dvoch bodov je totožný so sklonom hľadaných párov b_1 a b_1' atď. Sklon daných bodov môžeme nájsť cez skalárny súčin ich vektora a jeho priemetu do roviny xy :

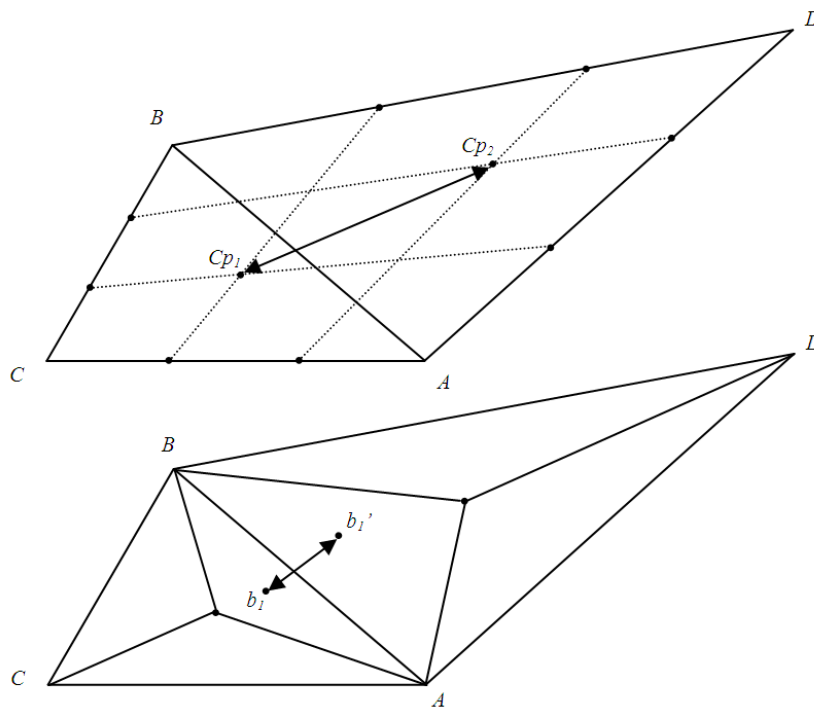
$$\cos(\alpha) = \vec{c}\vec{p} \cdot \vec{c}\vec{p}_{xy} \quad , \quad [5.45]$$

kde

$$\vec{c}\vec{p} = cp_2 - cp_1 \quad , \quad [5.46]$$

a $\vec{c}\vec{p}_{xy}$ je jeho priemetom v rovine xy (čiže so $z = 0$). Keďže poloha hľadaných dvojíc kontrolných bodov je nám známa, poznáme aj priemet hľadaného vektora \vec{v}^1 v rovine xy . Jeho z -ovú súradnicu z_v potom dopočítame jednoducho s využitím funkcie tangens:

$$z_v = \tan(\alpha) \quad . \quad [5.47]$$



Obr. 5.11 Metóda určenia mikro ťažísk štvoruholníkovým Béziovým plátom.
Ich sklon možno určiť ako sklon bodov cp_1 a cp_2 .

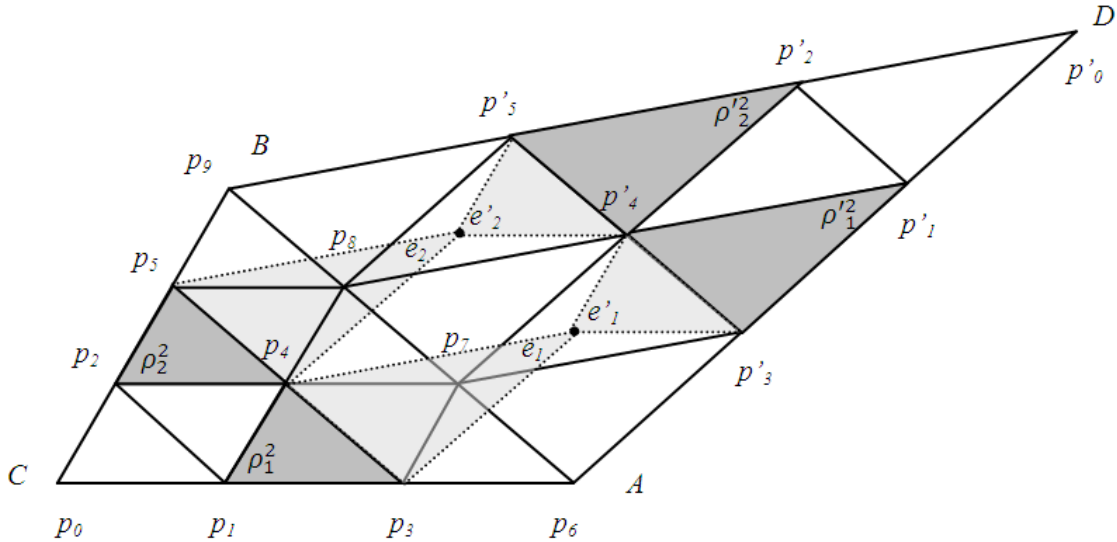
5.4 Spojitosť C^2

Pláty so spojitosťou C^2 vytvárajú povrch, ktorý okrem vlastností C^0 a C^1 spojitosťi zaisťuje aj zachovávanie druhej derivácie na hranách susedných trojuholníkov a v prípade DTM teda aj horizontálne a vertikálne krivosti reliéfu.

Aby sa na ľubovolnej hrane zachovala spojitosť C^2 , je nutné, aby sa roviny párov kontrolných trojuholníkov v druhom rade od danej hrany (pričom každý je z iného hlavného trojuholníka) pretínali v konkrétnych bodoch e_k, e'_k (ktoré budú popísané neskôr). Pre väčšiu zrozumiteľnosť sú páry kontrolných trojuholníkov a body na priesečníkoch ich rovín ilustrované na obr 5.12:

$$\begin{aligned} p_1, p_3, p_4 \in \rho_1^2; \quad p'_1, p'_4, p'_3 \in \rho_1'^2; \quad (e_1 \equiv e'_1) \in \rho_1^2 \cap \rho_1'^2, \quad [5.48] \\ p_2, p_4, p_5 \in \rho_2^2; \quad p'_2, p'_5, p'_4 \in \rho_2'^2; \quad (e_2 \equiv e'_2) \in \rho_2^2 \cap \rho_2'^2, \end{aligned}$$

kde $p_i, p'_j; 0 \leq i \leq 9; 0 \leq j \leq 5; i, j \in \mathbb{N}$ sú kontrolné body susedných trojuholníkov a $\rho_k^2, \rho_k'^2; 1 \leq k \leq 2; k \in \mathbb{N}$ sú spomínané roviny pre danú dvojicu kontrolných trojuholníkov k , ktoré tieto roviny tvoria.



Obr. 5.12 Páry trojuholníkov podmieňujúcich zachovanie C^2 spojitosti na hrane

Dvojica plátov je C^2 spojitá práve vtedy, ak C^2 nespojitosť na jednotlivých dvojiciach kontrolných trojuholníkov, je rovná nule (Kashyap, 1996):

$$\forall C_k^2; 1 \leq k \leq 2 \wedge k \in \mathbb{N} : C_k^2 = 0, \quad [5.49]$$

kde

$$\begin{aligned} C_1^2 = e_1 - e'_1 &= (u_1 z_1 + v_1 z_3 + w_1 z_4) - (u_2 z'_1 + v_2 z'_4 + w_2 z'_3), \\ C_2^2 = e_2 - e'_2 &= (u_1 z_2 + v_1 z_4 + w_1 z_5) - (u_2 z'_2 + v_2 z'_5 + w_2 z'_4) \end{aligned}$$

a C_k^2 predstavuje hodnotu odchýlky v spojitosti pre danú dvojicu kontrolných trojuholníkov k , z_i, z'_j sú nadmorské výšky prislúchajúce kontrolným bodom p_i, p'_j z [5.48] podľa obr. 5.12, u_1, v_1, w_1 sú barycentrické súradnice bodu D vzhľadom na trojuholník C, A, B a u_2, v_2, w_2 sú barycentrické súradnice bodu C vzhľadom na trojuholník D, B, A . e_k, e'_k sú nadmorské výšky spomínaných bodov v [5.48], ktoré dostaneme z prvého a druhého člena pravej časti rovnice. Pre C^2 spojitosť teda tiež platí:

$$e_k = e'_k. \quad [5.50]$$

Pri TIN s využitím Clough-Tocher rozdelením trojuholníkov s 19timi kontrolnými bodmi na každý makro trojuholník nie je možné dosiahnuť globálnu

C^2 spojitosť. 12 kontrolných bodov (vo vrcholoch a dotkových rovinách) je pevne daných, ďalšie 4 (b_7, b_8, b_9, b_{111} – teda mimo tých v mikro ťažiskách) sú určené tými v mikro ťažiskách a predošlými prvými 12timi. Jediné body v mikro ťažiskách je možné prispôbiť, ale nie tak, aby sa podmienky C^2 spojivosti splnili globálne, bolo by nutné vytvoriť interpolant s vyšším počtom kontrolných bodov.

5.4.1 Lagrange-ova minimalizácia nespojivosti C^2

Veľkosť odchýlky v [5.49] závisí od toho, s akou presnosťou sa určia mikro ťažiská, teda podľa zvolenej metódy opísaných v 5.3.3. Každopádne túto odchýlku je možné aspoň minimalizovať a to iteratívne so zavedením Lagrange-ových multiplikátorov a pomocou metódy najmenších štvorcov (Farin, 1985 a Kashyap, 1996):

$$z_4 = \frac{u_1 s_1 + u_1 a_{12} r_3 + u_1^2 s_2 + r_3 a_{11}}{D}, \quad [5.51]$$

kde

$$\begin{aligned} s_1 &= 2(v_1 r_1 + w_1 r_2), \\ s_2 &= -2(w_2 r_1 + v_2 r_2), \\ D &= 2u_1 a_{12} + u_1^2 a_{22} + a_{11} \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} r_1 &= u_2 z_2 + v_2 z_5 - u_1 z_2 - w_1 z_5, \\ r_2 &= u_2 z_1 + w_2 z_3 - u_1 z_1 - v_1 z_3, \\ r_3 &= v_1 z_7 + w_1 z_8 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2(v_1^2 + w_1^2), \\ a_{12} &= -2(v_1 w_2 + w_1 v_2), \\ a_{22} &= 2(w_2^2 + v_2^2), \end{aligned}$$

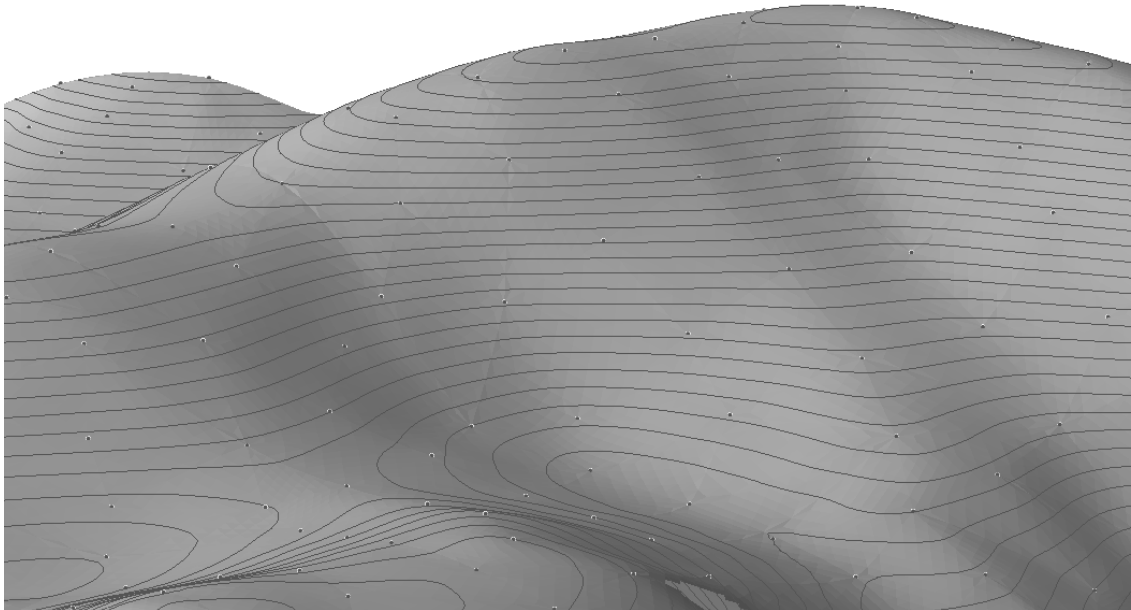
kde platí tá istá notácia ako pri [5.49]. Minimalizáciu je nutné aplikovať na všetky tri mikro ťažiská a následne dopočítať body z_4 podľa [5.20] a príslušnosti k rovine v [5.32] a pokračovať v krokom 5 a 6 z časti 5.3.2.

Túto minimalizáciu je možné aplikovať na susedné mikro trojuholníky zdieľajúce makro aj mikro hrany, treba však brať do úvahy, že nie je možné minimalizovať odchýlku na oboch typoch hrán pokiaľ má byť zaručená spojitosť C^1 :

- Ak sa aplikuje na susedné mikro trojuholníky na makro hranách, odchýlka sa minimalizuje aj medzi makro trojuholníkmi, čím ostane zachovaná C^1 spojitosť aj medzi mikro hranami, keďže minimalizácia priamo ovplyvní len body v mikro ťažiskách. Kontrolné body b_7, b_8, b_9 a b_{111} sa následne prepočítajú podľa podmienok C^1 , pričom zvyšné kontrolné body ostávajú nezmenené.

- Ak však aplikujeme minimalizačný alg. na susedné mikro trojuholníky na mikro hranách, narušíme tým spojitost' C^1 nielen na mikro, ale aj na makro hranách.

Z týchto dôvodov táto práca používa minimalizácia C^2 nespojitosti len na makro hranách, iterácie je možné limitovať buď zmenou odchýlky v C^2 nespojitosti a zadaním maximálneho počtu iterácií. Aplikácia minimalizácie má značný vplyv na miestach pôvodných makro hrán, ako je vidno na obr. 5.13.



Obr. 5.13 Ukážka povrchu a vrstevníc s aplikáciou minimalizácie C^2 nespojitosti. Viaceré hrany sú badateľne hladšie než minimalizáciou, vrstevnice nadobúdajú hladké tvary

5.5 Lomové línie

Častou požiadavkou v DTM býva možnosť zavedenia lomových línií. Jedná sa najmä o zárezy riečnych korýt, skalných útvarov, ciest, budov alebo ťažobných lomov v hladkom teréne. Vo vrstevniciach sa prejavujú ako ostré zárezy v tvare V (obr 5.15). Pri plátových modeloch je nutné upraviť niekoľko krokov pri tvorbe interpolantu, či už ide o interpolant C^0 alebo C^1 , pri C^1 interpolante pritom dochádza na lomovej línii k úmyselnému narušeniu C^1 spojitosti.

V prvom rade sa jedná o odhad dotykových rovín vo vrcholoch TIN, ide teda o vzťah [5.24]. Lomové línie v TIN môžeme chápať ako sekvencie bodov, pričom každé susedné dvojice bodov tvoria lomovú hranu, ktorá je zároveň hranou trojuholníka. Pretože body tvoriace lomové línie sú zároveň aj vrcholmi TIN. Pre každý vrchol vo vzťahu k lomovým hranám môžu nastať 3 základné prípady:

1. vrchol na lomovej hrane neleží
2. vrchol je počiatočným (resp. koncovým) bodom lomovej línie, takže leží práve na jednej lomovej hrane

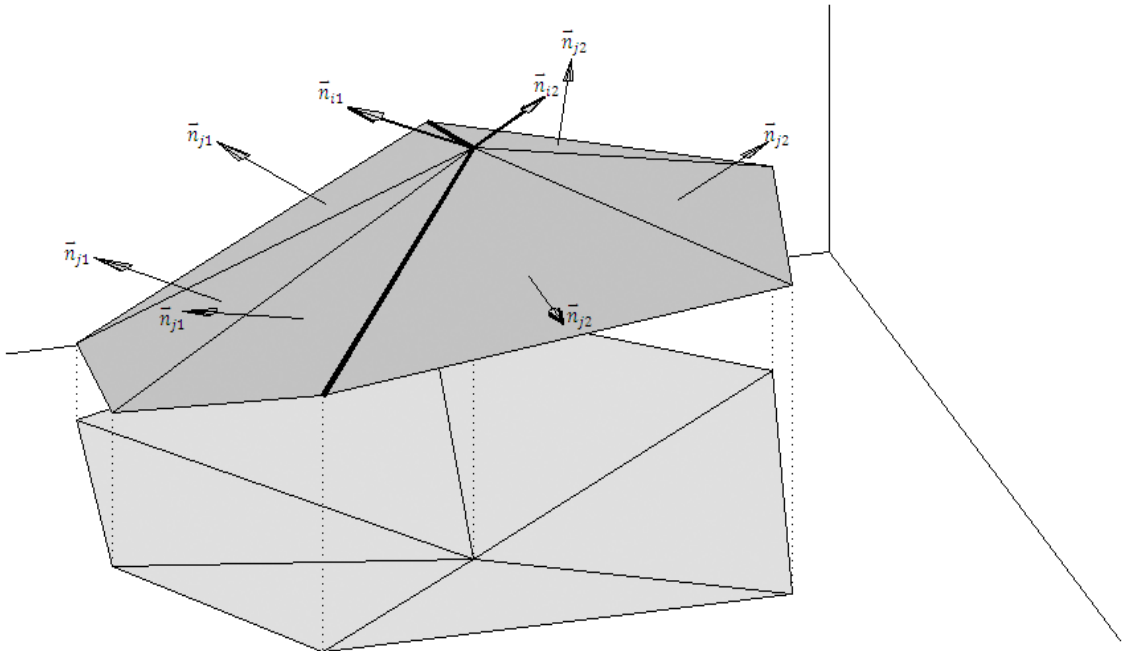
- vrchol leží uprostred lomovej línie alebo na styku viacerých, leží na minimálne dvoch lomových hranách

Prvý a druhý prípad je totožný s prípadom bez zavedenia lomových línií. V treťom prípade je množina tvorená susednými trojuholníkmi incidentnými k danému vrcholu rozdelená lomovými hranami na toľko podmnožín, koľko lomových hrán sa vo vrchole stretáva. Pre každú podmnožinu M_s sa následne normála a teda aj dotyková rovina vo vrchole počíta samostatne, dôjde tak k úprave vzťahu [5.24]:

$$V_{is}: \quad \vec{n}_{is} = \sum_{j=1}^{N_{is}} w_{js} \vec{n}_{js} ; \quad V_{is} \in \tau ; \quad [5.52]$$

$$1 \leq i \leq N_V ; \quad 1 \leq j \leq N_{Ti} ; \quad 1 \leq k \leq N_{Mi} ; \quad i, j, s \in \mathbb{N} ,$$

kde notácia je totožná s tou zo vzťahu [5.24] a s predstavuje index podmnožiny z celkového počtu podmnožín N_{Mi} . Obr. 5.14 ilustruje prípad s povinnou hranou.



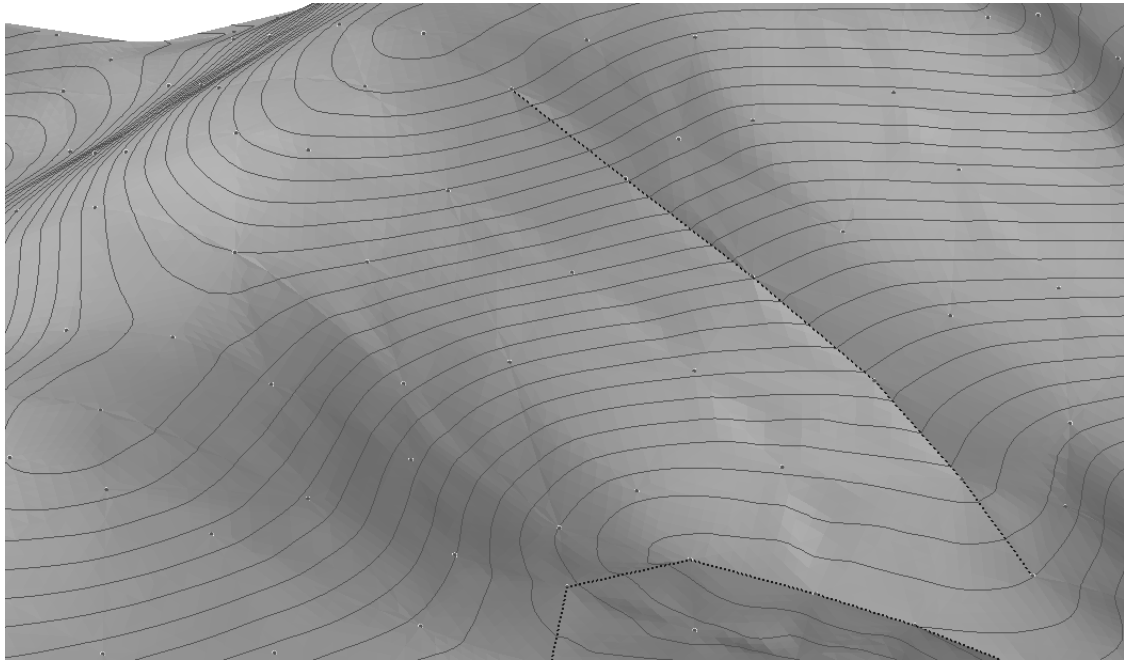
Obr. 5.14 Odhad normál vo vrchole so zavedením lomovej línie

Špeciálne prípady týkajúce sa počtu podmnožín nastávajú v situácii, kedy vrchol leží aspoň na jednej lomovej hrane a zároveň leží na obálke TIN. Vtedy platí:

- lomová hrana ležiaca na obálke nemá vplyv na počet podmnožín
- ak sa mimo obálky nachádza aspoň jedna lomová hrana, počet podmnožín je o jeden vyšší než počet lomových hrán mimo obálky, pretože hrany na obálke automaticky uzatvoria množiny

K ďalšej úprave pri zavádzaní lomových línií dochádza pri určovaní kontrolných bodov. Snahou je, aby lomové línie ovplyvnili len bezprostredné okolie hrany. Preto sa v prvom kroku vypočítajú všetky kontrolné body tak, akoby lom nebol, následne je však nutné kontrolné body na lomovej hrane lineárne interpolovať z príslušných vrcholov. Jedná sa o dvojice bodov $b_{210} - b_{120}$, $b_{021} - b_{012}$, resp. $b_{102} - b_{201}$. V praxi stačí ich nadmorskú výšku dopočítať s využitím barycentrických súradníc podľa [5.16].

Pri C^1 interpolante pre zachovanie lomu nie je možné aplikovať susedské metódy pri výpočte mikro ťažísk, keďže tie predpokladajú práve spojitosť C^1 , ktorá je v prípade lomovej hrany narušená. V prípade ich zvolenia prebieha výpočet mikro ťažiska rovnako ako na obálke TIN v 5.3.3. Pri zvolení minimalizácie C^2 nespojitosti sa pri lomovej hrane od minimalizácie pochopiteľne upúšťa.



Obr. 5.15 Ukážka povrchu a vrstevníc s aplikáciou lomových línií.

Lomové línie sú znázornené čiernou bodkovanou čiarou, vrstevnice sa na nich lámu.

5.6 Úroveň vyhladenia

Vyššie popísané časti prezentujú matematické pozadie Bézierových trojuholníkových plátov. Dokonale hladký plát je tvorený množinou nekonečne malých plôch. V praxi sa plát nahrádza polyédrom, ktorý Bézierov povrch aproximuje.

V našom prípade je vstupom do vyhladzovacieho algoritmu pôvodná TIN rozdelená Clough-Tocher algoritmom na mikro trojuholníky s definovanými kontrolnými bodmi pre kubické Bézierove trojuholníkové pláty s globálnou C^1 spojitosťou. Táto sústava môže prejsť aj prípadnou minimalizovanou C^2 nespojitosti podľa postupu v predchádzajúcich podkapitolách a môže byť doplnená o lomové línie.

Úroveň vyhladenia alebo „Level of detail“ (LoD) vyjadruje množstvo bodov, ktoré sa má do každého pôvodného trojuholníka (v našom prípade mikro trojuholníka) vložiť, čiže koľko sa ich má interpolovať. Počet interpolovaných bodov N_{int} v závislosti na LoD je analogický s počtom kontrolných bodov v závislosti na stupni polynómu podľa [5.6]:

$$N_{int} = \sum_{x=1}^{N_k+1} x = \frac{(N_k+1)(N_k+2)}{2}, \quad [5.53]$$

kde N_k predstavuje práve LoD. Počet interpolovaných trojuholníkov N_{sub} (ďalej sú tieto nazývané sub trojuholníkmi) na ktoré sa mikro trojuholník rozdelí je druhou mocninou LoD:

$$N_{sub} = N_k^2 . \quad [5.54]$$

Z [5.53] a [5.54] vyplýva, že čím väčšia je úroveň vyhladenia, tým viac bodov a sub trojuholníkov vznikne a teda tým je povrch hladší.

Prevrátená hodnota LoD je krokom (rozostupom) barycentrických súradníc využívaných pri interpolácii bodov na pláte podľa [5.8]. Dôsledkom tohto kroku sú body rozostúpené v pravidelnom intervale. Použitie Delaunay-ho triangulácie v hraniciach pôvodných mikro trojuholníkov vznikajú v každom mikro trojuholníku čo najrovnostrannejšie sub trojuholníky. Globálne tak vzniká nová TIN, v ktorej sú pôvodné makro aj mikro hrany povinnými hranami a zvyšné interpolované body klasickými vrcholmi.

Pretože Bézierov plát je definovaný pomocou barycentrických súradníc, je nutné tento rozostup využiť v barycentrických súradniciach. S využitím [5.9] je možné spojitý trojuholníkový plát definovať ako množinu všetkých existujúcich trojíc barycentrických súradníc u, v, w :

$$\forall u, v, w : 0 \leq u, v, w \leq 1 \wedge u, v, w \in \mathbb{R} \wedge u + v + w = 1 . \quad [5.55]$$

So zavedením pravid. rozostupu je nutné tento vzťah upraviť pomocou LoD, resp. N_k :

$$\begin{aligned} \forall u_N, v_N, w_N : 0 \leq u_N, v_N, w_N \leq N_k \wedge \\ u_N, v_N, w_N \in \mathbb{N} \wedge u_N + v_N + w_N = N_k , \end{aligned} \quad [5.56]$$

pričom na získanie pôvodných súradníc platia rovnosti:

$$u = \frac{u_N}{N_k} , \quad v = \frac{v_N}{N_k} , \quad w = \frac{w_N}{N_k} . \quad [5.57]$$

Všetky trojice súradníc nájdeme, pokiaľ budeme odvodzovať jednu od druhej:

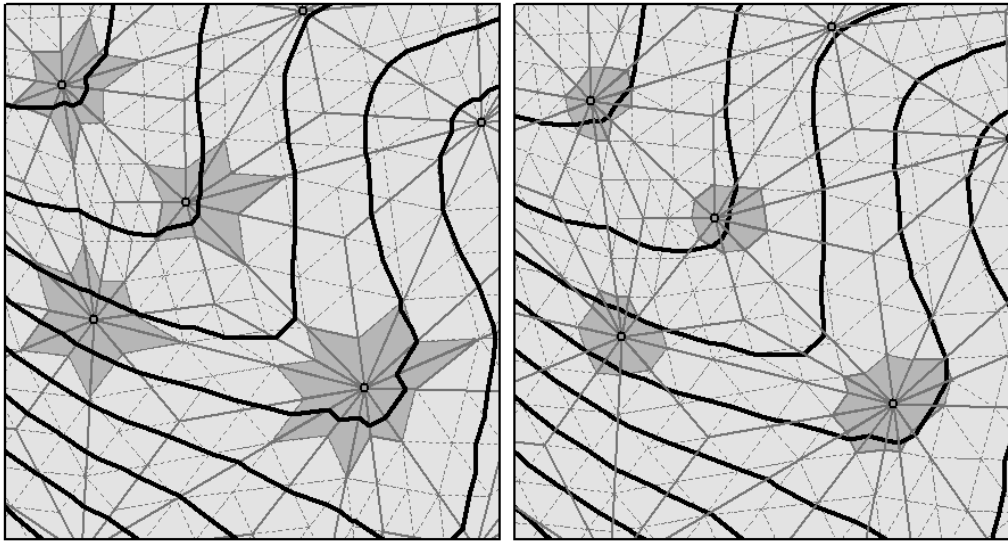
$$\begin{aligned} (\forall u_N ; 0 \leq u_N \leq N_k : \exists v_N ; 0 \leq v_N \leq N_k - u_N) \wedge \\ \wedge (\forall u_N v_N : \exists w_N ; 0 \leq w_N \leq N_k - u_N - v_N) . \end{aligned} \quad [5.58]$$

Tieto body sa postupne vkladajú do novej triangulácie. Ako bolo povedané, v nej by sa mali zachovávať pôvodné makro a mikro hrany. Na úvod interpolácie nových bodov v mikro trojuholníku je preto dôležité pridávať najprv body tvoriace makro a mikro hrany a to v podobe povinných sub hrán, ktoré tie pôvodné kopírujú a druhotne samostatné body uprostred plátu. Proces je opísaný v implementačnej časti 7.2.4 a 7.2.5.

Clough-Tocher-ovo delenie makro trojuholníkov vytvára pomerne podlhovasté mikro trojuholníky a sub trojuholníky pozdĺž makro hrán sú im podobné. V okolí pôvodných vrcholov to spôsobuje nahromadenie malých podlhovastých trojuholníkov a vzniká tak „hviezdicovitý“ útvar, ktorý má nepriaznivý vplyv na tvar nového polyédru a môže spôsobiť lámanie sa vrstevníc v blízkosti týchto vrcholov (obr. 5.16).

Tento efekt je možné odstrániť vkladáním extra bodov v blízkosti pôvodných vrcholov. V tejto práci je navrhnuté riešenie, ktoré pridáva extra bod na každej makro hrane v strede medzi každým vrcholom makro trojuholníka a najbližším

interpolovaným bodom (na danej hrane). K tomu je potrebné automatické rozpoznanie makro hrany v mikro trojuholníku. Preto je potrebné pre každý mikro trojuholník stanoviť fixné označenie vrcholov a k nim príslušné barycentrické súradnice (obr. 5.17). To je možné dosiahnuť stanovením podmienky, že vrcholy v poradí $u_N=N_k$, $v_N=N_k$ a $w_N=N_k$ budú rozmiestnené v jednotnom smere (napr. v protismere hodinových ručičiek) a bod $w_N=N_k$ bude ležať oproti spoločnej makro hrane. V takom prípade pre makro hranu platí $w_N=0$.



Obr. 5.16 Efekt „hviezdic“ a ich vplyv na tvar vrstevníc

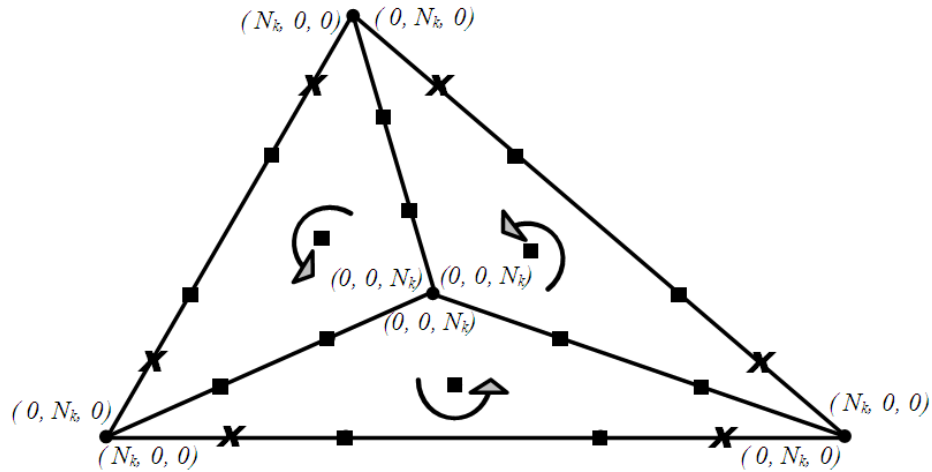
Vľavo pred úpravou, vpravo po úprave. Sub trojuholníky sú znázornené bodkovane, mikro trojuholníky plnou a vrstevnice hrubou čiarou

Na makro hranu potom možno pridať bod $b(u_A, v_A, w_A)$, ktorý sa nachádza v strede medzi prvým a druhým interpolovaným bodom a bod $b(u_B, v_B, w_B)$ medzi predposledným a posledným bodom:

$$u_A = \frac{1}{2N_k} \quad v_A = \frac{(2N_k)-1}{2N_k} \quad w_A = 0 \quad [5.59a]$$

$$u_B = \frac{(2N_k)-1}{2N_k} \quad v_B = \frac{1}{2N_k} \quad w_B = 0 \quad [5.59b]$$

Základnou otázkou pri vyhladzovaní spojitého plátu je zistiť optimálnu úroveň vyhladenia pre celú TIN. Najčastejšou voľbou hodnoty LoD je globálna konštanta. Táto voľba však spôsobuje zbytočné zahustenie pôvodnej triangulácie na lineárnych formách a môže ju podceňovať na extrémne krivých formách, čo sa odrazí na tvare vrstevníc. Inou možnosťou je voliť LoD lokálne, čiže zvlášť pre každý mikro trojuholník podľa vopred zadaných kritérií. Nasledujúca časť opisuje algoritmus, ktorý táto práca predstavuje ako prototyp a definuje LoD ako funkciu odchýlok normál trojuholníkov.



Obr. 5.17 Organizácia vrcholov mikro trojuholníkov podľa barycentrických súradníc. Vrcholy (krúžky) so súradnicami (u_N, v_N, w_N) v protismere hodinových ručičiek, interpolované body podľa $LoD=3$ (štvorčeky), extra pridané body (krížiky)

5.6.1 Uhlovo závislá úroveň vyhladenia

Súvislý povrch so spojitosťou C^1 , ako už bolo povedané, zachováva na svojich hranách hodnotu prvej derivácie. Preto vkladáním nových bodov a teda vytváraním menších a menších sub trojuholníkov v tesnej blízkosti hrany spôsobuje, že odchýlka ich normál na hrane sa minimalizuje.

Práca ponúka algoritmus, ktorého základnou úlohou je vypočítať vhodnú lokálnu mieru vyhladenia. Jeho kritériom je uhol α , ktorý zvierajú normály susedných sub trojuholníkov ležiacich na pôvodných makro hranách (obr. 5.18):

$$\alpha_k = \arccos(\vec{n}_{ik} \cdot \vec{n}_{jk}) ; i \neq j ; 1 \leq k \leq N_k , \quad [5.60]$$

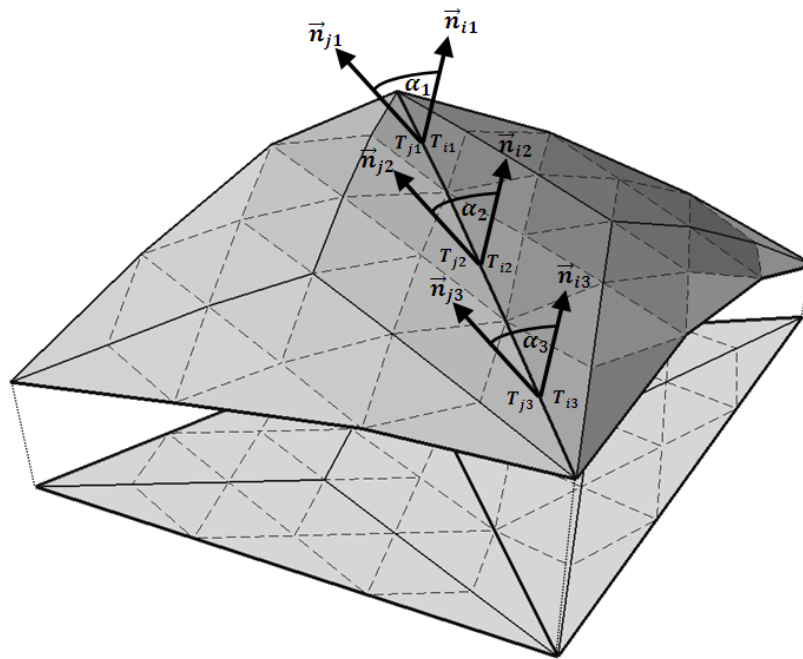
kde α_k je uhol, ktorý zvierajú jednotkové normály \vec{n}_{ik} a \vec{n}_{jk} susedných sub trojuholníkov T_{ik} a T_{jk} , ktoré spadajú pod mikro trojuholníky T_i a T_j zdieľajúcich makro hranu, takže každý je z iného makro trojuholníka, k je spoločný index dvojice sub trojuholníkov, N_k je počet týchto dvojíc. Úlohou algoritmu je dopracovať sa pre každú makro hranu k takému N_k , pre ktoré platí:

$$\forall \alpha_k < \alpha_{max} ; 1 \leq k \leq N_k , \quad [5.61]$$

kde α_{max} je zvolená maximálna hodnota uhlu, ktorý môžu uvedené normály zvierat.

Pre automatické testovanie uhlov α_k je nutné pre každú dvojicu testovaných mikro trojuholníkov stanoviť fixné označenie vrcholov a k nim príslušné barycentrické súradnice (popísané v podkap. 5.6). V takom prípade budú mať body na makro hrane náležiacej obom mikro trojuholníkom vždy vymenené súradnice u a v , súradnica w ostane rovnaká. Takto je možné všetky dvojice sub trojuh. vyjadriť pomocou k a N_k :

$$\begin{aligned} u_{Nk1} &= N_k - (k - 1) & u_{Nk2} &= N_k - k & u_{Nk3} &= N_k - k \\ v_{Nk1} &= N_k - u_{N1} & v_{Nk2} &= N_k - u_{N2} & v_{Nk1} &= N_k - (u_{N2} + 1) \\ w_{Nk1} &= 0 & w_{Nk2} &= 0 & w_{Nk3} &= 1 \end{aligned} \quad [5.62]$$



Obr. 5.18 Uhol zvieraný normálami ako kritériu vyhladenia plátov
Notácia totožná s [5.60]

Z týchto barycentrických súradníc môžeme vyjadriť hľadané dvojice sub trojuholníkov:

$$T_{ik} = [A_k, B_k, C_k] \quad T_{jk} = [B_k, A_k, D_k] \quad , \quad [5.63]$$

pričom po aplikovaní [5.57] na [5.63] platí:

$$\begin{aligned} A_k &= u_{k1} A + v_{k1} B + w_{k1} C & B_k &= u_{k2} A + v_{k2} B + w_{k2} C & [5.64] \\ C_k &= u_{k3} A + v_{k3} B + w_{k3} C & D_k &= v_{k3} A + u_{k3} B + w_{k3} D \quad , \end{aligned}$$

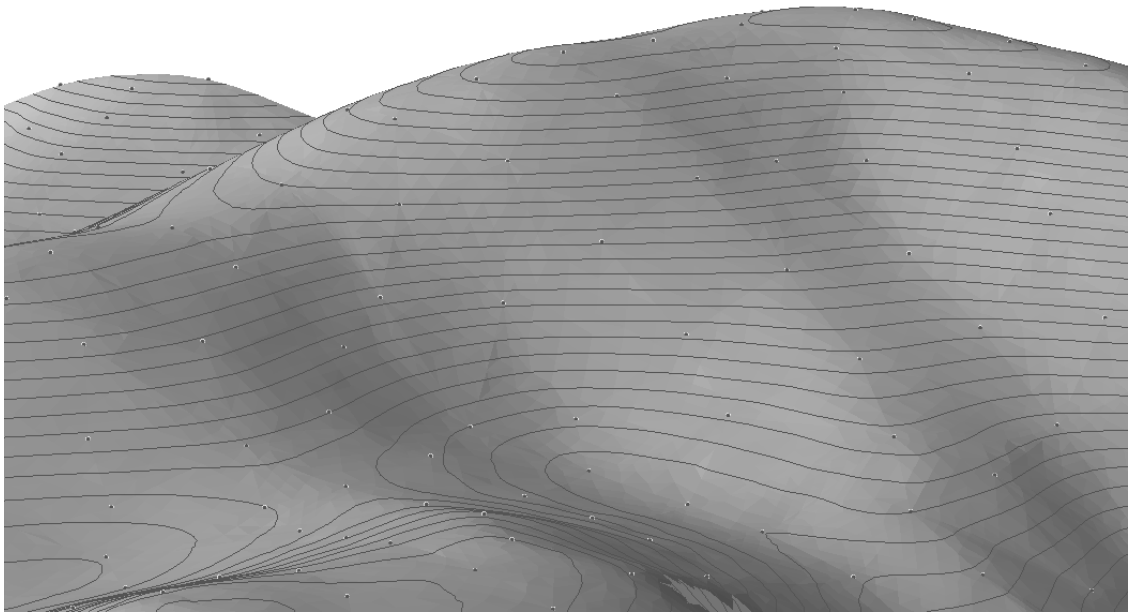
kde

$$T_i = [A, B, C] \quad T_j = [B, A, D] \quad .$$

Tento algoritmus testuje odchýlku normál na každej makro hrane. Pri lineárnych formách je odchýlka minimálna a LoD ostane na nižšom čísle, kým na krivých formách LoD narastá, až kým odchýlka neklesne pod stanovené kritérium, čím vzniká predpoklad vyhladenia vrstevníc.

Tento spôsob odvodzovania má za následok, že vrámci jedného makro trojuholníka môže mať každý mikro trojuholník inú hodnotu LoD. Preto treba každej mikro hrane (náležiacej práve dvom mikro trojuholníkom) priradiť pre väčšiu presnosť väčšiu hodnotu LoD z oboch susedov, ktorí ju vytvárajú.

Toto kritérium uhla α sa netestuje na lomových hranách ani na hranách na konvexnej obálke, v takom prípade daný mikro trojuholník prevezme LoD od susedného mikro trojuholníka vrámci toho istého makro trojuholníka s vyššou LoD hodnotou. Ukážka tohto modelu je znázornená na obr 5.19.



Obr. 5.19 Ukážka povrchu a vrstevníc s uhlovo závislou úrovňou vyhladenia.

KAPITOLA 6

Geomorfologická interpolácia vrstevníc

Vrstevnice môžu vzniknúť interpoláciou nad rastrovými alebo vektorovými dátami. Pri vektorových dátach sa zväčša jedná o nepravidelné bodové pole, na ktoré sa aplikuje triangulačný algoritmus, čím sa vytvorí TIN a ten sa následne lineárne interpoluje. Takto vzniknuté vrstevnice bývajú kvôli nepostačujúcej hustote bodového poľa spravidla lomené. Jedným z riešení je použitie vyhladzovacieho algoritmu, ako napr. vyhladzovanie priemerovaním bodov, so zadaným dĺžkovým krokom alebo s využitím aproximačných alebo interpolačných kriviek. Vyhladzovanie však častokrát vedie k dodatočným chybám, najčastejšie k pretínanie línií, čo je pri vrstevniciach neprípustné. (Bayer, 2008).

Nevýhodou využitia vyhladzovacích algoritmov je tá, že pri vyhladzovaní sa už neberie ohľad na vstupné body, operuje sa len s tvarom vrstevníc podľa kritérií hladkosti, čím môže dôjsť k značným polohovým odchýlkam. Pri interpoláciách s využitím pravidelnej mriežky je základnou nevýhodou práve fakt, že mriežka je pravidelná. Reliéf na zakrivených formách si vyžaduje hustejšie bodové pole než reliéf na lineárnych formách, čo raster neberie do úvahy. Navyše kvalita výstupu závisí aj na výbere interpolačného algoritmu na tvorbu pravidelnej mriežky.

Práca si dala za cieľ ponúknuť iný prístup pri generovaní vrstevníc. Algoritmus popísaný v predošlej kapitole je navrhnutý tak, aby pôvodnú TIN primerane vyhladil, čím sa vytvorí nový polyedrický model, ktorý viac prilieha k plátovému a následne tento nový model lineárne interpoloval. Možno hovoriť o približnom výpočte geomorfologickej (nelineárnej) interpolácie, exaktným riešením by bolo priamo pretínať kubické pláty rovinami.

6.1 Lineárna interpolácia nad TIN

Zahustená sekundárna TIN je pripravená na lineárnu interpoláciu vrstevníc, pri ktorej sa predpokladá, že jednotlivé trojuholníky tvoria plochy istého sklonu a je možné ich rezať rovinami o konštantných nadmorských výškach v pravidelnom rozostupe, čo je štandardná metóda. Vrstevnica generovaná z TIN je lomená línia, ktorá sa láme na hranách trojuholníkov. Ide o test vzájomnej polohy trojuholníkov a vodorovnej roviny v priestore Testovať treba zvlášť každý trojuholník.

Základným vstupným parametrom je nadmorská výška vrstevnice Z_0 , ktorá predstavuje rovinu ρ_0 rovnobežnú s rovinou xy v danej výške. Druhým vstupom sú tri vrcholy trojuholníka:

$$A=[x_A, y_A, z_A]; B=[x_B, y_B, z_B]; C=[x_C, y_C, z_C] . \quad [6.1]$$

Úlohou algoritmu je, v prípade, že existuje, nájsť spojnicu bodov

$$F=[x_F, y_F, Z_0]; G=[x_G, y_G, Z_0] \quad [6.2]$$

o známej výške Z_0 na hranách trojuholníka, v ktorých daná rovina pretína rovinu trojuholníka. Podľa Bayer, 2008 môže v praxi nastať celkovo 10 prípadov vzájomnej polohy roviny a trojuholníka, pre naše potreby ich môžeme rozdeliť do 3 skupín:

1. rovina trojuholník nepretína

$$\text{a) } z_A, z_B, z_C < Z_0, \quad \text{b) } z_A, z_B, z_C > Z_0, \quad [6.3]$$

2. rovina trojuholník pretína aspoň v jednom bode

$$\begin{aligned} \text{a) } z_A, z_B < Z_0 \wedge z_C = Z_0, & \quad \text{d) } z_A < Z_0 \wedge z_B, z_C = Z_0, \\ \text{b) } z_A, z_B > Z_0 \wedge z_C = Z_0, & \quad \text{e) } z_A > Z_0 \wedge z_B, z_C = Z_0, \\ \text{c) } z_A < Z_0 \wedge z_B > Z_0 \wedge z_C = Z_0, & \quad \text{f) } z_A, z_B, z_C = Z_0, \end{aligned} \quad [6.4]$$

3. rovina trojuholník pretína práve v dvoch hranách

$$\text{a) } z_A, z_B < Z_0 \wedge z_C > Z_0, \quad \text{b) } z_A, z_B > Z_0 \wedge z_C < Z_0. \quad [6.5]$$

Rozdelenie do týchto troch skupín vychádza práve z testu, ktorý môžeme aplikovať na jednotlivé hrany trojuholníka:

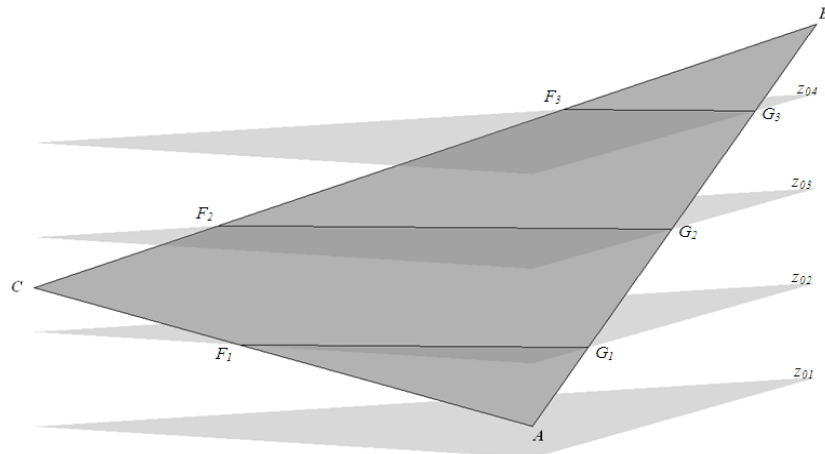
$$\begin{aligned} h_A: \quad s_A &= (Z_0 - z_B)(Z_0 - z_C), \\ h_B: \quad s_B &= (Z_0 - z_C)(Z_0 - z_A), \\ h_C: \quad s_C &= (Z_0 - z_A)(Z_0 - z_B), \end{aligned} \quad [6.6]$$

kde h_A, h_B, h_C sú hrany oproti príslušným bodom a prislúchajú im súčiny s_A, s_B, s_C , ktorých hodnotu treba testovať. Prípad pre h_A :

$$s_A \begin{cases} \text{a) } > 0 & h_A \cap \rho_0 = \emptyset \\ \text{b) } = 0 & h_A \cap \rho_0 = B \vee h_A \cap \rho_0 = C \\ \text{c) } < 0 & h_A \cap \rho_0 = F \vee h_A \cap \rho_0 = G \end{cases} \quad [6.7]$$

Prvú skupinu prípadov nie je nutné riešiť, pre všetky tri hrany vyjde možnosť a) zo vzťahu [6.7]. Rovnako jednoznačná je tretia skupina, kedy dvom hranám vyjde možnosť c) a jednej hrane možnosť a) z toho istého vzťahu. Len v takomto prípade má zmysel hľadať priesečnicu (obr 6.1).

Problematická je však druhá skupina, kedy vodorovná rovina pretína aspoň jeden z vrcholov. Vrstevnica je spojitá línia, ktorá sa na žiadnom mieste nevetví, čo možno docieľiť práve tým, že bude pretínať len hrany a nie vrcholy. V prípade, že vrstevnica pretne vrchol trojuholníka, môže byť jej ďalšie smerovanie pri automatizovaných výpočtoch nejasné a komplikované kvôli vetveniu.



Obr. 6.1 Pretínanie trojuholníka rovinami pri lineárnej interpolácii

Jedným z riešení je v takom prípade úprava nadmorskej výšky vrcholu (vrcholov) o konštantu ε , ktorej hodnota je veľmi blízka nule (použitá bola hodnota $\varepsilon = 10^{-3}$). Výsledkom bude, že žiaden z vrcholov nebude pretnutý a teda prípady z druhej skupiny sa prerozdedia do prvej a tretej. Výhodou tohto riešenia je jeho jednoduchá implementácia a jednoznačnosť za cenu zanedbateľnej zmeny vstupných dát. Jeho nevýhodou je fakt, že môže nastať situácia, kedy sa vrstevnica bude otáčať okolo vrcholu. Tento prejav síce nemusí byť voľným okom viditeľný, avšak fyzicky budú tieto lomové body vo vrstevnici zapísané. Toto riešenie však nerieši situáciu, keď sa vrchol s nadmorskou výškou interpolovanej vrstevnice nachádza v sedle, vtedy sa pri nízkom ε k nemu vrstevnice priblížia natoľko, že graficky splývajú. Pri väčšom ε však dôjde k výraznému posunu vrstevníc.

V prípade že trojuholník je zložený z práve dvoch hrán pre ktoré platí [6.7] c), rovina pretína trojuholník v bodoch F a G . V prípade popísanom pre dvojicu hrán h_C a h_B , tak platí podobnosť trojuholníkov premietnutých do rovín xz a yz , z ktorých je možné odvodiť polohu bodov F a G :

$$\begin{aligned}
 h_C: \quad \frac{x_B - x_A}{z_B - z_A} &= \frac{x_F - x_A}{Z_0 - z_A} \Rightarrow x_F = \frac{x_B - x_A}{z_B - z_A}(x_F - x_A) + x_A & [6.8] \\
 h_C: \quad \frac{y_B - y_A}{z_B - z_A} &= \frac{y_F - y_A}{Z_0 - z_A} \Rightarrow y_F = \frac{y_B - y_A}{z_B - z_A}(y_F - y_A) + y_A \\
 h_B: \quad \frac{x_C - x_A}{z_C - z_A} &= \frac{x_G - x_A}{Z_0 - z_A} \Rightarrow x_G = \frac{x_C - x_A}{z_C - z_A}(x_G - x_A) + x_A \\
 h_B: \quad \frac{y_C - y_A}{z_C - z_A} &= \frac{y_G - y_A}{Z_0 - z_A} \Rightarrow y_G = \frac{y_C - y_A}{z_C - z_A}(y_G - y_A) + y_A .
 \end{aligned}$$

Vrstevnica je najčastejšie reprezentovaná ako spojitá sekvencia bodov, s priestorovými súradnicami x a y , ktorej je priradený atribút nadmorskej výšky z , podstatné je práve poradie bodov. Algoritmov na generovanie vrstevníc lineárnu

interpoláciou z TIN existuje niekoľko, niektoré popisuje van Krevelde, 1996.

Jednoduchší ale pomalší spôsob je založený na generovaní po vrstevniciach. Tento využíva topologickú štruktúru TIN, kedy sa pre každú rovinu, ktorou chceme model pretínať, prechádza každým trojuholníkom. Keď algoritmus narazí na prvý trojuholník, ktorý rovinu pretína, založí novú vrstevnicu, a prechádza postupne po susedných trojuholníkoch, ktoré rovina pretína podľa spoločnej pretnutej hrany a pridáva tak do vrstevnice body.

Zložitejší, avšak efektívnejší spôsob je založený na generovaní po trojuholníkoch a pozostáva z dvoch krokov. V prvom sa prejde celou TIN jedenkrát, v každom trojuholníku sa určia segmenty zo všetkých rovín, ktoré ho pretínajú a tie sa ukladajú do štruktúry intervalového stromu zvlášť pre každú rovinu podľa koncového bodu segmentu. Koreňom stromu je stredná hodnota všetkých intervalov, rozdeľuje množinu na dve podmnožiny, ktoré sa na uzloch v ďalších úrovniach stromu ďalej delia a v listoch sa nachádzajú jednotlivé segmenty. V druhom kroku sa prechádzajú tieto stromy za účelom pospájania segmentov do sekvencií bodov určujúcich vrstevnice.

V tejto práci bol použitý prvý algoritmus práve pre jednoduchosť jeho implementácie. Bližšie je popísaný v nasledujúcej časti.

6.1.1 Algoritmus založený na topológii TIN

Horná časová zložitosť tohto spôsobu interpolácie vrstevníc je $O(N_T N_Z)$, kde N_T je počet trojuholníkov v TIN a N_Z je počet rovín, ktorými chceme TIN pretínať. Počet rovín závisí od od rozpätia nadmorskej výšky vstupných bodov triangulácie a od intervalu, v ktorom sa majú generovať:

$$N_Z = \frac{(Z_{max} - Z_{min})}{\Delta Z}, \quad [6.9]$$

kde Z_{min} a Z_{max} predstavujú vrstevnice s minimálnou a maximálnou nadmorskou výškou:

$$Z_{min} = \left[(z_{min} / \Delta Z) + 1 \right] \Delta Z \quad Z_{max} = (z_{max} / \Delta Z) \Delta Z, \quad [6.10]$$

kde z_{min} resp. z_{max} je nadmorská výška najnižšie resp. najvyššie položeného bodu triangulácie a symbol $/$ predstavuje celočíselné delenie.

Proces generovania vrstevníc je znázornený v diagrame 6.1 a na obr. 6.2. Pre lepšiu orientáciu sa k diagramu vzťahujú aj názvy častí a kódy v zátvorkách v nasledujúcom texte. Algoritmus je vnoreným cyklom v ktorom sa pre každú rovinu o nadmorskej výške Z_0 prechádza celou TIN, pričom sa priamo generujú spojité vrstevnice. Vstupom sú už spomínaná TIN, nadmorská výška najnižšie a najvyššie položeného vrcholu a rozostup, čiže interval vrstevníc (*INPUT*).

V úvode (*Initialization*) sa vytvorí prázdny zoznam vrstevníc a vypočíta najnižšie a najvyššie položená rovina ([6.10]). Nastúpi prvý cyklus (*Contour loop*) pri rovine s najnižšou nadmorskou výškou (*A*), do ktorého sa vzápätí vnorí druhý cyklus (*Triangle loop: iterative mode*) v ľubovoľnom trojuholníku (*B*). Postupne sa testuje

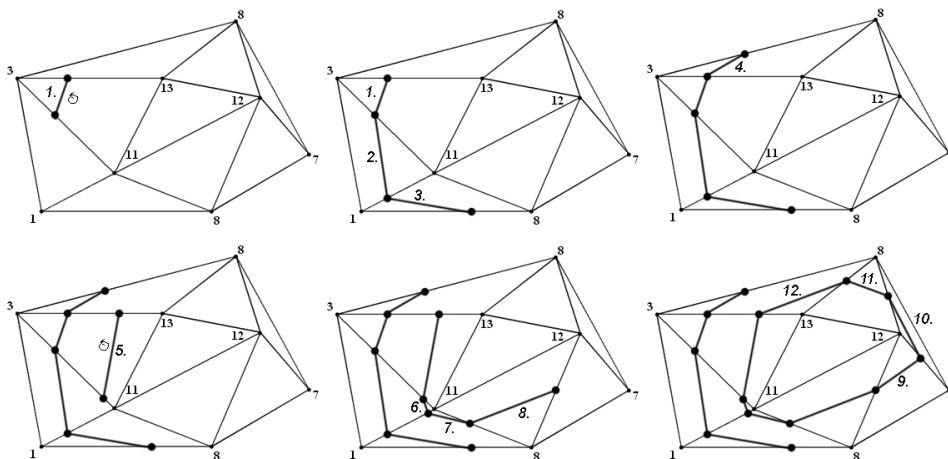
na všetkých trojuholníkoch, či ho rovina pretína ([6.6] – [6.7]). Pri prvom pretnutí (*C*) sa vytvorí nová vrstevnica, z hľadiska dátových štruktúr sa jedná o obojsmerný list bodov. Vypočítajú sa priesečníky ([6.8]) a vložia sa do prázdneho zoznamu bodov tvoriacich vrstevnicu, čím vznikne jej prvý segment. Dôležité je pritom poradie ich zápisu v proti smere hodinových ručičiek vrámci trojuholníka. Pointer na prvý pretnutý trojuholník sa uloží do pamäti a zavedie sa smer generovania vrstevnice v protismere hodinových ručičiek.

V tomto momente sa zmení režim algoritmu a nasledujúce trojuholníky sa prechádzajú s využitím topologických vzťahov (*Triangle loop: topological mode*). Trojuholníky, ktoré sa od tohto momentu pretnú, je nutné označiť ako navštívené, aby po ukončení aktuálnej vrstevnice nedochádzalo k ich opätovnému pretínaniu. Navštívi sa vždy ten susedný trojuholník, ktorý zdieľa s aktuálnym pretnutú hranu, čiže na ktorej sa vygeneroval posledný bod vrstevnice (*E*). Dôjde k nájdeniu druhej hrany, ktorú rovina v trojuholníku pretína a pridaní priesečníka na koniec zoznamu.

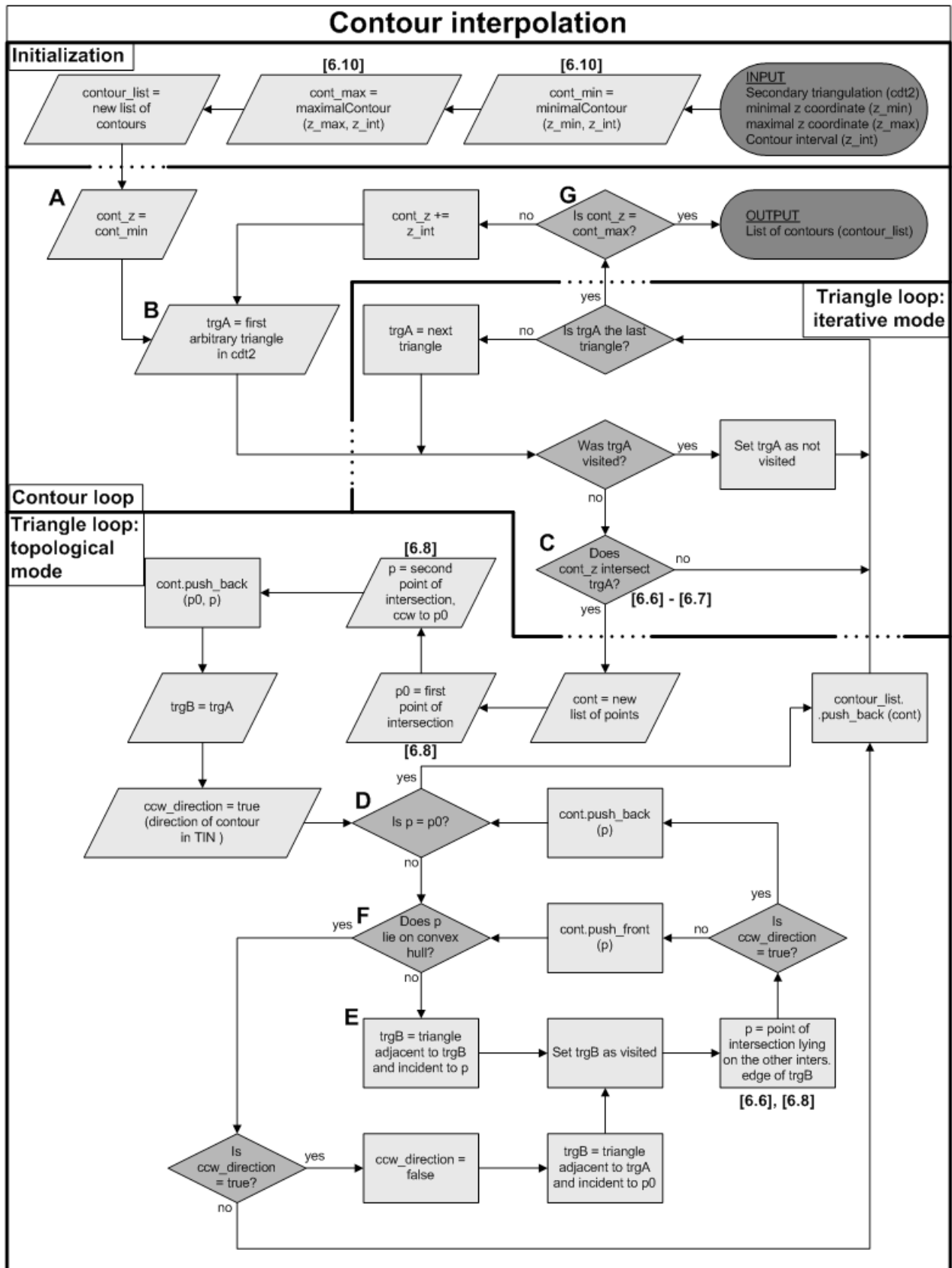
V tomto druhom režime je nutné testovať, či nedošlo k uzatvoreniu vrstevnice (čiže či posledný pridaný bol nie je zároveň prvým) a či vrstevnica nenarazila na okraj triangulácie. V prvom prípade (*D*) sa vrstevnica uzavrie, pridá do zoznamu vrstevníc a cyklus sa vráti do pôvodného režimu. V druhom prípade (*F*) ostane vrstevnica otvorená, algoritmus sa vráti na prvý pretnutý trojuholník a vydá sa opačným smerom, pričom nové priesečníky pridáva na začiatok zoznamu. Tento proces trvá, až kým sa opäť nenarazí na obálku TIN.

Po návrate do pôvodného režimu je nutné pokračovať v testovaní pretnutia toho trojuh., ktorý nasleduje za tým, pri ktorom došlo k zmene režimu, aby boli s istotou testované všetky trojuholníky, pretože jedna rovina môže v triangulácii vytvoriť viac vrstevníc. Nutne pri tom dôjde k navštíveniu už pretnutých trojuholníkov, tie sa duplicitnému testovaniu vyhnú vďaka ich označeniu, ktoré sa v tom momente odstráni.

Pokiaľ dôjde k ďalšiemu pretnutiu, založí sa nová vrstevnica a opäť algoritmus prepne do topol. režimu. Ak sa však prejdú všetky trojuholníky, rovina sa navýši o zadaný interval (*G*) a dochádza k novému prechádzaniu celej TIN. Po prejdení všetkých rovín dôjde k ukončeniu algoritmu, ktorý vráti zoznam všetkých vrstevníc (*OUTPUT*).



Obr. 6.2 Proces generovania vrstevníc s využitím topológie



Diag. 6.1 Proces generovania vrstevnic s využitím topológie

KAPITOLA 7

Implementácia

Siedma kapitola popisuje spôsob implementácie algoritmov uvedených v piatej kapitole, približuje technologické pozadie. Na implementáciu programu na generovanie hladkých vrstevníc bol použitý objektovo orientovaný jazyk C++ kvôli možnosti využitia knižnice geometrických funkcií a dátových štruktúr CGAL, ktorá je popísaná v prvej podkapitole.

Druhá, najdôležitejšia podkapitola popisuje štruktúru a fungovanie programu z implementačného hľadiska, ide o konkrétny, zvolený spôsob riešenia aplikácie a spôsob prepojenia jednotlivých algoritmov opísaných v metodike.

7.1 Knižnica CGAL

CGAL (Computational Geometry Algorithms Library) je Open-Source knižnicou geometrických algoritmov pre programovací jazyk C++. Jej cieľom je poskytnúť jednoduchý prístup k účinným a spoľahlivým algoritmom. CGAL sa používa v rôznych oblastiach, ktoré potrebujú geometrické výpočty, ako napríklad: počítačová grafika, vedecké vizualizácie, počítačovo podporované navrhovanie a modelovanie, geografické informačné systémy, molekulárna biológia, lekárske prístroje, robotika a plánovanie pohybu, generácie sietí, numerické metódy...

CGAL ponúka dátové štruktúry a algoritmy ako triangulácia (2D triangulácie bez alebo s obmedzením, Delaunay-ho triangulácie v 2D a 3D), Voronoi-ove diagramy v 2D a 3D, 2D aditívne vážené Voronoi-ove diagramy), práca s polygónmi (Boolean operácie, offsety, skeletony), polyédrami, organizovanie kriviek a ich aplikácie (2D a 3D obálky, Minkowského suma), generácie sietí (2D Delaunay-ho sieť a 3D povrch a objem sietí), alfa tvary, konvexný obal, vyhľadávacie štruktúry (stromy pre najbližšie vyhľadávanie), interpolácia (prirodzený sused), analýza tvaru, vzdialenosti... Táto práca využíva algoritmy a dátové štruktúry týkajúce sa 2D triangulácií.

Distribúcia knižnice CGAL prebieha pod licenciou GNU-GPL a GNU-LGPL, domovská stránka projektu je

www.cgal.org

Pre plnohodnotné využívanie CGAL-u je nutné mať nainštalovaný jeden z podporujúcich kompilátorov podľa operačného systému (GNU g++, INTEL c++ alebo MS Visual c++), multiplatformný systém CMake na generovanie tzv. „makefile“

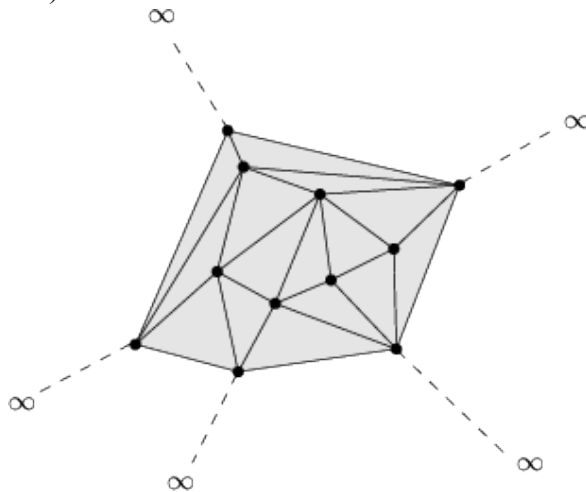
určujúceho závislosti medzi zdrojovými kódmi a ďalšie voľne dostupné knižnice, na ktorých CGAL stavia (Boost, STL, Qt...).

Poslednou doposiaľ vydanou verziou je CGAL 4.0. V počiatočnom štádiu programovania a písania tejto práce však ešte nebola dostupná, preto je v nej použitá predošlá verzia CGAL 3.9, obe verzie sa však v oblasti 2D triangulácií, ktorá je v práci využitá, nelíšia. Práca využíva kompilátor MS Visual c++ 2008, ktorý je podmienený registráciou, avšak voľne dostupný.

7.1.1 Triangulačná dátová štruktúra

2D Triangulačná dátová štruktúra (TDS) je štruktúra navrhnutá na manipuláciu s reprezentáciou dvojrozmerných triangulácií. Je založená na explicitnom vyjadrení vrcholov a stien, hrany je možné vyjadriť len implicitne prostredníctvom vzťahov medzi vrcholmi a stenami. Je možné ju teda chápať ako úložisko vrcholov a stien a vzťahov medzi nimi (výskyt a príľahlosť).

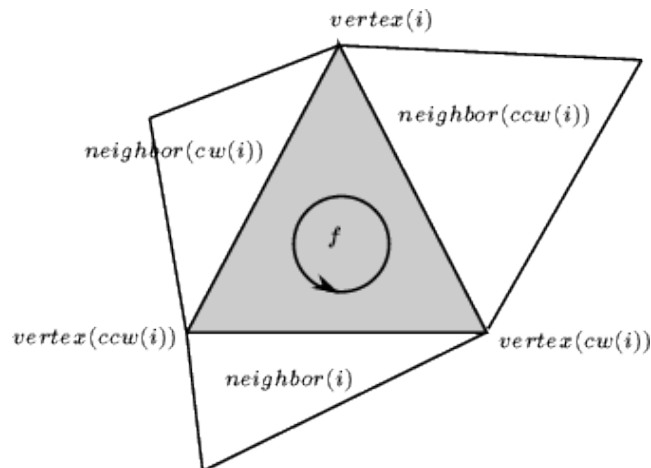
Trianguláciou diskretného bodového poľa vzniká štruktúra, ktorú možno rozdeliť na konečnú a nekonečnú časť. Konečná je uzavretá v konvexnej obálke zo vstupných bodov, nekonečná sa nachádza mimo nej. Základom nekonečnej časti obsahuje fiktívne vrcholy. Zároveň každá stena, ktorá obsahuje fiktívny vrchol, je fiktívnou stenou, rovnaké je to s hranami. V takom prípade každý konečný trojuholník má práve troch susedov, tie na konvexnej obálke majú jedného fiktívneho. Táto štruktúra umožňuje jednoduchú identifikáciu okrajových vrcholov, hrán a stien, čo bude neskôr užitočné (obr. 7.1).



Obr. 7.1 Konečná (šedá) a nekonečná časť triangulačnej dátovej štruktúry

Zdroj obr.: Yvinec, 2002

Každá trojuholníková stena umožňuje prístup k jeho trom vrcholom a k jeho trom susedným trojuholníkom. Zároveň každý vrchol umožňuje prístup ku všetkým stenám, v ktorých sa vyskytuje. 3 vrcholy trojuholníka sú indexované číslami 0, 1 a 2 a organizované v protismere hodinových ručičiek. Susedné trojuholníky sú indexované obdobne, sused s indexom 0 je proti vrcholu s indexom 0 atď. (obr 7.2).



Obr. 7.2 Organizácia TDS v CGAL-e

Vrcholy (*vertex*) a susedia (*neighbor*) s indexom (*i*) k trojuholníku (*f*)
v smere (*cw*) a v protismere (*ccw*) hodinových ručičiek

Zdroj obr.: Yvinec, 2002

CGAL definuje TDS triedou `CGAL::Triangulation_data_structure_2<Vb,Fb>`, kde *Vb* predstavuje bázu vrcholov (Vertex base) a *Fb* bázu stien (Face base). Tieto dve predprogramované triedy umožňujú istú formu flexibility, ktorá spočíva v tom, že môžu obsahovať ďalšie užívateľom definované triedy a teda aj atribúty. Takýmto spôsobom je možné priamo ukladať dodatočné informácie k jednotlivým vrcholom a trojuholníkom, ako napr. normály, kontrolné body a rôzne indikátory opísané v neskorších častiach tejto kapitoly.

Ďalšou dôležitou triedou je samotná triangulácia, ktorá môže byť typu Regular, Delaunay, Constrained a Constrained Delaunay. Pre potreby tejto práce bola definovaná práve Delaunay-ho triangulácia s obmedzením, čiže s povinnými hranami: `CGAL::Constrained_Delaunay_triangulation_2<Gt,Tds,Itag>` (ďalej *CDT*). Trieda *Gt* v nej predstavuje geometrické znaky (Geometric traits). Jedná sa o premietnuté geometrické útvary – jadrá (kernels) – z 3D priestoru do 2D roviny vynechaním súradnice *z*, keďže tá je len atribútom priestorových súradníc *xy*. Zvyšnými východiskovými triedami sú trieda *Tds*, ktorá je TDS popísanou v predošlom odstavci a trieda *Itag* (Exact predicates tag) riešiaci prípady delenia povinných hrán pri ich pretínaní a duplicit.

CDT obsahuje nástroje na konštrukciu a modifikáciu triangulácie metódou rozdeľuj a panuj (Divide and conquer). Pomocou nej a *Tds* možno definovať základné operátory na prístup k vrcholom a hranám: manipulátory (handles), iterátory a cirkulátory.

Prostredníctvom manipulátorov (objekty `Vertex_handle` a `Face_handle`) je možné sa odkazovať na jednotlivé vrcholy a steny prostredníctvom dereferenčných operátorov a tak získať prístupy k súradniciam, atribútom a susedským vzťahom. Pretože hrany nemajú svoje manipulátory, nie je možné sa na ne priamo odkazovať ani uchovávať o nich atribúty, len nepriamo odvádzat' ich súradnice prostredníctvom predošlých manipulátorov. Toto sa javí ako nevýhoda, pretože niektoré atribúty by bolo

jednoduchšie uchovávať len pre hrany. Konkrétnym príkladom je vektor sklonu mikro ťažísk na spoločnej makro hrane (\vec{v}^1 z [5.35]) alebo aj kontrolné body, ktoré sú pre jednu hranu rovnaké a ktorá prislúcha dvom trojuholníkom ([5.19]).

Iterátory sú operátory prechádzajúce postupne celou sadou vrcholov, stien alebo hrán, je možné ich definovať pre konečné alebo všetky útvary (vrátane nekonečných). Pre vrcholy a steny sú kompatibilné s ich manipulátormi. Cirkulátory sú definované ako operátory na vyhľadávanie stien a hrán (alebo samostatne ich vrcholov) incidentným k akémukoľvek vrcholu. Sú vhodné napr. pri odhadovaní dotykovej roviny vo vrchole vzhľadom na normály okolitých trojuholníkov.

7.2 Štruktúra aplikácie

Aplikácia na tvorbu hladkých vrstevníc geomorfologickou interpoláciou TIN z nepravidelného bodového poľa je rozdelená v zhode s diagramom 7.1 na úvodnú časť, 4 jadrové časti a výstupovú časť:

0. Definícia vstupov

Užívateľ je vyzvaný prostredníctvom konzoly na zadanie cesty k vstupným dátam (nepravidelné bodové pole, povinné hrany a lomové línie) a voľbu parametrov aplikácie (váha normál, typ interpolantu, typ plátu, rozstup vrstevníc...)

1. Primárna triangulácia vstupných dát

Delaunay-ho triangulácia s obmedzeniami (povinnými hranami), ide najmä o vstavanú funkciu knižnice CGAL

2. Odhad dotykových rovín

Odhad vo vrcholoch TIN na základe zvolenej váhy. Počas prechádzania TIN dochádza aj k detekcii lomových hrán a určeniu polohy kontrolných bodov pre neskoršie účely

3. Interpolant

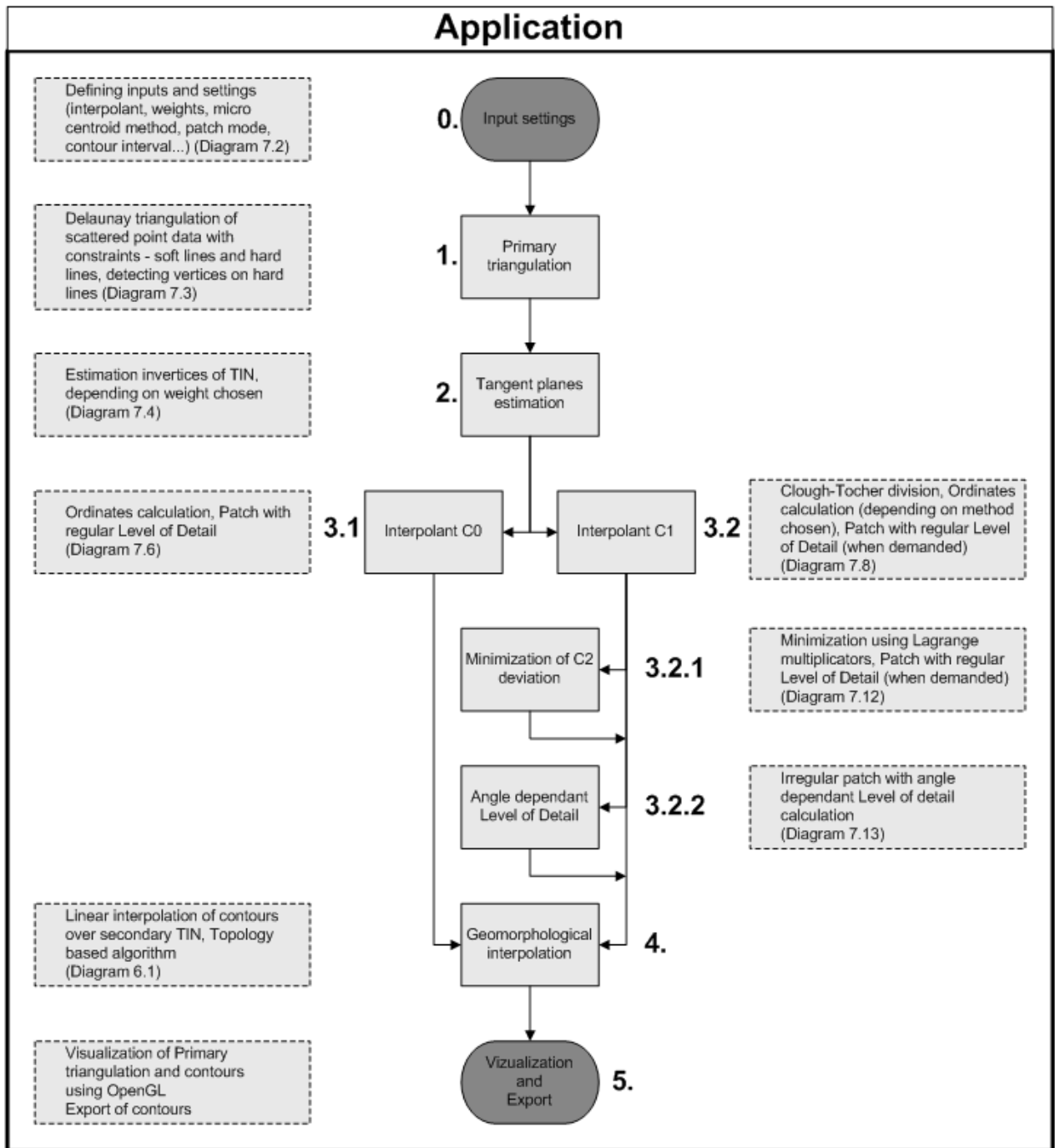
Podľa voľby spojitosti dôjde k dopočtu kontrolných bodov. Pri C^0 interpolante (3.1) sa jedná o rovnomerný plát bez ďalších možností, pri C^1 interpolante (3.2) je možné zvoliť si metódu určenia mikro ťažísk, minimalizáciu odchýlky C^2 nespojitosti (3.2.1) a rovnomerný alebo uhlovo závislý nerovnomerný plátový model (3.2.2).

4. Geomorfologická interpolácia vrstevníc a ich export

De facto sa jedná o lineárnu interpoláciu sekundárnej TIN, ktorá je oproti primárnej zahustená o interpolované body z plátu. Použitý je algoritmus založený na topológii TIN.

5. Vizualizácia a export vrstevníc

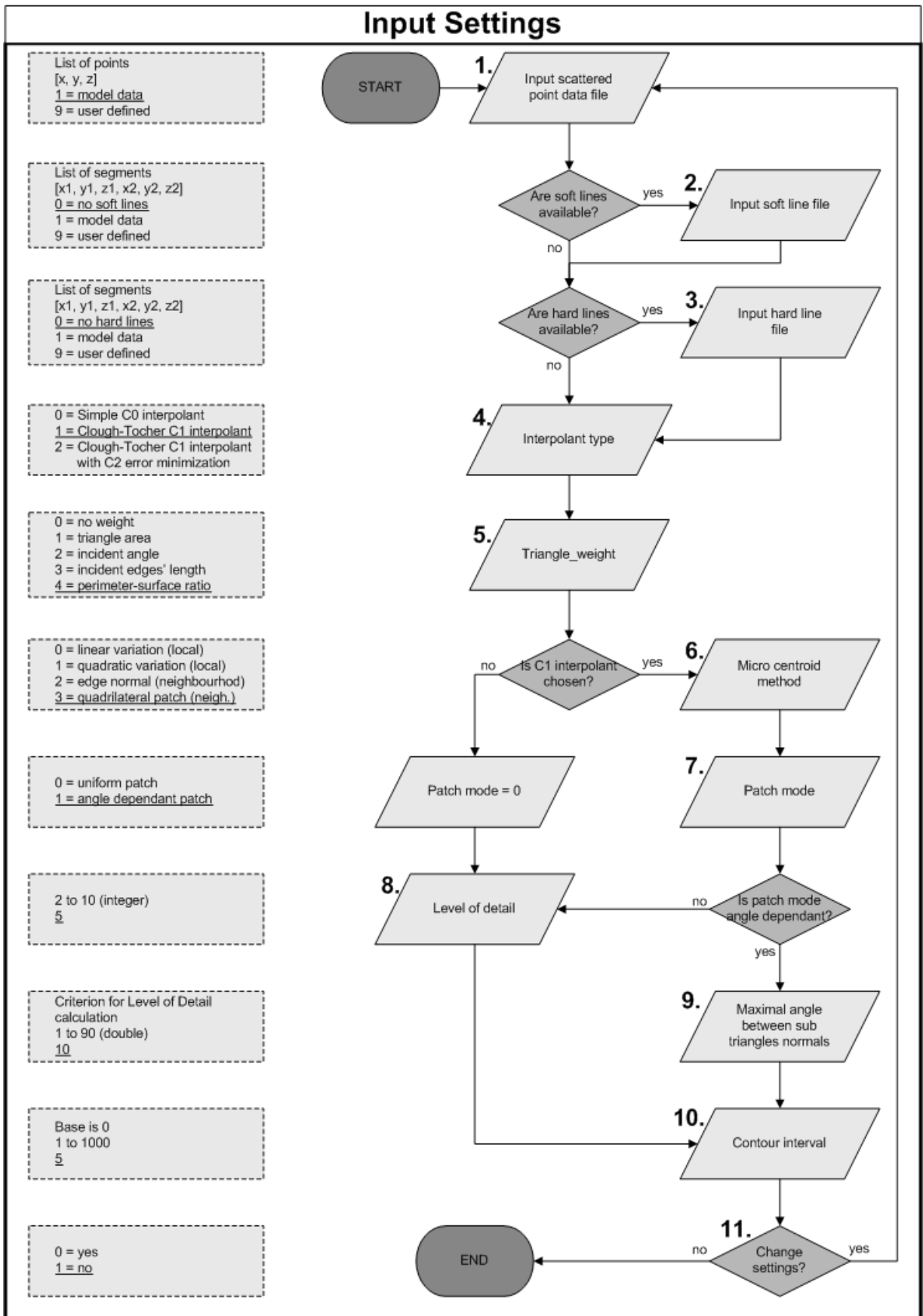
Finálna časť zobrazujúca primárnu TIN a vygenerované vrstevnice farebne podľa nadmorskej výšky.



Diag. 7.1 Štruktúra aplikácie na geomorfologickú interpoláciu vrstevníc nad TIN

O spustení a ukončení jednotlivých častí je užívateľ informovaný konzolou. Pri časovo najnáročnejších procesoch (tvorba plátov, čiže sekundárnej triangulácie a interpolácia vrstevníc) sa vypisuje aj percentuálny priebeh plnenia aktuálnej úlohy.

Jednotlivé časti aplikácie sú popísané v nasledujúcich častiach tejto podkapitoly (okrem interpolácie vrstevníc, ktorá je popísaná samostatne v šiestej kapitole, časti 6.1.1). Každá časť algoritmu (okrem vizualizácie) je pre väčšiu prehľadnosť znázornená procesným diagramom. Pre väčšiu prehľadnosť sa k týmto diagramom vzťahujú aj názvy ich častí a kódy v zátvorkách v popisoch algoritmov.



Diag. 7.2 Definícia vstupných súborov a parametrov

7.2.1 Definícia vstupov

Po spustení aplikácie sa objaví konzola, ktorá užívateľa vyzýva na zadenovanie vstupných súborov ako aj ďalších vstupných parametrov. V súlade s diagramom 7.2 sa podľa ich výberu môže jednať o 8 až 11 krokov, pričom posledným je možnosť potvrdenia alebo zopakovania procesu výberu.

1. vstupné trojrozmerné nepravidelné bodové pole

Jedná sa o bezhlavičkový súbor typu ASCII obsahujúci tri hodnoty súradníc x , y a z , oddelené tabulátorom. Oddelovačom desatinných miest je bodka. Užívateľ má k dispozícii body z etalónovej plochy, tri sady reálnych dát z oblasti Liptova na Slovensku (pahorkatina, vrchovina, hornatina) alebo môže zadenovať cestu k vlastnému súboru.

2. vstupné povinné hrany typu soft line

Ide o ďalší bezhlavičkový ASCII súbor obsahujúci šesť hodnôt x_1 , y_1 , z_1 , x_2 , y_2 a z_2 . Každý záznam predstavuje súradnice počiatočného a koncového bodu povinnej hrany, pričom nemusia na seba nadväzovať. V prípade existencie povinných, ale nelomených línií môže užívateľ zvoliť cestu k povinným líniám typu soft line. Tieto ovplyvnia tvar triangulácie, nezachytávajú však lomy v teréne. K etalónovej ploche sú k dispozícii predurčené hrany.

3. vstupné povinné hrany typu hrad line

Posledný vstupný súbor rovnakého typu ako v 2. bode. Tieto línie však predstavujú ostré lomy v teréne, popísané v podkapitole 5.5. V prípade existencie povinných lomených línií môže užívateľ zvoliť cestu k povinným líniám typu hrad line. Tieto ovplyvnia tvar triangulácie a zachytia lomy v teréne. K talónovej ploche sú k dispozícii predurčené hrany.

4. typ interpolantu

K dispozícii sú tri možnosti:

- a) jednoduchý a rýchly interpolant so spojitosťou C^0 (vid' podkap. 5.2)
- b) zložitejší, zato hladší interpolant C^1 (podkap. 5.3)
- c) C^1 interpolant s minimalizáciou odchýlky C^2 nespojitosti (podkap. 5.4)

5. váha trojuholníka

Jedná sa o typ váhy pri odhade dotykových rovín vo vrcholoch TIN, potrebných k určeniu kontrolných bodov. K dispozícii sú 4 typy váh (prípadne žiadna) podľa [5.25]:

- a) obsah trojuholníka
- b) veľkosti incidentného vnútorného uhlu trojuholníka
- c) prevrátená hodnota súčinu druhých mocnín dĺžok incidentných hrán
- d) pomer obsahu a obvodu trojuholníka

6. metóda určenia mikro ťažisk (len C^1 interpolant)
 - Program ponúka 4 možnosti popísané v časti. 5.3.3
 - a) jednoduchá variácia (lokálna metóda) [5.38]
 - b) kvadratická variácia (lokálna metóda) [5.40]
 - c) normála hrany (susedská metóda) [5.41]
 - d) štvoruholníkový plát (susedská metóda) [5.43] – [5.47]
7. typ plátu
 - a) pravidelný
 - b) nepravidelný (uhlovo závislý, len pre C^1 interpolant)
8. konštantná úroveň vyhladenia (len pre pravidelný plát)

Konštantná hodnota LoD pre celú TIN, max. hodnota je 10 (podkap. 5.6)
9. uhlovo závislá úroveň vyhladenia

Maximálna hodnota uhlu, ktorý zvierajú normály susedných sub trojuholníkov na spoločnej makro hrane [5.60]
10. interval vrstevníc

Rozostup nadmorských výšok sečných rovín, prirodzené číslo
11. potvrdenie výberu

Pri potvrdení výberu dôjde k spusteniu algoritmu so zadanými nastaveniami, v opačnom prípade s celý proces spustí od začiatku

Pre každý krok je vopred nastavená hodnota, ktorú je možné buď potvrdiť alebo manuálne zmeniť. V prípade, že užívateľ zadá neexistujúcu možnosť, program zvolí tú vopred nastavenú. Po manuálnej definícii vstupných dát a parametrov dôjde k automatizovanému procesu.

7.2.2 Primárna triangulácia vstupných dát

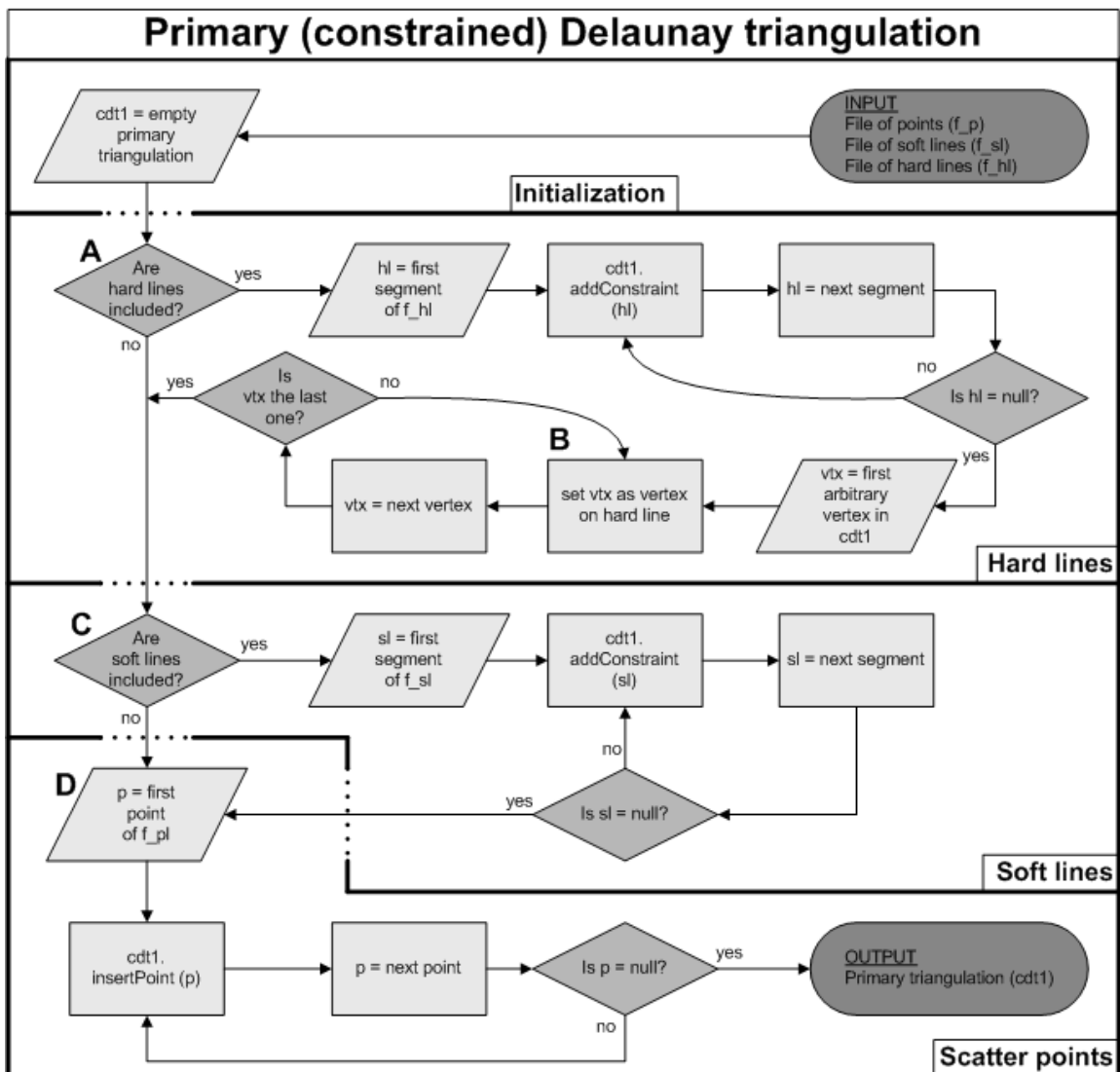
Prvá automatizovaná časť využíva okrem načítania dát prakticky výhradne vstavané funkcie knižnice CGAL. Keďže sa táto práca nesústreďuje na trianguláciu samotnú, ale len na spracovanie jej výsledku, nie je v nej popísaný samotný triangulačný algoritmus. Jedná sa o Delaunay-ho triangulácia, ktorá vytvára trianguláciu s kritériom maximalizácie minimálneho uhlu metódou inkrementálneho vkladania. Táto časť sa sústreďuje na postupnosť procesov za účelom detekcie lomených línií. Schematicky je proces znázornený na diagrame 7.3.

Vstupom sú tri ASCII súbory popísané v predošlej časti (*INPUT*). Ide o vytvorenie prázdnej triangulácie a jej postupné napĺňanie povinnými hranami typov soft line a hrad line a vrcholmi, popri čom sa generujú trojuholníky.

V podkapitole 7.1 bolo uvedené, že v TDS knižnice CGAL nie je možné priamo uchovávať dodatočné informácie o hranách, keďže explicitne ukladá len bázu vrcholov a trojuholníkov, z ktorých sa hrany určujú implicitne. Preto nie je možné pri prechádzaní hranami TIN rozlišovať dva popísané typy povinných hrán a je nutné vyriešiť tento problém iným spôsobom.

V prvom rade sa preto do triangulácie pridávajú povinné lomené hrany, pokiaľ boli užívateľom definované (A). Dôsledkom je, že triangulácia obsahuje zatiaľ len vrcholy patriace povinným hranám. K týmto vrcholom sa preto uloží indikátor príslušnosti k lomeným hranám (B). Následne sa pridajú hrany zo súboru druhého typu povinných hrán (opäť ak boli definované), tieto však nebude nutné neskôr detekovať (C), keďže ovplyvnia len tvar TIN, nie spôsob tvorby plátu nad ňou. V poslednej fáze sa pridajú všetky ostatné body, tento krok je jediný nevyhnutný (D). Výstupom je primára TIN, ktorej priest. usporiadanie ostáva v ďalších fázach rovnaké (OUTPUT). Táto TIN nesie jediné dodatočné informácie, a to indikátory príslušnosti vrcholu k povinnej hrane.

Časová zložitosť triangulácie závisí od rýchlosti vyhľadania trojuholníka, do ktorého novo pridaný bod spadá. Podľa manuálu knižnice CGAL je toto vyhľadávanie implementované heuristickou metódou prechádzok (line walk), ktorej horný odhad zložitosti je uvádzaný ako $O(\sqrt{n})$, kde n je počet trojuholníkov v TIN.



Diag. 7.3 Primárna triangulácia povinných hrán a bodového poľa

7.2.3 Odhad dotkových rovín

Predtým, než nad trianguláciou bude možné definovať sieť kontrolných bodov, ktoré určujú jednotlivé pláty, je nutné určiť dotkové roviny vo vrcholoch TIN, v ktorých leží určitá množina kontrolných bodov ([5.19] pre C^0 interpolant a [5.37] pre C^1 interpolant). Matematicky sa jedná o vzťah [5.24] pre vrcholy, cez ktoré neprechádza lomená línia a [5.52] pre vrcholy ležiace na lomenej línii mimo jej koncových bodov (tento druhý vzťah je zároveň zovšeobecnením prvého). Tieto dve možnosti treba z hľadiska implementácie skombinovať s ďalšou možnosťou, a to pre prípad, že vrcholy ležia na konvexnej obálke TIN. Keďže z primárnej triangulácie máme informácie o tom, či vrchol leží alebo neleží na lomovej hrane (a nie uprostred línie), celkovo môžu nastať štyri rôzne prípady, na ktoré treba pri implementácii s využitím TDS knižnice CGAL brať ohľad:

1. vrchol neleží na konvex. obálke, ani na lomenej hrane (body 2 a 3 z podkap. 5.5)
2. vrchol neleží na konvexnej obálke, ale leží na lomenej hrane
3. vrchol leží na konvexnej obálke, ale neleží na lomenej hrane
4. vrchol leží na konvexnej obálke a leží aj na lomenej hrane

Popis algoritmu odhadu dotkových rovín

Algoritmus berúci do úvahy všetky štyri prípady je znázornený na diagrame 7.4. Vstupom je primárna TIN (čiže výsledok primárnej triangulácie), súbor lomených hrán a užívateľom zadaný kód typu váhy (*INPUT*). Hneď v úvode sa spustí cyklus vrcholov TIN (*Vertex loop*) a pre každý vrchol cirkulátor k nemu incidentných trojuholníkov, ktorý je vnoreným cyklom. Aby sa cirkulátor po prejení všetkých týchto trojuholníkov zastavil, je nutné uchovávať v pamäti prvý trojuholník, ktorý cirkulátor vyberie. Pokiaľ vrchol neleží na okraji TIN, môže byť prvý trojuholník ľubovoľný, v opačnom prípade je nutné pred počítaním dotkovej roviny nájsť taký trojuholník, ktorý v smere hodinových ručičiek susedí s fiktívnou stenou (*Positioning Triangle*).

V úvode cirkulátora (*Circulator initialization*) sa v zmysle [5.52] založí nulový vektor (odhadovaná normála vo vrchole predstavujúca dotkovú rovinu), prvá podmnožina trojuholníkov, dôjde k zavedeniu smeru cirkulácie v protismere hodinových ručičiek (ccw) a spracuje sa prvý trojuholník (*processTriangle*), čím sa cirkulátor dostane do prvej fázy (*A*). Pod spracovaním trojuholníka sa myslí hlavne pričítanie jeho normály k novozaloženej normále vrcholu, priradenie indexu podmnožiny k indexu vrcholu trojuholníka a detekcia lomených hrán, podrobnosti budú vysvetlené neskôr. Po každom spracovaní dôjde k testovaniu hrany v smere cirkulátora. V prípade, že hrana nie je lomená, prejde cirkulátor na susedný trojuholník v danom smere, ten sa opäť spracuje a znovu sa testuje hrana. Ak cirkulátor týmto spôsobom narazí na prvý trojuholník alebo na fiktívnu stenu, znamená to, že na žiadnu povinnú hranu nenarazil a dôjde k jeho ukončeniu (*E*). Po ukončení sa k vrcholu priradí rovina vypočítaná zo získanej normály [5.21] – [5.23], otestuje sa jeho poloha za účelom

nájdenia minimálnych a maximálnych súradníc TIN a prejde sa na nasledujúci vrchol.

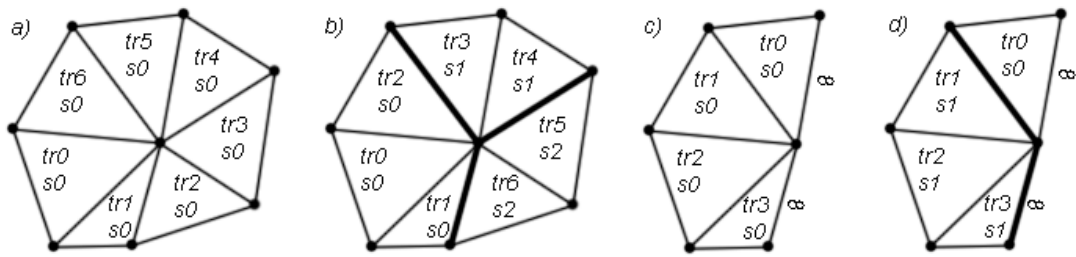
V prípade, že pri testovaní hrán cirkulátor narazí na lomenú hranu, presunie sa do ďalšej fázy, ktorá sa vetví podľa toho, či vrchol leží alebo neleží na obálke TIN (B). Ak vrchol leží na obálke, znamená to, že aktuálna podmnožina trojuholníkov je uzatvorená, lebo cirkulátor začal od hranice podmnožiny, ktorou je obálka. Zároveň cirkulátor prejde na susedný trojuholník v rovnakom smere, ktorý sa testuje, či nie je fiktívnou stenou (prvým trojuholníkom nemôže byť práve preto, lebo ten leží na obálke v opačnom smere). V oboch prípadoch sa k vrcholu priradí index podmnožiny s rovinou [5.21] – [5.23]. Ak testovaný trojuholník je fiktívnou stenou, cirkulátor prejde k ukončeniu (E). V opačnom prípade sa založí nová podmnožina, k nej nová nulová normála vrcholu, dôjde k spracovaniu aktuálneho trojuholníka (D). Po tomto úkone sa opäť testuje jeho hrana v danom smere (návrat do A).

Týmto ostáva spracovanie posledného prípadu, kedy vrchol pretínajú lomené hrany a zároveň neleží na konvexnej obálke (rázcestníky v bodoch A a B). V takom prípade sa aktuálny trojuholník uloží do pamäte (bude figurovať ako prvý), cirkulátor prejde priamo na prvý trojuholník a nastane zmena smeru cirkulátora na smer hodinových ručičiek (cw) (C), aby sa dokončila aktuálna podmnožina (E). Pokiaľ cirkulátor narazí na ďalšiu povinnú hranu, treba testovať, či nasledujúci trojuholník nie je figurovaným prvým. Ak ním je, dôjde k ukončeniu cirkulátora (E), v opačnom prípade dochádza k založeniu novej podmnožiny a k pokračovaniu podľa D a C .

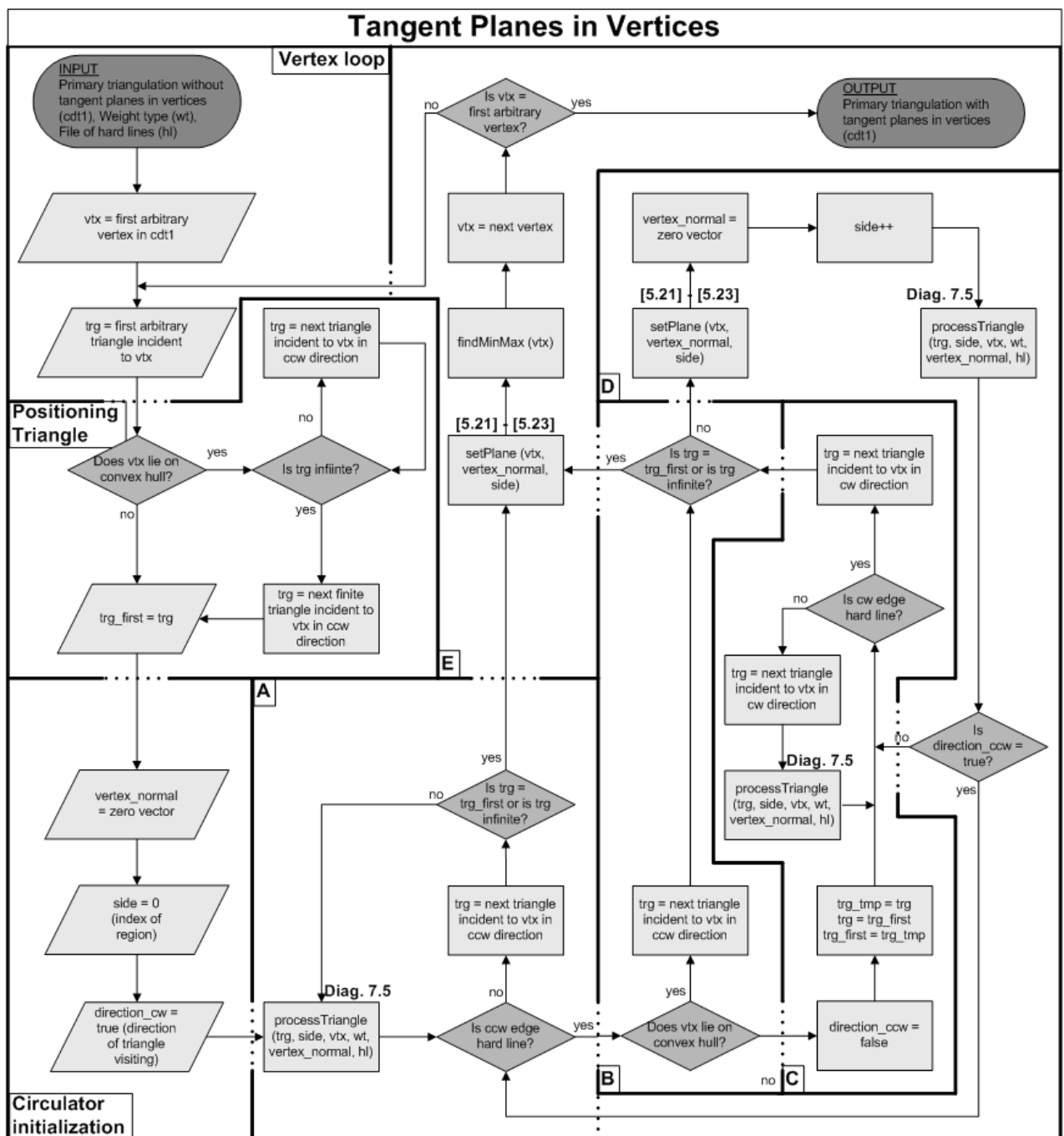
Sprehľadnenie tohto procesu v podobe možných ciest v algoritme pre všetky štyri prípady ponúka tabuľka 7.1. a obr. 7.3. Keďže ide o vnorený cyklus, časová zložitosť odhadu dotykovej roviny možno označiť ako $O(N_V N_{Tinc})$, kde N_V je počet vrcholov a N_{Tinc} je priemerný počet incidentných trojuholníkov k jednému vrcholu, čo je pri väčšine prípadov nepresahuje hodnotu 10.

Prípád	Vrchol leží na obálke	Vrchol leží na lomenej hrane	Cesty
1	nie	nie	A - E
2	nie	áno	A - B - C - D - C - E
3	áno	nie	A - E
4	áno	áno	A - B - D - A - B - E

Tab. 7.1 Prehľad možných prípadov pri odhade dotykových rovín
Kódy ciest korešpondujú s textom a diagramom 7.4



Obr. 7.3 Postupnosť cirkulátora po trojuholníkoch (tr) a podmnožinách (s)
Prípady a), b) c) a d) korešpondujú s prípadmi 1, 2, 3 a 4.



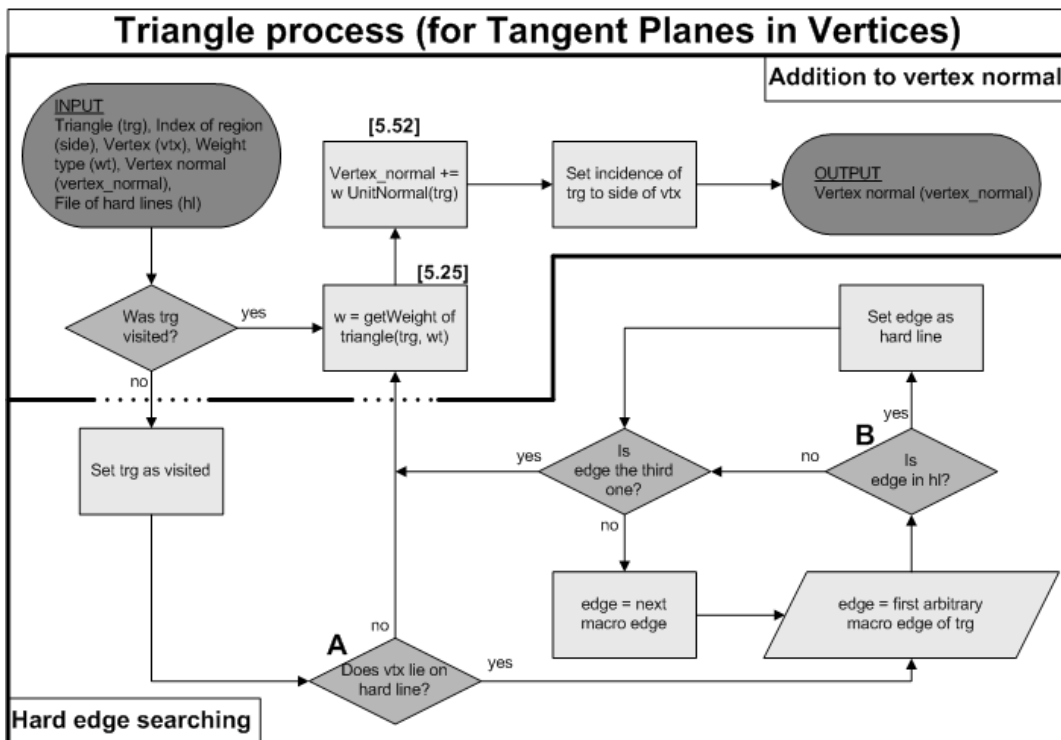
Diag. 7.4 Odhad dotykových rovin vo vrcholoch TIN

Spracovanie trojuholníka

Súčasťou tohto algoritmu je spracovanie trojuholníka, ktoré tvorí menší podproces (diagram 7.5). Vstupom do procesu je okrem trojuholníka index podmnožiny, aktuálny vrchol, kód váhy, normála vo vrchole (ktorá sa má spracovať) a súbor lomových hrán (*INPUT*). Počas celého algoritmu odhadu dotykových plôch je každý trojuholník navštívený a spracovávaný cirkulátorom presne trikrát (pre každý vrchol raz). Pri prvom navštívení trojuholníka dôjde vždy k zisťovaniu jeho incidentnosti k lomovej hrane (*Hard edge searching*). V prvom rade sa jedná o test incidentnosti vrchola k lomovej hrane (*A*). Táto informácia je uchovávaná v atribúte vrcholu (z časti primárnej triangulácie). V kladnom prípade, sa pre každú hranu trojuholníka prechádza celým súborom lomových hrán a testuje sa zhoda v oboch orientáciách hrán (*B*). Pokiaľ dôjde k zhode, hrana sa v trojuholníku označí indikátorom lomová a v od tohto momentu je priamo identifikovateľná cez trojuholník.

Po tomto úkone dochádza k druhej fáze spracovania (*Addition to vertex normal*) a to k výpočtu váhy normály podľa [5.25] podľa kódu váhy, prirátaniu jednotkovej normály trojuholníka ovplyvnenej jej váhou k normále vo vrchole (čo je súčasťou všeobecného tvaru [5.52]) a priradeniu indexu podmnožiny k indexu vrcholu v danom trojuholníku. Výstupom je upravená normála vrcholu (*OUTPUT*).

Nevýhodou tohto procesu je jeho kvadratická časová náročnosť $O(N_{hl}^2)$, čo pri veľkom množstve povinných hrán N_{hl} spôsobuje zdĺhavosť procesu. Na druhej strane ide o doplnkovú funkciu a počet povinných hrán predstavuje pri väčšine prípadov nízke percento všetkých hrán.



Diag. 7.5 Spracovanie trojuholníka ako súčasť odhadu dotykových rovín

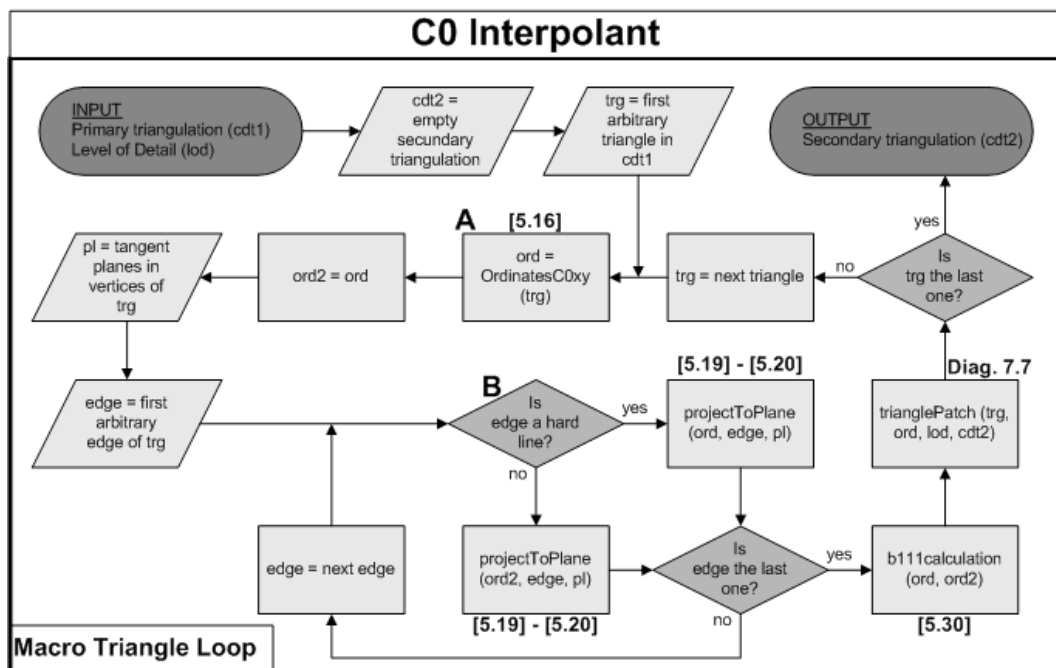
7.2.4 Jednoduchý interpolant C^0

Po doplnení štruktúry TIN o normály a lomené hrany, je algoritmus pripravený prejsť k najdôležitejšej časti, a to k vytváraniu plátov. Jednoduchšia varianta definuje súbor plátov nad TIN so základnou spojitosťou C^0 (diagram 7.6).

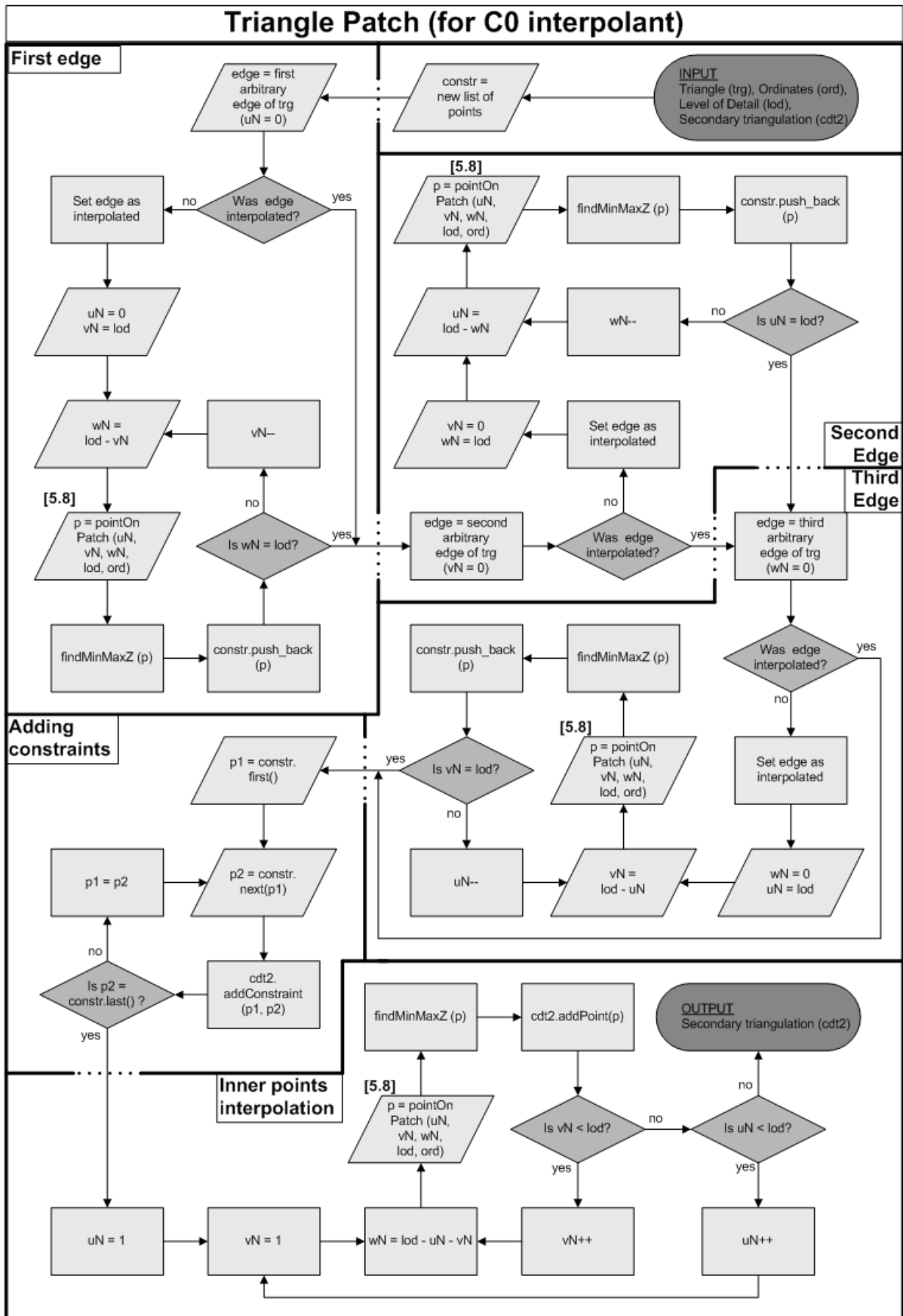
Popis algoritmu jednoduchého interpolantu

Vstupom je TIN ako celok s údajom o úrovni vyhladenia (LoD) (*INPUT*). Jedná sa o jednoduchý cyklus všetkých trojuholníkov pozostávajúci z niekoľkých krokov. Prvým je výpočet 10 kontrolných bodov (*A*) v rovine *xy* podľa barycentrických súradníc [5.16]. Nasleduje premietnutie šiestich z nich do dotykových rovín [5.19 – 5.20]. Treba pritom testovať všetky tri hrany, ak je hrana lomová, tento výpočet je len dočasný kvôli korektnému dopočtu prostredného kontrolného bodu [5.30], inak, aby sa zachoval lom pri ďalšom kroku, je nutné zachovať ich pôvodné hodnoty [5.16], aby pri tvorbe plátu zachytili lom.

Po výpočte kontrolných bodov, nasleduje výpočet bodov plátu podľa zadaného LoD a ich vkladanie do sekundárnej TIN. Hrany primárnej TIN sa pritom rozdelia na sub hrany, ktoré sú v novej triangulácii definované ako povinné, pre zachovanie pôvodného tvaru triangulácie (*trianglePatch*). Po prejdení všetkých trojuholníkov algoritmus vráti naplnenú sekundárnu TIN aproximujúcu pláty pre interpoláciu vrstevníc (*OUTPUT*). Náročnosť algoritmu závisí od počtu trojuholníkov N_T a počtu interpolovaných bodov na pláte N_{int} (viď 5.53), ktorý vzhľadom na ošetrené duplicity nepresahuje $O(N_T N_{int})$.



Diag. 7.6 Jednoduchý interpolant C^0



Diag. 7.7 Tvorba trojuholníkového plátu jednoduchým interpolantom C^0

Tvorba trojuholníkového plátu interpolantom C^0

Pri interpolácii bodov na pláte sa treba vyvarovať duplicitám na hranách. Vstupom do procesu interpolácie bodov plátu je trojuholník, ktorý sa má interpolovať, spolu s jeho sieťou kontrolných bodov, hodnota LoD a sekundárna TIN, ktorá sa má novými bodmi a hranami naplniť (*INPUT*).

V prvom rade algoritmus pridáva povinné sub hrany, ktoré ležia na pôvodných hranách trojuholníka. Interpolácia prebieha pomocou barycentrických súradníc, ich organizácia a vzťah k LoD je popísaný v podkapitole 5.6. Je nutné generovať body, ktoré ich tvoria, v jednom smere, aby na seba nadväzovali, z nich generovať sub hrany a tie pridávať do novej TIN ako povinné hrany. Podrobná organizácia tohto procesu je znázornená na diagrame 7.7. Po vytvorení povinných hrán je možné pridať zvyšné body vo vnútri plátu.

Súčasťou celého tohto procesu je hľadanie maximálnej a minimálnej nadmorskej výšky pre presný výpočet rozsahu vrstevníc v neskoršej fáze. Výstupom je sekundárna TIN doplnená o nové body a hrany z plátu (*OUTPUT*).

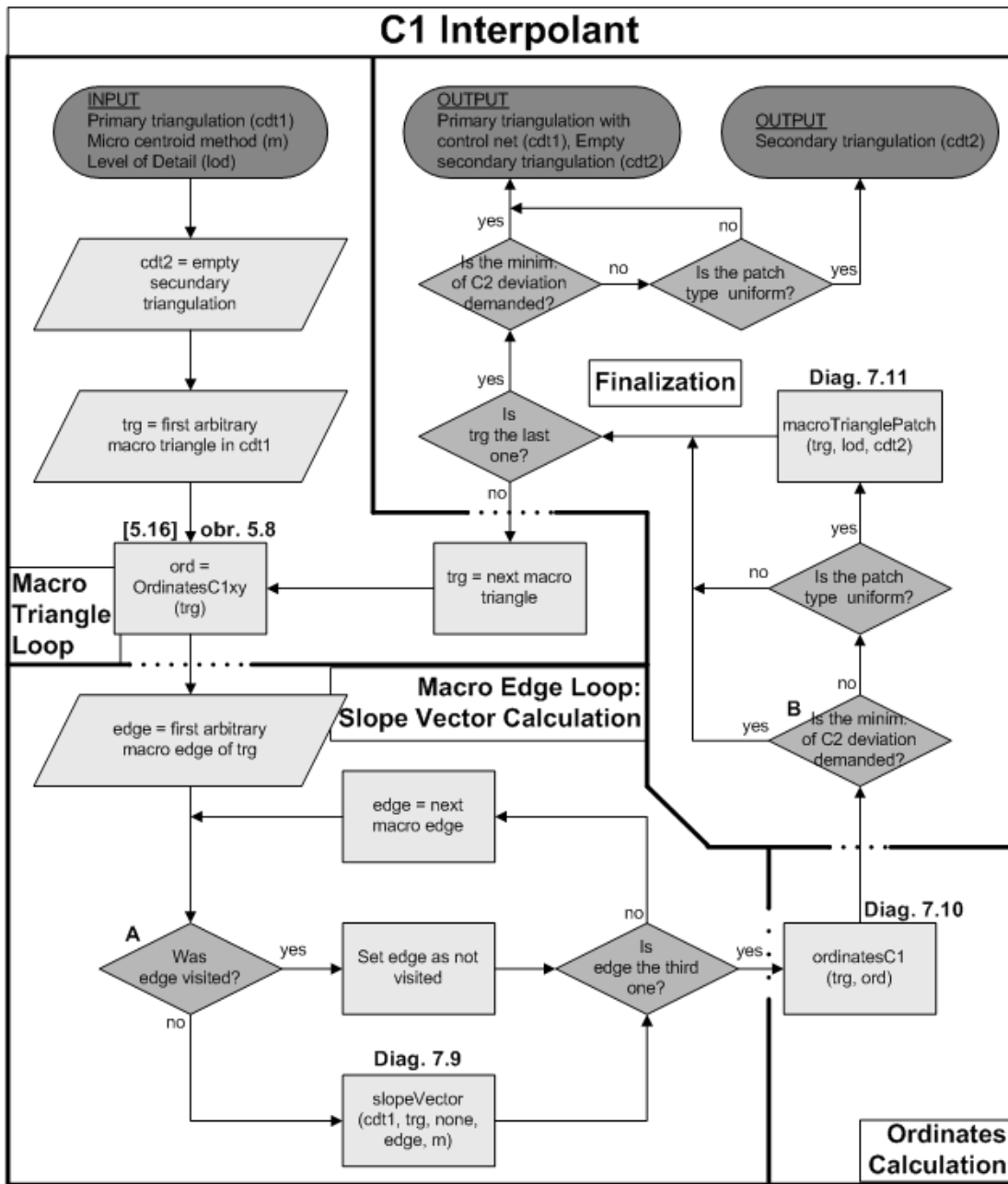
7.2.5 Clough-Tocher interpolant C^1

Alternatívou k jednoduchému C^0 interpolantu je interpolant so spojitou C^1 so zavedeným delením trojuholníkov metódou Clough-Tocher. Proces je znázornený na diagrame 7.8. Vstupom je primárna TIN, kód metódy na určenie mikro ťažísk a v prípade pravidelného plátového modelu aj globálna hodnota LoD (*INPUT*).

V úvode sa vytvorí prázdna sekundárna TIN, ktorá sa však naplní len v prípade pravidelných plátov. Vzápätí sa spustí cyklus makro trojuholníkov prostredníctvom iterátora (*Macro Triangle Loop*) a pre každý aktuálny makro trojuholník sa vypočíta poloha xy kontrolných bodov podľa barycentrických súradníc (body z obr. 5.8 podľa [5.16]).

Následne sa do tohto cyklu vnorí cyklus jeho mikro trojuholníkov prostredníctvom k nim príslušných makro hrán (*Macro Edge Loop*), ktorého účelom je výpočet potrebného parametra k určeniu mikro ťažísk. Jedná sa o sklon mikro ťažísk \vec{v}^1 z [5.35] podľa zvolenej metódy matematicky bližšie popísanej v časti 5.3.3., algoritmicke neskôr v texte. Pretože tento vektor sa priraduje vždy dvom mikro trojuholníkov, je nutné sa vyvarovať duplicitnému spracovaniu týchto dvojíc zavedením identifikátora spracovania a jeho testovania (A). Po spracovaní všetkých troch mikro trojuholníkov dôjde k dopočítaniu súradnice z všetkých kontrolných bodov v makro trojuholníku (*Ordinates Calculation*, popis ďalej).

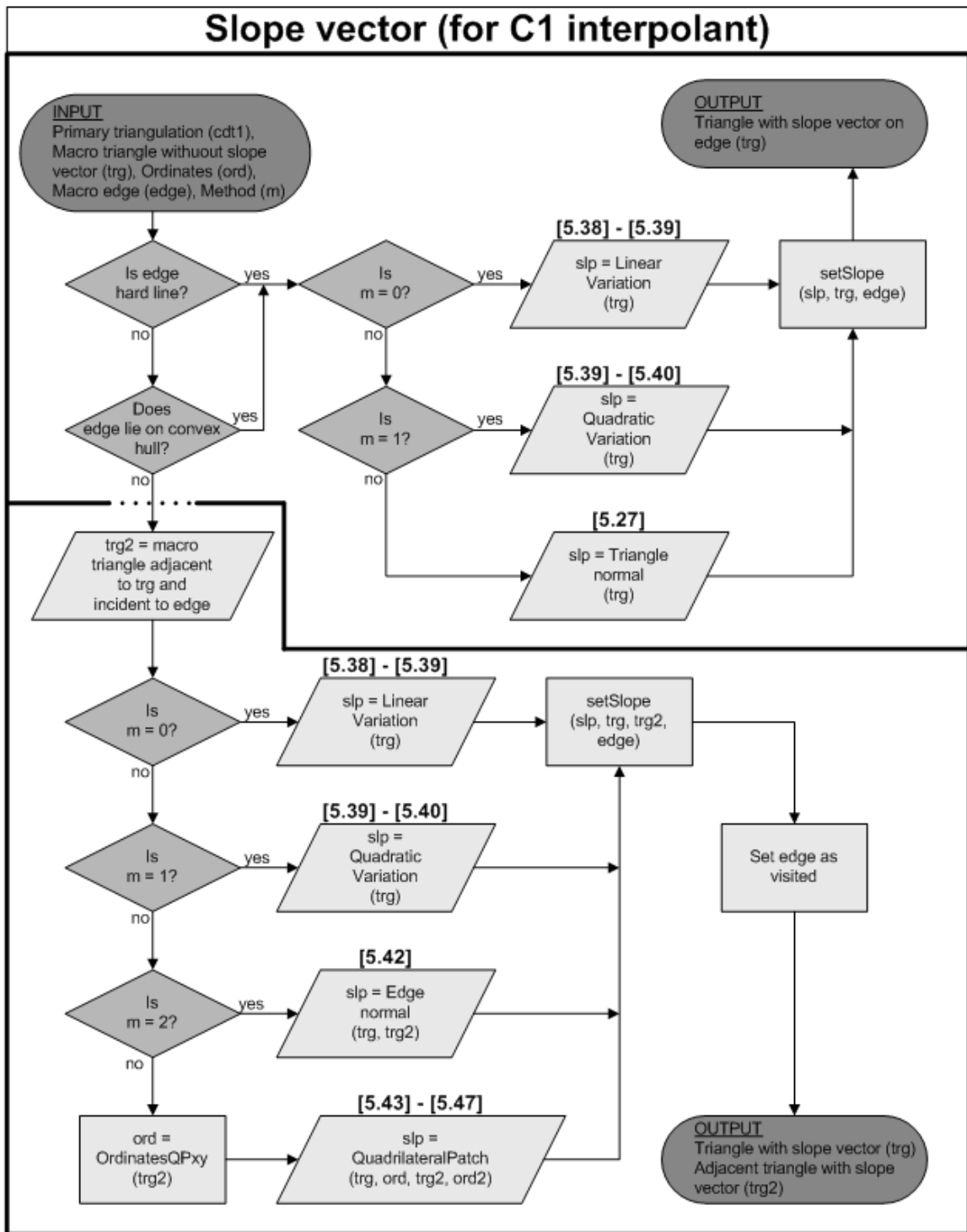
Vo finálnej fáze algoritmu (*Finalization*) môžu nastať dve situácie podľa typu plátu a požiadavky na minimalizáciu odchýlky C^2 nespojitosti. V prípade rovnomerného plátového modelu s konštantnou hodnotou LoD bez požiadavky minimalizácie dôjde k tvorbe plátov v pôvodnom cykle (podobne ako pri interpolante s C^0 spojitou) a teda k naplneniu sekundárnej TIN. V inom prípade sa tento krok preskočí.



Diag. 7.8 Clough-Tocher interpolant so spojitostou C^1

Po skončení iterátora môžu nastať dva druhy výstupov. Prvým je sekund. triangulácia pripravená na interpoláciu vrstevníc, v druhom prípade je táto prázdna, hlavným výstupom je primárna TIN s definovanou sieťou kontrolných bodov, ktorá v ďalšej fáze prejde buď minimalizáciou alebo výpočtom lokálnych hodnôt LoD (*OUTPUT*).

Zložitosť C^1 interpolantu je v tejto podobe $O(3 N_T N_{int})$. Podobne ako pri C^0 interpolante je závislá od počtu trojuholníkov (v tomto prípade majú prívlastok makro) a počtu interpolovaných bodov na pláte. Pretože každý makro trojuholník sa delí na tri mikro trojuholníky a z nich každý má de facto vlastnú sieť kontrolných bodov a vlastný plát, je nutné zložitosť navýšiť trojnásobne. Ak výstupom tohto procesu ešte nemá byť aproximovaný plátový model, čiže sekundárna TIN, zložitosť je lineárna $O(3 N_T)$.



Diag. 7.9 Výpočet vektora sklonu pre interpolant C^1

Výpočet vektorov sklonu mikro ťažísk

Sklon mikro ťažísk susedných mikro trojuholníkov zdieľajúcim mikro hranu \vec{v}^1 (ďalej len sklon) je pomocný parameter pri určení ich súradnice z [5.35]. V algoritme sú implementované dve lokálne a dve susedské metódy na jeho výpočet (časť 5.3.3), proces je znázornený na diagrame 7.9.

Vstupom je primárna TIN pre identifikáciu susedov, makro trojuholník, makro hrana určujúca mikro trojuholník a kód zvolenej metódy (*INPUT*). Lokálne metódy určujú sklon len s využitím normál určujúcich dotykovej roviny vo vrcholoch, ktoré makro hranu tvoria (*LinearVariation*, *QuadraticVariation*), susedské využívajú buď normály oboch susedov ako normálu makro hrany (*EdgeNormal*) alebo dočasný štvoruholníkový plát, ktorý vznikne ich spojením spolu s normálami v protiľahlých vrcholoch mimo makro hrany (*QuadrilateralPatch*).

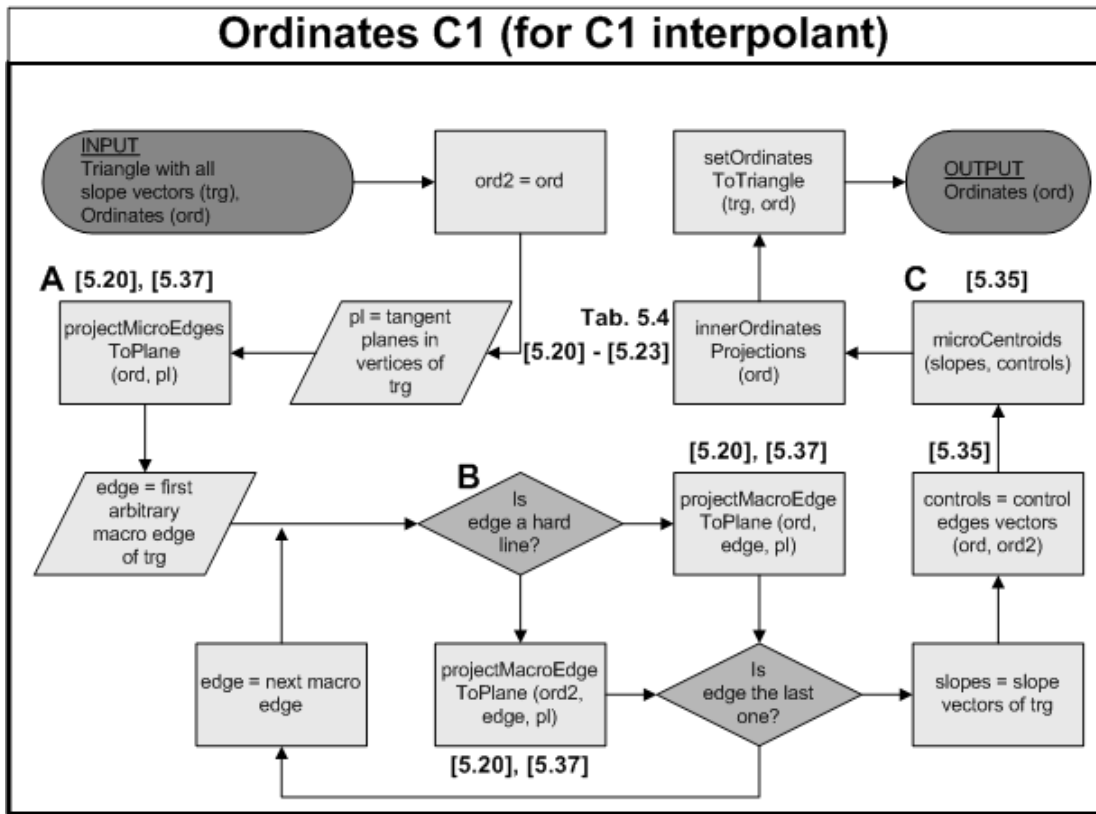
Pre všetky štyri metódy treba rozlišovať či sa jedná o lomenú makro hranu alebo či táto leží na konvexnej obálke. Ak neplatí ani jedno, dôjde k výpočtu \vec{v}^1 podľa zvolenej metódy a jeho priradeniu oboch susedom a tí sa označia ako spracovaní, aby nedochádzalo k duplicitným výpočtom, keď iterátor natrafí na suseda. Ak hrana nespĺňa uvedené podmienky, výsledok sa priradí len prvému mikro trojuholníku a ten nie je nutné označiť ako spracovaný, keďže algoritmus naň cez suseda neskôr už nenarazí.

Pre lokálne metódy platí, že ak makro hrana nie je lomená, normály definované v oboch vrcholoch sú rovnaké pre oboch susedov, obaja totiž ležia v tej istej podmnožine v zmysle [5.52] a vektor sklonu je rovnaký. V opačnom prípade vyjde pre každého suseda iný vektor. V susedských metódach je situácia podobná pri využití normály makro hrany. Normála je pri lomových hranách odlišná pre každého suseda, je totožná s normálou daného suseda. Metóda štvoruholníkového plátu je v prípade lomovej hrany nepoužiteľná, je nahradená normálou hrany. Výstupom je podľa prítomnosti lomovej makro hrany alebo hrany na konvexnej obálke vektor sklonu pre jeden mikro trojuholník alebo aj pre jeho suseda (*OUTPUT*).

Výpočet kontrolných bodov

Kontrolných bodov v každom makro trojuholníku je 19 a sú zdieľané pre každý mikro trojuholník, z ktorých každý obsahuje 10 (viaceré kontrolné body sú zdieľané). Štruktúra procesu toho výpočtu (diagram 7.10) je obdobná ako pri C^0 interpolante, aspoň čo sa lomených hrán týka. Vstupom je makro trojuholník so sieťou priestorových súradníc kontrolných bodov xy a s vektormi sklonu (*INPUT*). Jeho úlohou je dopočet súradnice z pre každý kontrolný bod.

V prvom rade ide o projekciu bodov b_2 , b_4 a b_6 z mikro hrán do príslušných dotykových rovín (body sú z množiny [5.20] premietnuté podľa [5.37]) (*A*). V druhom rade sa premietnu body z makro hrán do tých istých dotykových rovín (zvyšné body z [5.20] podľa [5.37]) a to buď dočasne (pre lomené makro hrany) alebo trvalo (pre ostatné makro hrany) (*B*). Mikro ťažiská sa určia na základe vektorov sklonu, ktorý boli algoritmu dodané ako vstup a z bodov na makro hranách (v prípade lomových hrán z dočasných kontrolných bodov) (*C*). Zvyšné kontrolné body sa dopočítajú podľa príslušností k rovín definovaných predošlými kontrolnými bodmi ([5.20] – [5.23]) a po ich uložení k trojuholníku sa proces ukončí (*OUTPUT*).

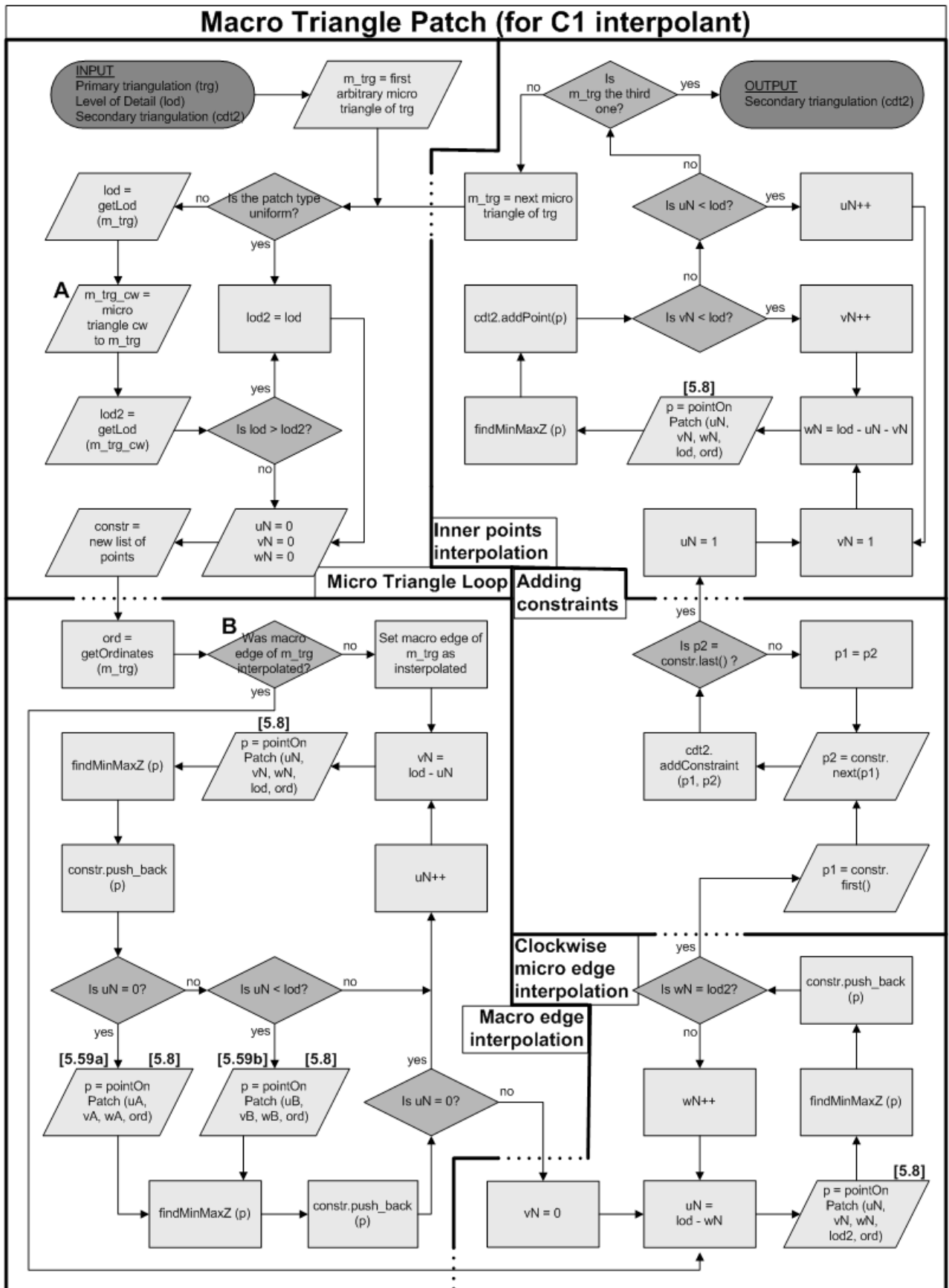


Diag. 7.10 Výpočet kontrolných bodov pre interpolant C^1

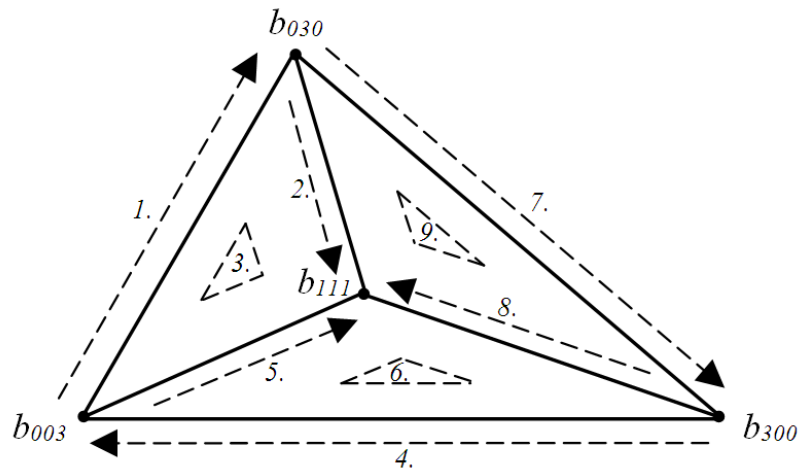
Tvorba trojuholníkových plátov interpolantom C^1

Obdobne ako pri C^0 interpolante, aj pri C^1 interpolante sa treba pri interpolácii bodov na pláte vyvarovať duplicitám na hranách, v tomto prípade na mikro a makro hranách. Vstupom do tohto procesu je makro trojuholník, ktorý sa má interpolovať, spolu s jeho sieťou kontrolných bodov, konštantná globálna hodnota LoD a sekundárna TIN, ktorá sa má novými bodmi a hranami naplniť (*INPUT*). LoD je nutná len pre prípad rovnomerného plátového modelu, pri nerovnomernom type je tento údaj uložený zvlášť pre každý mikro trojuholník v štruktúre TIN. Proces je znázornený na diagrame 7.11.

Každý mikro trojuholník sa interpoluje zvlášť. V prvom rade algoritmus pridáva povinné sub hrany, ktoré ležia na pôvodných makro a mikro hranách mikro trojuholníka. Interpolácia prebieha pomocou barycentrických súradníc, ich organizácia a vzťah k LoD je popísaný v podkapitole 5.6. Je nutné generovať body, ktoré ich tvoria, v jednom smere, aby na seba nadväzovali a z nich generovať sub hrany. Duplicite makro hrán je možné opäť predísť zavedením indikátora spracovania. Situácia pre mikro hrany je jednoduchšia, keďže všetky trojice mikro trojuholníkov sú organizované v smere ccw, stačí z každého mikro trojuholníka generovať vždy len jednu hranu, zvolená bola hrana v smere cw od makro hrany. Organizácia generovania bodov je znázornená na obr 7.3.



Diag. 7.11 Tvorba trojuholníkových plátov interpolantom C^1



Obr. 7.3 Organizácia generovania bodov na troch plátoch makro trojuholníka

Pri nerovnomerných plátoch je pre každý mikro trojuholník definovaná hodnota LoD nezávisle, takže sa stáva, že jednej mikro hrane pripadnú dve rôzne hodnoty. Pre mikro trojuholník je preto nutné v úvode zistiť aj LoD suseda v smere cw (*A*) a zvoliť len jednu z nich, pre väčší detail je to vždy tá väčšia hodnota. Pred interpoláciou sa ešte inicializujú barycentrické súradnice na 0, získajú sa kontrolné body daného mikro trojuholníka a založí sa zoznam bodov, ktoré budú tvoriť povinné sub hrany.

Interpolácia začne generovaním bodov na makro hrane (*Macro edge interpolation*), ak ešte nebola prostredníctvom suseda generovaná (*B*). Interpolované body sa pridávajú zatiaľ len do zoznamu bodov, zároveň sa testuje ich nadmorská výška pre vyhľadanie globálneho maxima a minima. Na predchádzanie hviezdicovému efektu (podkap. 5.6) sa pridávajú ešte body navyše medzi prvými [5.59a] a poslednými [5.59b] dvoma bodmi makro hrany, posledný bod sa vynechá.

Posledný bod makro hrany je prvým bodom mikro hrany v smere cw a interpoluje sa až v druhom kroku (*Clockwise micro edge interpolation*), aby sa predišlo jeho duplicite. Navyše, makro hrana nie je interpolovaná vždy, kým mikro hrana áno. Po vygenerovaní všetkých bodov na mikro hrane sa prechádza vytvorený zoznam bodov, z ktorého sa tieto pridávajú do sekundárnej triangulácie po dvojiciach ako povinné hrany (*Adding constraints*).

V poslednej fáze sa vytvoria body ležiace mimo hrán plátu mikro trojuholníka a pridávajú sa priamo do sekundárnej triangulácie (*Inner points interpolation*). Celý proces sa zopakuje pre zvyšné dva mikro trojuholníky. Výstupom je sekundárna TIN doplnená o nové body a hrany z plátov makro trojuholníka (*OUTPUT*).

7.2.6 Minimalizácia odchýlky C^2 nespojitosti

Voliteľným procesom v aplikácii je minimalizácia nespojitosti druhých derivácií na makro hranách TIN využitím Lagrange-ových multiplikátorov. Minimalizácia je dostupná len pri zvolení C^1 interpolantu Clough-Tocher, znázorňuje ho diagram 7.12. Proces je rozdelený na dve časti. Prvou je výpočet priemernej odchýlky (*Deviation Calculation*), ktorá je kritériom minimalizácie. Jej hodnota sa zobrazí užívateľovi na konzole a ten na jej základe rozhodne, či dôjde k minimalizácii, čiže k prerátaniu kontrolných bodov alebo nie (*Deviation Minimization*). Po každej minimalizácii dôjde k opätovnému prerátaniu odchýlky, čím sa proces opakuje. V prípade, že užívateľ rozhodne o ukončení minimalizácie, dôjde k finálnej časti algoritmu (*Finalization*)

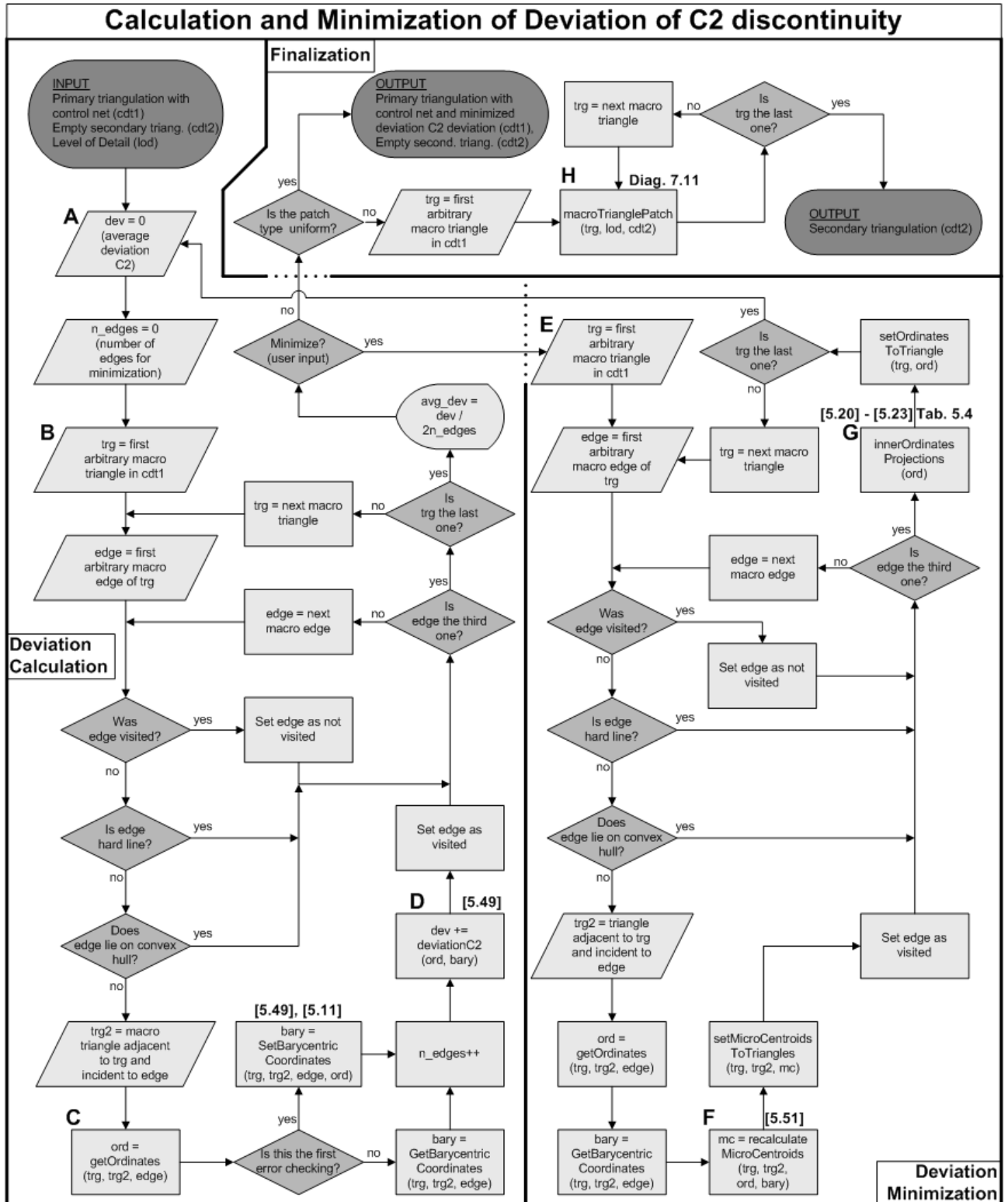
Vstupom do algoritmu je primárna TIN so sieťou kontrolných bodov, prázdna sekund. TIN a glob. hodnota konštanty LoD v pre pravidelný plátový model (*INPUT*).

V úvode prvej časti algoritmu (*A*) sa iniciuje nulová suma priemerných odchýlok C^2 nespojitosti a nulový počet nelomových makro hrán mimo obálky. Odchýlku nespojitosti nemá zmysel testovať na lomových hranách, lebo ich účelom je narušenie spojitosti a nie je možné ju testovať na obálke. Následne sa zavedie cyklus makro trojuholníkov (*B*) a k nemu cyklus makro hrán, podobne, ako pri C^1 interpolante. Dôjde k testu spracovania hrany, a ak nie je makro hrana lomová a ani neleží na obálke, vyhľadá sa susedný makro trojuholník incidentný k danej makro hrane a identifikujú sa kontrolné body príslušných mikro trojuholníkov (*C*). Pokiaľ sa jedná o prvý cyklus počítania priemernej odchýlky, prepočítajú a uložia sa vzájomné barycentrické súradnice (jedná sa o súradnice z [5.49], výpočet podľa [5.11]), v opačnom prípade už boli vypočítané a načítajú sa z pamäte. Následne navýši počet predmetových hrán a vypočíta sa odchýlka s využitím barycentrických súradníc a kontrolných bodov podľa [5.11] (*D*). Jedná sa o dve hodnoty dvoch dvojíc kontrolných trojuholníkov (obr. 5.12).

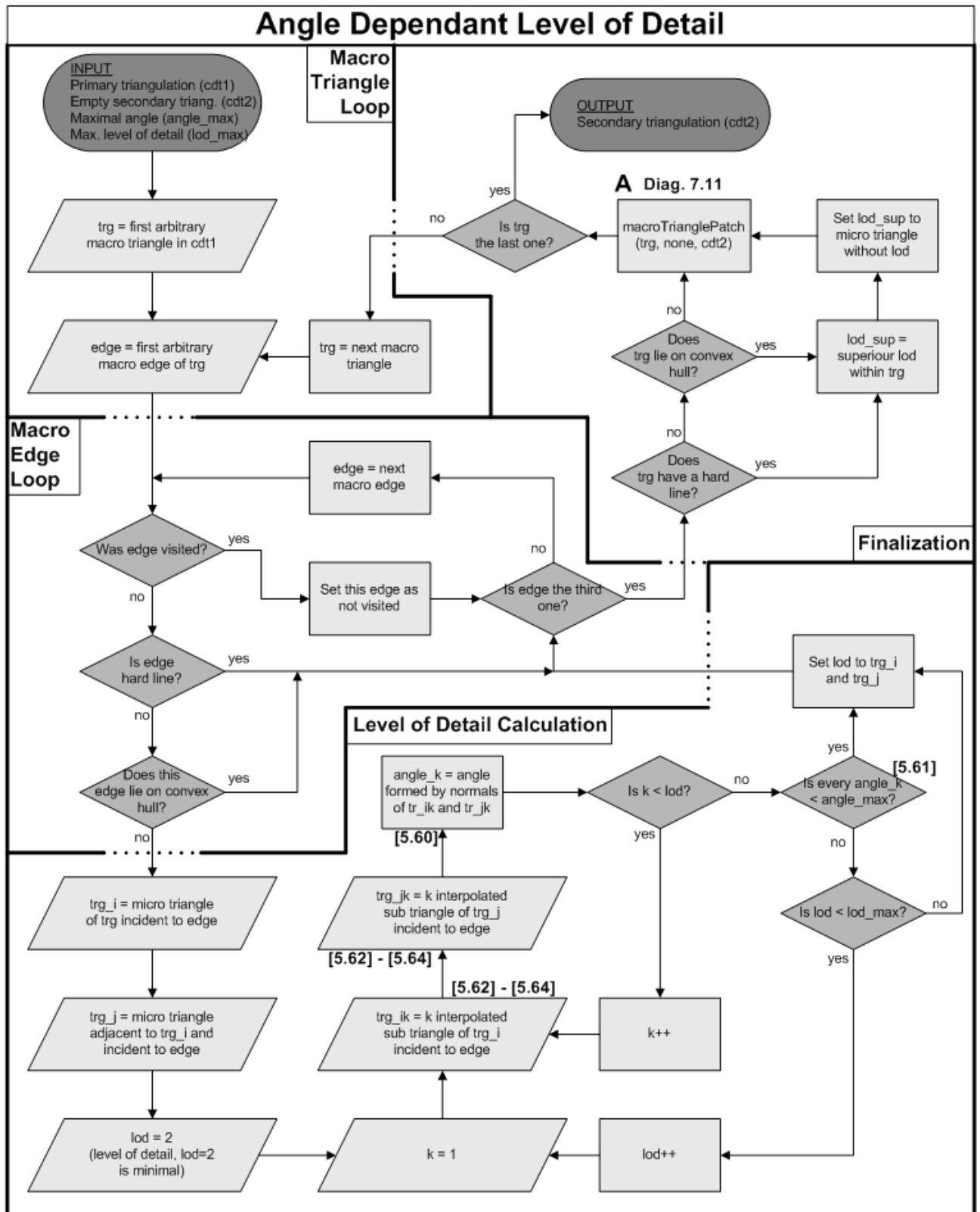
Po prejdení všetkých makro hrán a makro trojuholníkov sa zo získaných štatistík preráta priemerná odchýlka, ktorá sa užívateľovi zobrazí. V prípade, že sa rozhodne pre minimalizáciu, algoritmus prejde do druhej fázy, k prerátaniu kontrolných bodov. Opäť sa zavedie cyklus makro trojuholníkov (*E*) a makro hrán, testovanie spracovania, a príslušnosti k lomovým hranám a obálke TIN, získaniu suseda, vzájomných barycentrických súradníc, kým dôjde k očakávanému prepočtu kontrolných bodov. Najprv sa jedná o prepočet dvojíc mikro ťažísk podľa [5.51] (*F*) a po prejdení troch makro hrán aj o zvyšné – vnútorné kontrolné body ([5.20] – [5.23]), ako pri C^1 interpolante. Algoritmus sa vzápätí vráti do časti výpočtu priemernej odchýlky.

Finálna fáza procesu nastane v momente, keď užívateľ na základe priemernej odchýlky nezvolí minimalizáciu. Pokiaľ bol pritom zvolený pravidelný plátový model, spustí sa posledný cyklus makro trojuholníkov za účelom interpolácie bodov plátu (*H*) a algoritmus vráti sekundárnu TIN, ak je však požadovaný nerovnomerný model, výstupom je minimalizovaná primárna TIN, čím sa program presunie do definitívne poslednej fázy tvorby plátového modelu za účelom interpolácie vrstevníc.

Zložitosť minimalizácie je $O\left[\left(3 N_T\right)\left(2 N_M+1\right)\right]$. Okrem počtu makro trojuh. závisí aj na počte minimalizácií N_M . Navyše treba rátať so zložitosťou interpolácie bodov pravidelného plátového modelu, ak bola požadovaná $O\left(3 N_T N_{int}\right)$.



Diag. 7.12 Minimalizácia odchýlky C^2 nespojitosti



Diag. 7.13 Nerovnomerná úroveň vyhladenia plátového modelu

7.2.7 Nerovnomerná úroveň vyhladenia plátového modelu

Poslednou časťou pred tvorbou vrstevníc je voliteľná tvorba plátového modelu s nerovnomernou úrovňou vyhladenia (diagram 7.13). Úlohou tohto algoritmu je určiť lokálne hodnoty LoD pre každú dvojicu mikro trojuholníkov na makro hrane na základe maximálnej hodnoty uhla, ktorý majú generované sub trojuholníky zvierat'. Tento uhol je spolu s definovanou maximálnou hodnotou LoD a primárnou TIN vstupným parametrom algoritmu (*INPUT*).

V úvode sa klasicky spustí cyklus makro trojuholníkov a makro hrán a obdobne, ako pri predošlých algoritmoch, dochádza k testovaniu hrán (spracovanie, lomená hrana, obálka). Pre nespracovanú, nelomovú makro hranu, neležiacu na obálke TIN dôjde k určení k nej incidentného páru mikro trojuholníkov a k výpočtu LoD na základe vstupného kritéria maximálneho uhla (*Level of Detail Calculation*).

LoD sa iniciuje na hodnotu 2, čo značí postupné, cyklické vytvorenie dvoch párov sub trojuholníkov náležiacich páru daných mikro trojuholníkov ([5.62]-[5.64]) a k výpočtu uhla, ktorý zvierajú ich normály ([5.60]). Po výpočte každého tohto uhla dôjde k ich porovnanie s kritériom vyhladenia [5.61]. V prípade, že aspoň jeden z týchto uhlov kritériom prevyšuje, hodnota LoD sa navýši o jeden a dôjde k ďalšiemu cyklickému vytvoreniu sub trojuholníkov. Navyšovanie hodnoty LoD sa zastaví v prípade, že všetky uhly kritériu vyhovujú alebo LoD dosiahne maximálnu hodnotu. Táto hodnota sa následne pridelí obom mikro trojuholníkom.

Po prejdení troch makro hrán dôjde k finálnej časti (*Finalization*). Pretože lomovým hranám ani tým na obálke nebola priradená hodnota LoD, priradí sa im v internom cykle mikro trojuholníkov v ktorom prevezmú vyššiu hodnotu LoD spomedzi susedov. Keď každý mikro trojuholník má hodnotu LoD, dôjde k interpolácii bodov na plátoch a k vytváraniu sekundárnej TIN rovnakým spôsobom, ako bolo popísané pri rovnomernom plátovom modeli v C_1 interpolante. Po prejdení všetkých trojuholníkov (*A*). Po spracovaní všetkých makro trojuholníkov algoritmus vráti sekundárnu TIN a predá ju interpolácii vrstevníc, popísanej v časti 6.1.1. (*OUTPUT*).

7.2.8 Vizualizácia a export v OpenGL

Súčasťou aplikácie je aj vizualizácia a export vytvorených vrstevníc. Vizualizácia umožňuje prezeranie výsledku a jeho vizuálnu kontrolu v momente jeho vytvorenia, na tento úkon bola využitá populárna grafická knižnica OpenGL. Export vrstevníc je riešený v ASCII formáte takým spôsobom, aby bolo možné výsledok importovať v iných aplikáciách (napr. ArcGIS).

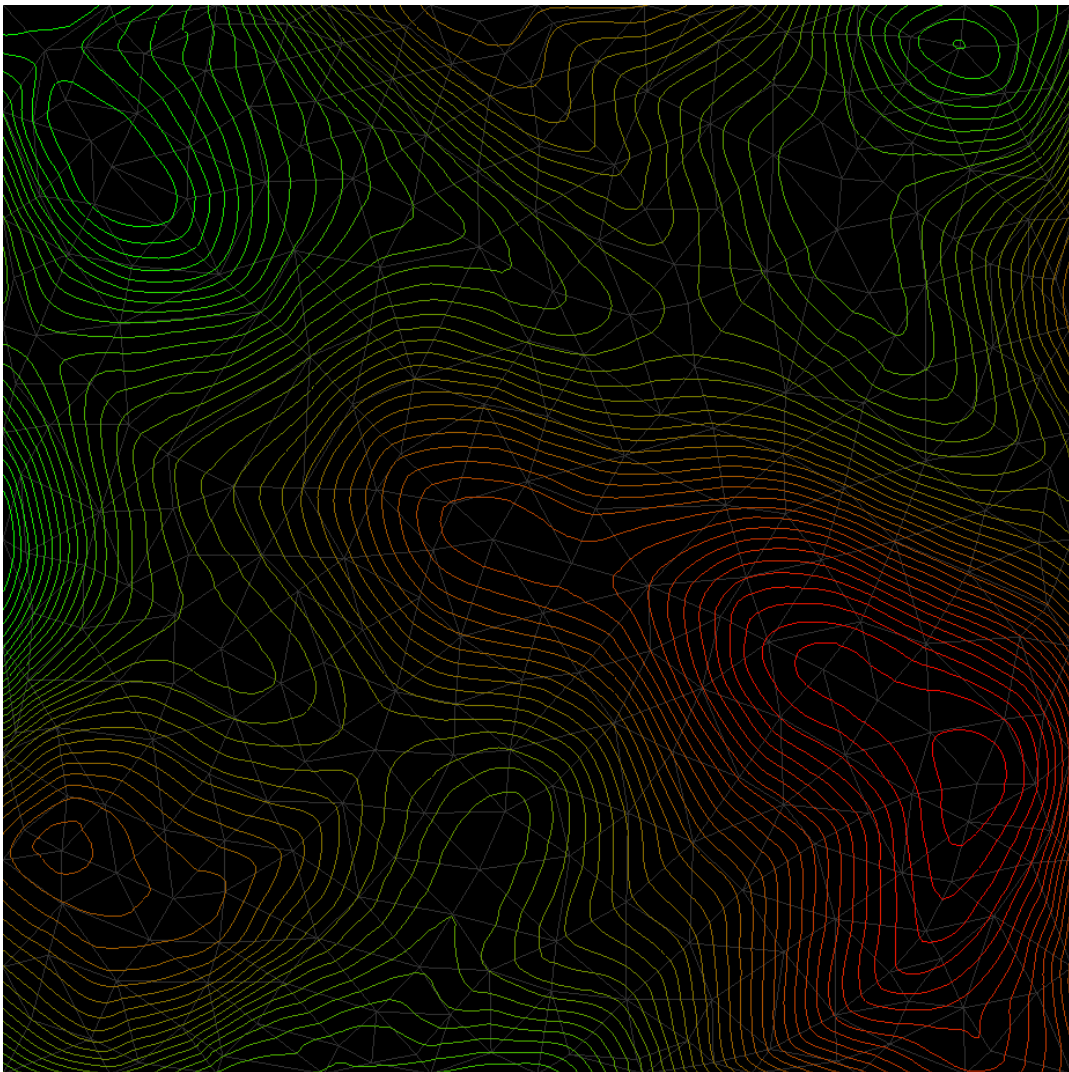
OpenGL (Open Graphics Library) je štandard špecifikujúci viacplatformové rozhranie (API) k akcelorovaným grafickým kartám respektíve celým grafickým subsystémom. Slúži na tvorbu aplikácií pracujúcich predovšetkým s trojrozmernou počítačovou grafikou prekresľovanou v reálnom čase. Používa sa pri tvorbe počítačových hier, CAD programov, aplikácií virtuálnej reality alebo pre vedecko-technické vizualizácie.

Objektom vizualizácie je pôvodná TIN (odtieň šedej) a z nej vygenerované vrstevnice vo vopred zvolenom rozostupe (obr. 7.4). Farba využíva systém RGB. Farebná škála vrstevníc sa mení vzostupne s nadmorskou výškou od svetlo zelenej (0, 255, 0) cez jej tmavšie odtiene a zakalenú žltú (128, 128, 0), cez oranžovú až po jasne červenú (255, 0, 0). Hodnoty RGB sú závislé len na nadmorskej výške vrstevnice Z_0 , maximálnej a minimálnej hodnoty vrstevníc Z_{max} a Z_{min} . Pretože môžu nadobúdať len nezáporné celé čísla do hodnoty 255 vrátane, ich hodnota sa zaokrúhľuje. Možno ich brať ako zložky vektora \vec{c} :

$$\vec{c}=[R, G, B]; R=\frac{Z_0-Z_{min}}{Z_{max}-Z_{min}}; G=\frac{Z_{max}-Z_0}{Z_{max}-Z_{min}}; B=0; 0 \leq R, G \quad [7.1]$$

$$0 \leq R, G, B \leq 255; R, G, B \in \mathbb{Z}$$

Oba objekty sa vykresľujú na čiernom pozadí a veľkosť zobrazovanej plochy sa prispôbi rozmerom displeja tak, aby sa celá oblasť naň zmestila, po vyobrazení je možné manuálne zmeniť veľkosť grafického okna.



Obr. 7.4 Vizualizácia vrstevníc - grafický výstup aplikácie

KAPITOLA 8

Hodnotenie výsledkov

Predposledná kapitola sa zaoberá výsledkami, čiže polom vrstevníc získaným z interpolačného algoritmu pri rozlične nastavených parametroch. Prvá časť je venovaná syntetickým dátam, ktorých výškovú presnosť je možné overiť na základe známej rovnice vyjadrujúcej plochu georeliéfu. Druhá časť popisuje niekoľko príkladov z reálnych dát predstavujúcich niekoľko typov reliéfu z Liptova zo severu Slovenska.

8.1 Syntetické dáta

Algoritmus bol testovaný na syntetických dátach – etalónovej ploche charakterizovanej funkciou dvoch premenných:

$$z = f(x, y) = a_{ij} x^i y^j + b_0 \sin(b_1 x + b_2 y^2) + c_0 \cos(c_1 x + c_2 y) \quad , \quad [8.1]$$

kde x a y sú priestorovými premennými, ich funkčná hodnota predstavuje nadmorskú výšku z a koeficienty a , b , c sú konštanty z tabuľky 8.1. Definičným oborom (D) priestorovej funkcie je štvorcová oblasť o rozmeroch 1000 x 1000 m:

$$D: -500 \leq x, y \leq 500 ; \quad x, y \in \mathbb{R} \quad . \quad [8.2]$$

Oborom hodnôt (H) je množina reálnych čísel v rozmedzí:

$$H: 261 < z < 473 ; \quad z \in \mathbb{R} \quad . \quad [8.3]$$

	a					b	c
	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4		
i=0	4.00 E+02	1.00 E-01	-1.00 E-04	0	-7.00 E-10	-8.00 E+00	1.80 E+01
i=1	-5.00 E-02	-5.00 E-04	-3.50 E-06	2.00 E-09	1.30 E-11	2.00 E-02	5.00 E-03
i=2	-7.00 E-03	0	4.00 E-09	-3.00 E-12	7.00 E-15	3.00 E-05	1.50 E-02
i=3	5.00 E-07	2.00 E-09	6.00 E-12	-8.00 E-15	-3.00 E-17	x	x
i=4	2.00 E-09	0	-1.50 E-14	1.00 E-17	-2.00 E-20	x	x

Tab. 8.1 Koeficienty funkcie znázorňujúcej etalónovú plochu

Etalón predstavuje georeliéf v stanovenom rozmedzí, znázornený vo forme rastrového digitálneho terénneho modelu s vrstevnicami (mapa 1 v časti príloh). Ako je z prílohy patrné, plocha vyjadruje terén pripomínajúci reliéf zemského povrchu s viacerými charakteristickými črtami vertikálne členitého územia, ako sú kopy, svahové rovne, sedlá, depresie, chrbáty, doliny a lineárne svahy.

Hlavnou výhodou takejto plochy v podobe známej funkcie je možnosť výberu bodov, ktoré budú do algoritmu vstupovať. Tieto body boli vyberané manuálne tak, aby ležali na kostre reliéfu, vo vrcholových, sedlových a depresných bodoch, doplnené o miesta na iných spádniciach pre primerané zahustenie bodového poľa. Zvolené body aj z nich generovaná Delaunay-ho triangulácia sú znázornené v tej istej prílohe.

8.1.1 Konfigurácia a spôsob hodnotenia testov

Z etalónovej plochy bolo vyselektovaných bolo celkovo 317 bodov, z nich 40 leží v pravidelných rozstupoch 100 m po okraji územia aby bol výsledok relevantný aj v okrajových častiach územia a predišlo sa tak pre testovacie účely nevhodným tvarom trojuholníkov po obvode TIN, čím sa dosiahli v okrajových oblastiach relevantnejšie výsledky. Vzhľadom na rozlohu testovaného územia to predstavuje hustotu 3,17 bodu na hektár. Celkový počet trojuholníkov je 592, priemerná plocha trojuholníka je približne 1 690 m².

V kapitolách 5 až 7 boli vysvetlené a detailne popísané všetky princípy, na ktorých je predkladaný algoritmus založený. Ponúka množstvo kombinácií konfiguračných nastavení (viď najmä diagram 7.2). V prvom rade ide o voľbu interpolantu, typ váhy pri výpočte dotkových rovín vo vrchoch trojuholníkov (ďalej len váha), v závislosti od interpolantu ďalej metóda určenia mikro ťažísk (ďalej len metóda) a typ plátu, z ktorého vychádza voľba konštanty úrovne vyhladenia alebo voľba kritéria pre výpočet lokálnych úrovní vyhladenia. Treba však dodať, že zakaždým bola použitá 2D Delaunay-ho triangulácia (v prípade výsledku s lomom bola typu constrained). Pretože triangulácia nevyužíva nadmorskú výšku, nemusí výsledný tvar nutne zohľadniť tvar reliéfu najideálnejšie. Testovaných bolo okolo 20 variantov, avšak bližšie popísaných bude 11 z nich, jednotlivé konfigurácie sú prezentované v tab. 8.2.

Pretože variantov môže nastať príliš mnoho, nasledujúce výsledky hodnotia len najdôležitejšie parametre, ktorými sú typy interpolantov v kombinácii s typmi plátov pri rôznych úrovniach vyhladenia (globálnych aj lokálnych). Za najdôležitejšie sa považujú preto, lebo ich výber najviac ovplyvňuje množstvo novo interpolovaných bodov a teda aj trojuholníkov, čo ma pri väčších bodových poliach značný vplyv na výkon algoritmu.

Váha aj metóda ostali rovnaké. Spomedzi váh najlepšie výsledky dosahovali súčin štvorcov strán a pomer obvodu a obsahu, obe znižujú vplyv príliš dlhých a deformovaných trojuholníkov, výsledky týchto dvoch sa líšili minimálne, zvolená bola druhá spomenutá váha. V prípade metódy lepšie výsledky dosahovali tie sofistikovanejšie, teda metódy kvadratickej variancie a dočasného štvoruholníkového plátu. Druhá spomínaná metóda bola vybraná do užšieho výberu variantov.

Ako vidno z tabuľky 8.2, pri každom teste bol použitý konštantný rozostup vrstevníc a to 5 m. Dôvodom je fakt, že etalónová plocha predstavuje malé územie a pri zobrazovanej mierke 1:6 000 sa javí ako vhodné. V závere testovania budú zobrazené aj výsledky jedného z variantov pri mierke 1:10 000 a rozostupe 10 m. V tejto mierke s rozostupom 5 alebo 10 m sú znázornené výsledky reálnych dát v ďalšej podkapitole, kde interval bol volený podľa členitosti krajiny.

Výsledné interpolované vrstevnice boli hodnotené viacerými spôsobmi, možno ich zahrnúť do dvoch základných skupín: numerické a vizuálne. Vizuálne sa jedná o porovnanie generovaných vrstevníc s pôvodnými etalónovými (viď prílohy, mapy 2 až 5). Pri numerickom hodnotení možno hovoriť o hodnotení výkonu algoritmu a presnosti interpolovaných bodov z vrstevníc. Porovnávané boli základné charakteristiky sekundárnej TIN, ktorými sú počet vrcholov a trojuholníkov, keďže nepriamo charakterizujú aj časová náročnosť algoritmu. Pri hodnotení presnosti boli priestorové súradnice interpolovaných bodov vrstevníc vkladané do etalónovej funkcie, čím sa získala ich pravá nadmorská výška a sledovala sa tak odchýlka nadmorských výšok Δz :

$$\Delta z_i = z_i - z_{0i} ; \quad 1 \leq i \leq N_i , \quad [8.4]$$

kde z_i je nadmorská výška bodu s indexom i z množiny všetkých interpolovaných bodov N_i prislúchajúcim vrstevniciam a z_{0i} je nadmorská výška bodu s rovnakými priestorovými súradnicami s využitím vzťahu [8.1].

Tieto odchýlky boli hodnotené štatisticky a graficky v podobe máp (viď prílohy, mapy 6 až 9). Štatisticky sa jedná o maximálnu pozitívnu a maximálnu negatívnu odchýlku. Pozitívna odchýlka znamená, že nadmorská výška interpolovaného bodu je vyššia, než etalónová, pri negatívnej je nižšia. Ďalej bol z odchýlok nadmorských výšok bol hodnotený priemer m a smerodajná (štandardná) odchýlka σ podľa jednoduchých známych vzťahov:

$$m = \frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} |\Delta z_i| , \quad [8.5]$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} (|\Delta z_i| - m)^2} \quad [8.6]$$

Numerické výsledky prináša tabuľka 8.3.

Ani prítomnosť vrcholov v primárnej TIN po obvode etalónovej plochy však nezabránila menším deformáciám v tejto v okrajoch. Príčinou je fakt, že v týchto vrcholoch nemožno dostatočne vhodne odhadnúť dotykové roviny pre absenciu trojuholníkov mimo plochy. Z tohto dôvodu sa meranie odchýlok uskutočnilo len v centrálnej oblasti o rozmeroch 800 x 800 m.

Variant	Interpolant	Váha	Metóda	Plát	LoD	Uhol	Rozostup vrstevníc
1	0	4	-	0	3	-	5 m
2 (mapa 2, 6)	0	4	-	0	5	-	5 m
3	0	4	-	0	8	-	5 m
4	1	4	3	0	3	-	5 m
5 (mapa 3, 7)	1	4	3	0	5	-	5 m
6	1	4	3	0	8	-	5 m
7	1	4	3	1	-	5°	5 m
8 (mapa 4, 8)	1	4	3	1	-	10°	5 m
9	1	4	3	1	-	15°	5 m
10	2	4	3	0	5	-	5 m
11 (mapa 5, 9)	2	4	3	1	-	10°	5 m

Výsvetlivky:

Interpolant: jednoduchý C⁰ (0), Clough-Tocher C¹ (1), Clough-Ticher C¹ s minimalizáciou C² nespojitosti (2)

Váha: konštantne volená váha pomeru obsahu a obvodu trojuholníka pri určení dotkových rovin vo vrcholoch TIN, viď [5.25d]

Metóda: okrem C⁰ interpolantu, konštantné určenie mikro ťažísk metódou dočasných štvoruholníkových plátov viď časť 5.3.3

Plát: pravidelný (0) s konštantnou LoD, nepravidelný (1) s hodnotou max. uhla normál ako kritériom vyhladenia, viď 5.6

Kódy korešponujú s tými použitými v aplikácii

Tab 8.2 Konfigurácie testovaných variantov

Variant	N _{v2}	N _{t2}	N _i	Δz ₊ [m]	Δz ₋ [m]	m [m]	σ [m]
1	2 725	5 328	3 981	5.4	-4.7	0.70	0.72
2	7 501	14 916	6 621	5.2	-4.7	0.67	0.70
3	19 105	37 888	10 559	5.2	-4.7	0.67	0.70
4	9 869	19 616	7 957	4.9	-4.7	0.61	0.67
5	24 117	48 148	12 312	5.0	-4.6	0.61	0.66
6	55 809	117 216	18 974	5.0	-4.7	0.61	0.66
7	28 583	57 142	12 288	5.0	-4.7	0.69	0.73
8	14 532	29 002	9 018	5.0	-4.6	0.67	0.72
9	10 950	21 846	8 195	4.9	-4.7	0.62	0.68
10	24 117	48 148	12 364	8.7	-5.5	0.65	0.76
11	15 181	30 307	9 395	8.7	-5.5	0.73	0.84

Výsvetlivky:

N_{v2} – počet vrcholov sekundárnej TIN

N_{t2} – počet trojuholníkov sekundárnej TIN

N_i – počet interpolovaných bodov tvoriacich vrstevnice

Δz₊ – maximálna pozitívna odchýlka

Δz₋ – maximálna negatívna odchýlka

m – priemer

σ – štandardná odchýlka

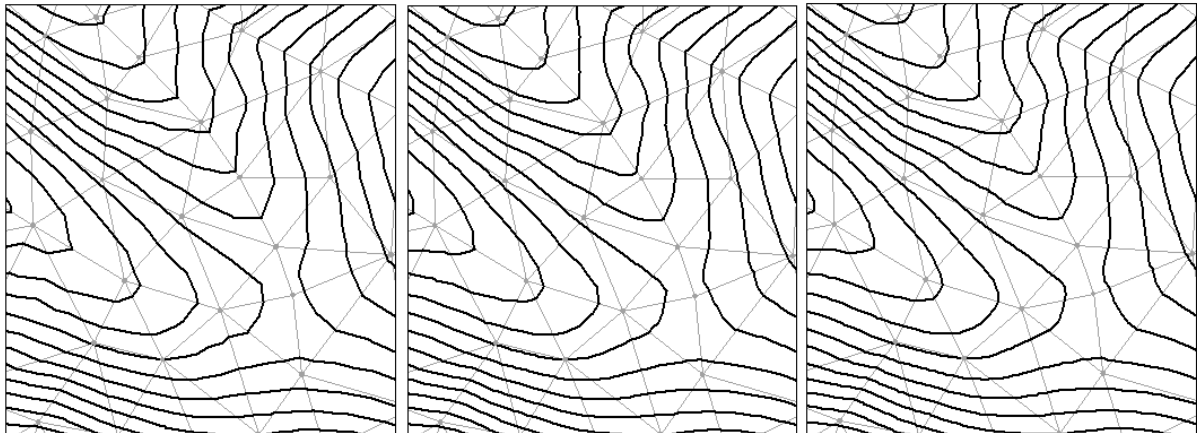
Tab 8.3 Numerické výsledky testov

8.1.2 Numerické a vizuálne hodnotenie testov

Prvá skupina troch variantov testujú v pravidelnom pláte rôzne hodnoty úrovne konštant vyhladenia LoD pre C^0 interpolant, nepravidelný plát nie je preň definovaný. Počet sekundárnych trojuholníkov oproti primárnej sieti narastá 9 až 64 násobne so zvyšujúcou sa hodnotou LoD. Z odchýlok možno však badať len nepatrné zníženie priemernej odchýlky, amplitúdy sa výrazne nemenia.

Grafické znázornenie odchýlok je obsahom prílohy mapa 6. Týka sa len hodnoty LoD = 5, keďže situácia sa výrazne v ostatných prípadoch nemení. Na tejto mape možno badať červené a zelené zhľuky predstavujúce výraznejšie pozitívne a negatívne odchýlky. Mapa 2 pritom znázorňuje výsledky algoritmu s rovnakými parametrami spolu s referenčnými (etalónovými) vrstevnicami. Pri porovnaní týchto zhľukov z mapy 6 s rovnakými oblasťami z mapy 2 možno konštatovať nepresnosti:

1. Zhľuky červených a zelených bodov ležia vedľa seba v smere vrstevníc (JV oblasť). Generovaný svah je lineárno-lineárny, na etalóne sa však jedná o lineárno-konkávne (nevýrazná dolina s konštantným spádom, červený zhľuk) a lineárno konvexné (nevýrazný hrebeň s konštantným spádom, zelený zhľuk) formy.
2. Na iných miestach (napr. na SZ alebo JZ územia) badať červené a zelené zhľuky, tentoraz je ich vzájomná poloha skôr v smere spádnic. Opäť nie je problém v hustote vrstevníc (krivosť v smere spádovej krivky), ale v ich zakrivení (krivosť v smere vrstevníc). V zelených oblastiach má algoritmus sklon linearizovať konvexné formy, kým v červených oblastiach konkávne formy.



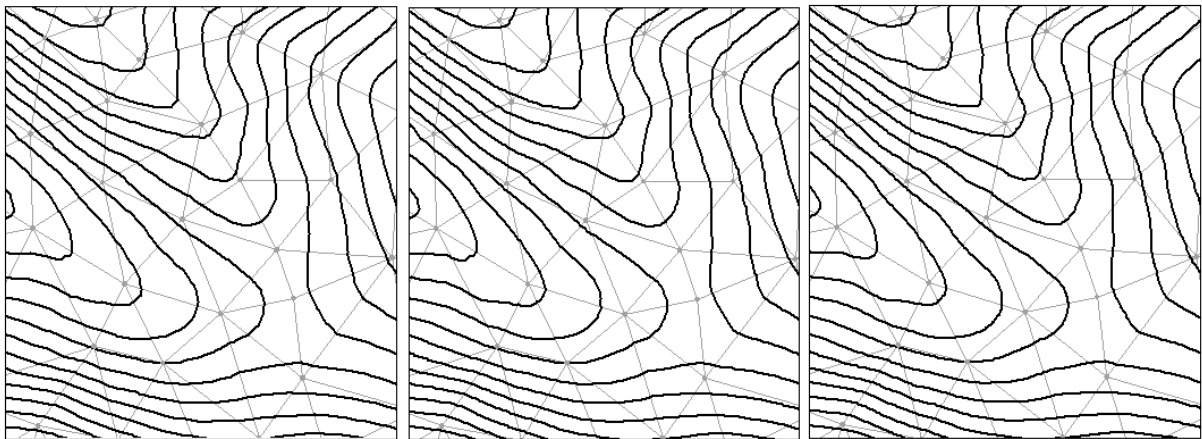
Obr. 8.1 Výrez vrstevníc generovaných interpolantom C^0 .
Variant 1 (vľavo), variant 2 (v strede) a variant 3 (vpravo)

Výrezy jednotlivých variantov jednoduchého interpolantu sú znázornené na obr. 8.1 v rovnakej mierke, ako mapy v prílohách. Ide o výrezy z máp veľkých mierok 1:5000 (mierka sa týka všetkých obrázkov v tejto kapitole okrem obr. 8.3 a 8.5). Až pri hodnote LoD=8 badať rozdiely v hladkosti vrstevníc, v prvých dvoch prípadoch pôsobia miestami „konstrbato“, výraznejšie to badať na zakrivených častiach vrstevníc, ktorými

prechádzajú hrany. Dôvodom je fakt, že trojuholníkové pláty na seba nenadväzujú hladko (nezachovávajú prvú deriváciu), hrany tak majú vo viacerých prípadoch deformovať vrstevnice, čo však pri vyššej úrovni vyhladenia možno odstrániť.

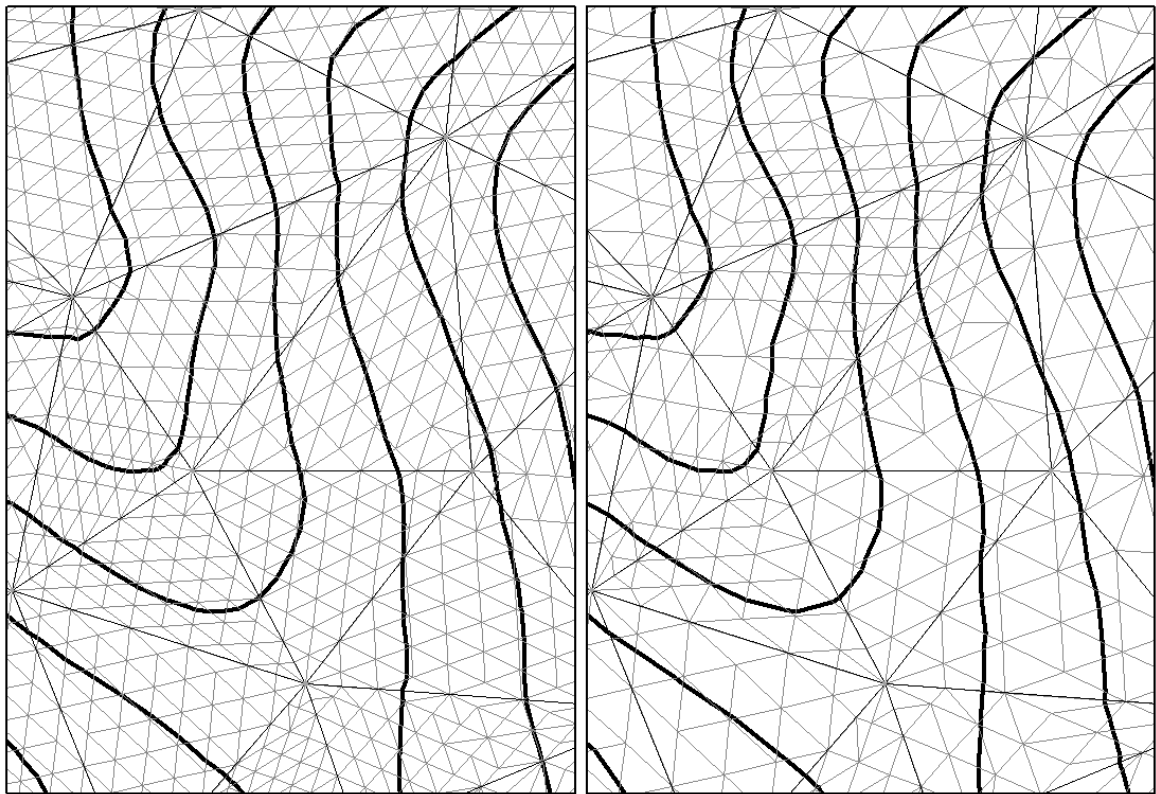
Druhá a tretia skupina variantov porovnáva rozdiely vrámci C^1 interpolantu. Tieto dve skupiny sa líšia typom plátu. Druhá skupina (varianty 4 až 6) hodnotí pravidelný plát s rovnakými hodnotami LoD ako prvá skupina a tretia skupina (varianty 7 až 9) hodnotí nepravidelný plát pri troch rôznych hodnotách kritéria, ktorým je maximálny uhol zvieraný normálami susedných sub trojuholníkov na makro hranách.

V druhej skupine možno numericky badať lepšie výsledky oproti prvej skupine, práve vďaka faktu, že zachováva prvú deriváciu na hranách trojuholníkových plátov. Vplyvom Clough-Tocher delenia makro trojuholníkov na mikro trojuholníky však dochádza k strojnásobeniu celkového počtu trojuholníkov, nad ktorými sa definujú pláty. Počet trojuholníkov sekundárnej siete tak pri rovnakom LoD narastá trojnásobne, do tohto počtu sa ešte prirátajú trojuholníky, ktoré vznikli pri pridávaní vrcholov za účelom odstránenia hviezdicového efektu popísanom v podkapitole 5.6. Celkový počet sekundárnych trojuholníkov tak oproti primárnej sieti narástol 30 až 200násobne, v závislosti od LoD, čo má veľmi výrazný vplyv výkon algoritmu pri objemnejších dátach. C^1 interpolant však podáva uspokojujúcejší tvar vrstevníc (obr. 8.2), než predošlý. Pri LoD=3 ešte badať miestami deformované vrstevnice v zakrivených oblastiach, pri vyšších už sú celkom potlačené. Nedostaky v grafickom porovnaní odchýlok (mapy 3 a 7) sú prakticky rovnaké ako v pri prvej skupine.



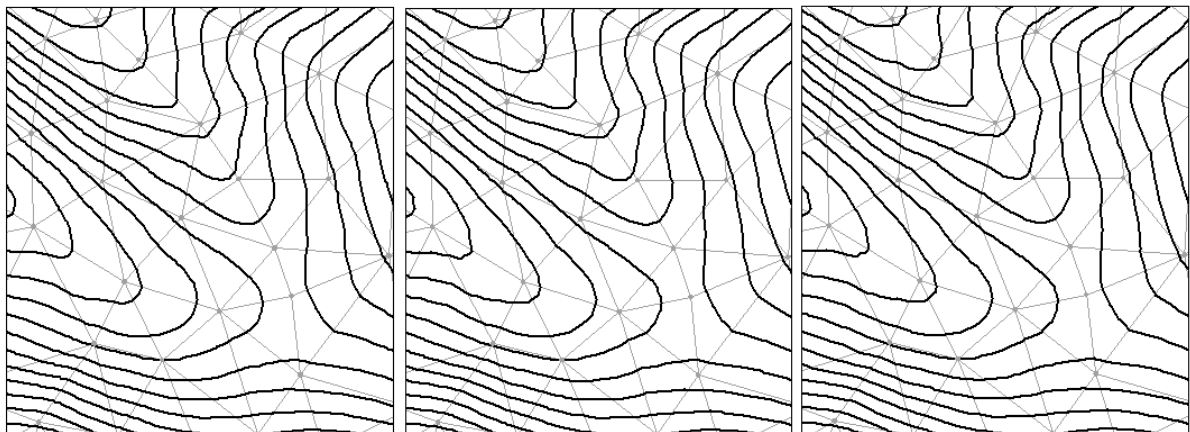
Obr. 8.2 Výrez vrstevníc generovaných interpolantom C^1 s pravidelným plátom.
Variant 4 (vľavo), variant 5 (v strede) a variant 6 (vpravo)

Najdôležitejšou skupinou výsledkov tejto práce je tretia, pretože predstavuje prototyp zlepšenia druhej skupiny. Jeho základnou vlastnosťou je, že zakrivené typy reliéfu vyhladí viac, než lineárne. V konečnom dôsledku tak eliminuje negatívne vlastnosti rovnomerného plátu, ktorý buď precení mieru vyhladenia na mieste, kde to nie je potrebné alebo podcení na miestach, kde to treba. Dochádza tak k výraznému šetreniu trojuholníkov sekundárnej siete so zachovaním kvality (obr. 8.3).



Obr. 8.3 Porovnanie interpolantu C^1 s pravidelným a nepravidelným plátom. Variant 5 s pravidelným plátom (vľavo) a variant 8 (vpravo) s nepravidelným plátom

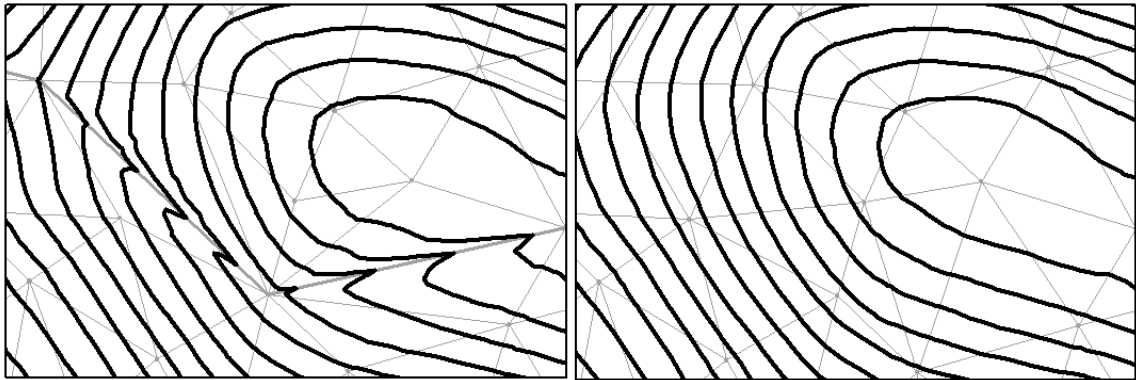
Variant 7 vyhladí pláty tak, aby sekundárne trojuholníky na makro hranách nezvierali väčší uhol než 5° pri 95 násobnom počte trojuholníkov. Veľké množstvo z nich sa však nachádza práve po okrajoch plochy, kde vznikajú aj najväčšie nepresnosti, pri eliminácii týchto prebytočných trojuholníkov by celkový počet klesol približne o 20 %, čím by sa ich počtom vyrovnal variantu 5. Oba varianty navyše generujú približne rovnaký počet bodov vrstevníc. Paradoxné však je, že priemerná odchýlka pri variante 7 nadobúda úroveň jednoduchého interpolantu.



Obr. 8.4 Výrez vrstevníc generovaných interpolantom C^1 s nepravidelným plátom. Variant 7 (vľavo), variant 8 (v strede) a variant 9 (vpravo)

Variant 8 sa od predošlého vizuálne prakticky nelíši (obr. 8.4), pri kritériu 10° však redukuje počet sekundárnych trojuholníkov takmer o polovicu. Rozdiely nebadateľ ani pri variante 9 s kritériom 15° , tam však už nedochádza k väčšej úspore na počte trojuholníkov. Bodové odchýlky týchto variantov v grafickom zobrazení sú opäť obdobné ako pri interpolante C^0 (mapy 4 a 8).

S využitím nepravidelného plátu v podobe variantu 8 bol vykonaný aj pokus s lomovými hranami. Etalónovou plochou bola vedená línia predstavujúca zárez cesty (obr 8.5). Keďže v etalónovej ploche nie je definovaná, nemožno ju numericky zhodnotiť, ostáva len konštatovanie, že miestom, kadiaľ prechádza, sa vytvorili na vrstevnici ostré lomy, ktoré však majú tendenciu ovplyvniť aj bezprostredné okolie, ktorými sú malé „hrčky“ na vrstevniciach



Obr. 8.5 Výrez vrstevníc generovaných interpolantom C^1 s nepravidelným plátom.

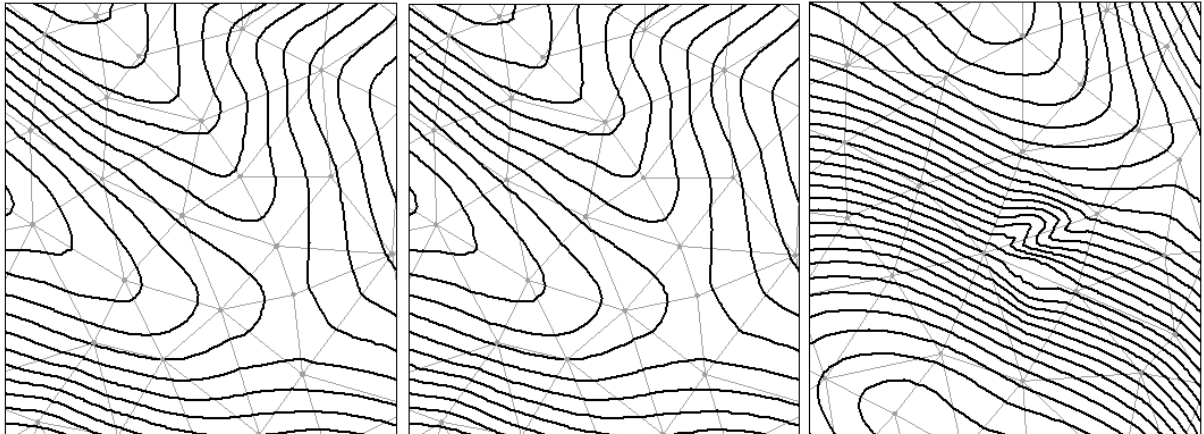
Poslednou skupinou sú varianty pravidelného a nepravidelného plátu, ktoré prešli jednou minimalizáciou C^2 nespojivosti. Variant 10 je zhodný s variantom 5 doplneným o minimalizáciu, variant 11 obdobne zodpovedá variantu 8. Pri výbere počtu minimalizácií sa brala v úvahu priemerná hodnota nespojivosti, ako bolo popísané v časti 7.2.6. Táto hodnota nesúvisí s výberom typu plátu, viaže sa len na polohu kontrolných bodov, pre oba varianty nadobúdali priemer rovnaké hodnoty (viď tab. 8.4). Pretože po prvej iterácii už nedochádzalo k výraznej minimalizácii, k ďalším už nedochádzalo.

iterácia	0	1	2	3	4	5
priemerná odchýlka od C^2 spojitosti [m]	0.875	0.344	0.278	0.266	0.264	0.263

Tab 8.2 Priemerná odchýlka od C^2 spojitosti vzhľadom na iteráciu

V tejto oblasti bol očakávaný ešte menší počet sekundárnych trojuholníkov pri variante 11 so zachovaním kvality, k zlepšeniu však nedošlo, práve naopak, ukázali sa neakceptovateľné nepresnosti, ktoré minimalizácia spôsobila mimo doteraz používaného výrezu (obr 8.5 vpravo). Z ukážky vidno neprirodené vlnenie vrstevníc,

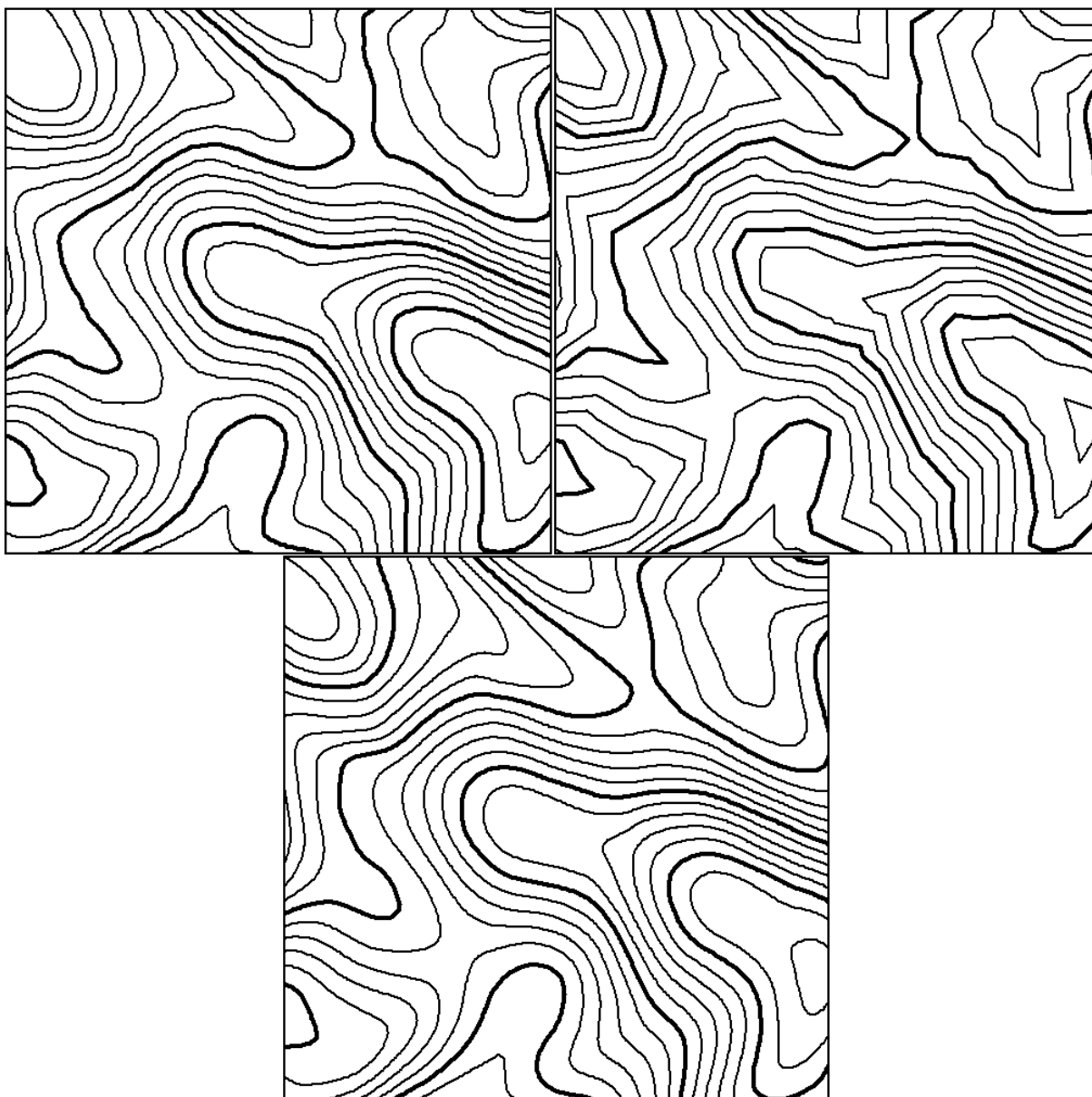
ktoré vidno aj v mapách 5 a 9 vo východnej časti územia. V prvej vidieť posun voči referenčným vrstevniciam, v druhej zhluky červených a zelených bodov predstavujúcich odchýlky. Nevhodnosť sa prejavila aj na opačnej, západnej strane územia (viď mapy 5 a 9), kde na chrbáte pohoria vznikol neprirodzený vrchol. Z numerického hľadiska sa zreteľne zvýšila maximálna pozitívna odchýlka. V nepravidelnom pláte aj priemerná hodnota so štandardnou odchýlkou.



Obr. 8.6 Výrez vrstevníc generovaných interpolantom C^1 s minim. C^2 nespojitosti. Variant 10 (vľavo), variant 11 (v strede) a variant 11 v kritickej oblasti (vpravo)

Dôležitým faktorom je, že odchýlky vo všetkých variantoch (mapy 6 až 9) nastávali na rovnakých miestach (mimo posledných dvoch, kde ich nastalo viac kvôli minimalizácii). Na niektorých miestach (SZ a SV) sa farebné zhluky viažu k podlhovastým trojuholníkom. Z toho možno usúdiť, že na výškovú presnosť má podstatný vplyv práve výber vstupného bodového poľa ako aj konfigurácia hrán v primárnej TIN, algoritmus je najmä z hľadiska výškovvej presnosti citlivý na vstupné dáta.

Na záver ešte prichádza k porovnanie s inými interpolačnými metódami programu ArcGIS, porovnávaný bol variant 8, keďže implementuje riešenie s využitím nerovnomerného vyhladenia. Výrezy z obr. 8.7 sú v mierke 1:10 000 s rozstupom vrstevníc 10 m. V prvom rade je daný algoritmus porovnávaný s klasickou lineárnou interpoláciou vrstevníc nad TIN, čo je jedinou metódou interpolácie nad TIN, s využitím Delaunay-ho triangulácie, ktorú ArcGIS ponúka. Pre zaujímavosť je ďalšou ukážkou z ArcGISu výsledok dvojitej interpolácie. V tomto prípade bol z nepravidelného bodového poľa vytvorený raster s rozlíšením 10m interpolačnou metódou regularizovaný spline a z rastra následne generované vrstevnice modulom contour. Manuál však neposkytuje informácie o matematickom aparáte týchto metód.

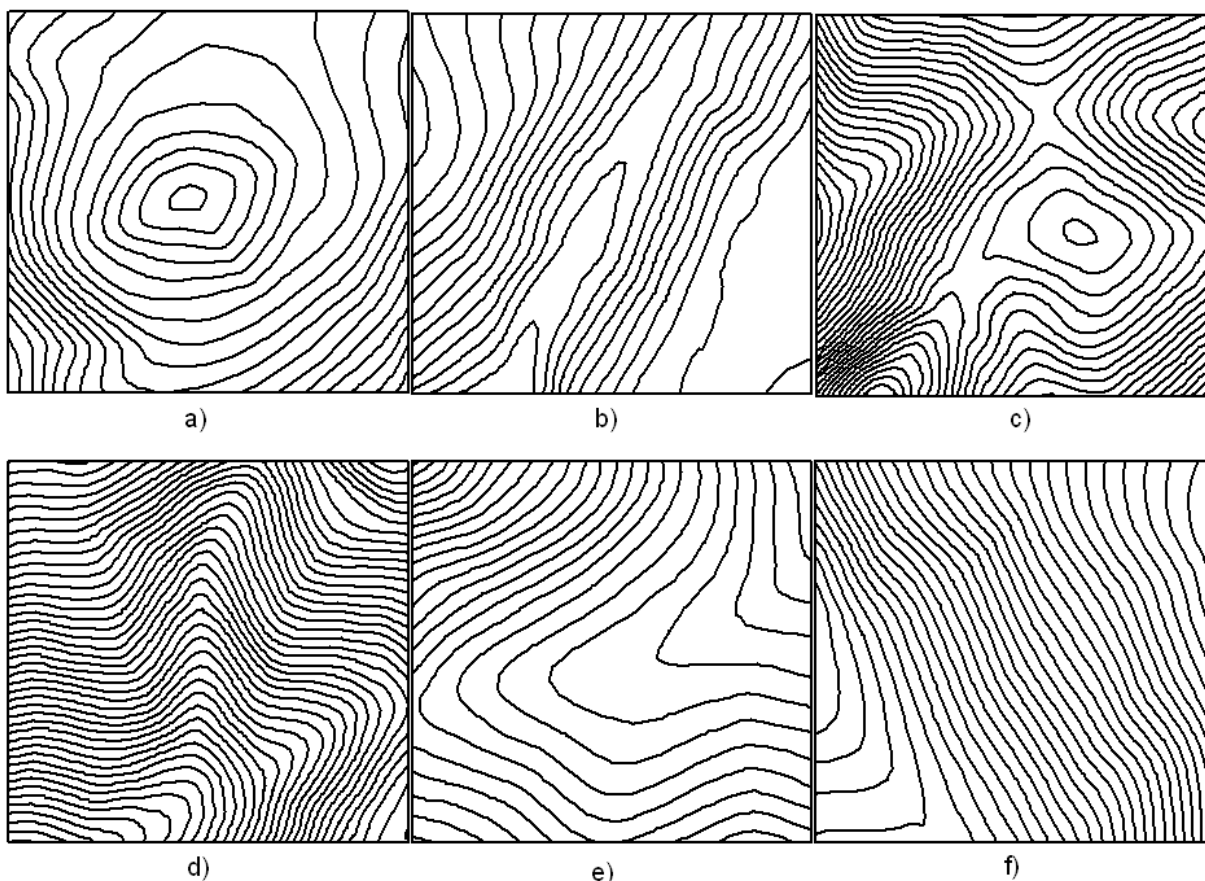


*Obr. 8.7 Porovnanie výsledkov algoritmu s výstupmi z programu ArcGIS
Variant 8 (vľavo hore), lineárna interpolácia z TIN (vpravo hore), regularizovaný spline
(dole)*

Pri lineárnej interpolácii je vidno spomínané nedostatky tejto jednoduchšej metódy, čím sú ostré lomené čiary na miestach so značnou horizontálnou krivosťou na mnohých miestach. Uspokojivé výsledky, čo sa týka vrstevníc dáva druhá metóda s využitím medzikroku, ktorým je pravidelná mriežka. Popri tomto riešení je možné badať niektoré nedostatky variantu 8, ktorými sú lokálne drobné oscilácie vrstevníc. Pri pohľade na detailnejší výstup (mapa 4) možno usúdiť, že väčšina týchto drobných oscilácií je spojená s pôvodnými hranami, pozdĺž ktorých pri vyhladzovaní vznikali podlhovasté trojuholníčky. Tento efekt bol odstránený v okolí vrcholov vkladáním extra bodov, bolo by však vhodné takýto krok urobiť pozdĺž celých hrán.

8.2 Reálne dáta

Druhá podkapitola pozostáva z niekoľkých ukážok aplikácie algoritmu s prototypom nepravidelného plátu (variant 8) na reálnych dátach. Vybrané boli tri oblasti z regiónu Liptov na severe Slovenska, každá s inými črtami, všetky o rozlohe približne 250 ha v mierke 1:10 000 (mapy 10 až 12).



Obr. 8.8 Ukážky tvarov reliéfu zo severného Slovenska generovaných algoritmom
a) vrchol Veling – kopa, b) hlboká dolina potoka Jamníček zarezaného v teréne,
c) bočný horský chrbát Suchého Hrádku s menšou kopou a sedlami, d) horské rokliny
e) hrebeň Ježovej s rovňou (spočinkom), f) lineárny strmý svah Ježovej

Prvou je malá pahorkatina s medzi obcami Podtureň a Jamník v blízkosti sútoku potoka Jamníček a rieky Váh (mapa 10), v osi Liptovskej kotliny. V štvorcovom výreze sú zachytené vršky Veling (obr. 8.8 a)) v južnej časti a Trhová v severnej, ako aj výrazná dolina (obr. 8.8 b)) spomínaného potoka. Mimo pre TIN typických zdeformovaných krajov spôsobených nedostatkom informácií vo vrcholoch a vplyvom príliš úzkych trojuholníkov, sú zreteľnejšie deformácie v úzkej doline potoka napriek tomu, že hrany TIN prechádzajú jej osou. K deformáciám dochádza najmä v miestach, kde vrcholy TIN ležia v tesnej blízkosti vrstevníc. Naopak spomínané vrcholy aj so sedlom tento problém nemali, mierne nedostatky vidieť aj po okraji chrbátu zvažujúceho sa k doline.

Pekných výsledkov dosiahla druhá lokalita (mapa 11) severovýchodne od prvej, jedná sa o vrchovinu nad obcou Pribylina v predpolí Západných Tatier na styku s Liptovskou kotlinou s bočným hrebeňom (obr. 8.8 c)) dominantného vrcholu Suchý hrádok s výrazným lineárnym svahom, ktorý sa v južnej časti pozvoľna zmierňuje. Výrazné sú aj vetviace sa doliny potoku Krivul'a (západná časť, obr. 8.8 d)) a prítoku Bystrej (východná časť). Vrstevnice nadobúdajú až na pár detailov (napr. oblasť sedla pod vrcholom) veľmi prirodzené tvary.

Poslednou lokalitou (mapa 12) je hornatina zo Západných Tatier situovaná severne od predošej. Ide o oblasť jedného z vetviacich sa hrebeňov (obr. 8.8 e)) s pozostatkami po širokých ľadovcových dolinách (na SZ) v okolí dominantného, podlhovastého vrchu Ježová. Typické sú strmé lineárne (obr. 8.8 f)) aj zmierňujúce sa svahy.

KAPITOLA 9

Diskusie a záver

Ako vidno z rozsahu tejto záverečnej práce, proces geomorfologickej interpolácie vrstevníc z TIN je pomerne rozsiahly problém. Za jeho súčasť môžeme považovať celý proces od zberu dát, cez metódu tvorby triangulácie, plátovanie, až po samotnú extrakciu izolínií. Práca sa preto zamerala najmä na predposledný čiastkový proces a to aj z dôvodu, že kým zber dát a triangulácie sú v digitálnej kartografii veľmi rozšírené témy, plátové modely sú menej rozšírené. Pri extrakcii vrstevníc sa využila jednoduchšia možnosť približného výpočtu, v ktorom je plát aproximovaný sekundárnym polyédrickým modelom.

Prevažná časť teoretickej časti bola spracovaná s využitím citovanej odbornej literatúry, ako je však vidno z rešerše, táto je z oblasti počítačovej grafiky a rieši plátovanie za účelom generovania vrstevníc. Prínosom práce má byť spôsob lokálneho vyhladzovania plátov v závislosti na odchýlke normál susedných trojuholníkov.

Aplikácia, ktorej zdrojový kód je prílohou tejto práce predstavuje kompromis medzi prehľadným a rýchlym riešením, jedná sa o autorovu prvotinu využitia jazyka C++ a hlavne má demonštrovať postupy popísané v teoretickej časti. V textovej časti je aplikácia popísaná prehľadnými schémami – procesnými diagramami, ktoré sa na teoretickú časť odkazujú a demonštrujú tak schému zdrojového kódu.

Testovanie aplikácie prebiehalo najmä na syntetických dátach umožňujúcich manuálny výber vstupných bodov ako aj testovanie výškovej presnosti bodov. Na tejto množine boli skúšané viaceré varianty parametrov, ktoré mali poukázať na výhody navrhovaného riešenia vyhladzovania, ktorým je rovnaká kvalita výstupov pri šetrení počtu interpolovaných bodov a teda pri nižšej časovej náročnosti. Zároveň však poukazujú na nedostatky, ktorými sú lokálne, aj keď len nepatrné oscilácie vrstevníc spôsobené najmä nevhodnými tvarmi sekundárných trojuholníkov.

Výstupy z dát na reálnych územiach poukazujú na využiteľnosť algoritmu pri veľkej mierke topografických máp 1:10 000, aj tu sa však miestami vyskytujú nedostatky popísané pri syntetických dátach.

ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ODKAZOV

Alboul, L., Kloosterman, G., Traas, C., van Damme, R., 2000: Best data-dependent triangulations. In: Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 119, Issues 1–2, July 2000, pp. 1-12, ISSN 0377-0427, 10.1016/S0377-0427(00)00368-X.
<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037704270000368X>>

Alfeld, P., 1984: A bivariate C2 Clough-Tocher scheme. In: Computer Aided Geometric Design, Volume 1, Issue 3, December 1984, pp. 257-267, ISSN 0167-8396, 10.1016/0167-8396(84)90012-8.
<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167839684900128>>

Bastl, B., Jüttler, B., Lávička, M., Schicho, J., Šír, Z., 2011: Spherical quadratic Bézier triangles with chord length parameterization and tripolar coordinates in space. In: Computer Aided Geometric Design, Volume 28, Issue 2, February 2011, pp. 127-134, ISSN 0167-8396, 10.1016/j.cagd.2010.11.001.
<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167839610001226>>

Bayer, T., 2008: Algoritmy v digitání kartografii. Karolinum, Praha, 251p.

Bezděk, J., 2009: Tvorba izolinií nad nepravidelnou trojúhelníkovou sítí. Diplomová práce, ZČU, Plzeň, 60p.

Böhm, W., 1981: Generating the Bézier points of B-spline curves and surfaces. In: Computer-Aided Design, Volume 13, Issue 6, November 1981, pp. 365-366, ISSN 0010-4485, 10.1016/0010-4485(81)90213-X.
<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/001044858190213X>>

Böhm, W., Farin, G., Kahmann, J., 1984: A survey of curve and surface methods in CAGD, Computer Aided Geometric Design, Volume 1, Issue 1, July 1984, pp. 1-60, ISSN 0167-8396, 10.1016/0167-8396(84)90003-7.
<<http://dblp.uni-trier.de/db/journals/cagd/cagd1.html#BohmFK84>>

Drs, L., 1984: Plochy ve výpočetní technice. SNTL, Praha, 146p.

Čermák, P., 2002: Výpočet vrstevnic na trojúhelníkové síti. Diplomová práce, ZČU, Plzeň, 78p.

Farin, G., 1982: A construction for visual C1 continuity of polynomial surface patches. In: Computer Graphics and Image Processing, Volume 20, Issue 3, November 1982, pp. 272-282, ISSN 0146-664X, 10.1016/0146-664X(82)90085-5.

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0146664X82900855>>

Farin, G., 1985: A modified Clough-Tocher interpolant. In: Computer Aided Geometric Design, Volume 2, Issues 1–3, September 1985, pp.19-27, ISSN 0167-8396, 10.1016/0167-8396(85)90003-2.

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167839685900032>>

Farin, G., 1986: Piecewise triangular C1 surface strips. In: Computer-Aided Design, Volume 18, Issue 1, January–February 1986, pp. 45-47, ISSN 0010-4485, 10.1016/S0010-4485(86)80010-0.

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448586800100>>

Farin, G., 1986: Triangular Bernstein-Bézier patches. In: Computer Aided Geometric Design, Volume 3, Issue 2, August 1986, pp. 83-127, ISSN 0167-8396, 10.1016/0167-8396(86)90016-6.

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167839686900166>>

Farin, G., Hansford, D., 1999: Discrete Coons patches. In: Computer Aided Geometric Design, Volume 16, Issue 7, August 1999, Pages 691-700, ISSN 0167-8396, 10.1016/S0167-8396(99)00031-X.

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016783969900031X>>

Farin, G., 2002: Curves and Surfaces: A Practical Guide. Morgan/Kauffman, San Francisco, 499p.

Farin, G., Hoschek J., Kim, M.S., 2002: Handbook of Computer Aided Geometric Design. Elsevier, Amsterdam, 820p.

Feciskanin, R., 2007: Lokálna optimalizácia nepravidelnej trojuholníkovej siete s rešpektovaním podmienky správnej konfigurácie trojuholníkov. In: Geodetický a kartografický obzor 2007, č.7-8, pp.151-155

Funfzig, Ch., Muller, K, Hansford, D., Farin, G., 2008: PNG1 Triangles for Tangent Plane Continuous Surfaces on the GPU. Tempe, Arizona State University. 2008.

<<http://dblp.uni-trier.de/db/conf/graphicsinterface/graphicsinterface2008.html#FunfzigMHF08>>

Hojovec, V., et al., 1987: Kartografie. Geodetický a kartografický podnik v Praze, Praha, 660p.

von Mönchaltorf, M.H., 2004: Terrain Modelling with Triangle Based Free-Form Surfaces. PhD Thesis, Universität Zürich, Zürich, 136p.

Chang, L.H.T, Said, H.B., 1997: A C2 triangular patch for the interpolation of functional scattered data. In: Computer-Aided Design, Volume 29, Issue 6, June 1997, pp. 407-412, ISSN 0010-4485, 10.1016/S0010-4485(96)00068-1.

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448596000681>>

Kashyap, P., 1996: Improving Clough-Tocher interpolants. In: Computer Aided Geometric Design, Volume 13, Issue 7, October 1996, pp. 629-651, ISSN 0167-8396, 10.1016/0167-8396(95)00052-6.

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167839695000526>>

Kashyap, P., 1998: Geometric interpretation of continuity over triangular domains. In: Computer Aided Geometric Design, Volume 15, Issue 8, September 1998, pp. 773-786, ISSN 0167-8396, 10.1016/S0167-8396(97)00033-2.

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167839697000332>>

Kolingerová, I., Dolák, M., Strych, V., 2009: Eliminating contour line artefacts by using constrained edges, Computers & Geosciences, Volume 35, Issue 10, October 2009, pp. 1975-1987, ISSN 0098-3004, 10.1016/j.cageo.2008.12.017.

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098300409001587>>

van Kreveld, M.J., 1994: Efficient Methods for Isoline Extraction from a Digital Elevation Model based on Triangulated Irregular Networks. Technical report, University of Utrecht, Utrecht, 22p.

<http://igitur-archive.library.uu.nl/math/2006-1216-201959/kreveld_94_efficient.pdf>

van Kreveld, M.J., 1996: Digital Elevation Models and TIN Algorithms. In: Algorithmic Foundations of Geographic Information Systems. Springer-Verlag, London, UK, 37-78.

<<http://www.staff.science.uu.nl/~kreve101/papers/terrainsurvey.pdf>>

van Kreveld, M.J, 1997: Algorithms for Triangulated Terrains. In: SOFSEM 1997: Theory and Practice of Informatics, 19-36

<http://igitur-archive.library.uu.nl/math/2007-0104-200231/van_kreveld_97_algorithms.pdf>

Krcho, J., 1990: Morfometrická analýza a digitálne modely georeliéfu. VEDA, Bratislava, 426p.

Krcho, J., 2001: Modelovanie georeliéfu a jeho geometrickej štruktúry pomocou DTM; polohová a numerická presnosť. Q111, Bratislava, 336p.

Lai M.-J., 1996a: Scattered data interpolation and approximation using bivariate C1 piecewise cubic polynomials. In: Computer Aided Geometric Design, Volume 13, Issue 1, February 1996, pp. 81-88, ISSN 0167-8396, 10.1016/0167-8396(95)00007-0.

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167839695000070>>

Lai, M.-J., 1996b: On C2 quintic spline functions over triangulations of Powell-Sabin's type. In: Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 73, Issues 1–2, 5 October 1996, pp. 135-155, ISSN 0377-0427, 10.1016/0377-0427(96)00040-4.

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377042796000404>>

Liu, H.-W., Fan L.-L., 2009: Lagrange interpolations using bivariate quintic supersplines on double Clough–Tocher refinements. In: Computers & Mathematics with Applications, Volume 58, Issue 8, October 2009, pp. 1636-1644, ISSN 0898-1221, 10.1016/j.camwa.2009.07.051.

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122109005094>>

Sablonnière, P., 1982: Interpolation by quadratic splines on triangles and squares. In: Computers in Industry, Volume 3, Issues 1–2, March–June 1982, pp. 45-52, ISSN 0166-3615, 10.1016/0166-3615(82)90031-8.

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0166361582900318>>

Sederberg, T., W., 2011: Computer Aided Geometric Design. Birgham Young University, Provo, 244p.

Schneider, B., 1998: Geomorphologisch plausible Rekonstruktion der digitalen Repräsentation von Geländeoberflächen aus Höhenliniendaten. PhD thesis, University of Zurich, Zurich.

Urban, J., 1991: Digitální model terénu. ČVUT, Praha, 60p.

Vlachos, A., Peters, J., Boyd, C., Mitchell, J.L., 2001: Curved PN Triangles, In: Proceedings of the 2001 symposium on Interactive 3D graphics, pp. 159-166

<<http://alex.vlachos.com/graphics/CurvedPNTriangles.pdf>>

Wang., T, 1992: A C2-quintic spline interpolation scheme on triangulation. In: Computer Aided Geometric Design, Volume 9, Issue 5, November 1992, pp. 379-386, ISSN 0167-8396, 10.1016/0167-8396(92)90031-J.

<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016783969290031J>>

Worsey, A.J., Farin, G, 1987: An n-dimensional Clough-Tocher interpolant. In: Constructive Approximation Volume 3 Issue 1, pp. 99-110

<<http://dx.doi.org/10.1007/BF01890556>>

Worsey, A.J., Farin, G., 1990: Contouring a bivariate quadratic polynomial over a triangle. In: Computer Aided Geometric Design, Volume 7, Issues 1–4, June 1990, pp. 337-351, ISSN 0167-8396, 10.1016/0167-8396(90)90041-O
<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016783969090041O>>

Yvinec, M., 2002: 2D Triangulations [online]. Posledná revízia: 2012. [cit. 10.5.2012]. Dostupné z
<http://www.cgal.org/Manual/latest/doc_html/cgal_manual/Triangulation_2/Chapter_main.html>

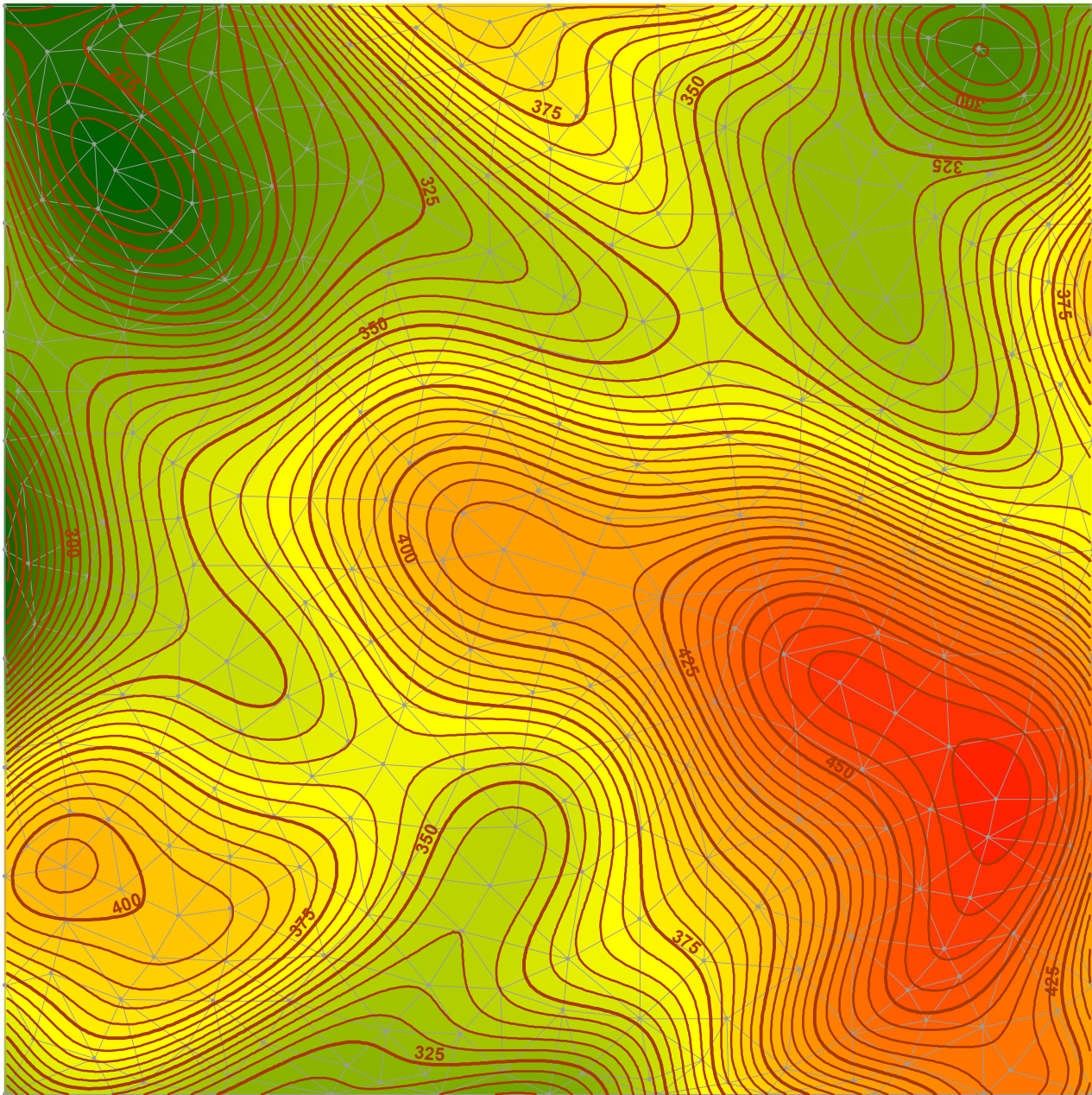
Zheng, J., Wang, G., Liang, Y., 1992: Curvature continuity between adjacent rational Bézier patches. In: Computer Aided Geometric Design, Volume 9, Issue 5, November 1992, pp. 321-335, ISSN 0167-8396, 10.1016/0167-8396(92)90027-M.
<<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016783969290027M>>

ZOZNAM PRÍLOH

- Mapa 1: Etalónová plocha a nepravidelná trojuholníková sieť
- Mapa 2: Vrstevnice generované jednoduchým interpolantom C0
- Mapa 3: Vrstevnice generované Clough-Tocher interpolantom C1 s pravidelným plátom
- Mapa 4: Vrstevnice generované Clough-Tocher interpolantom C1 s nepravidelným plátom
- Mapa 5: Vrstevnice generované Clough-Tocher interpolantom C1 s minimalizáciou C2 nespojitosti a nepravidelným plátom
- Mapa 6: Výšková nepresnosť vrstevníc generovaných jednoduchým interpolantom C0
- Mapa 7: Výšková nepresnosť vrstevníc generovaných Clough Tocher interpolantom C1 s pravidelným plátom
- Mapa 8: Výšková nepresnosť vrstevníc generovaných Clough Tocher interpolantom C1 s nepravidelným plátom
- Mapa 9: Výšková nepresnosť vrstevníc generovaných Clough Tocher interpolantom C1 s minimalizáciou C2 nespojitosti s nepravidelným plátom
- Mapa 10: Vrstevnice generované algoritmom v okolí vrchu Trhová v Liptovskej kotline (pahorkatina)
- Mapa 11: Vrstevnice generované algoritmom v okolí vrchu Suchý Hrádok na úpätí Západných Tatier (vrchovina)
- Mapa 12: Vrstevnice generované algoritmuom v okolí vrchu Ježová v Západných Tatrách (hornatina)

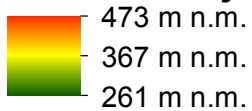
Zdrojový kód aplikácie

Mapa 1: Etalónová plocha a nepravidelná trojuholníková sieť



Legenda

nadmorská výška



473 m n.m.

367 m n.m.

261 m n.m.

— vrstevnica (int. 5m)

— vrstevnica (int. 25m)

— hrany TIN

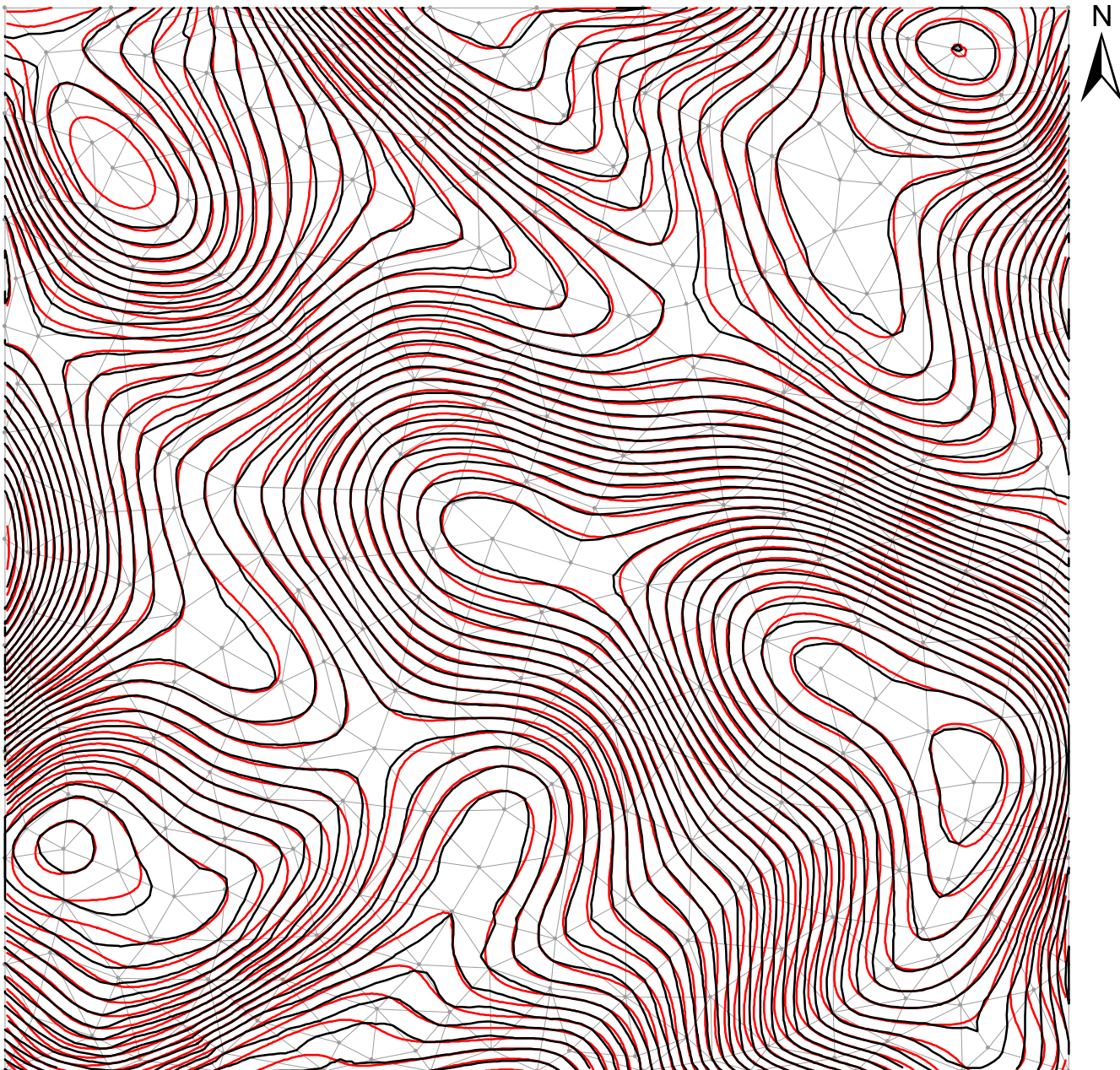
• vrcholy TIN

1:6 000

0 60 120 180 240 300 m



Mapa 2: Vrstevnice generované jednoduchým interpolantom C0



Legenda

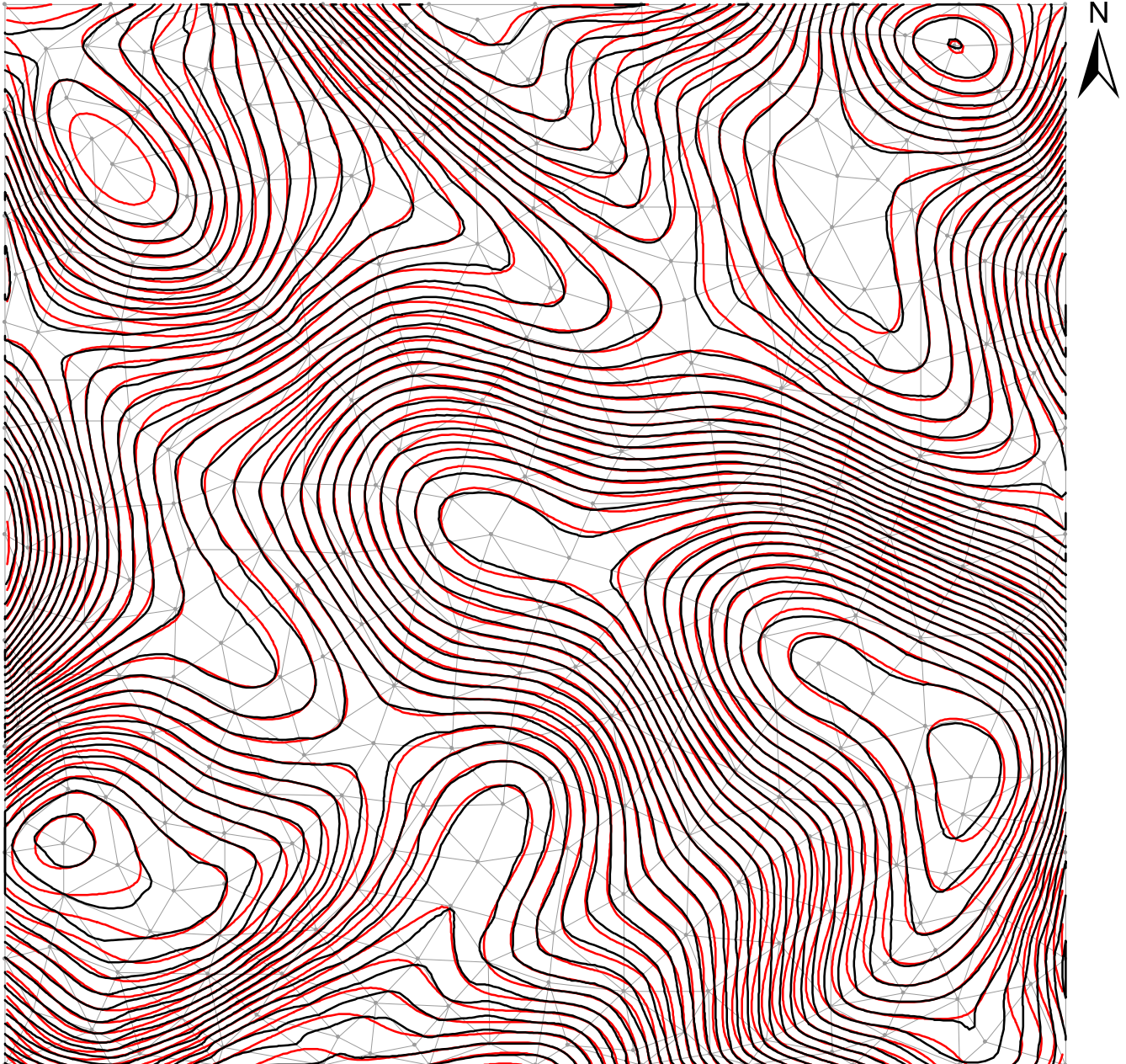
- interpolovaná vrstevnica (int. 5m)
- referenčná vrstevnica (int. 5m)
- hrany TIN
- vrcholy TIN

1:6 000

0 60 120 180 240 300 m



Mapa 3: Vrstevnice generované Clough-Tocher interpolantom C1 s pravidelným plátom

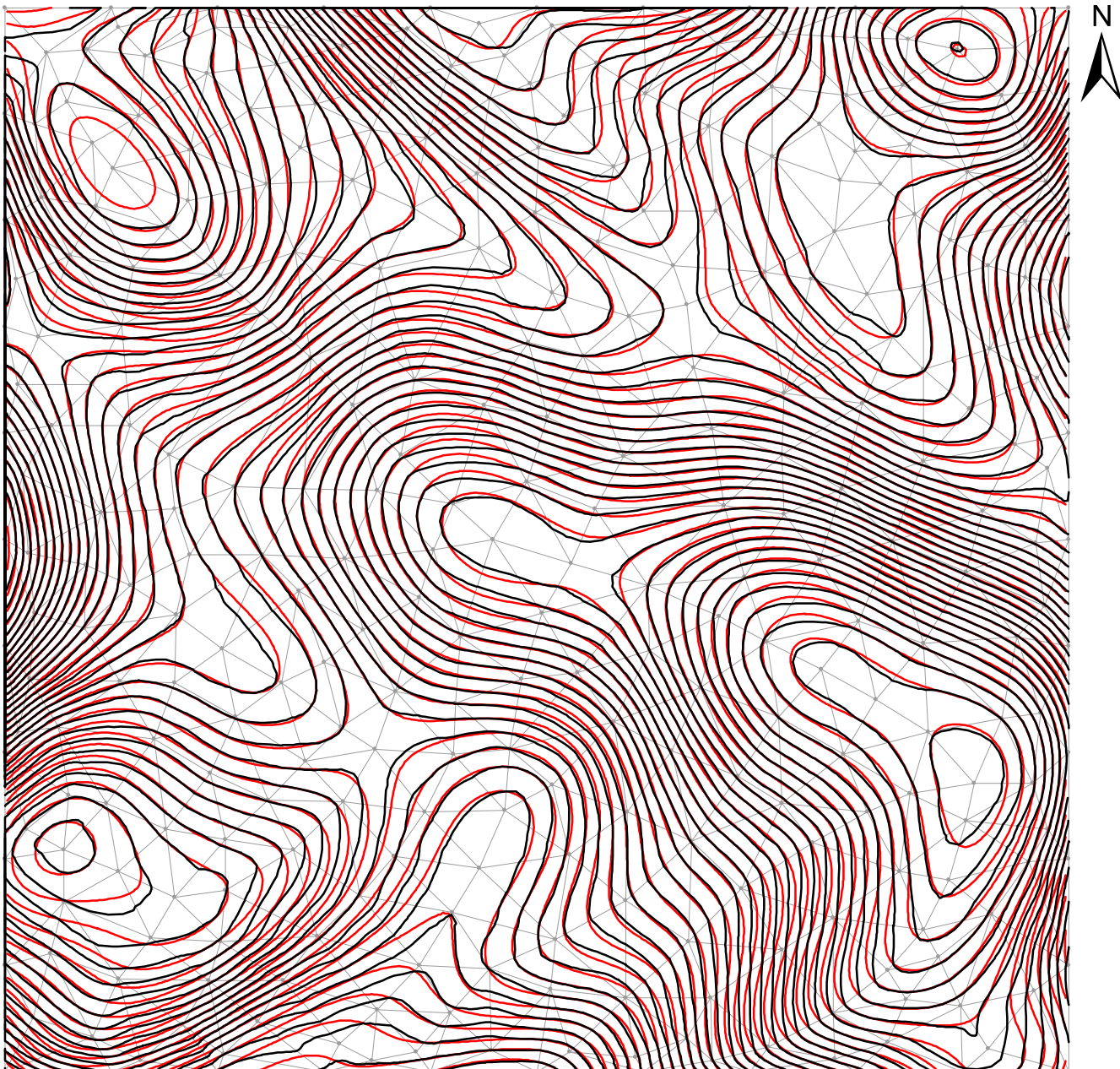


Legenda

- interpolovaná vrstevnica (int. 5m)
- referenčná vrstevnica (int. 5m)
- hrany TIN
- vrcholy TIN

1:6 000
0 60 120 180 240 300 m

Mapa 4: Vrstevnice generované Clough-Tocher interpolantom C1 s nepravidelným plátom



Legenda

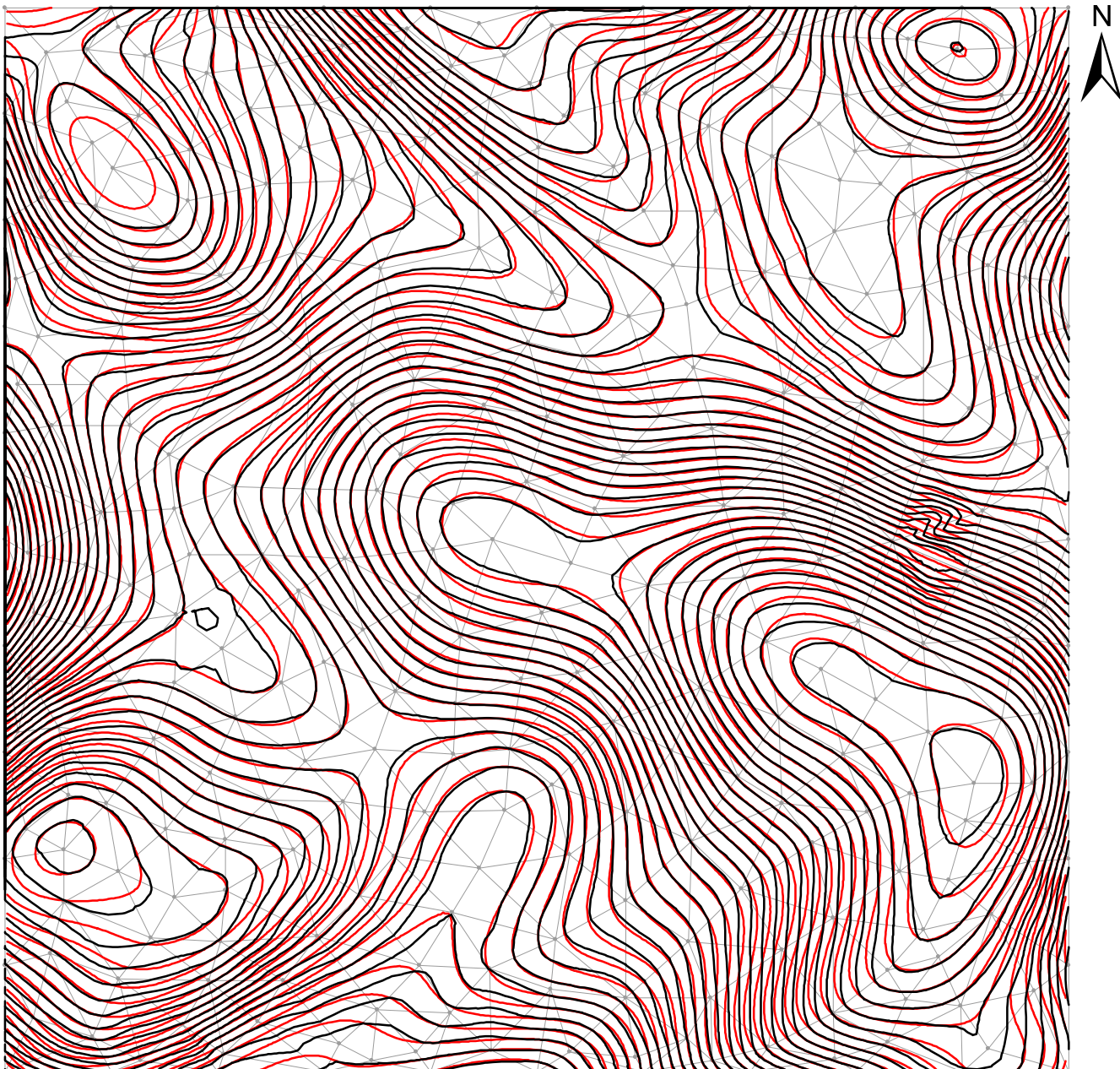
- interpolovaná vrstevnica (int. 5m)
- referenčná vrstevnica (int. 5m)
- hrany TIN
- vrcholy TIN

1:6 000

0 60 120 180 240 300 m



Mapa 5: Vrstevnice generované Clough-Tocher interpolantom C1 s minimalizáciou C2 nespojitosti a nepravidelným plátom



Legenda

- interpolovaná vrstevnica (int. 5m)
- referenčná vrstevnica (int. 5m)
- hrany TIN
- vrcholy TIN

1:6 000

0 60 120 180 240 300 m



Mapa 6: Výšková nepresnosť vrstevnic generovaných jednoduchým interpolantom C0



Legenda

- Odchýlka ΔZ [m]**
- -4.8 - -2.1
 - -2.0 - -1.1
 - -1.0 - 1.0
 - 1.1 - 2.0
 - 2.1 - 5.2
- vrstevnica (int. 5m)
— hrany TIN
• vrcholy TIN

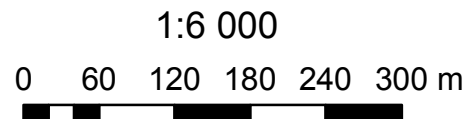
1:6 000
0 60 120 180 240 300 m

Mapa 7: Výšková nepresnosť vrstevnic generovaných Clough-Tocher interpolantom C1 s pravidelným plátom



Legenda

- Odchýlka ΔZ [m]**
- -4.7 - -2.1
 - -2.0 - -1.1
 - -1.0 - 1.0
 - 1.1 - 2.0
 - 2.1 - 5.0
- vrstevnica (int. 5m)
— hrany TIN
• vrcholy TIN



Mapa 8: Výšková nepresnosť vrstevnic generovaných Clough-Tocher interpolantom C1 s nepravidelným plátom

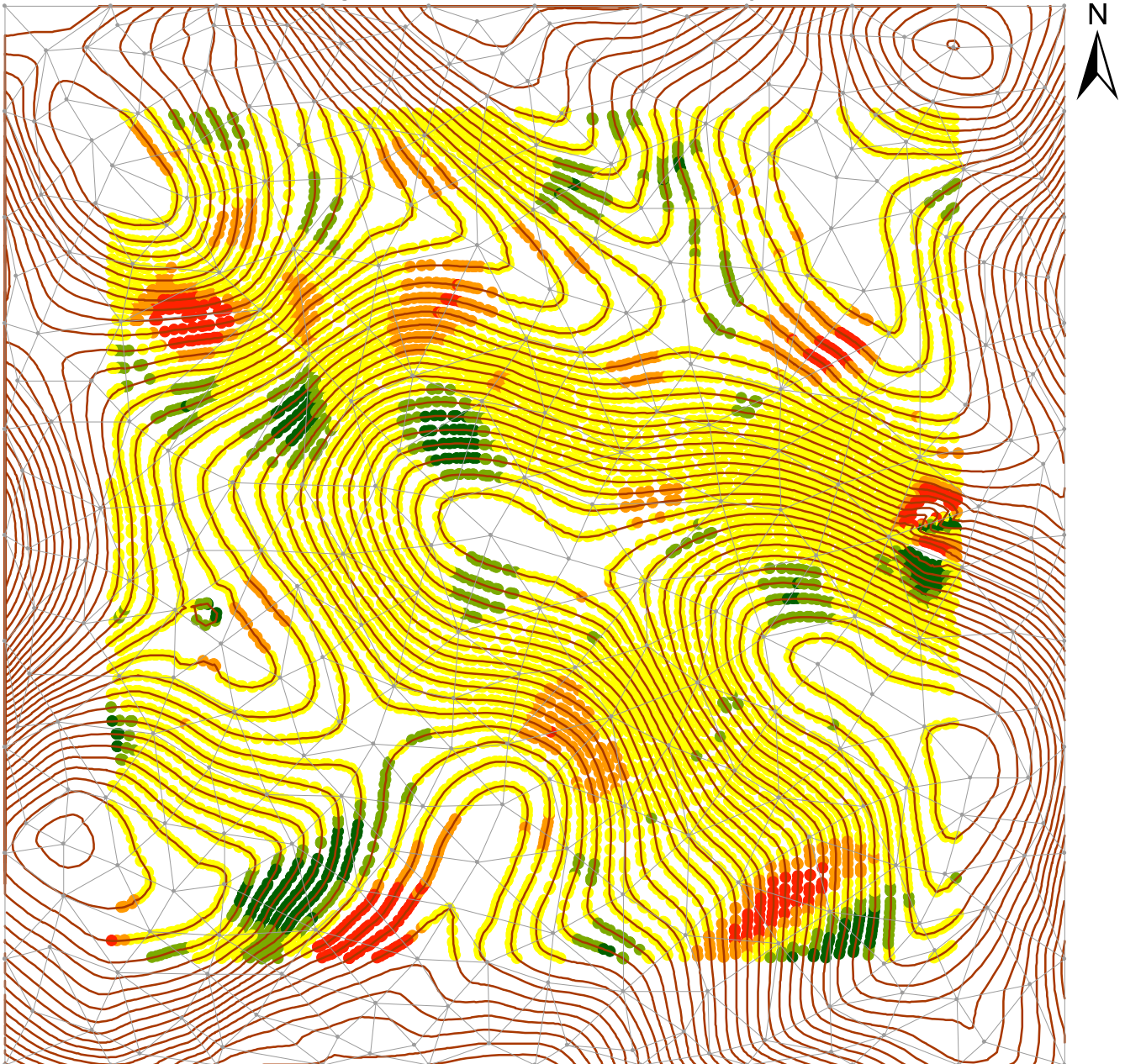


Legenda

- Odchýlka ΔZ [m]**
- -4.7 - -2.1
 - -2.0 - -1.1
 - -1.0 - 1.0
 - 1.1 - 2.0
 - 2.1 - 5.0
- vrstevnica (int. 5m)
— hrany TIN
• vrcholy TIN

1:6 000
0 60 120 180 240 300 m

Mapa 9: Výšková nepresnosť vrstevníc generovaných Clough-Tocher interpolantom C1 s minimalizáciou C2 nespojitosti a nepravidelným plátom

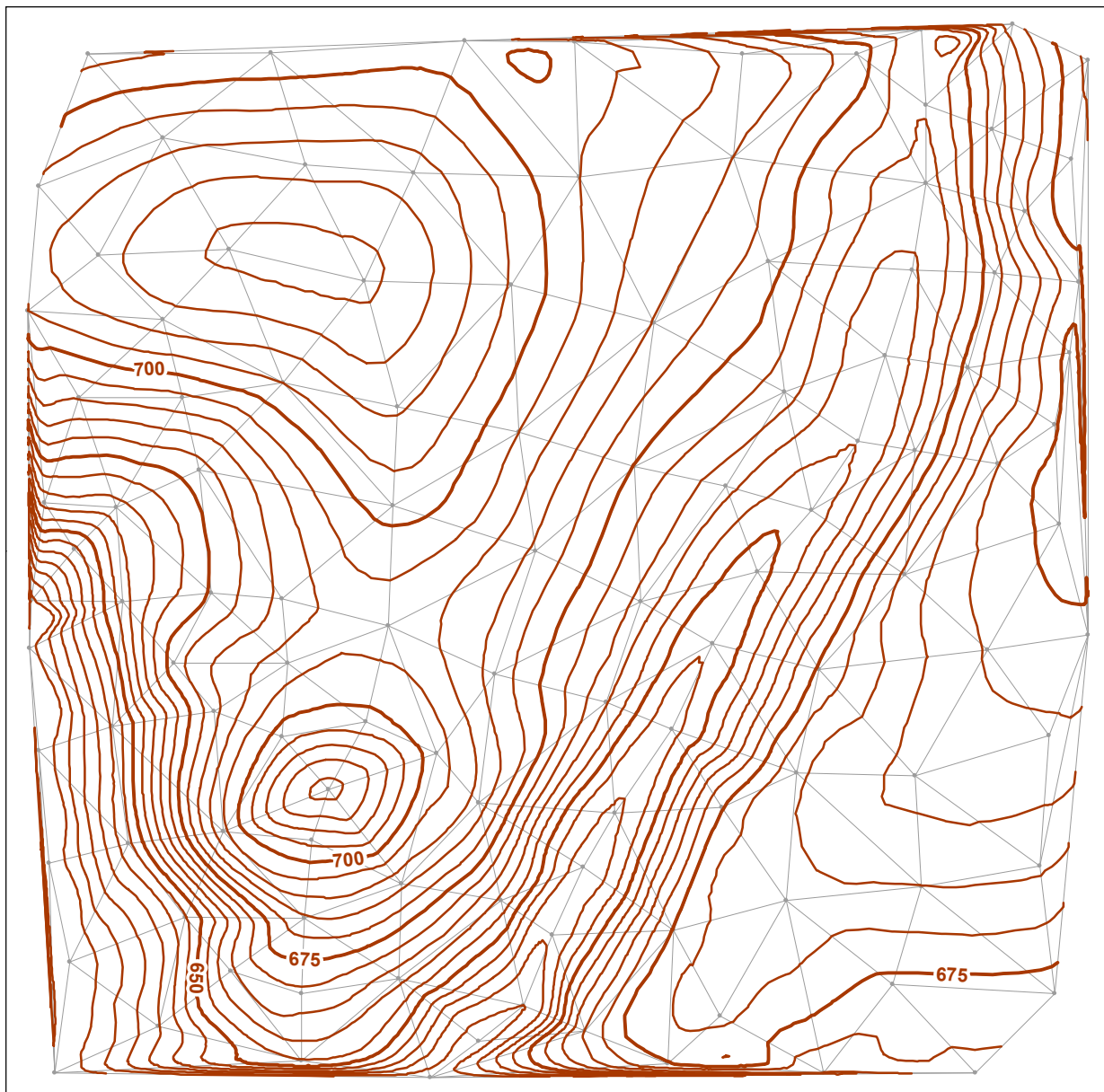


Legenda

- Odchýlka ΔZ [m]**
- -5.6 - -2.1
 - -2.0 - -1.1
 - -1.0 - 1.0
 - 1.1 - 2.0
 - 2.1 - 8.7
- vrstevnica (int. 5m)
— hrany TIN
• vrcholy TIN

1:6 000
0 60 120 180 240 300 m

Mapa 10: Vrstevnice generované algoritmom v okolí vrchu Trhová v Liptovskej kotline (pahorkatina)



Legenda

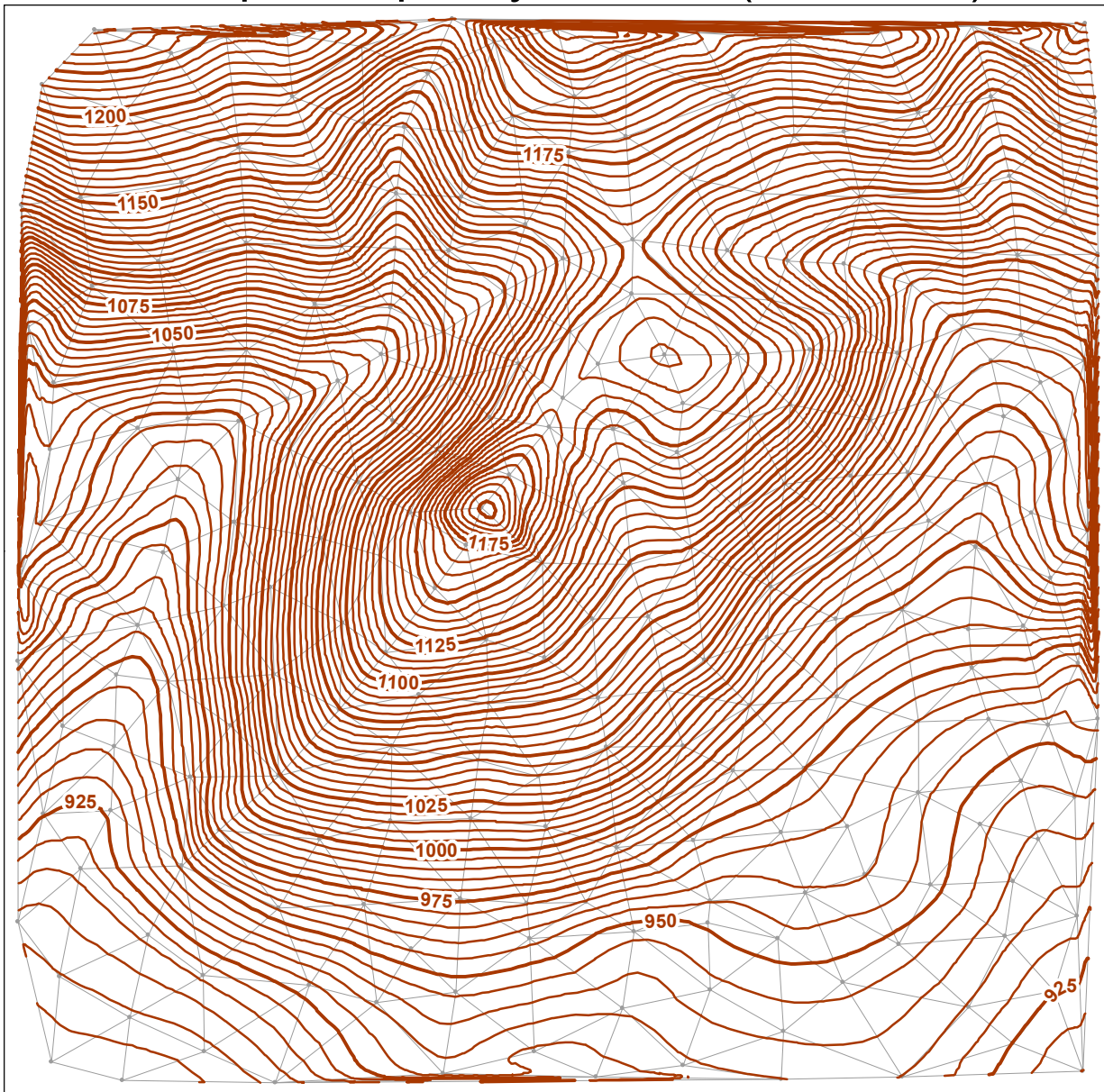
- vrstevnice (int. 5m)
- vrstevnice (int. 25m)
- vrcholy TIN
- hrany TIN

1:10 000

0 100 200 300 400 500 m



Mapa 11: Vrstevnice generované algoritmom v okolí vrchu Suchý Hrádok na úpätí Západných Tatier (vrchovina)



Legenda

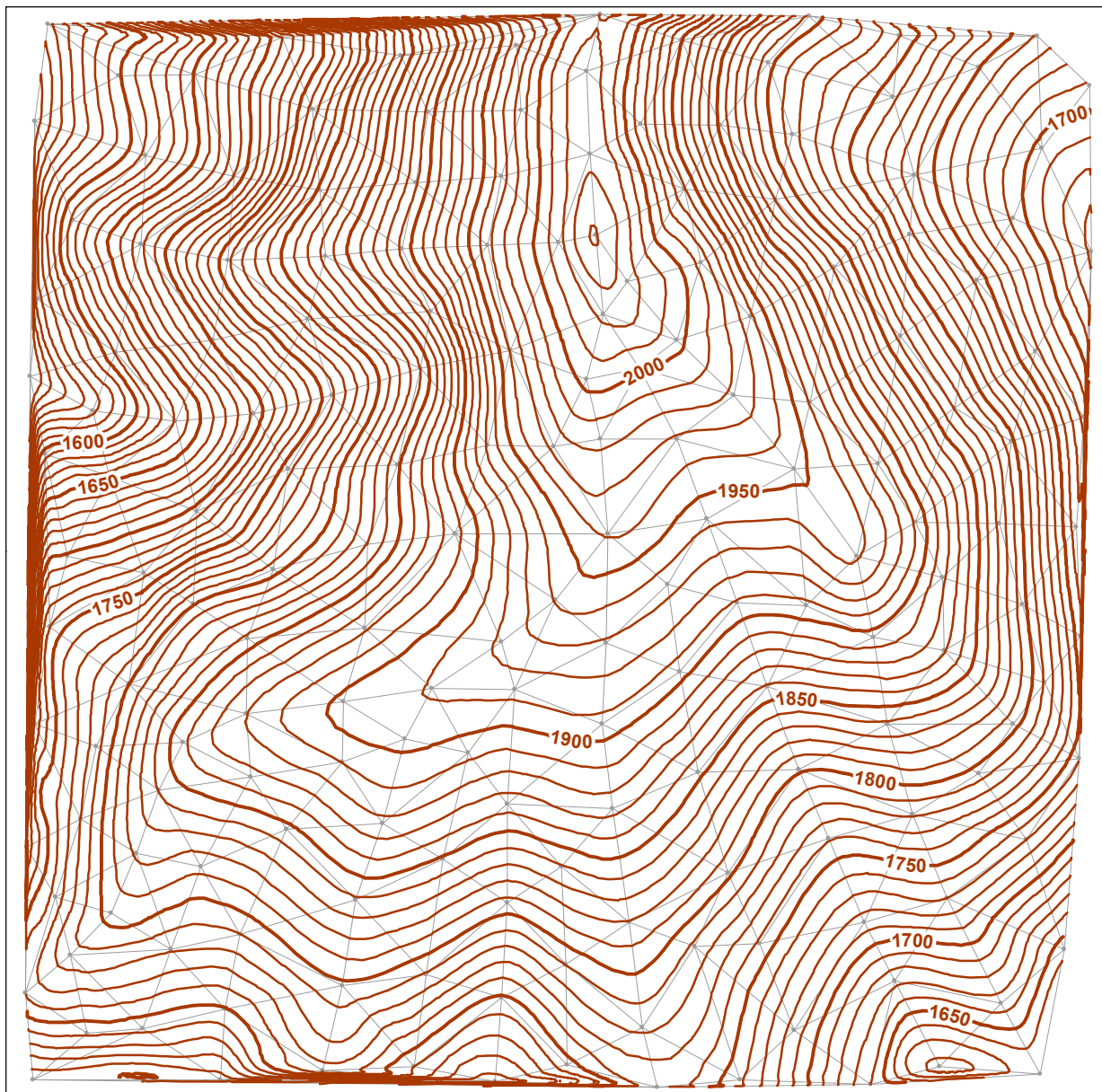
- vrstevnice (int. 5m)
- vrstevnice (int. 25m)
- vrcholy TIN
- hrany TIN

1:10 000

0 100 200 300 400 500 m



Mapa 12: Vrstevnice generované algoritmom v okolí vrchu Ježová v Západných Tatrách (hornatina)



Legenda

- vrstevnice (int. 10m)
- vrstevnice (int. 50m)
- vrcholy TIN
- hrany TIN

1:10 000

0 100 200 300 400 500 m

