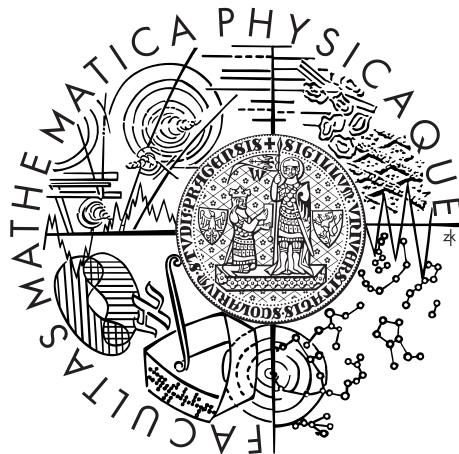


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jiří Graeber

# Diskrétní verze spojitéch finančních modelů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2012

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce doc. RNDr. Janu Hurtovi, CSc. za pomoc při psaní této práce, především za časté konzultace, cenné připomínky a užitečné návrhy.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne .....

Jiří Graeber

Název práce: Diskrétní verze spojitých finančních modelů

Autor: Jiří Graeber

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

**Abstrakt:** Tato práce se zabývá spojitými finančními modely a jejich diskrétními verzemi, které se používají při simulacích a odhadování parametrů těchto modelů. První část je zaměřena na seznámení se s vybranými spojitými modely vývojů cen a úrokových měr, jež jsou z důvodu nejistoty jejich budoucích pohybů definovány ve tvaru stochastických procesů. Druhá část práce se zabývá souhrnem diskrétních verzí spojitých modelů, které jsou formulovány pomocí Eulerova a Milsteinova diskretizačního schematu, tj. dvou nejčastějších způsobů, jak approximovat spojitý stochastický proces. Dle těchto diskrétních verzí jsou ve třetí části provedeny simulace s různě zvolenými parametry, na nichž je ilustrováno chování jednotlivých modelů. Na závěr je provedeno porovnání jedinečné trajektorie reálných dat se simulacemi Vašíčkova a Cox-Ingersoll-Rossova modelu s parametry odhadnutými z těchto reálných dat.

**Klíčová slova:** modely úrokových měr, modely vývojů cen, diskrétní modely, simulace

**Title:** Discrete versions of continuous financial models

**Author:** Jiří Graeber

**Department:** Department of Probability and Mathematical Statistics

**Supervisor:** doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

**Abstract:** This thesis studies the continuous-time financial models and their discrete versions, used for simulations and parameters estimations. Firstly, various stock price development and interest rates models are introduced. As a result of their uncertain future dynamics, these are defined as continuous-time stochastic processes. Secondly, a summary of discrete versions of continuous-time models, formed by Euler and Milstein discretization schemes, i.e. two most frequent ways of approximating a time-continuous stochastic process, is looked at. According to these discrete versions, simulations with different parameters are conducted in the third part of the thesis in order to illustrate individual behaviour of these models. In the conclusion, a comparison of a unique trajectory specified by the real data of one year interest rates swaps and of the simulations of Vasicek and Cox-Ingersoll-Ross model with parameters estimated from the real data is shown.

**Keywords:** interest rates models, price development models, discrete models, simulations

# Obsah

<b>Obsah</b>	<b>1</b>
<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Spojité finanční modely</b>	<b>3</b>
1.1 Modely vývojů cen . . . . .	3
1.2 Modely úrokových měr . . . . .	4
1.2.1 Rovnovážné modely . . . . .	4
1.2.2 Nearbitrážní modely . . . . .	7
<b>2 Diskrétní verze spojitých finančních modelů</b>	<b>10</b>
2.1 Modely vývojů cen . . . . .	10
2.2 Modely úrokových měr . . . . .	11
<b>3 Numerické ilustrace</b>	<b>18</b>
3.1 Simulace . . . . .	18
3.1.1 Modely úrokových měr . . . . .	18
3.2 Reálná data . . . . .	40
<b>Závěr</b>	<b>47</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>48</b>

# Úvod

Cílem této práce je seznámit se se spojitými finančními modely, které jsou každodenně používány ať už samy, či ve spojení se složitějšími modely, např. při oceňování cenných papírů citlivých na změnu úrokových sazeb, při oceňování firem nebo při řízení rizik. Konkrétně zde budou zkoumány modely vývojů cen a modely úrokových sazeb. Tyto modely jsou formulovány ve tvaru stochastických diferenciálních rovnic, které jsou uvedeny společně s obecnými charakteristikami jednotlivých vybraných modelů v první části této práce. Simulace těchto finančních modelů se provádějí v diskrétních časových krocích, a proto prvním krokem při jakékoli simulaci je třeba se dobrat zjištění, jak diskretizovat spojitý stochastický proces.

U všech modelů bude uvedeno Eulerovo diskretizační schema a v případech, kde je to vhodné, i diskretizační schema Milsteinovo. Tyto simulace jsou prováděny např. z důvodu analýzy situací vhodných pro použití daného modelu. Dále lze tyto modely použít pro odhadování budoucích hodnot, např. ceny akcií či výnosů z vládních dluhopisů. Pro tyto účely je třeba určitým způsobem odhadnout parametry konkrétního modelu. Vzhledem k tomu, že většinou jsou k dispozici data diskrétní, je nutné použít diskrétní verze spojitých finančních modelů.

V následující části se vhodně zvolí parametry a provedou simulace všech uvedených modelů. Tím se zanalyzuje chování jednotlivých modelů při dané volbě parametrů. Cílem práce sice není srovnávat jednotlivé diskretizační metody, pokusíme se však alespoň stručně okomentovat případné vizuální rozdíly v těchto simulacích. V závěru práce se zaměříme na simulaci vývoje úrokových sazeb dle vybraných modelů s parametry, odhadnutými na základě reálných dat. Výsledné simulace následně porovnáme s jedinečnou trajektorií, specifikovanou pozorovanými daty.

Všechny výpočty budou provedeny pomocí softwarového produktu Wolfram Mathematica 8.

# 1. Spojité finanční modely

## 1.1 Modely vývojů cen

Modely úrokových sazob se odlišují od modelů, kterými lze popsat vývoj cen či výnosů tím, že se úrokové sazby z dlouhodobého hlediska vždy vracejí na hladinu svého dlouhodobého průměru. Mají tedy na rozdíl od modelů vývojů cen a výnosů tzv. vlastnost návratu do středu (mean-reverting property). Rozdílné jsou také v členu udávajícím volatilitu, který je v modelech úrokových sazob většinou závislý přímo na úrokové sazbě.

Začneme spojitým modelem ceny libovolného aktiva, který je uveden v [1]. Tento model je často nazýván jako geometrický Brownův model a je popsán stochastickou diferenciální rovnicí

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (1.1)$$

s parametry  $\mu$  a  $\sigma$  představující koeficienty trendu a volatility, kde dále proměnná  $P(t)$  označuje cenu libovolného aktiva v čase  $t$  a  $W(t)$  je *Wienerův proces*, který je definován dle [1] jako stochastický proces  $\{W(t), t \geq 0\}$  se spojitymi trajektoriemi, pro který platí:

1.  $W(0) = 0$  s pravděpodobností 1.
2. Pro kladné  $s, t$  jsou změny  $W(t) - W(s)$  rozdeleny normálně se střední hodnotou 0 a rozptylem  $|t - s|$ .
3. Náhodné veličiny  $W(t_0), W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$  jsou nezávislé pro libovolné  $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ .

Výnosem aktiva za časový úsek délky  $\Delta t$  se rozumí změna hodnoty tohoto aktiva  $P(t + \Delta t) - P(t)$ . Odtud již není daleko k definici míry výnosnosti, která se v mnohých literaturách označuje jinými způsoby. Jelikož tato kapitola vychází z knihy [1], budeme se držet označení z tohoto zdroje. Míru výnosnosti lze tedy definovat jako

$$R(t) = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{P(t)}. \quad (1.2)$$

Z rovnice (1.2) lze získat jinou definici míry výnosnosti  $r^*(t)$ . Nejprve se označí dle [1]

$$1 + R(t) = \frac{P(t + \Delta t)}{P(t)} =: \exp(r^*(t)).$$

Odtud se dostává úpravami

$$r^*(t) = \ln(1 + R(t)) = \ln \frac{P(t + \Delta t)}{P(t)} = \ln P(t + \Delta t) - \ln P(t) =: p(t + \Delta t) - p(t),$$

kde  $p(t)$  jsou dle [1] nazývány *logaritmickými cenami*.

Nyní již lze formulovat model vývoje právě těchto logaritmických cen. Postup v knize [1] nabízí použití Itôovy formule, která říká, že pro  $f = f(P, t)$  je

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial P} \mu P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial P} \sigma P dW. \quad (1.3)$$

Položí-li se  $f(P) := \ln P$ , bude rovnice (1.3) vypadat

$$d \ln P = \left( \frac{1}{P} \mu P - \frac{1}{2} \frac{1}{P^2} \sigma^2 P^2 \right) dt + \frac{1}{P} \sigma P dW.$$

Po úpravě lze vyjádřit spojitý model vývoje logaritmických cen ve tvaru stochastické diferenciální rovnice

$$d \ln P(t) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t), \quad (1.4)$$

neboli

$$dp(t) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t), \quad (1.5)$$

kde  $\mu - \frac{1}{2} \sigma^2$  je trend,  $\sigma$  je koeficient volatility a  $W(t)$  je Wienerův proces.

## 1.2 Modely úrokových měr

Ocenování derivátů citlivých na změny hodnot úrokových sazob je založeno na dvou odlišných metodologích, jak lze nahlédnout v [4].

První skupina modelů, která ceny dluhopisů, tedy momentální časovou strukturu úrokových sazob, vydává spíše jako výstupy než jako vstupy, se nazývá rovnovážné modely (equilibrium models). Proto se těmto modelům také říká endogenní modely časové struktury, jak je uvedeno v [16]. V této skupině modelů jsou například Cox-Ingersoll-Rossův model z roku 1985, Vašíčkův model z roku 1977, Dothanův model z roku 1978.

Druhá skupina modelů se obecně nazývá nearbitrážní modely. Jejich cílem je namodelovat celou časovou strukturu úrokových sazob takovým způsobem, že se ceny dluhopisů vkládají jako vstupy těchto modelů. Říká se jim tedy proto také exogenní modely, jelikož je zde patrné ovlivnění z vnějšku a dle [16] obvykle vznikají vhodným modifikováním endogenních modelů, což se později ukazuje jako například změna konstantních parametrů na parametry závislé na čase. Z této skupiny zde uvést například Brace-Gatarek-Musielův model z roku 1997, Heath-Jarrow-Mortonův model z roku 1992, Ho-Leeův z roku 1986, Hull-Whiteův z roku 1993.

### 1.2.1 Rovnovážné modely

#### Mertonův model

Ve finanční literatuře se nejprve objevovaly modely okamžitých úrokových sazob, jejichž parametry nebyly závislé na čase. Uvádíme model z roku 1973, který se nazývá Mertonův model. V článku [3] je tento model ve tvaru stochastické diferenciální rovnice

$$dr(t) = \alpha dt + \sigma dW(t), \quad (1.6)$$

kde  $W(t)$  je Wienerův proces. Jedná se tedy o Brownův pohyb s trendem  $\alpha$  a koeficientem rozptylu  $\sigma^2$ . Robert Merton svůj model, ve kterém předpokládá, že změny úrokové sazby jsou z normálního rozdělení, použil v [7] k odvození modelu cen bezkupónových dluhopisů. V tomto modelu je podmíněný rozptyl úrokové sazby konstantní. Nevýhodou Mertonova modelu je bezpochyby možnost nabývání záporných hodnot úrokových sazob, což mu bylo často vytýkáno.

## Vašíčkův model

Dalším modelem, kterému bylo vytýkáno, že dle něj úrokové sazby mohou nabývat záporných hodnot s kladnou pravděpodobností, je Vašíčkův model. Ve finančníctví se jedná o matematický jednofaktorový model, který popisuje vývoj krátkodobých úrokových sazeb na základě pouze jednoho zdroje tržního rizika. Oldřich Vašíček ho v roce 1977 představil v článku [8] k odvození modelu cen bezkuponových dluhopisů. Vašíček předpokládá, že okamžitá úroková sazba se vyvíjí jako Ornstein-Uhlenbeckův proces s konstantními koeficienty a lze ho tedy psát ve tvaru

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t), \quad (1.7)$$

kde  $W(t)$  je Wienerův proces a  $a, b, \sigma$  jsou parametry. V tomto modelu je také podmíněný rozptyl úrokové sazby konstantní. Avšak především Vašíčkův model dokáže zachytit pro modely úrokových sazeb důležitou vlastnost návratu ke středu. Z této vlastnosti vyplývá, že úrokové sazby se vždy nakonec vrací na úroveň dlouhodobého průměru. V (1.7) chápeme parametr  $b$  jako tuto dlouhodobou úroveň a parametr  $a$  jako rychlosť, jakou proces k této úrovni směruje. Parametr  $\sigma$  udává volatilitu procesu.

Možnost nabývání záporných hodnot úrokovou sazbou je jistě nevýhodou tohoto modelu, avšak vývoj úrokových měr ve Vašíčkově modelu má také několik zvláštností, kvůli kterým je velice oblíbený. Rovnice (1.7) je lineární a lze ji explicitně vyřešit. Dále pravděpodobnostní rozdělení krátkodobých sazeb, jejichž vývoj rovnice (1.7) popisuje, je normální. V [16] se uvádí, že úspěch Vašíčkova modelu spočíval v tom, že díky němu šlo analyticky oceňovat dluhopisy a opce na dluhopisy. Ostatně tento model je dodnes využíván při oceňování opcí na dluhopisy, futures, opcí na futures a jiných finančních derivátů.

Vašíčkův model lze také nalézt v upravené podobě. Například v článku [3] je uveden ve tvaru

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma dW(t). \quad (1.8)$$

## Dothanův model

Model, ve kterém je vyřešen problém záporných úrokových sazeb ve Vašíčkově modelu, se nazývá Dothanův model. Jak je uvedeno v [16], Dothan nejdříve uvedl model krátkodobých sazeb v podobě geometrického Brownova pohybu bez trendu

$$dr(t) = \sigma r(t)dW(t), \quad (1.9)$$

kde  $W(t)$  je Wienerův proces a  $\sigma$  je kladná konstanta. Následně se tento model rozšířil na model, který uvedli již dříve Fischer Black a Myron Scholes v [13] a nazývá se geometrický Brownův pohyb. V tomto modelu je popsán vývoj úrokových sazeb následující stochastickou diferenciální rovnicí

$$dr(t) = \beta r(t)dt + \sigma r(t)dW(t), \quad (1.10)$$

kde  $W(t)$  je Wienerův proces a  $\beta \in \mathbb{R}$  je konstanta.

Problém záporných sazeb je v Dothanově modelu vyřešen lognormálním rozdělením pravděpodobností úrokových sazeb  $r(t)$ . Dále je v tomto modelu zahrnuta informace, že podmíněný rozptyl úrokové sazby je úměrný  $r^2(t)$ .

## Cox-Ingersoll-Rossův model

Typický příklad modelu na srovnání s Vašíčkovým modelem dle [16] je Cox-Ingersoll-Rossův model, který se často nazývá CIR model podle počátečních písmen příjmení jeho autorů. John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll a Stephen A. Ross jej uvedli v [9] a od té doby se stal významným modelem. V tomto odmocninovém procesu, jak se také někdy CIR model nazývá, je podmíněný rozptyl úrokové sazby  $r(t)$  úměrný  $r(t)$ . Tento model byl také mohutně používán při rozvíjení modelů oceňování derivátů citlivých na vývoj úrokových sazeb a podle něj se krátkodobé úrokové sazby vyvíjejí dle následující stochastické diferenciální rovnice

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad (1.11)$$

kde  $W(t)$  je Wienerův proces a  $a, b, \sigma$  jsou konstantní parametry.

V článku [3] lze nalézt CIR model v následujícím upraveném tvaru

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t). \quad (1.12)$$

Rozdíl mezi CIR a Vašíčkovým modelem je v tom, že CIR model v prvé řadě zaručuje nabývání pouze kladných hodnot úrokových sazeb, avšak musí být splněna podmínka  $2ab > \sigma^2$ , a dále v rozdelení pravděpodobnosti  $r(t)$ , které je v Cox-Ingersoll-Rossově modelu necentrální  $\chi^2$  rozdelení.

## Modifikovaný Cox-Ingersoll-Rossův model

V [2] a [3] je uveden modifikovaný Cox-Ingersoll-Rossův model, který byl představen ve studii [12] o cenných papírech závislých na proměnných sazbách. Tento model je často nazýván jako CIR VR model, kde VR znamená proměnná sazba (variable rate) a vyplývá z názvu studie. Proces vývoje úrokových sazeb je v něm popsán následující stochastickou diferenciální rovnicí

$$dr(t) = \sigma r^{3/2}(t)dW(t), \quad (1.13)$$

kde  $W(t)$  je Wienerův proces a parametr  $\sigma$  je kladná konstanta.

## Brennan-Schwartzův model

Při odvozování numerického modelu cen směnitelných dluhopisů v [10] použili pánové Brennan a Schwartz model, který je popsán následující stochastickou diferenciální rovnicí

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma r(t)dW(t), \quad (1.14)$$

kde  $W(t)$  je Wienerův proces, parametr  $\theta$  specifikuje dlouhodobou úroveň úrokové sazby, jejíž vývoj tento model popisuje a  $\kappa$  je rychlosť, jakou se proces s volatilitou  $\sigma$  na tuto úroveň přibližuje. Tento model má tedy vlastnost návratu ke středu a obsahuje informaci, že podmíněný rozptyl úrokových sazeb v tomto modelu je úměrný  $r^2(t)$ .

Brennan-Schwartzův model lze uvést také v upraveném tvaru

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma r(t)dW(t) \quad (1.15)$$

s parametry  $\alpha, \beta, \sigma$  konstantními v čase, kde  $W(t)$  je Wienerův proces.

## Exponenciální Vašíčkův model

Vycházíme z [16], kde je uveden exponenciální Vašíčkův model. Za předpokladu, že logaritmus úrokových sazob  $r(t)$  splňuje Ornstein-Uhlenbeckův proces, je tento lognormální model krátkodobých sazob alternativou k Dothanovu modelu (1.9). Nechť platí

$$dy(t) = (\theta - ay(t))dt + \sigma dW(t), \quad (1.16)$$

kde  $\theta, a, \sigma$  jsou konstanty a  $W(t)$  je Wienerův proces. Potom položí-li se  $r(t) := \exp y(t)$  pro  $\forall t$  a použije-li se Itôova formule, vývoj krátkodobé sazby je popsán stochastickou diferenciální rovnicí

$$dr(t) = r(t)(\theta + \frac{\sigma^2}{2} - a \ln r(t))dt + \sigma r(t)dW(t). \quad (1.17)$$

V tomto modelu je okamžitá krátkodobá úroková sazba popsána jako exponenciální procesu, který je naprostě shodný s Vašíčkovým modelem a proto se nazývá exponenciální Vašíčkův.

Stejně jako v Dothanově modelu (1.9) je krátkodobá úroková sazba  $r(t)$  lognormálně rozdělena, ale na rozdíl od něj se proces vývoje  $r(t)$  vždy vrací na hladinu dlouhodobého průměru.

## Chan-Karolyi-Longstaff-Sandersův model

Pro porovnání výkonu široké škály známých modelů zachycujících stochastické chování krátkodobých sazob používají pánové Chan, Karolyi, Longstaff a Sanders v článku [3] obecný spojitý model vývoje krátkodobých sazob, který je nazýván Chan-Karolyi-Longstaff-Sandersův model a často se zkracuje na CKLS model podle prvních písmen příjmení jeho autorů. Jejich přístup využívá faktu, že mnoho modelů krátkodobých úrokových sazob lze zahrnout do stochastické diferenciální rovnice

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma r^\gamma(t)dW(t), \quad (1.18)$$

kde  $W(t)$  je Wienerův proces a  $\alpha, \beta, \sigma$  a  $\gamma$  jsou konstantní parametry.

Jak si lze u výše uvedených modelů všimnout, často se některý z parametrů  $\alpha, \beta$  rovná nule a parametr  $\gamma = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ . Mnoho modelů lze tedy získat z rovnice (1.18) jednoduchým dosazením parametrů  $\alpha, \beta, \gamma$ .

V článku [4] je uveden upravený tvar CKLS modelu (1.18)

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma r^\gamma(t)dW(t), \quad (1.19)$$

kde  $W(t)$  je Wienerův proces a  $k, \theta, \sigma$  a  $\gamma$  jsou konstantní parametry.

### 1.2.2 Nearbitrážní modely

#### Hull-Whiteův model

Hull a White byli první, kteří ve svých studiích poukazovali na špatné vlastnosti endogenních modelů. Podle nich tyto modely nevyhovovaly reálné termínované struktury úrokových sazob. Dle [16] narázeli konkrétně na Vašíčkův model (1.7). Potřeba existence modelu, který by dokázal přesně popsat výnosovou křivku z momentálně vypozorovaných dat, vedla k myšlence zavedení časově závislých parametrů právě ve Vašíčkově modelu.

Prvním Hull-Whiteovým modelem je tedy model krátkodobých sazob představený v roce 1990, který předpokládá, že okamžitá krátkodobá úroková sazba se vyvíjí dle stochastické diferenciální rovnice

$$dr(t) = (\vartheta(t) - a(t)r(t))dt + \sigma(t)dW(t), \quad (1.20)$$

kde parametry  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $\sigma(t)$  již nejsou konstanty jako v modelu (1.7), nýbrž jsou závislé na čase a  $W(t)$  je Wienerův proces.

V [11] se uvádí Hull-Whiteův model v upraveném tvaru

$$dr(t) = \alpha(t)(\beta(t) - r(t))dt + \sigma(t)dW(t) \quad (1.21)$$

a stejně jako (1.20) zahrnuje fakt, že rozdelení krátkodobých úrokových sazob je podobně jako ve Vašíčkově modelu (1.7) normální.

V [16] je uvedeno, že Hull a White sami uvedli, že model (1.20) může někdy vést k nereálným situacím a proto se také často uvádí model

$$dr(t) = (\vartheta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t), \quad (1.22)$$

kde parametry  $a$  a  $\sigma$  jsou kladné konstanty a pouze  $\vartheta(t)$  je časově závislý.

Nevýhodou modelů (1.20) – (1.22) je bezpochyby nenulová pravděpodobnost toho, že by  $r(t)$  mohlo nabýt záporných hodnot, avšak tato pravděpodobnost je v praxi velice mizivá, jak je ukázáno v [16].

Hull-Whiteův model je považován za jeden z historicky nejdůležitějších modelů úrokových sazob, který se stále používá například při řízení rizik.

Druhý model, jehož původní verzi rozšířili a který formulovali v též roce Hull a White, je model Cox-Ingersoll-Rossův (1.11). Okamžité krátkodobé úrokové sazby se podle něj vyvíjí dle stochastické diferenciální rovnice

$$dr(t) = (\vartheta(t) - a(t)r(t))dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}dW(t), \quad (1.23)$$

kde parametry  $a(t)$ ,  $\sigma(t)$  a  $\vartheta(t)$  jsou závislé na čase.

Řešení této rovnice však není možné vyjádřit v explicitním tvaru. Stejný problém má i zjednodušená verze modelu (1.23)

$$dr(t) = (\vartheta(t) - ar(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \quad (1.24)$$

s konstantními parametry  $a$ ,  $\sigma$  a jediným závislým parametrem na čase  $\vartheta(t)$ . Dle [16] neexistuje analytické vyjádření pro  $\vartheta(t)$  z hlediska pozorované výnosové křivky. Dále se v [16] uvádí, že není jisté, že numerická approximace  $\vartheta(t)$  by udržela hodnoty  $r(t)$  pozitivní. Tyto důvody zapříčinily, že modely (1.23) a (1.24) nebyly tak úspěšné jako modely (1.20) – (1.22).

## Ho-Leeův model

První, kteří navrhli nearbitrážní model časové struktury úrokových sazob odlišný od endogenních modelů generujících momentální časovou strukturu sazob, jak je uvedeno v [5] a [17], byli Ho a Lee. Hlavní výhodou jejich přístupu je, že umožňuje zužitkovat veškeré informace o časové struktuře při oceňování finančních derivátů. Podle Ho-Leeova modelu krátkodobé úrokové sazby splňují stochastickou diferenciální rovnici

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW(t), \quad (1.25)$$

kde  $\theta(t)$  je parametr závislý na čase  $t$  a parametr  $\sigma > 0$  je konstanta.  $\theta(t)$  definuje průměrný směr, kterým se krátkodobé sazby pohybují v čase  $t$ . Nedostatkem Ho-Leeova modelu je, že nemá vlastnost návratu ke středu, kterou lze pozorovat například u Vašíčkova modelu, a také že nezaručuje kladné hodnoty úrokových sazub. Rozdělení pravděpodobnosti úrokové sazby  $r(t)$  v tomto modelu je normální.

### Black-Derman-Toyův model

Pánové Black, Derman a Toy v roce 1990 formulovali další exogenní jednofaktorový model krátkodobých úrokových sazub. Ve své studii tito pánové uvedli diskrétní přístup k vývoji úrokových sazub, podle kterého má vývoj těchto sazub odpovídat pozorované časové struktuře úrokových sazub a také časové struktuře volatilit spotových sazub. Dle [17] má spojitá verze tvar stochastické diferenciální rovnice

$$d \ln r(t) = (\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \ln r(t)) dt + \sigma(t) dW(t), \quad (1.26)$$

kde  $W(t)$  je Wienerův proces,  $\theta(t), \sigma(t)$  jsou parametry závislé na čase,  $\sigma'(t)$  je derivace  $\sigma(t)$  podle času  $t$ .

V literatuře lze nalézt více tvarů Black-Derman-Toyova modelu. V [17] se uvádí vývoj logaritmu krátkodobých úrokových sazub podle následující stochastické diferenciální rovnice

$$d \ln r(t) = \theta(t) dt + \sigma dW(t), \quad (1.27)$$

kde  $W(t)$  je Wienerův proces, parametr  $\theta(t)$  je závislý na čase a  $\sigma$  je nezáporná konstanta. Jedná se o omezený tvar Black-Derman-Toyova modelu, který má přesně popsat pouze momentální výnosovou křivku.

Výhodou Black-Derman-Toyova modelu ve tvaru (1.26) i (1.27) je samozřejmě lognormální rozdělení pravděpodobnosti krátkodobých úrokových sazub.

### Black-Karasinského model

Fischer Black a Piotr Karasinski také poukazovali na stinné stránky záporných úrokových sazub, a proto tito pánové představili v roce 1991 matematický model, který se nazývá Black-Karasinského model a je jeden z dalších lognormálních jednofaktorových modelů úrokových sazub. Black a Karasinski předpokládali, že se okamžitá krátkodobá úroková sazba vyvíjí jako exponenciála Ornstein-Uhlenbeckova modelu s parametry závislými na čase. Tento model se používá především při oceňování exotických finančních derivátů citlivých na chování úrokových sazub. Někdy se uvádí, že tento model je zobecněním Black-Derman-Toyova modelu. Black-Karasinského model má následující tvar

$$d \ln r(t) = (\theta(t) - \phi(t) \ln r(t)) dt + \sigma(t) dW(t), \quad (1.28)$$

kde  $W(t)$  je Wienerův proces a parametry  $\theta(t)$ ,  $\phi(t)$  a  $\sigma(t)$  závislé na čase lze chápat opět jako cíl úrokových sazub, rychlost jakou se k němu blíží a volatilitu procesu krátkodobých sazub.

Jak je uvedeno v [16] lze model (1.28) uvést ve tvaru

$$d \ln r(t) = (\theta(t) - \phi \ln r(t)) dt + \sigma dW(t), \quad (1.29)$$

kde  $\phi$  a  $\sigma$  jsou konstantní parametry a pouze  $\theta$  je parametr závislý na čase.

## 2. Diskrétní verze spojitých finančních modelů

Diskretizace spojitých finančních modelů se používá z těchto důvodů:

1. Data, která máme k dispozici, jsou pozorovaná v diskrétních časových krocích. Nejobvyklejší jsou dny, týdny, měsíce a roky.
2. Odhad parametrů modelů popsaných v předchozí kapitole se provádí na základě těchto diskrétně pozorovaných dat.

Ve zdrojích, které jsme měli k dispozici, jsme našly 3 diskretizační metody, které byly komentovány pro použití při diskretizaci spojitých finančních modelů. Nejpoužívanější se zdála být Eulerova metoda. Dále uvádíme Milsteinovu metodu a Runge-Kuttovu metodu, která je popsána mimo jiné v [14]. V následující kapitole budou tedy uváděny diskrétní verze spojitých finančních modelů pomocí Eulerovy a Milsteinovy metody. Jejich odvození lze nalézt například v [15] a [14].

Jak jsme již zmínili, diskretizace spojitých finančních modelů slouží především k usnadnění odhadů parametrů těchto modelů. K tomuto účelu se používají statistické metody, kterých se v literatuře objevuje poměrně hodně. Liší se především tím, zdali se odhadují parametry konstantní nebo parametry, které se mění s časem. V [19] lze nalézt přehled těchto parametrických i neparametrických metod.

### 2.1 Modely vývojů cen

Na modelu ceny nějakého aktiva (1.1), který je uveden v předchozí kapitole jako první, ukážeme Eulerovo diskretizační schema. Vycházeli jsme z [1], [15], [14] a z [18].

Nechť se simuluje  $P(t)$  přes interval  $[0, T]$ , který je ekvidistantně rozdělen způsobem  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ . Ekvidistantně proto, aby šlo označit pro  $\forall i = 1, \dots, n-1$  přírůstky  $t_{i+1} - t_i$  jako  $\Delta t$ . Dále nechť  $\Delta P(t) := P(t + \Delta t) - P(t)$  a  $\Delta W(t) := W(t + \Delta t) - W(t)$  označuje výnos aktiva a změnu hodnoty Wienerova procesu za časový úsek délky  $\Delta t$ . Integrováním (1.1) od času  $t$  do  $t + \Delta t$  se dostane

$$P(t + \Delta t) = P(t) + \int_t^{t+\Delta t} \mu P(u) du + \int_t^{t+\Delta t} \sigma P(u) dW(u). \quad (2.1)$$

Eulerovou diskretizací se nazývá další krok, ve kterém se approximují oba integrandy  $\mu P(u)$  a  $\sigma P(u)$  přes interval  $[t, t + \Delta t]$  jejich hodnotou  $\mu P(t)$  a  $\sigma P(t)$  z levého kraje tohoto intervalu. Tento krok a následná úprava vypadají následovně

$$\begin{aligned} P(t + \Delta t) &\approx P(t) + \mu P(t) \int_t^{t+\Delta t} du + \sigma P(t) \int_t^{t+\Delta t} dW(u) \\ &= P(t) + \mu P(t) \Delta t + \sigma P(t) \Delta W(t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Odtud již lze psát diskrétní verzi modelu (1.1) ve tvaru

$$\frac{\Delta P(t)}{P(t)} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W(t). \quad (2.3)$$

Jelikož z definice Wienerova procesu plyne, že rozdělení  $\Delta W$  je  $N(0, \Delta t)$ , potom lze (2.3) psát jako

$$\frac{\Delta P(t)}{P(t)} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (2.4)$$

přičemž náhodná veličina  $\varepsilon$  má rozdělení  $N(0, 1)$ .

Eulerova diskretizace se použije i pro model (1.4). Vycházíme z knihy [1]. Následujícími úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} \ln P(t + \Delta t) - \ln P(t) &= \ln \frac{P(t + \Delta t)}{P(t)} \\ &= p(t + \Delta t) - p(t) \\ &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

diskrétní verzi spojitého modelu vývoje logaritmů cen (1.4) ve tvaru

$$\ln P(t + \Delta t) - \ln P(t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (2.6)$$

a diskrétní verzi spojitého modelu vývoje logaritmických cen (1.5) ve tvaru

$$p(t + \Delta t) - p(t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (2.7)$$

kde v obou případech je  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

## 2.2 Modely úrokových měr

### Mertonův model

Diskrétní verze Mertonova modelu (1.6) pomocí Eulerova diskretizačního schématu má tvar

$$\begin{aligned} r(t + \Delta t) &= r(t) + \alpha \Delta t + \sigma \Delta W(t) \\ &= r(t) + \alpha \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

### Vašíčkův model

Pomocí Eulerova diskretizačního schématu lze dospět k diskrétní verzi modelu (1.7) ve tvaru

$$r(t + \Delta t) = r(t) + a(b - r(t))\Delta t + \sigma \Delta W(t), \quad (2.9)$$

neboli

$$r(t + \Delta t) = r(t) + a(b - r(t))\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (2.10)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Upravená verze Vašíčkova modelu (1.8) má diskrétní verzi, kterou lze psát ve tvaru

$$r(t + \Delta t) = r(t) + (\alpha + \beta r(t))\Delta t + \sigma \Delta W(t), \quad (2.11)$$

neboli

$$r(t + \Delta t) = r(t) + (\alpha + \beta r(t))\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (2.12)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Diskrétní verze Mertonova a Vašíčkova modelu jsme uvedli pouze za pomocí Eulerova diskretizačního schematu, protože Milsteinovo diskretizační schema u těchto a dalších modelů, jejichž difuzní člen není závislý na úrokové míře, splývá právě s Eulerovou diskretizací.

### Dothanův model

Při diskretizaci Dothanova modelu lze samozřejmě také použít Eulerova postupu. U modelu (1.9) dospějeme ke tvaru

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \sigma r(t)\Delta W(t). \quad (2.13)$$

Ten se dá přepsat na

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \sigma r(t)\varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (2.14)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Model (1.10) má diskrétní verzi

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \beta r(t)\Delta t + \sigma r(t)\Delta W(t), \quad (2.15)$$

která se úpravou změní na

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \beta r(t)\Delta t + \sigma r(t)\varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (2.16)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Diskrétní verzi Dothanova modelu lze uvést také pomocí Milsteinova diskretizačního schematu, které je odvozeno a popsáno mimo jiné v [15], [14] a [18]. Jednoduše spočívá v tom, že se snaží vylepšit approximaci difuzního členu. Používá se k tomu stochastický Taylorův rozvoj. Milsteinovo schema přidává třetí člen k Eulerovu schematu. V [15] tento třetí člen pro stochastickou diferenciální rovnici

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t), \quad (2.17)$$

vypadá následovně

$$\frac{1}{2}b'(X(t))b(X(t))[(\Delta W(t))^2 - \Delta t], \quad (2.18)$$

kde  $b'(X(t))$  je derivace  $b(X(t))$  dle  $X(t)$ , což je v našem případě modelů úrokových sazeb právě tato úroková sazba.

Použitím Milsteinovy metody bude diskrétní verze Dothanova modelu (1.9) vypadat takto

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \sigma r(t)\varepsilon \sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r(t)[(\Delta W(t))^2 - \Delta t]. \quad (2.19)$$

Za použití faktu, že rozdělení  $\Delta W$  je  $N(0, \Delta t)$ , lze (2.19) psát jako

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \sigma r(t)\varepsilon \sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r(t)\Delta t(\varepsilon^2 - 1). \quad (2.20)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Následný Dothanův model (1.10) dle Milsteinovy diskretizace má tvar

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \beta r(t)\Delta t + \sigma r(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r(t)[(\Delta W(t))^2 - \Delta t] \quad (2.21)$$

neboli

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \beta r(t)\Delta t + \sigma r(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r(t)\Delta t(\varepsilon^2 - 1). \quad (2.22)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

### Cox-Ingersoll-Rossův model

V případě CIR modelu (1.11) a jeho upraveného tvaru (1.12) je také difuzní člen závislý na úrokové míře a lze proto jeho diskrétní verzi vyjádřit pomocí obou schemat.

Eulerovo schema pro model (1.11) je ve tvaru

$$r(t + \Delta t) = r(t) + a(b - r(t))\Delta t + \sqrt{r(t)}\sigma\Delta W(t), \quad (2.23)$$

neboli

$$r(t + \Delta t) = r(t) + a(b - r(t))\Delta t + \sqrt{r(t)}\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \quad (2.24)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Milsteinovo schema pro model (1.11) má tvar

$$r(t + \Delta t) = r(t) + a(b - r(t))\Delta t + \sqrt{r(t)}\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{4}\sigma^2\Delta t(\varepsilon^2 - 1), \quad (2.25)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Spojitý model (1.12) lze diskretizovat pomocí Eulerova a Milsteinova schematu následovně

$$r(t + \Delta t) = r(t) + (\alpha + \beta r(t))\Delta t + \sqrt{r(t)}\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (2.26)$$

a

$$r(t + \Delta t) = r(t) + (\alpha + \beta r(t))\Delta t + \sqrt{r(t)}\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{4}\sigma^2\Delta t(\varepsilon^2 - 1), \quad (2.27)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

### Modifikovaný Cox-Ingersoll-Rossův model

Eulerovou diskretizací lze psát diskrétní verzi modelu (1.13) způsobem

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \sigma r^{3/2}(t)\Delta W(t), \quad (2.28)$$

neboli

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \sigma r^{3/2}(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \quad (2.29)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Použije-li se Milsteinova diskretizace, rozšíří se diskrétní verze CIR VR modelu (2.29) o třetí člen a dostane se tvar

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \sigma r^{3/2}(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} + \frac{3}{4}\sigma^2 r^2(t)\Delta t(\varepsilon^2 - 1), \quad (2.30)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

### Brennan-Schwartzův model

Diskrétní verzi modelu (1.14) můžeme psát pomocí Eulerova schematu ve tvaru

$$\begin{aligned} r(t + \Delta t) &= r(t) + \kappa(\theta - r(t))\Delta t + \sigma r(t)\Delta W(t) \\ &= r(t) + \kappa(\theta - r(t))\Delta t + \sigma r(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Kdyby se použilo Milsteinovo schema, dostala by se diskrétní verze modelu (1.14) v následujícím tvaru

$$\begin{aligned} r(t + \Delta t) &= r(t) + \kappa(\theta - r(t))\Delta t + \sigma r(t)\Delta W(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 r(t)((\Delta W(t))^2 - \Delta t) \\ &= r(t) + \kappa(\theta - r(t))\Delta t + \sigma r(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r(t)\Delta t(\varepsilon^2 - 1), \end{aligned} \quad (2.32)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Diskrétní verze modelu (1.15), která je upravenou verzí (2.31), má dle Eulerovy a Milsteinovy diskretizace tvar

$$r(t + \Delta t) = r(t) + (\alpha + \beta r(t))\Delta t + \sigma r(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (2.33)$$

a

$$r(t + \Delta t) = r(t) + (\alpha + \beta r(t))\Delta t + \sigma r(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r(t)\Delta t(\varepsilon^2 - 1), \quad (2.34)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

### Exponenciální Vašíčkův model

Dále uvádíme diskrétní verzi exponenciálního Vašíčkova modelu (1.17), která pomocí Eulerova schematu vypadá

$$r(t + \Delta t) = r(t) + r(t)(\theta + \frac{\sigma^2}{2} - a \ln r(t))\Delta t + \sigma r(t)\Delta W(t), \quad (2.35)$$

neboli

$$r(t + \Delta t) = r(t) + r(t)(\theta + \frac{\sigma^2}{2} - a \ln r(t))\Delta t + \sigma r(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \quad (2.36)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Milsteinovou diskretizací se dospěje ke tvaru

$$r(t + \Delta t) = r(t) + r(t)(\theta + \frac{\sigma^2}{2} - a \ln r(t))\Delta t + \sigma r(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r(t)\Delta t(\varepsilon^2 - 1), \quad (2.37)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

### Chan-Karolyi-Longstaff-Sandersův model

Použitím Eulerovy a Milsteinovy metody lze také získat diskrétní verze CKLS modelu (1.18) a jeho upravené verze (1.19) následujícími způsoby.

Eulerovo schema

$$r(t + \Delta t) = r(t) + (\alpha + \beta r(t))\Delta t + \sigma r^\gamma(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \quad (2.38)$$

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \kappa(\theta - r(t))\Delta t + \sigma r^\gamma(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \quad (2.39)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Milsteinovo schema

$$r(t + \Delta t) = r(t) + (\alpha + \beta r(t))\Delta t + \sigma r^\gamma(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} + \frac{\gamma}{2}\sigma^2 r^{\gamma-1}(t)\Delta t(\varepsilon^2 - 1), \quad (2.40)$$

$$r(t + \Delta t) = r(t) + \kappa(\theta - r(t))\Delta t + \sigma r^\gamma(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} + \frac{\gamma}{2}\sigma^2 r^{\gamma-1}(t)\Delta t(\varepsilon^2 - 1), \quad (2.41)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

### Hull-Whiteův model

Diskrétní verze modelu (1.20) využitím Eulerovy metody lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} r(t + \Delta t) &= r(t) + (\vartheta(t) - a(t)r(t))\Delta t + \sigma(t)\Delta W(t) \\ &= r(t) + (\vartheta(t) - a(t)r(t))\Delta t + \sigma(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Upravený tvar (1.21) spojitého modelu (1.20) lze diskretizovat využitím Eulerovy metody následovně

$$\begin{aligned} r(t + \Delta t) &= r(t) + \alpha(t)(\beta(t) - r(t))\Delta t + \sigma(t)\Delta W(t) \\ &= r(t) + \alpha(t)(\beta(t) - r(t))\Delta t + \sigma(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Dále bychom uvedli diskrétní verzi zjednodušeného Hull-Whiteova modelu (1.22). Ta má tvar

$$r(t + \Delta t) = r(t) + (\vartheta(t) - ar(t))\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \quad (2.44)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ . Neuvádíme zde diskrétní verze modelů (1.20) – (1.22), které vzniknou pomocí Milsteinovy diskretizace, protože v těchto modelech nezávisí difuzní člen na úrokové sazbě a tedy proto Eulerova diskretizace splývá s Milsteinovou diskretizací.

Naopak tomu je ve White-Hullově modelu (1.23) a (1.24). Difuzní členy jsou  $\sigma(t)\sqrt{r(t)}$  a  $\sigma\sqrt{r(t)}$ . Proto uvedeme Eulerovu i Milsteinovu diskretizaci.

Eulerova diskretizace modelu (1.23) má tvar

$$r(t + \Delta t) = r(t) + (\vartheta(t) - a(t)r(t))\Delta t + \sigma(t)\varepsilon\sqrt{r(t)\Delta t}, \quad (2.45)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Milsteinova diskretizace modelu (1.23) má tvar

$$r(t + \Delta t) = r(t) + (\vartheta(t) - a(t)r(t))\Delta t + \sigma(t)\varepsilon\sqrt{r(t)\Delta t} + \frac{1}{4}\sigma^2(t)\Delta t(\varepsilon^2 - 1), \quad (2.46)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Eulerova diskretizace modelu (1.24) má tvar

$$r(t + \Delta t) = r(t) + (\vartheta(t) - ar(t))\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{r(t)\Delta t}, \quad (2.47)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Milsteinova diskretizace modelu (1.24) má tvar

$$r(t + \Delta t) = r(t) + (\vartheta(t) - ar(t))\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{r(t)\Delta t} + \frac{1}{4}\sigma^2\Delta t(\varepsilon^2 - 1), \quad (2.48)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

### **Ho-Leeův model**

Diskrétní verze modelu (1.25) je stejná při aplikaci Eulerova a Milsteinova schématu ze stejného důvodu jako výše. Má tvar

$$\begin{aligned} r(t + \Delta t) &= r(t) + \theta(t)\Delta t + \sigma\Delta W(t) \\ &= r(t) + \theta(t)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

### **Black-Derman-Toyův model**

V Black-Derman-Toyově modelu (1.26) a (1.27) není difuzní člen závislý na úrokové sazbě. Proto diskrétní verze těchto modelů splývají při použití Eulerovy a Milsteinovy diskretizační metody. Diskrétní verze modelu (1.26) vypadá

$$\ln r(t + \Delta t) = \ln r(t) + (\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\ln r(t))\Delta t + \sigma(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \quad (2.50)$$

modelu (1.27)

$$\ln r(t + \Delta t) = \ln r(t) + \theta(t)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \quad (2.51)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

### **Black-Karasinského model**

V případě diskretizace modelu (1.28) pomocí Eulerova diskretizačního schématu lze dospět ke tvaru

$$\ln r(t + \Delta t) = \ln r(t) + (\theta(t) - \phi(t)\ln r(t))\Delta t + \sigma(t)\Delta W(t), \quad (2.52)$$

což lze upravit na

$$\ln r(t + \Delta t) = \ln r(t) + (\theta(t) - \phi(t)\ln r(t))\Delta t + \sigma(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \quad (2.53)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

Diskrétní verze zjednodušeného Black-Karasinského modelu (1.29) po použití Eulerovy diskretizace bude vypadat

$$\ln r(t + \Delta t) = \ln r(t) + (\theta(t) - \phi \ln r(t))\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (2.54)$$

kde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ .

U obou těchto diskretizací lze použít Milsteinovo schema, avšak žádného zlepšení se nedocílí.

# 3. Numerické ilustrace

## 3.1 Simulace

V této kapitole se budeme věnovat simulacím jednotlivých modelů úrokových měr. Využívá se k tomu jejich diskrétních verzí, které jsou připraveny v druhé kapitole, jelikož se simulace provádějí v diskrétních časech. Dále také software Wolfram Mathematica 8, ve kterém jsme se rozhodli programovat tyto simulace, protože se v tomto programu velice dobře pracuje, je intuitivní, rychlý a výborně spolupracuje s uživatelem.

### 3.1.1 Modely úrokových měr

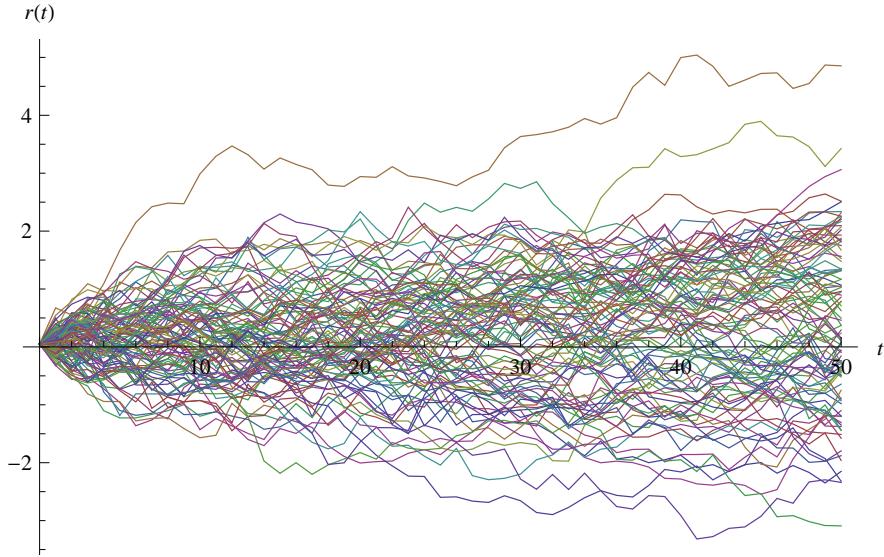
#### Rovnovážné modely

Pro vhodnou ilustraci chování úrokových sazeb podle jednotlivých rovnovážných modelů nasimulujieme z počáteční hodnoty a pevně zvolených parametrů  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  a  $\sigma$  sto trajektorií vývoje úrokových sazeb o délce 50. Jelikož všechny diskrétní verze rovnovážných modelů vzniklých Eulerovou diskretizací kromě tvaru exponenciálního Vašíčkova modelu (2.36) lze zahrnout do diskrétní verze Chan-Karolyi-Longstaff-Sandersova modelu (2.38), naprogramujeme funkci pod názvem CKLS pro tento model a pro ostatní modely bude vždy stačit omezit některé parametry určitým způsobem tak, aby se úroková sazba vyvíjela podle konkrétního modelu. Tvar diskrétních verzí jednotlivých modelů pomocí Milsteinovy diskretizace není stejný jako tvar CKLS modelu (2.41). Liší se však od tvaru Eulerova diskretizačního schematu CKLS modelu jen ve třetím členu. Takže vždy upravíme funkci CKLS přidáním konkrétního třetího členu tak, aby vyhovovala jednotlivé Milsteinově diskretizaci. Jako vstupy funkce CKLS vždy vkládáme konkrétní hodnoty parametrů  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  a  $\sigma$ , které jsou u rovnovážných modelů konstantní. Tyto parametry volíme dle našeho uvážení, tak aby bylo možné studovat chování jednotlivých modelů. Počáteční hodnotu  $r(0) = 0.05$  volíme pro všechny simulace stejnou. Její hodnota je zvolena tak, aby výstupy modelů mohly být reálné. Všechny následující simulace lze provést pro libovolnou hodnotu  $\Delta t$ . My jsme zde položili  $\Delta t = 1$  z důvodu názornosti a možnosti porovnání všech simulací. Aby bylo možné porovnávat volby parametrů, používáme v Mathematice před každým spuštěním simulování vývoje úrokových sazeb zabudovanou funkci SeedRandom, která nastaví generátor náhodných čísel z námi určeného pravděpodobnostního rozdělení na stejnou počáteční hodnotu. Všechny výpočty jsou tudíž reprodukovatelné ve stejně podobě.

Mertonův model (2.8) lze vyjádřit z CKLS modelu (2.38) položením parametrů  $\beta, \gamma = 0$ . V první simulované variantě se dále položí  $\alpha = 0.0081$  a  $\sigma = \sqrt{0.0493}$ . Ve druhé variantě budou parametry  $\alpha = 0.0055$  a  $\sigma = \sqrt{0.0004}$ . Stručný přehled těchto parametrů lze vidět v tabulce (3.1). Mnoho trajektorií vývojů úrokových sazeb v Mertonově modelu s parametry první varianty na obrázku (3.1) dosahuje vysokých nereálných hodnot a také i záporných hodnot, což je u modelu úrokových sazeb velký nedostatek. Parametry druhé varianty jsou zvoleny tak, že je patrný trend, kterým se úrokové sazby vyvíjejí, což lze pozorovat na obrázku (3.2). Zde se také hodnoty úrokových sazeb dostávají do

Mertonův model	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\sigma$
1. varianta	0.0081	0	0	$\sqrt{0.0493}$
2. varianta	0.0055	0	0	$\sqrt{0.0004}$

Tabulka 3.1: Parametry první a druhé varianty Mertonova modelu. *Zdroj: Vlastní tvorba.*



Obrázek 3.1: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Mertonova modelu s parametry první varianty.

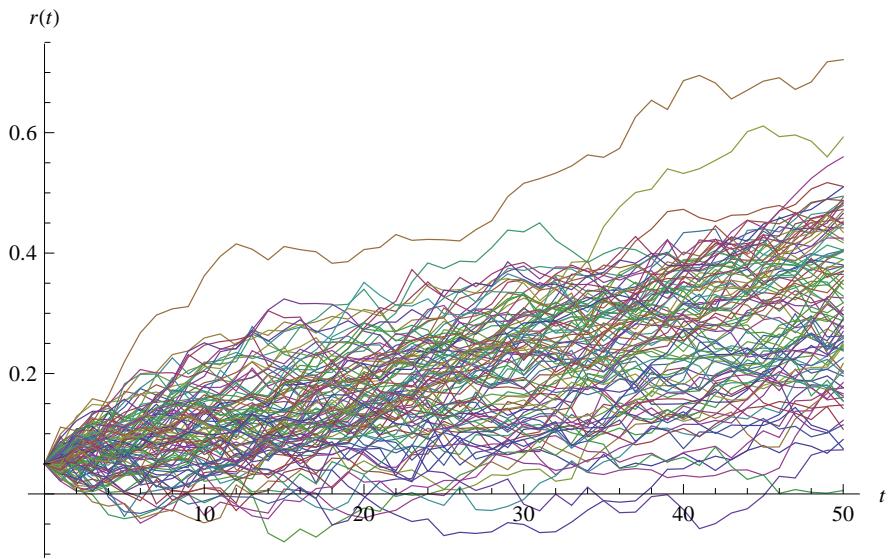
záporných hodnot, avšak méně než v první variantě, kde lze navíc pozorovat mnohem větší rozptyl.

Volbou parametru  $\gamma = 0$  se stane z CKLS modelu (2.38) Vašíčkův model (2.12). Pomocí tohoto modelu simulujeme vývoj úrokových sazeb, ve kterém ostatní parametry volíme v první variantě  $\alpha = 0.0030$ ,  $\beta = -0.0021$ ,  $\sigma = \sqrt{0.0489}$  a ve druhé variantě  $\alpha = 0.0154$ ,  $\beta = -0.1779$  a  $\sigma = \sqrt{0.0004}$ , viz. tabulka (3.2). Vývoj úrokových sazob ve Vašíčkově modelu s parametry zvolenými jako v první variantě, který je na obrázku (3.3) se výrazně liší od vývoje s parametry zvolenými ve druhé variantě na obrázku (3.4). V první variantě hodnoty úrokové sazby nabývají záporných hodnot a rozptyl hodnot je veliký. Ve druhé variantě je rozptyl hodnot úrokových sazob, které se drží své cílové úrovni, malý a záporných hodnot se nabývá v málo případech.

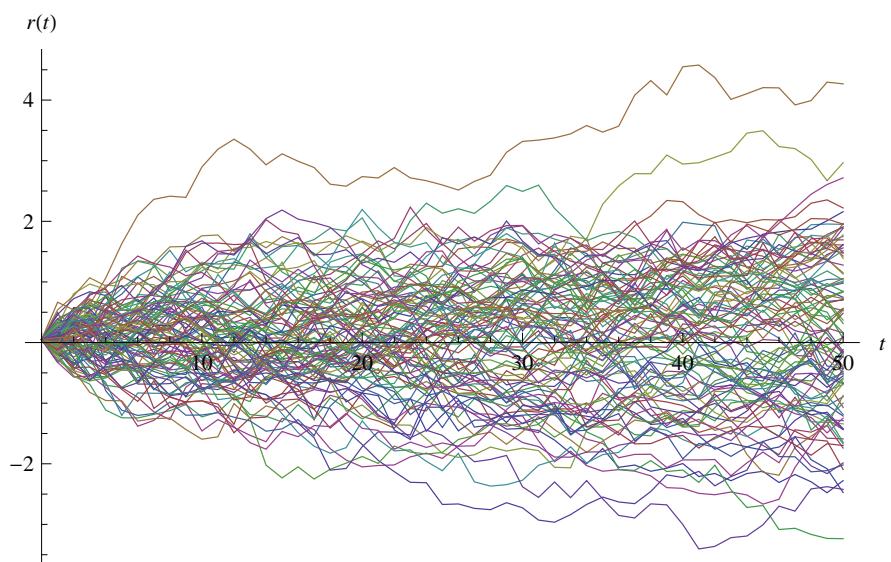
Diskrétní verze Dothanova modelu (2.16) dle Eulerovy diskretizace se získá z diskrétní verze CKLS modelu (2.38) položením parametru  $\alpha = 0$  a  $\gamma = 1$ . V první

Vašíčkův model	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\sigma$
1. varianta	0.0030	-0.0021	0	$\sqrt{0.0489}$
2. varianta	0.0154	-0.1779	0	$\sqrt{0.0004}$

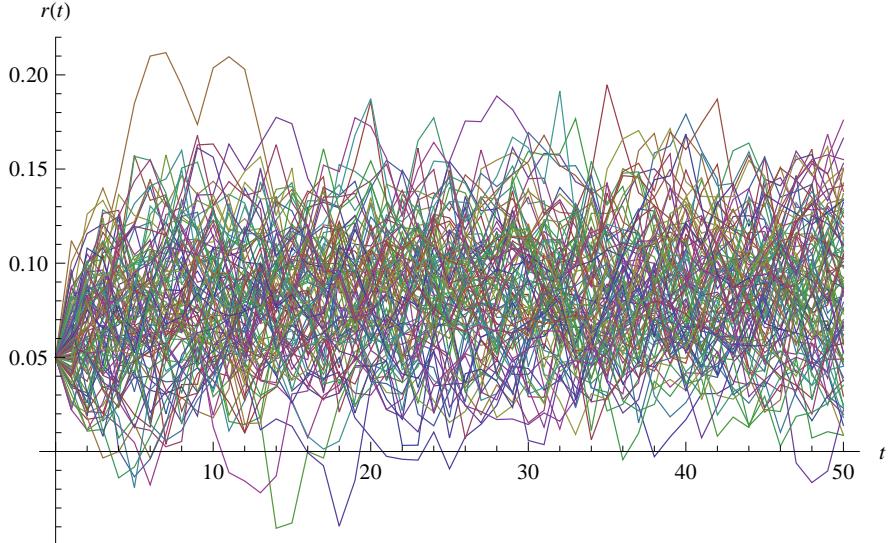
Tabulka 3.2: Parametry první a druhé varianty Vašíčkova modelu. *Zdroj: Vlastní tvorba.*



Obrázek 3.2: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Mertonova modelu s parametry druhé varianty.



Obrázek 3.3: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Vašíčkova modelu s parametry první varianty.



Obrázek 3.4: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Vašíčkova modelu s parametry druhé varianty.

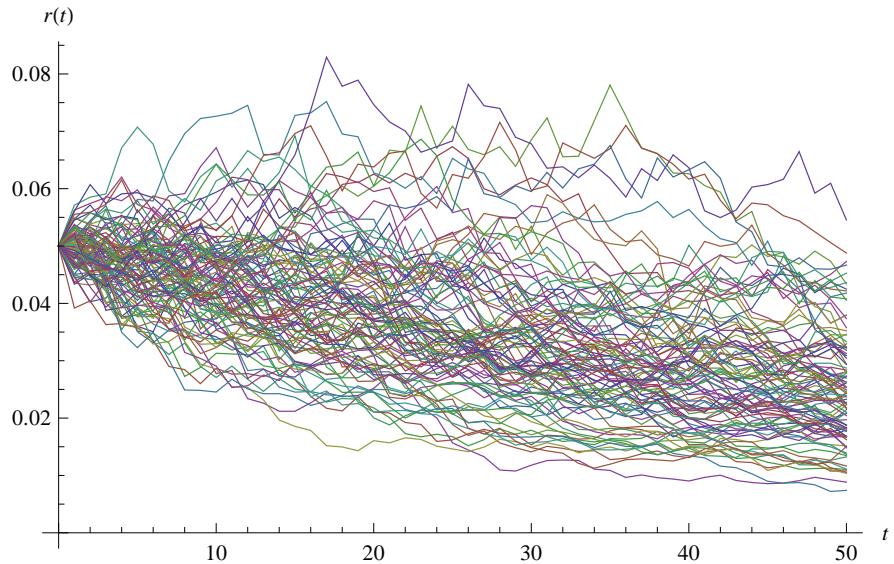
<b>Dothanův model</b>	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\sigma$
1. varianta	0	-0.01058	1	$\sqrt{0.004}$
2. varianta	0	0.00656	1	$\sqrt{0.008}$

Tabulka 3.3: Parametry první a druhé varianty Dothanova modelu. *Zdroj: Vlastní tvorba.*

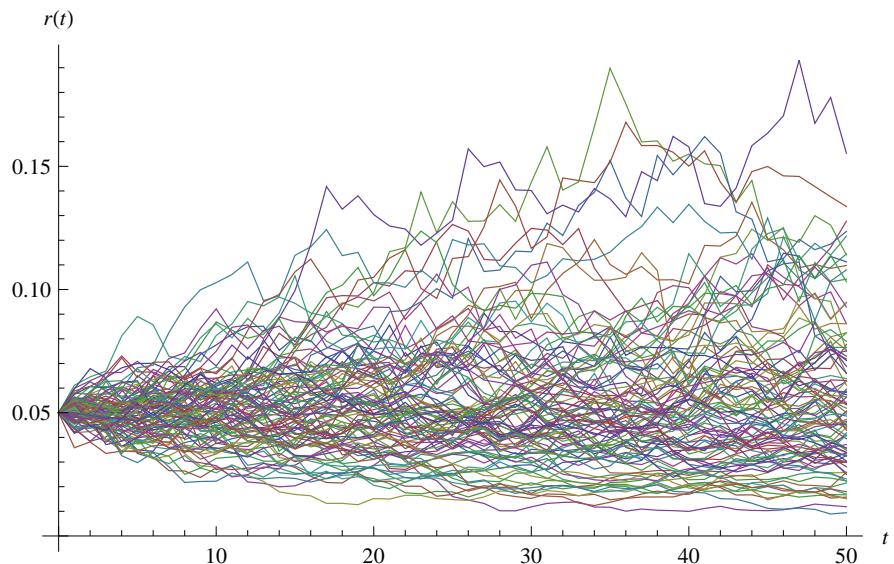
variantě simulování trajektorie vývoje úrokových sazob položíme  $\beta = -0.01058$  a  $\sigma = \sqrt{0.004}$ . Ve druhé variantě jsou parametry  $\beta = 0.00656$  a  $\sigma = \sqrt{0.008}$ , viz. tabulka (3.3). Při simulování dle Milsteinovy diskretizace použijeme také parametry z první a druhé varianty, aby šlo provést porovnání.

Na všech 4 obrázcích (3.5), (3.6), (3.7) a (3.8) ani po 50 krocích nenabývají hodnoty úrokových sazob nereálných a především záporných hodnot. Na obrázku (3.5) lze pozorovat jistý trend, který je klesající. Na obrázku (3.8) Milsteinova diskretizace ve spojení s naší volbou parametrů zapříčinila větší rozptyl hodnot úrokových sazob, než u hodnot na obrázku (3.6), kde se provedla Eulerova diskretizace. Na obrázku (3.7) je tomu přesně naopak. Lze pozorovat menší rozptyl než na obrázku (3.5).

Diskrétní verzi Cox-Ingersoll-Rossova modelu takéž nasimulujieme s pomocí Eulerova (2.26) a Milsteinova diskretizačního schematu (2.27). Diskrétní verze CKLS modelu (2.38) zahrnuje diskrétní verzi CIR modelu pomocí Eulerova schematu, jestliže se zvolí parametr  $\gamma = 0.5$ . V první variantě se generuje vývoj úrokových sazob s parametry  $\alpha = 0.0139$ ,  $\beta = -0.00933$ ,  $\sigma = \sqrt{0.0174}$ . Ve druhé volíme parametry  $\alpha = 0.0189$ ,  $\beta = -0.2339$  a  $\sigma = \sqrt{0.0043}$ . Přehledný soupis parametrů jednotlivých variant lze nalézt v tabulce (3.4). Na obrázcích (3.9) a (3.10) je sto simulací trajektorie o délce 50 s parametry první a druhé varianty Eulerovou diskretizací a na obrázcích (3.11) a (3.12) je totéž Milsteinovou diskretizací. Podmínka pro zaručení nenabývání záporných hodnot úrokových sazob pro diskrétní verzi upraveného CIR modelu  $2\alpha > \sigma^2$  je splněna v obou vari-



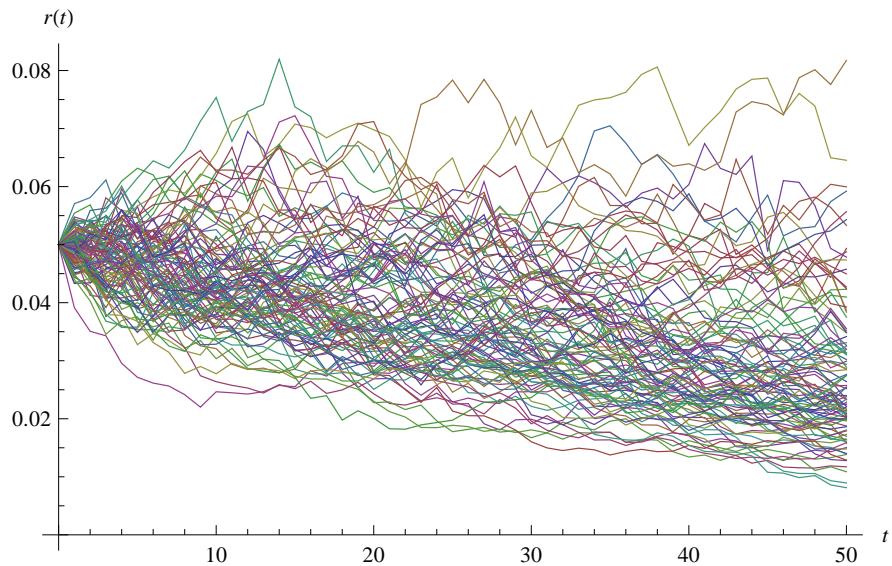
Obrázek 3.5: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Dothanova modelu s parametry první varianty dle Eulerovy diskretizace.



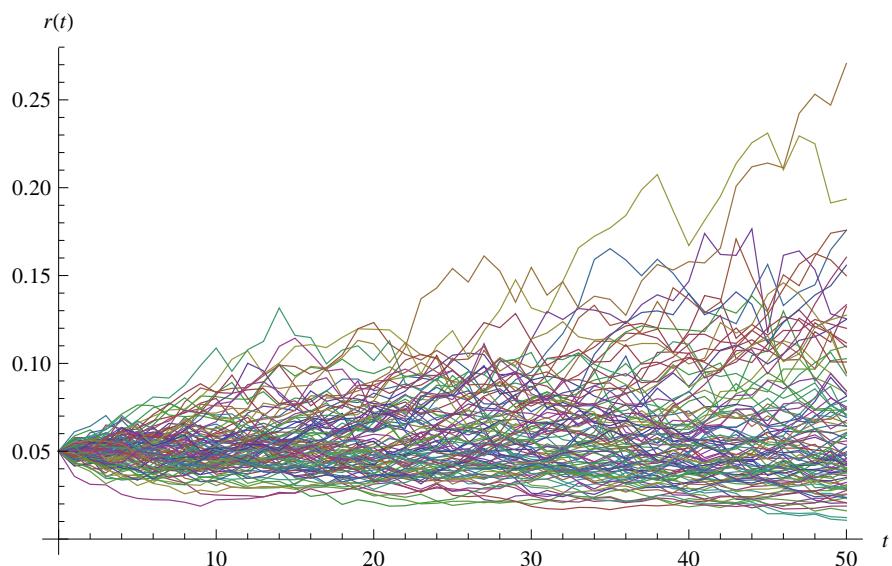
Obrázek 3.6: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Dothanova modelu s parametry druhé varianty dle Eulerovy diskretizace.

Cox-Ingersoll-Rossův model	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\sigma$
1. varianta	0.0139	-0.00933	0.5	$\sqrt{0.0174}$
2. varianta	0.0189	-0.2339	0.5	$\sqrt{0.0043}$

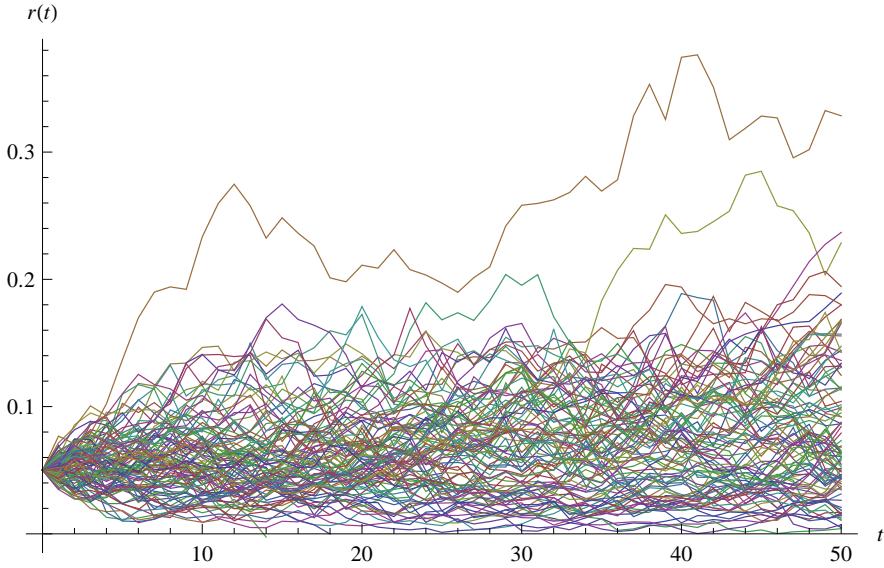
Tabulka 3.4: Parametry první a druhé varianty Cox-Ingersoll-Rossova modelu.  
Zdroj: Vlastní tvorba.



Obrázek 3.7: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Dothanova modelu s parametry první varianty dle Milsteinovy diskretizace.



Obrázek 3.8: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Dothanova modelu s parametry druhé varianty dle Milsteinovy diskretizace.



Obrázek 3.9: Simulace 50 trajektorií délky 50 diskrétní verze CIR modelu s parametry první varianty dle Eulerovy diskretizace.

Modifikovaný CIR model	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\sigma$
1. varianta	0	0	1.5	$\sqrt{0.0006}$
2. varianta	0	0	1.5	$\sqrt{0.5778}$

Tabulka 3.5: Parametry první a druhé varianty modifikovaného CIR modelu.  
Zdroj: Vlastní tvorba.

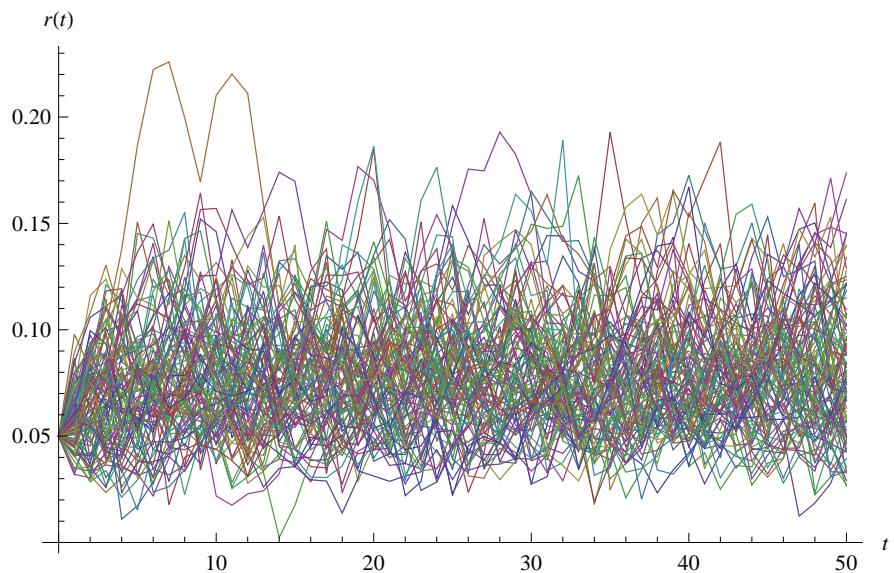
antách. Avšak v první variantě lze pozorovat několik trajektorií, které nabývají záporných hodnot. Těchto situací je však pouze nepatrné množství oproti počtu simulovaných trajektorií a jsou zapříčiněny stochastickým rázem tohoto procesu vývoje úrokových sazob. Na obrázcích (3.11) a (3.12) již vývoje úrokových sazob záporných hodnot nenabývají.

Porovnává-li se Milsteinova a Eulerova diskretizace, lze říci, že u obou dvojic simulací se stejnými parametry je jen nepatrý rozdíl v rozptylu hodnot. Vývoj úrokových sazob v CIR modelu s parametry první varianty se liší od vývoje s parametry zvolenými ve druhé variantě tím, že v první variantě se hodnoty vzdalují více od hladiny trendu, než je tomu ve druhé variantě.

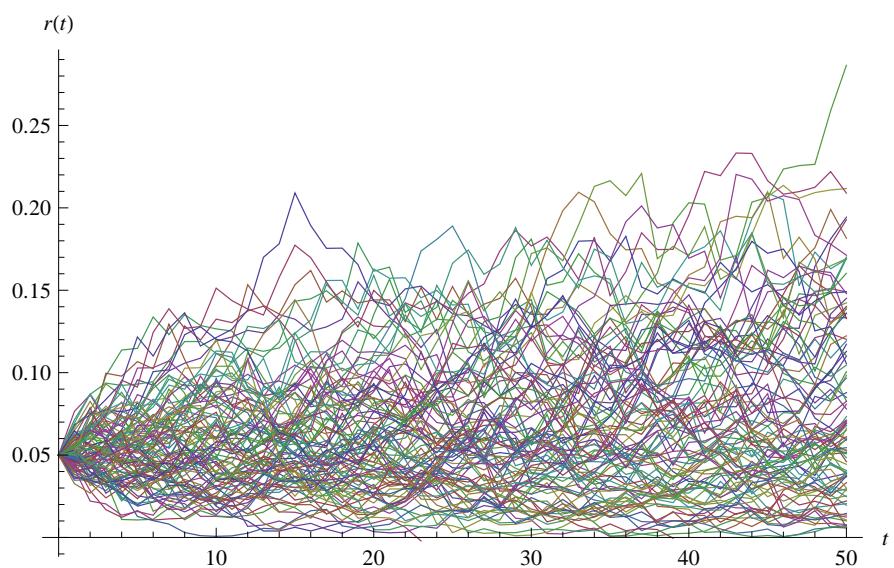
Diskrétní verze modifikovaného Cox-Ingersoll-Rossova modelu (2.29) lze vyjádřit diskrétní verzí CKLS modelu (2.38) položením parametrů  $\alpha, \beta = 0$  a  $\gamma = \frac{3}{2}$ . V první variantě nechť  $\sigma = \sqrt{0.0006}$  a ve druhé  $\sigma = \sqrt{0.5778}$ , jak lze přehledně vidět v tabulce (3.5).

Diskrétní verze modifikovaného CIR modelu (2.29) s parametry první varianty, jak lze vidět na obrázku (3.13), zaručuje, že se hodnoty úrokových sazob příliš nevzdálí od počáteční hodnoty  $r(0) = 0.05$  ani po 50 krocích.

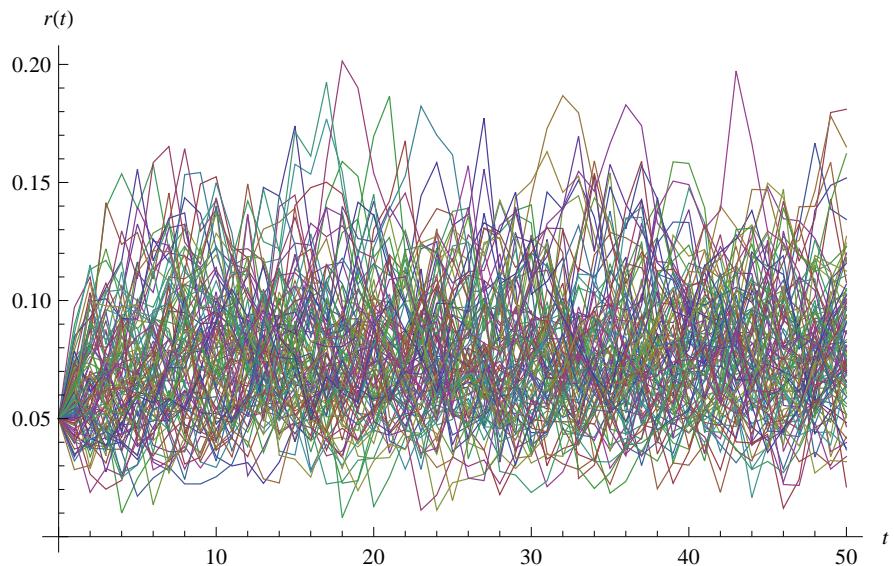
Na obrázku (3.14) lze pozorovat, že hodnoty úrokových sazob se drží na úrovni počáteční hodnoty s mírným klesajícím trendem a i přesto, že jsou blízko záporných hodnot, tuto hranici nepřekročí. Nelze však říci, že tento model vyzkouje vysokou stabilitu, jelikož některé trajektorie úrokových sazob nabývají vysokých hodnot a poté je velice rychle ztrácí.



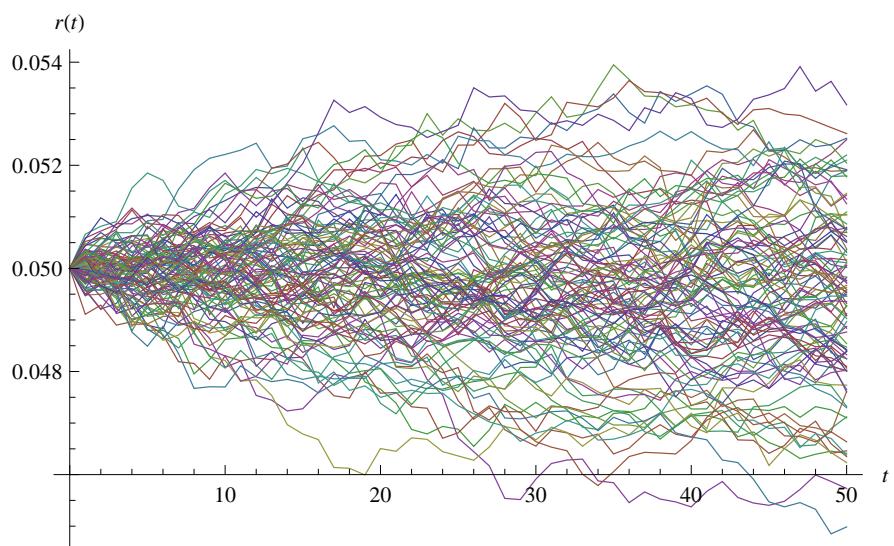
Obrázek 3.10: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze CIR modelu s parametry druhé varianty dle Eulerovy diskretizace.



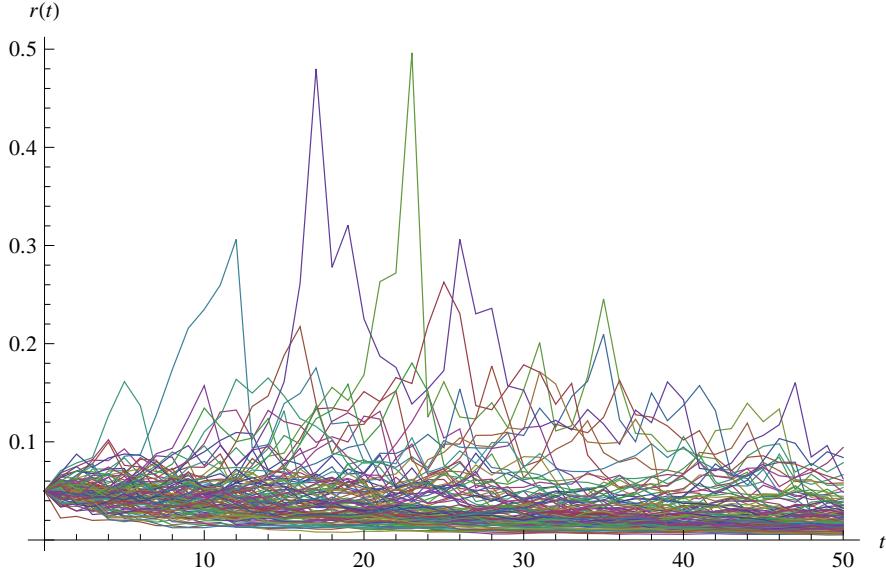
Obrázek 3.11: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze CIR modelu s parametry první varianty dle Milsteinovy diskretizace.



Obrázek 3.12: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze CIR modelu s parametry druhé varianty dle Milsteinovy diskretizace.



Obrázek 3.13: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze modifikovaného CIR modelu s parametry první varianty dle Eulerovy diskretizace.



Obrázek 3.14: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze modifikovaného CIR modelu s parametry druhé varianty dle Eulerovy diskretizace.

Brennan-Schwartzův model	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\sigma$
1. varianta	0.0105	-0.0003	1	$\sqrt{0.0036}$
2. varianta	0.0242	-0.3142	1	$\sqrt{0.1185}$

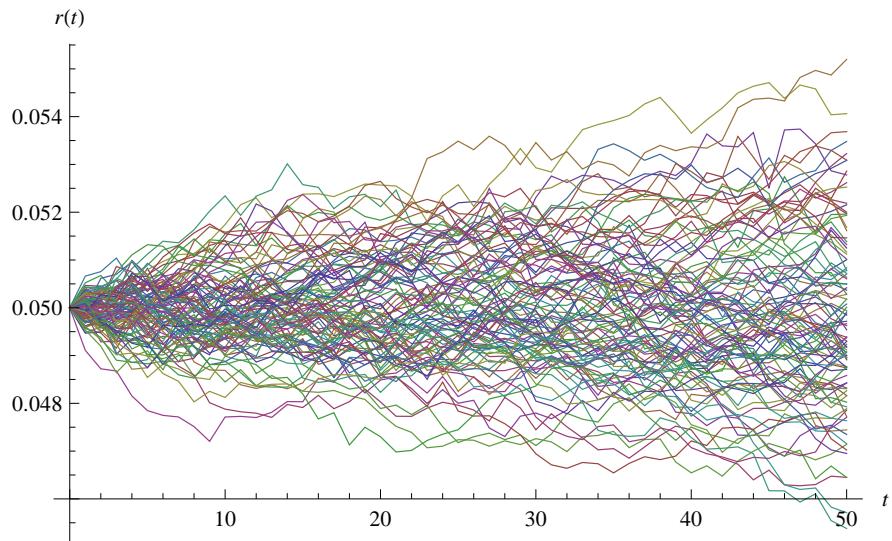
Tabulka 3.6: Parametry první a druhé varianty Brennan-Schwartzova modelu.  
Zdroj: Vlastní tvorba.

Simulace diskrétní verze modifikovaného Cox-Ingersoll-Rossova modelu Milsteinovou diskretizací (2.30) jsou na obrázcích (3.15) a (3.16). Nelze vypozorovat velký rozdíl mezi Eulerovou a Milsteinovou diskretizací.

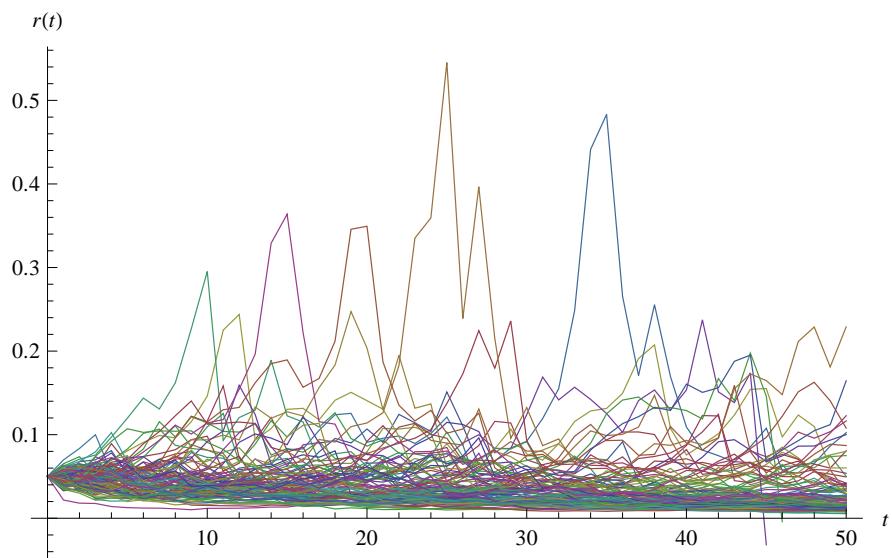
Simulace diskrétní verze Brennan-Schwartzova modelu (2.33), který vznikne z CKLS modelu položením parametru  $\gamma = 1$  pomocí Eulerovy diskretizace, jsou vykresleny na obrázku (3.17) s parametry první varianty  $\alpha = 0.0105$ ,  $\beta = -0.0003$  a  $\sigma = \sqrt{0.0036}$  a s parametry druhé varianty  $\alpha = 0.0242$ ,  $\beta = -0.3142$  a  $\sigma = \sqrt{0.1185}$ , viz. tabulka (3.6), na obrázku (3.18). Simulace diskrétní verze Brennan-Schwartzova modelu (2.34), které vzniknou Milsteinovou diskretizací, jsou vykresleny na obrázku (3.19) a (3.20).

Diskrétní verze CKLS modelu (2.38) a (2.41) nezahrnuje diskrétní verze exponenciálního Vašíčkova modelu (2.35) a (2.37). Naprogramujeme novou funkci, která simuluje vývoj úrokových sazob podle exponenciálního Vašíčkova modelu. První variantu parametrů volíme  $\alpha = 0.002$ ,  $\beta = 0.0038$  a  $\sigma = \sqrt{0.0005}$ , viz. tabulka (3.7). Simulace exponenciálního Vašíčkova modelu s těmito parametry je na obrázku (3.21). Na obrázku (3.22) je simulace exponenciálního Vašíčkova modelu s parametry  $\alpha = 0.06$ ,  $\beta = 0.906026$  a  $\sigma = \sqrt{0.02007}$ .

Při simulaci diskrétní verze CKLS modelu pomocí Eulerova schematu (2.38) a Milsteinova schematu (2.41) zvolíme parametry první varianty  $\alpha = 0.0331$ ,  $\beta = -0.0079$ ,  $\gamma = 1.649$  a  $\sigma = 0.02$  a druhé varianty  $\alpha = 0.0112$ ,  $\beta = -0.05921$ ,  $\gamma = 1.2999$  a  $\sigma = \sqrt{0.0006324}$ , viz. tabulka (3.8). Lze spatřit, že rozdíl ve vývoji úrokových sazob dle Eulerovy a Milsteinovy diskretizace není v CKLS modelu



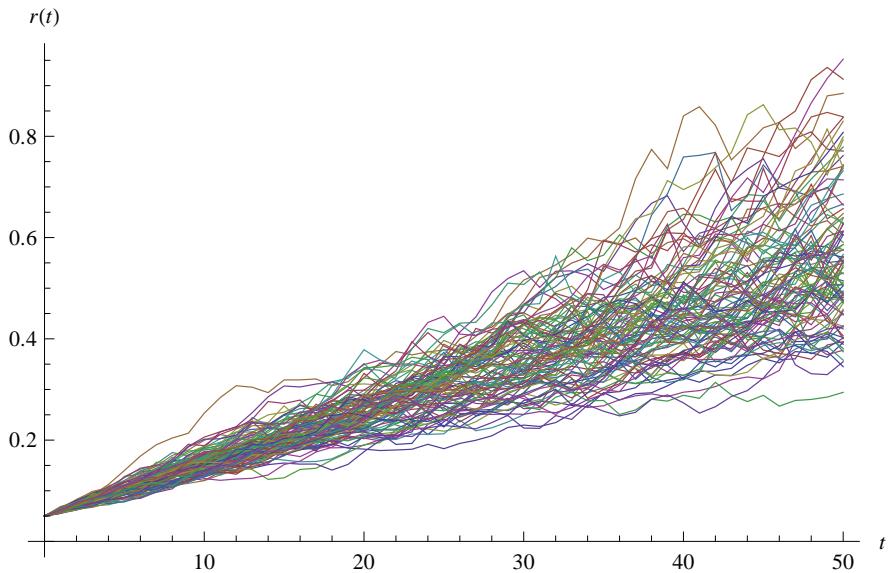
Obrázek 3.15: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze modifikovaného CIR modelu s parametry první varianty dle Milsteinovy diskretizace.



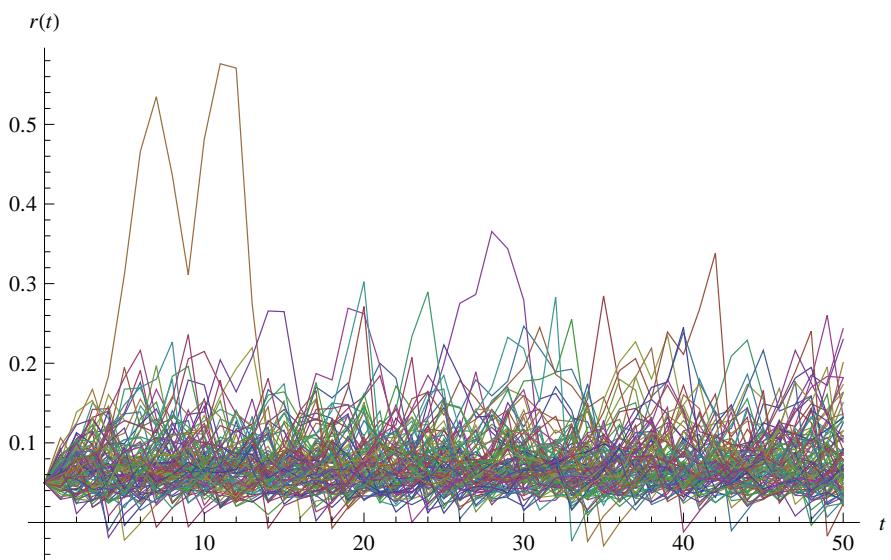
Obrázek 3.16: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Modifikovaného CIR modelu s parametry druhé varianty dle Milsteinovy diskretizace.

Exponenciální Vašíčkův model	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$
1. varianta	0.002	0.0038	$\sqrt{0.0005}$
2. varianta	0.06	0.906026	$\sqrt{0.02007}$

Tabulka 3.7: Parametry první a druhé varianty exponenciálního Vašíčkova modelu. *Zdroj: Vlastní tvorba.*



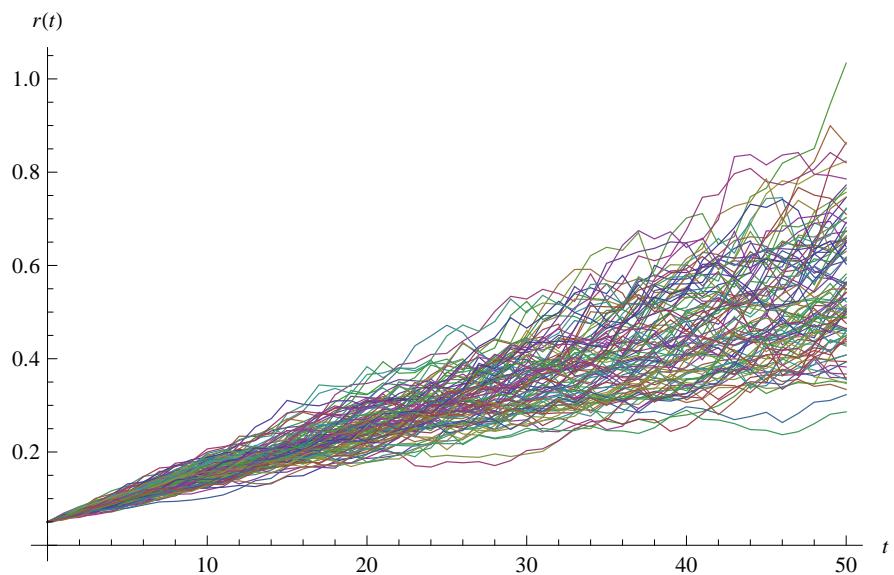
Obrázek 3.17: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Brennan-Schwartzova modelu s parametry první varianty dle Eulerovy diskretizace.



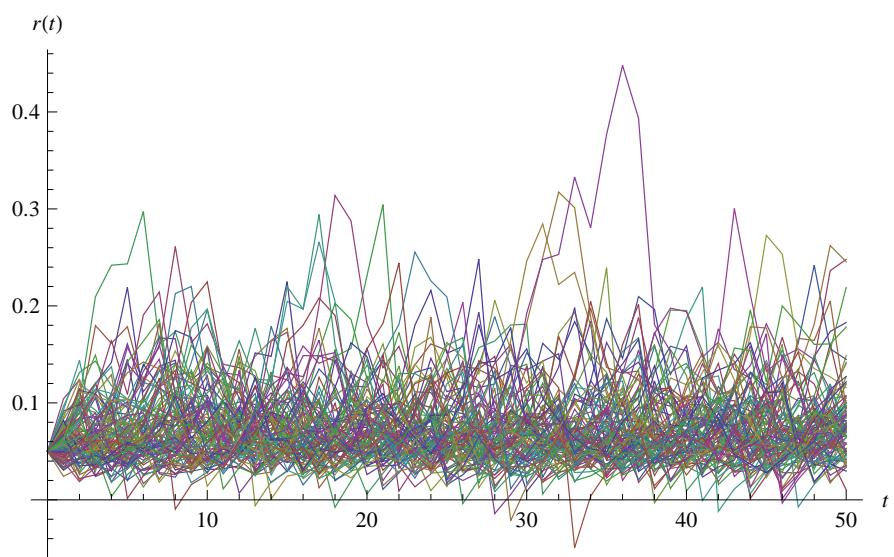
Obrázek 3.18: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Brennan-Schwartzova modelu s parametry druhé varianty dle Eulerovy diskretizace.

CKLS model	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\sigma$
1. varianta	0.0331	-0.0079	1.649	0.02
2. varianta	0.0112	-0.05921	1.2999	$\sqrt{0.0006324}$

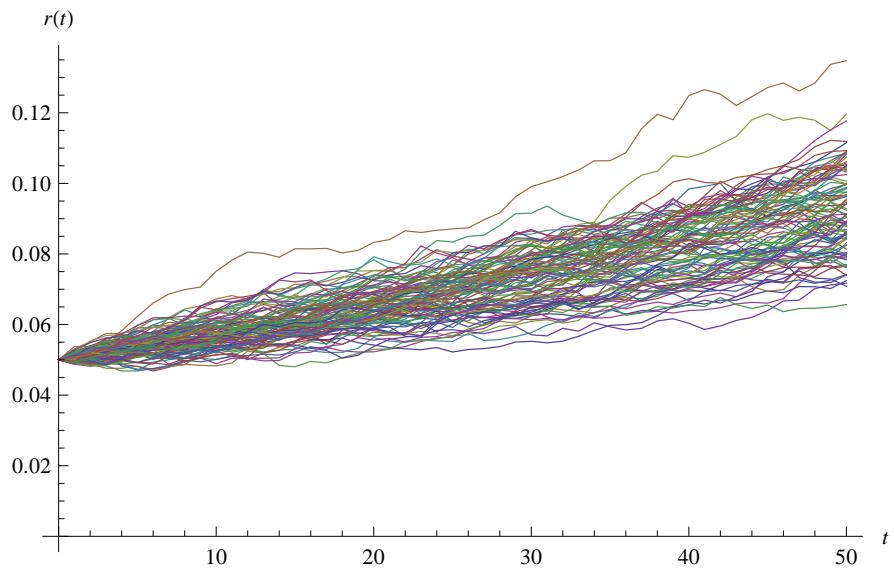
Tabulka 3.8: Parametry první a druhé varianty CKLS modelu. *Zdroj: Vlastní tvorba.*



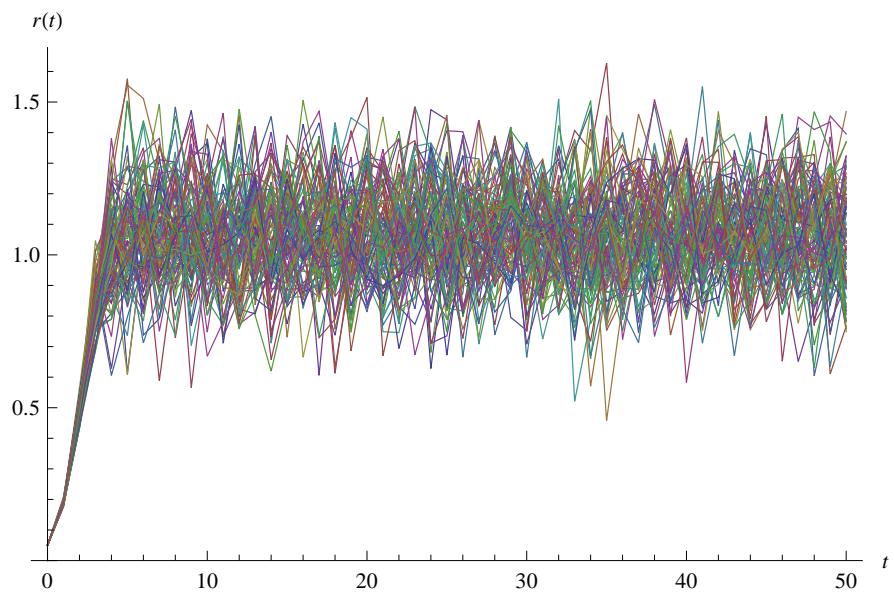
Obrázek 3.19: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Brennan-Schwartzova modelu s parametry první varinty dle Milsteinovy diskretizace.



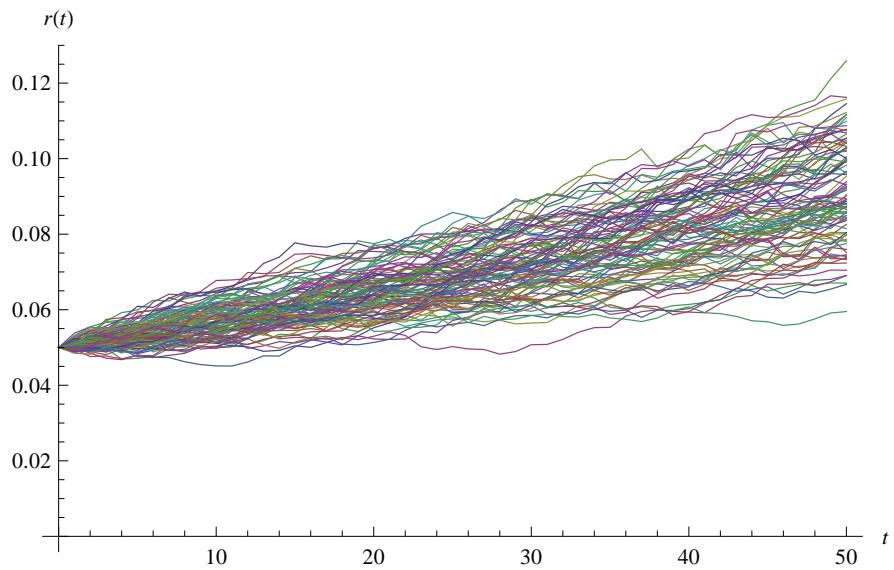
Obrázek 3.20: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Brennan-Schwartzova modelu s parametry druhé varinty dle Milsteinovy diskretizace.



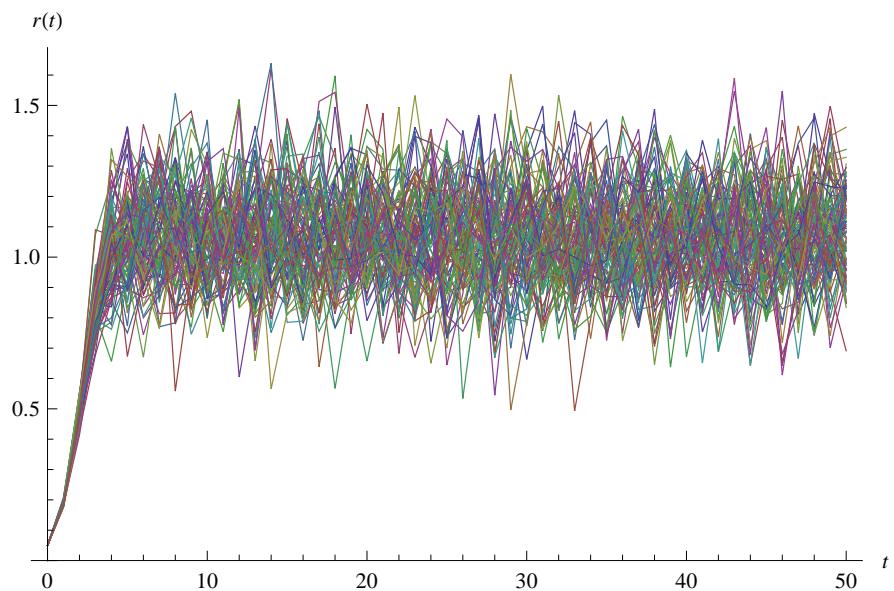
Obrázek 3.21: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze exponenciálního Vašíčkova modelu s parametry první varianty dle Eulerovy diskretizace.



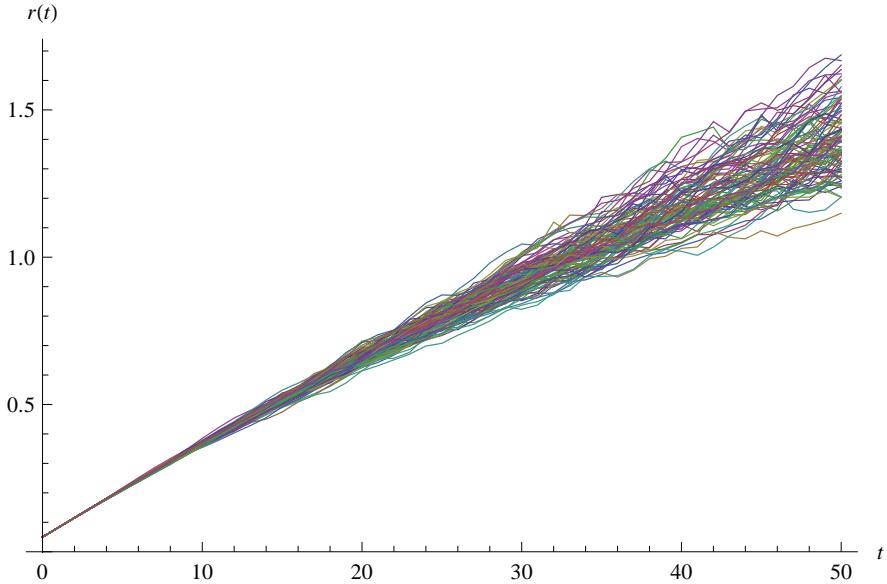
Obrázek 3.22: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze exponenciálního Vašíčkova modelu s parametry druhé varianty dle Eulerovy diskretizace.



Obrázek 3.23: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze exponenciálního Vašíčkova modelu s parametry první varianty dle Milsteinovy diskretizace.



Obrázek 3.24: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze exponenciálního Vašíčkova modelu s parametry druhé varianty dle Milsteinovy diskretizace.



Obrázek 3.25: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze CKLS modelu s parametry první varianty dle Eulerovy diskretizace.

patrný. Parametry první varianty zapříčinily nereálný pohyb úrokových sazob na obrázku (3.25) a (3.27). Na obrázcích (3.26) a (3.28) lze pozorovat hladinu úrokové sazby, na které se vývoj těchto sazob usadil.

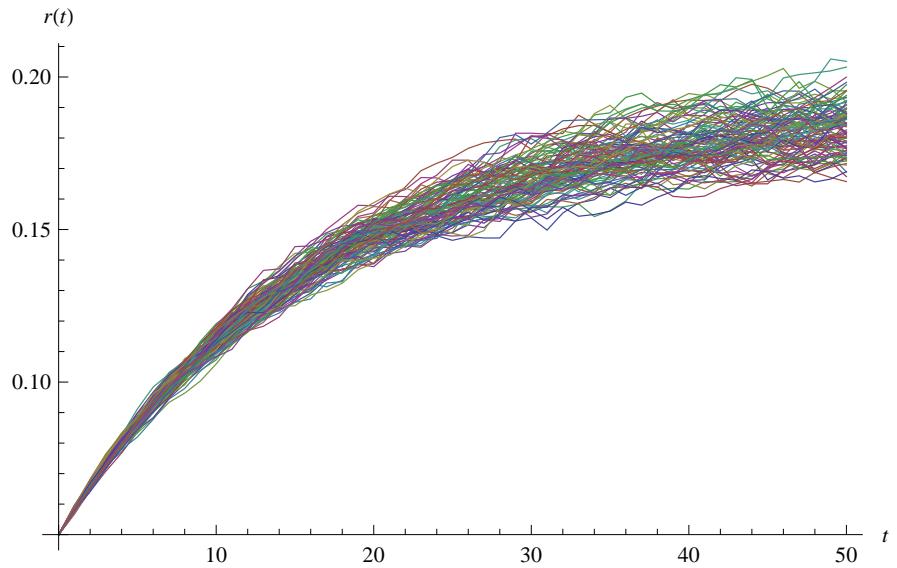
### Nearbitrážní modely

Při simulovalení vývoje úrokových sazob podle nearbitrážních modelů používáme stejný postup popsaný výše pro rovnovážné modely. U následujících simulací je vyřešena jejich vysoká časová náročnost použitím dynamické rekurze, která je možným řešením tohoto problému. Také zde je umožněna reprodukovatelnost všech výpočtů ve stejné podobě.

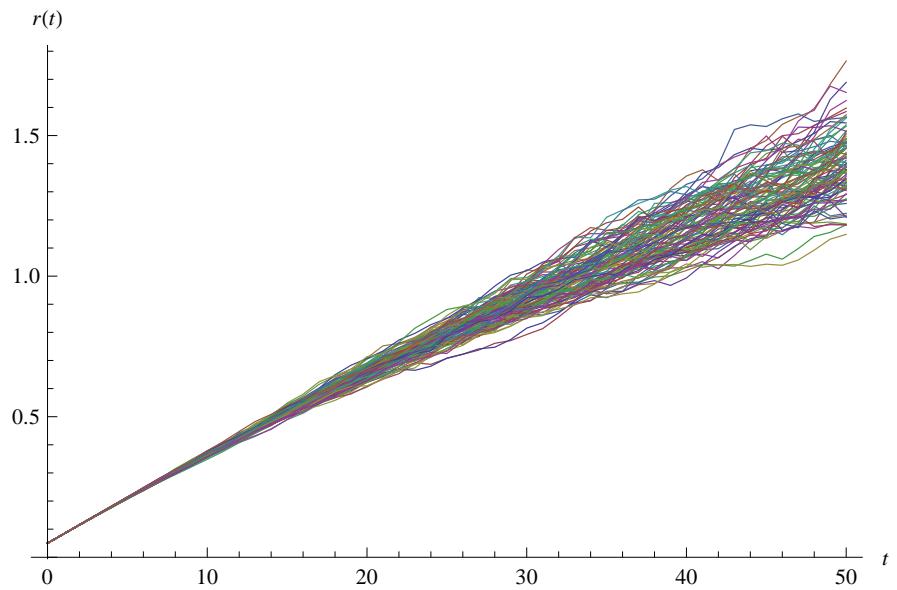
Průběh sta trajektorií o délce 50 diskrétní verze Hull-Whiteova modelu krátkodobých úrokových sazob (2.44) pomocí Eulerovy diskretizace s počáteční hodnotou  $r(0) = 0.05$  a parametry první varianty  $a = 0.9$ ,  $\sigma = \sqrt{0.000004}$  je nasimulován na obrázku (3.29). Na obrázku (3.30) je simulace téhož jen s parametry druhé varianty  $a = 0.9$ ,  $\sigma = \sqrt{0.004}$ .

Odlišnost simulací na obrázcích (3.29) a (3.30) je patrná. Hodnoty parametrů výrazně ovlivnily průběh vývoje úrokových sazob. Na obrázku (3.29) hodnota parametru  $\sigma = \sqrt{0.000004}$  způsobila, že úrokové sazby výrazně nepřesáhnou hladinu 0.09 ani po padesáti krocích, zatímco na obrázku (3.30) téměř okamžitě hodnoty úrokových sazob nabývají mnohem větších hodnot, než je tomu v reálném světě. Navíc rozptyl hodnot na obrázku (3.30) je větší než na (3.29) a úrokové sazby se zde také dostávají do záporných čísel.

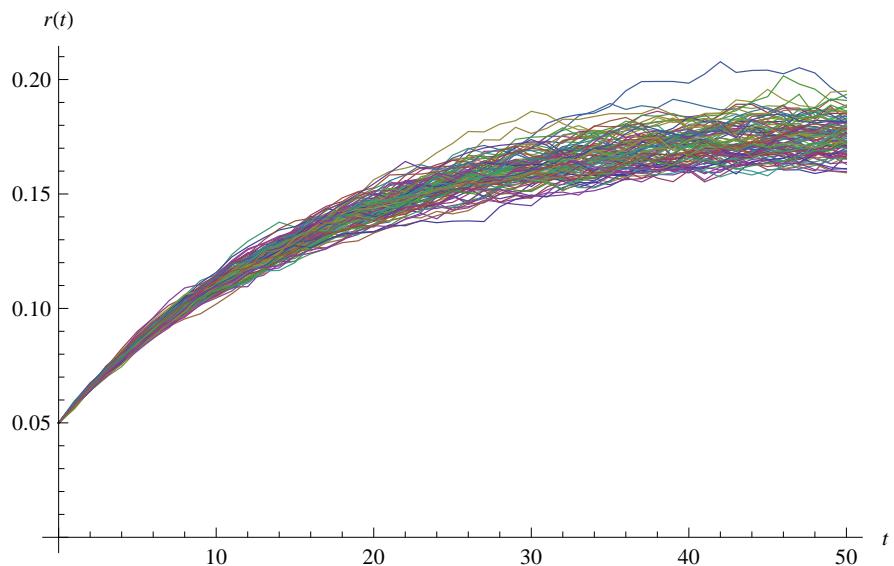
Pomocí Eulerovy a Milsteinovy diskretizace je na obrázcích (3.31), (3.32) a (3.33), (3.34) nasimulován průběh sta trajektorií o délce 50 diskrétní verze Hull-Whiteova modelu krátkodobých úrokových sazob (2.47), což odpovídá Eulerově diskretizaci, či (2.48), což odpovídá Milsteinově diskretizaci, s počáteční hodnotou  $r(0) = 0.05$  a parametry v první variantě  $\beta = 0.9$ ,  $\sigma = \sqrt{0.000004}$  a ve druhé variantě  $\beta = 0.9$ ,  $\sigma = \sqrt{0.004}$ .



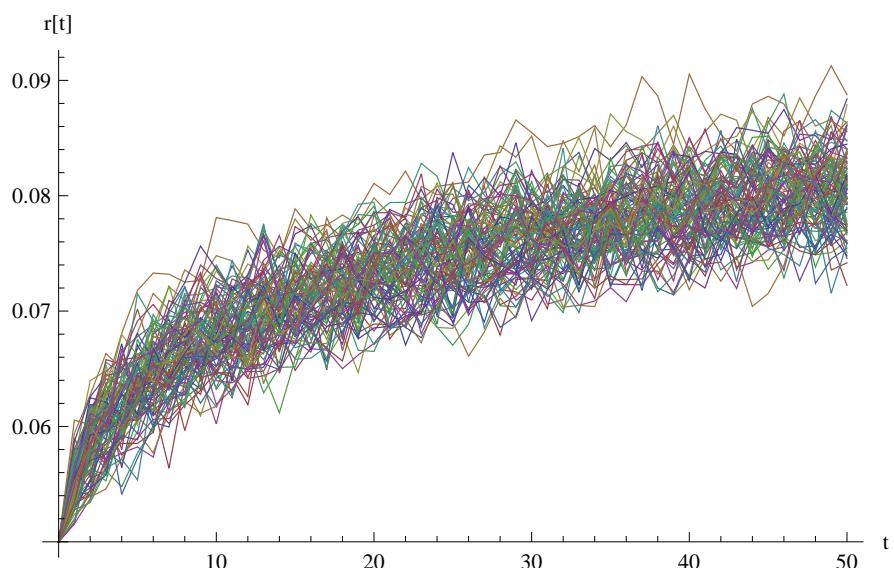
Obrázek 3.26: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze CKLS modelu s parametry druhé varianty dle Eulerovy diskretizace.



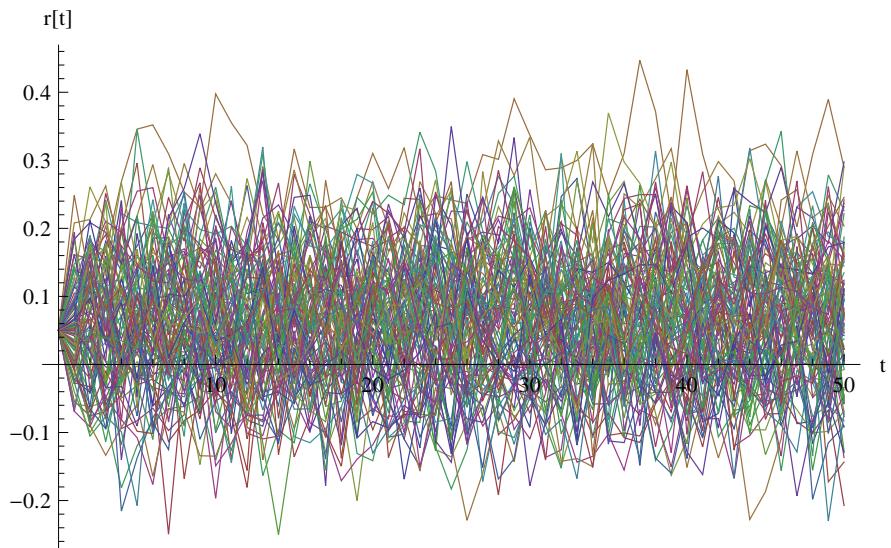
Obrázek 3.27: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze CKLS modelu s parametry první varianty dle Milsteinovy diskretizace.



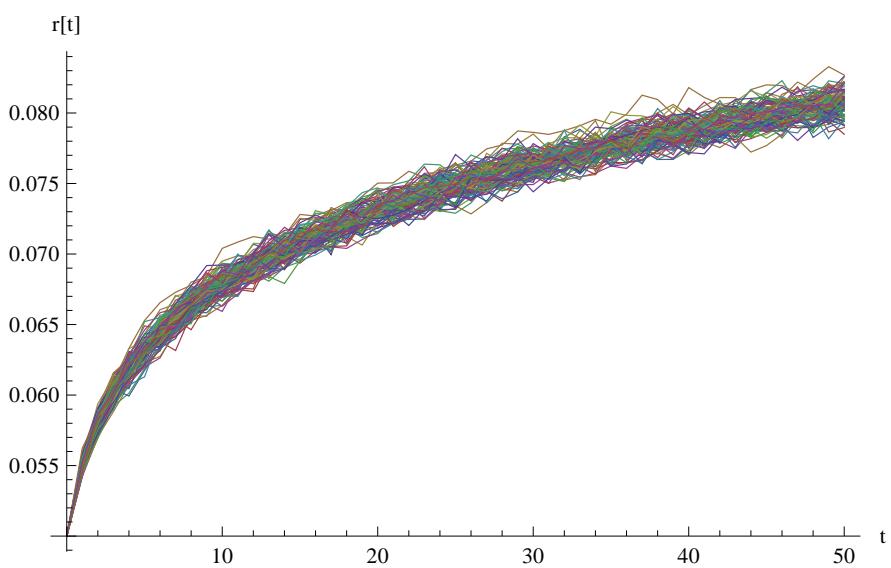
Obrázek 3.28: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze CKLS modelu s parametry druhé varianty dle Milsteinovy diskretizace.



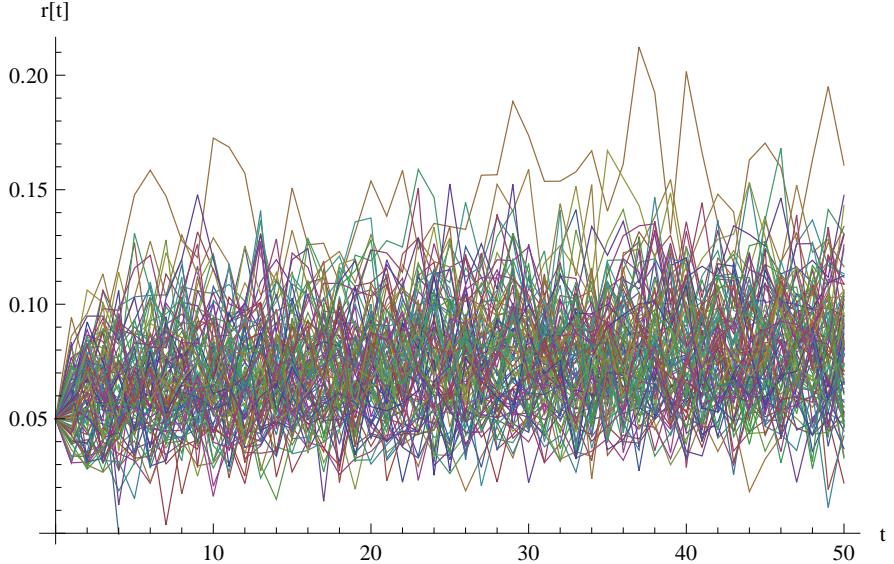
Obrázek 3.29: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Hull-Whiteova modelu (2.44) s parametry první varianty dle Eulerovy diskretizace.



Obrázek 3.30: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Hull-Whiteova modelu (2.44) s parametry druhé varianty dle Eulerovy diskretizace.



Obrázek 3.31: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Hull-Whiteova modelu (2.47) s parametry první varianty dle Eulerovy diskretizace.



Obrázek 3.32: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Hull-Whiteova modelu (2.47) s parametry druhé varianty dle Eulerovy diskretizace.

Na obrázcích (3.31) a (3.33) nelze vypozorovat rozdíl mezi Eulerovou a Milsteinovou diskretizací. Na obou obrázcích je patrný stejný trend a hladina úrokové sazby, na kterou vývoj sazeb míří.

Rozdíl mezi Eulerovou a Milsteinovou diskretizací je nepatrný i na obrázcích (3.32) a (3.34). Pouze rozptyl hodnot na obrázku (3.34) je menší než na obrázku (3.32).

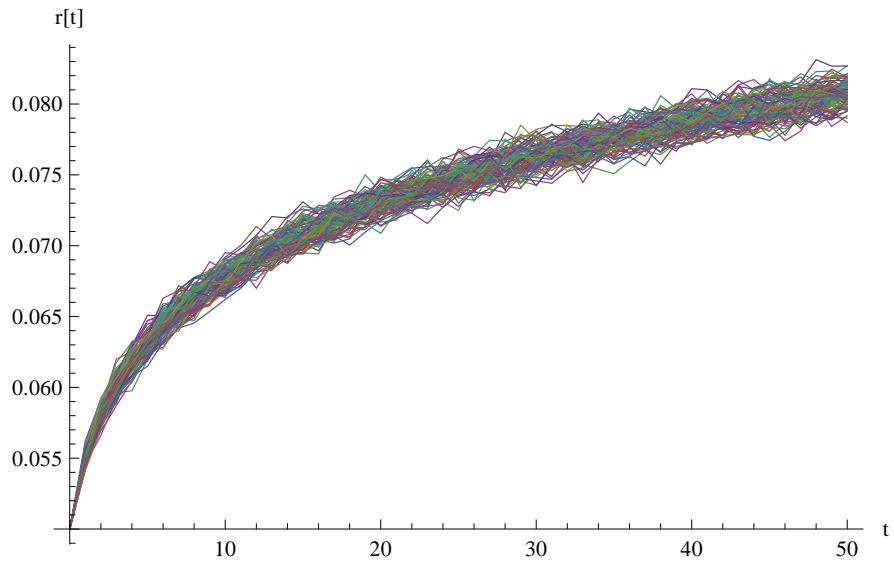
Nasimulované trajektorie úrokových sazob dle modelů (2.47) a (2.48) s parametry první i druhé varianty nabývají pouze kladné hodnoty.

Ve všech verzích Hull-Whiteova modelu se za parametr  $\vartheta(t)$  závislý na čase  $t$  dosazovala hodnota aritmetického průměru ze známých hodnot  $\vartheta(t) = \frac{r(0)+\dots+r(t)}{t+1}$ ,  $t = 0, \dots, 50$ .

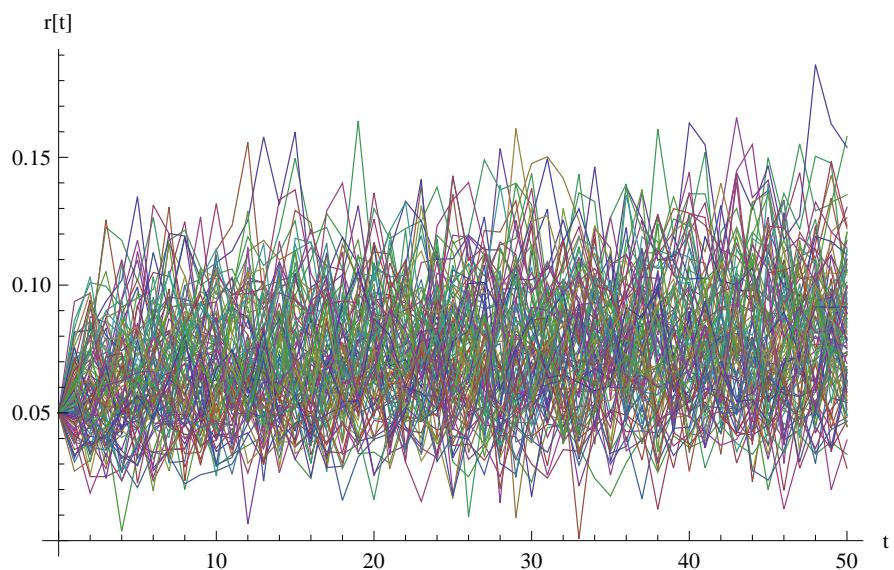
Pohyb úrokových sazob simulujeme pomocí diskrétní verze Ho-Leeova modelu (2.49) na obrázcích (3.35), (3.36) a (3.37). Nasimulujeme tři varianty tohoto modelu pro stejnou hodnotu parametru  $\sigma = \sqrt{0.00004}$ . V první variantě zvolíme  $\theta(0) = r(0)$ ,  $\theta(t) = \frac{r(0)+\dots+r(t)}{t+1} - r(t-1)$ ,  $t = 1, \dots, 50$ . Ve druhé variantě je  $\theta(t) = \frac{\sqrt{r(t)}}{100}$ ,  $t = 0, \dots, 50$  a ve třetí  $\theta(t) = \frac{\sin r(t)}{100}$ ,  $t = 0, \dots, 50$ . Všechny tři varianty vykazují různé, avšak reálné výsledky. Vývoje úrokových sazob z obrázků (3.35) – (3.37) mají trend, kterým se tyto sazby pohybují.

Simulace sta trajektorií o délce 50 diskrétní verze Black-Derman-Toyova modelu (2.51) je vyobrazena na obrázcích (3.38) a (3.39). Parametry pro simulaci z obrázku (3.38) jsou zvoleny  $\theta(t) = 3r(t) - 4r(t-1)$ ,  $t = 1, \dots, 50$ ,  $\theta(0) = 0.004$ ,  $\sigma = 0.09$  a označeny jako první varianta. Parametry označené jako druhá varianta jsou  $\theta(t) = \log(1 + 0.1r(t))$ ,  $t = 0, \dots, 50$  a  $\sigma = 0.029$  a je jich použito pro simulaci z obrázku (3.39).

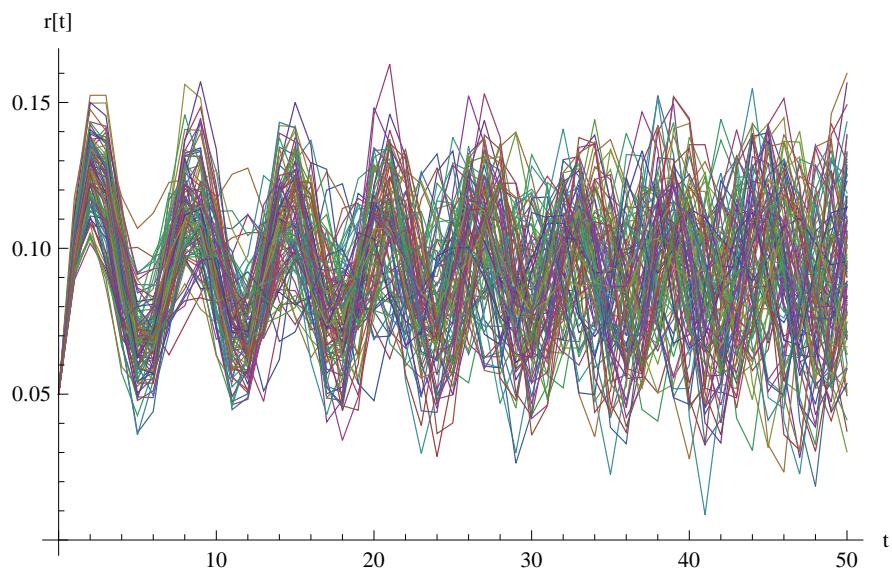
Předností Black-Derman-Toyova modelu je, že úrokové míry nabývají pouze kladných hodnot. Tuto vlastnost lze pozorovat především na obrázku (3.38). Na tomto obrázku a také na obrázku (3.39) se simulované trajektorie vývoje úrokových sazob pohybují určitým trendem, od kterého se ani po padesáti krocích



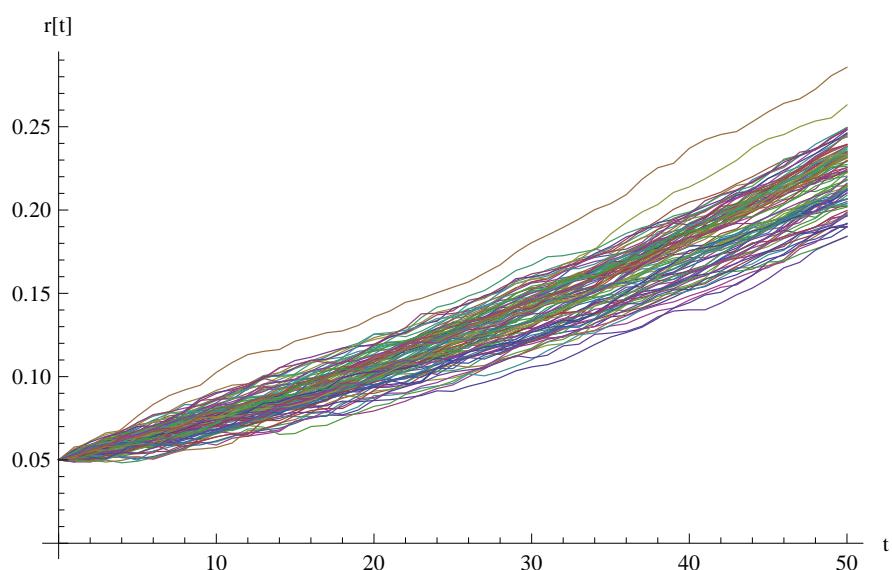
Obrázek 3.33: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Hull-Whiteova modelu (2.48) s parametry první varianty dle Milsteinovy diskretizace.



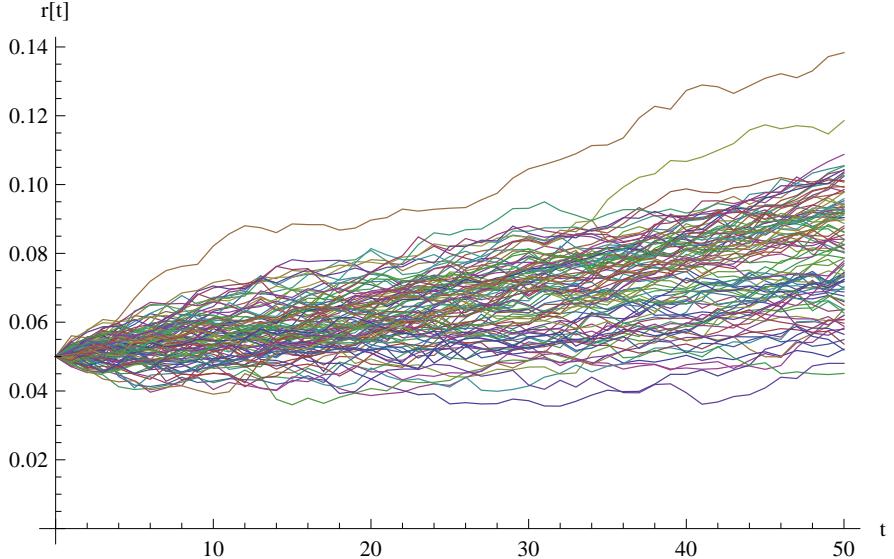
Obrázek 3.34: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Hull-Whiteova modelu (2.48) s parametry druhé varianty dle Milsteinovy diskretizace.



Obrázek 3.35: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Ho-Leeova modelu s parametry první varianty.



Obrázek 3.36: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Ho-Leeova modelu s parametry druhé varianty.



Obrázek 3.37: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Ho-Leeova modelu s parametry 3. varianty.

příliš neodchylují.

Při simulaci vývoje úrokových sazob podle diskrétní verze Black-Karasinského modelu (2.54), je použit parametr závislý na čase ve tvaru  $\theta(t) = \frac{\log r(0) + \dots + \log r(t)}{t+1}$ ,  $t = 0, \dots, 50$ . Ostatní parametry jsou v první variantě  $\phi = 1.1$ ,  $\sigma = 0.0825$  a ve druhé variantě  $\phi = 0.93$ ,  $\sigma = 0.097$ .

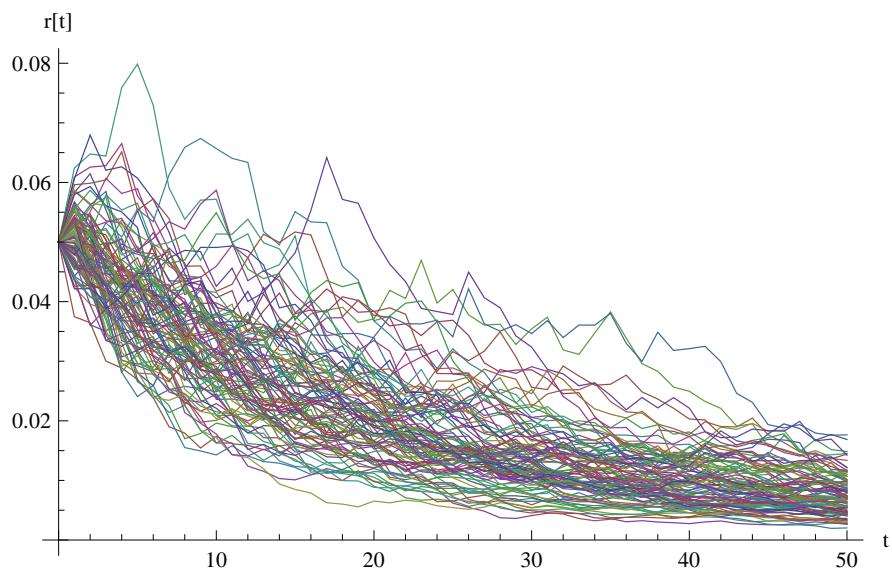
Simulace vývojů úrokových sazob podle Black-Karasinského modelu na obrázcích (3.40) a (3.41) vykazují stabilitu. Na obrázku (3.40) je zvolen parametr  $\sigma$  tak, aby trend, kterým se sazby pohybují, byl rostoucí. Na obrázku (3.41) je tomu přesně naopak. V obou dvou případech je rozpoznatelná hladina dlouhodobého průměru úrokových sazob, na které se sazby ustálily. Vlastnost návratu na střed, kterou Black-Karasinského model má, je tedy zcela zřetelná.

## 3.2 Reálná data

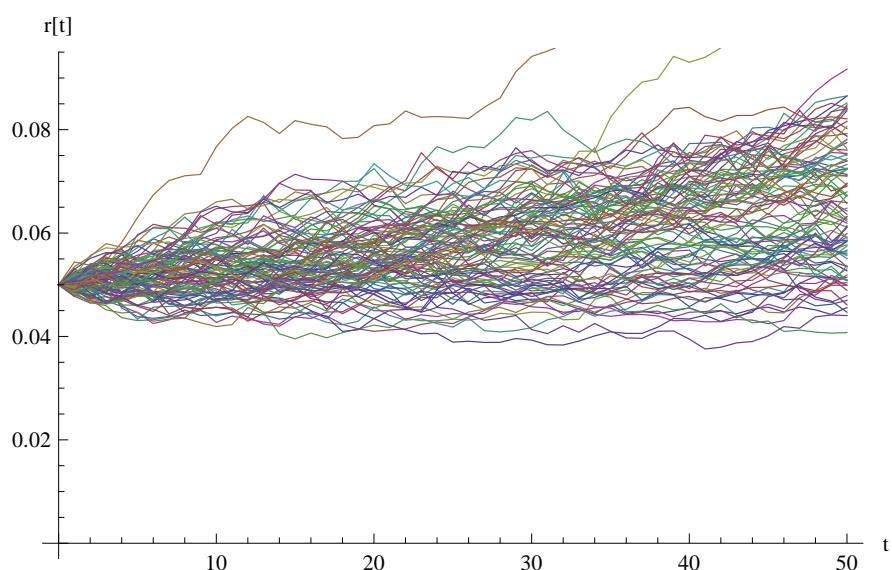
V této kapitole provedeme porovnání několikanásobných simulací vybraných modelů s odhadnutými parametry z reálných dat a jedinečné trajektorie dané právě těmito daty.

Budeme zde volit  $\Delta t = \frac{1}{252}$ , protože, jak je uvedeno v [19], často se vnímá jednotka času jako jeden rok. Jelikož níže používáme denní reálná data a pracovních dnů je v roce přibližně 252, je tato úprava na místě.

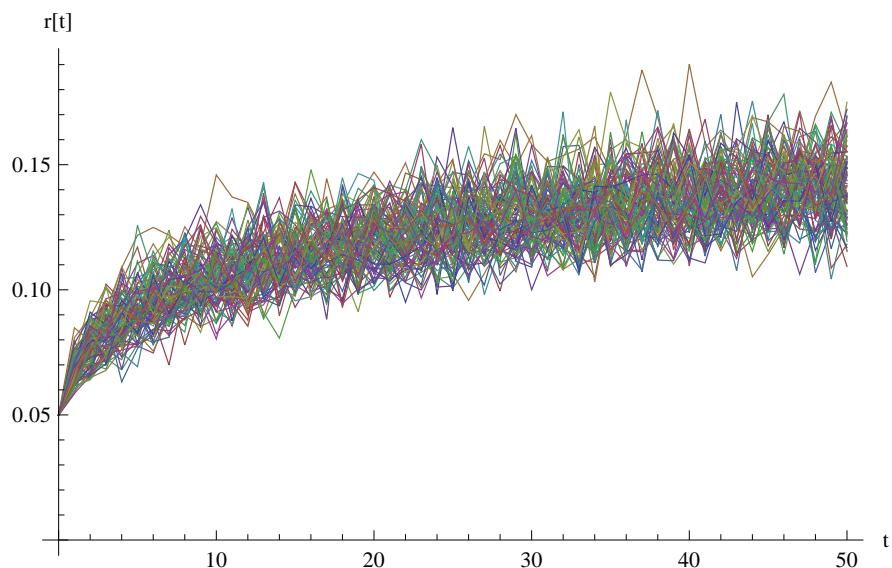
Jako první použijeme diskrétní verzi modelu Vašíčkova (2.10). Reálná data jsme získali ze zdroje [22] ze zprávy H.15, která, jak uvádí [22], obsahuje úrokové sazby vybraných nástrojů amerického ministerstva financí, soukromého peněžního trhu a kapitálového trhu a je vydávána týdně. My použijeme úrokové sazby swapů s dobou splatnosti 1 rok. Tyto sazby jsou roční v podobě desetinného čísla a jsou zaznamenávány denně v obchodovacích dnech vždy v 11:00. Používají se v situacích, kdy si subjekty mezi sebou směňují nejčastěji fixní a variabilní úrokové platby ve shodné měně. Časový interval, který pokrývají je od 3.7.2000 až do 16.7.2012.



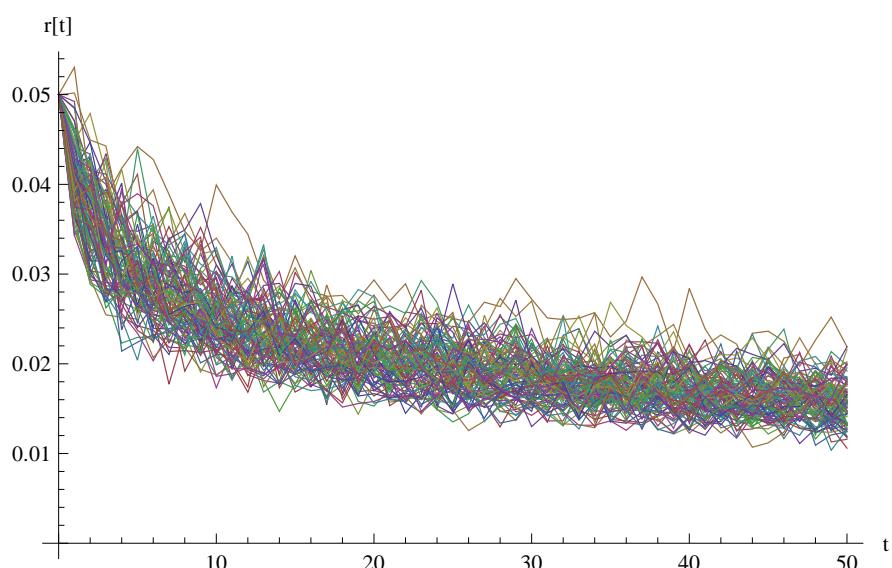
Obrázek 3.38: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Black-Derman-Toyova modelu s parametry první varianty.



Obrázek 3.39: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Black-Derman-Toyova modelu s parametry druhé varianty.



Obrázek 3.40: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Black-Karasinského modelu s parametry první varianty.



Obrázek 3.41: Simulace sta trajektorií délky 50 diskrétní verze Black-Karasinského modelu s parametry druhé varianty.

Jednoletý swap	Veličina	Počet dat	Průměr	Rozptyl
Hodnoty	$r(t)$	3011	0.0268	0.00036
Hodnoty	$r(t+1)-r(t)$	3010	-0.00002	$2.0729 * 10^{-7}$
Jednoletý swap	Směrod. odchylka	Medián	Maximum	Minimum
Hodnoty	0.0191277	0.0239	0.0713	0.0035
Hodnoty	0.00045	0.	0.0032	-0.0041

Tabulka 3.9: Některé statistické charakteristiky úrokových sazob jednoletých swapů. *Zdroj: Vlastní tvorba.*

V tabulce (3.9) uvádíme některé statistické charakteristiky těchto reálných dat.

K odhadu parametrů využijeme znalosti, že diskrétní verze Vašíčkova modelu (2.10) lze napsat ve tvaru lineární regresní rovnice

$$\begin{aligned} r(t + \Delta t) &= r(t) + a(b - r(t))\Delta t + \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} \\ &= \underbrace{ab\Delta t}_{\alpha} + \underbrace{(1 - a\Delta t)}_{\beta} r(t) + \varepsilon_t^*, \end{aligned} \quad (3.1)$$

kde  $\varepsilon_t^* \sim N(0, \sigma^2 \Delta t)$ .

Označme naše reálná data  $r_{t_i}$  pro  $i = 0, \dots, N$ , kde v tomto případě je  $N = 3010$ , a přepišme (3.1) na indexový tvar

$$\begin{aligned} r_{t_{i+1}} &= r_{t_i} + a(b - r_{t_i})\Delta t + \sigma \varepsilon_{t_i} \sqrt{\Delta t} \\ &= \underbrace{ab\Delta t}_{\alpha} + \underbrace{(1 - a\Delta t)}_{\beta} r_{t_i} + \varepsilon_{t_i}^*, \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde  $\varepsilon_{t_i}^* \sim N(0, \sigma^2 \Delta t)$ .

Odtud lze sestavit lineární regresní model  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{E}$ , kde v tomto případě je

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} r_{t_1} \\ r_{t_2} \\ \vdots \\ r_{t_N} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & r_{t_0} \\ 1 & r_{t_1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & r_{t_{N-1}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{t_1}^* \\ \varepsilon_{t_2}^* \\ \vdots \\ \varepsilon_{t_N}^* \end{pmatrix}$$

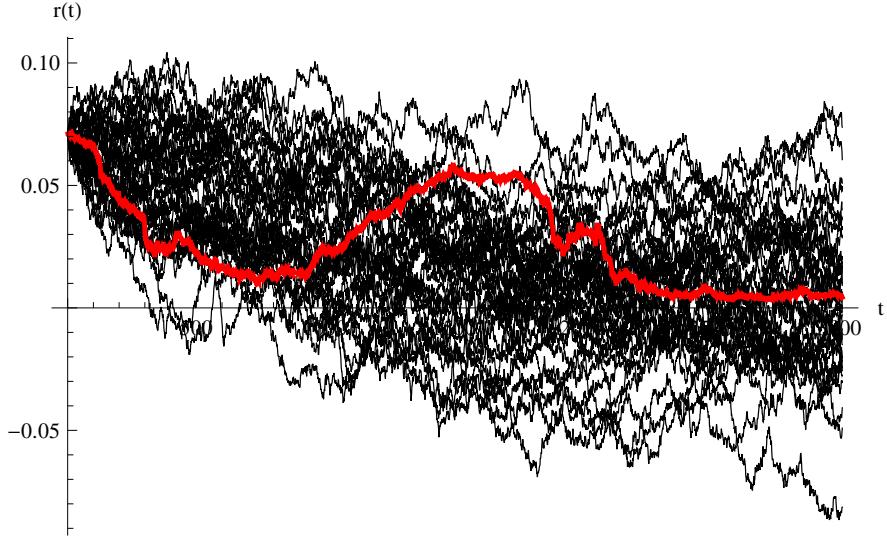
s  $\varepsilon_{t_i}^*$ ,  $i = 1, \dots, N$  nezávislými, stejně rozdelenými náhodnými veličinami, pro které platí  $E[\varepsilon_{t_i}^*] = 0$ ,  $Var[\varepsilon_{t_i}^*] = \sigma^2$ . Odhad parametru  $\mathbf{B}$  se nalezne metodou nejmenších čtverců. Tento odhad vypadá následovně

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}. \quad (3.3)$$

Odhad parametru  $\hat{\sigma}$  se nalezne jako směrodatná odchylka residuů.

Odhady parametrů Vašíčkova modelu jsou  $\hat{\alpha} = 0.236289$ ,  $\hat{\beta} = 0.00322973$  a  $\hat{\sigma} = 0.0193403$ .

Jak lze vidět na obrázku (3.42), na kterém je ilustrováno porovnání jedinečné trajektorie reálných hodnot úrokových sazob jednoletých swapů se čtyřiceti simulacemi vývojů těchto úrokových sazob podle Vašíčkova modelu, není Vašíčkův model v tomto případě vhodný pro simulaci reálného vývoje úrokových sazob.



Obrázek 3.42: Porovnání simulace čtyřiceti trajektorií diskrétní verze Vašíčkova modelu s reálnými daty.

Další model, jehož vývoj simulujeme s parametry odhadnutými z reálných dat stejných jako u Vašíčkova modelu, je Cox-Ingersoll-Rossův model. Jelikož tento model je jedním z mála modelů krátkodobých úrokových sazeb, jehož podmíněnou hustotu přechodu známe v uzavřeném tvaru, použijeme k odhadování jeho parametrů metodu maximální věrohodnosti.

Vycházejme tedy z postupů pro odhad parametrů CIR modelu uvedených v [19] a [20], kde používají právě metodu maximální věrohodnosti ve spojení s hustotou přechodu tohoto modelu, která udává hustotu úrokové sazby  $r_{t_{i+1}}$  v čase  $t_{i+1}$ , jestliže známe hodnotu  $r_{t_i}$  v čase  $t_i$ . V případě CIR modelu má tato hustota, která je také někdy nazývána podmíněná hustota, tvar

$$p(r_{t_{i+1}}|r_{t_i}; \theta, \Delta t) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv}), \quad (3.4)$$

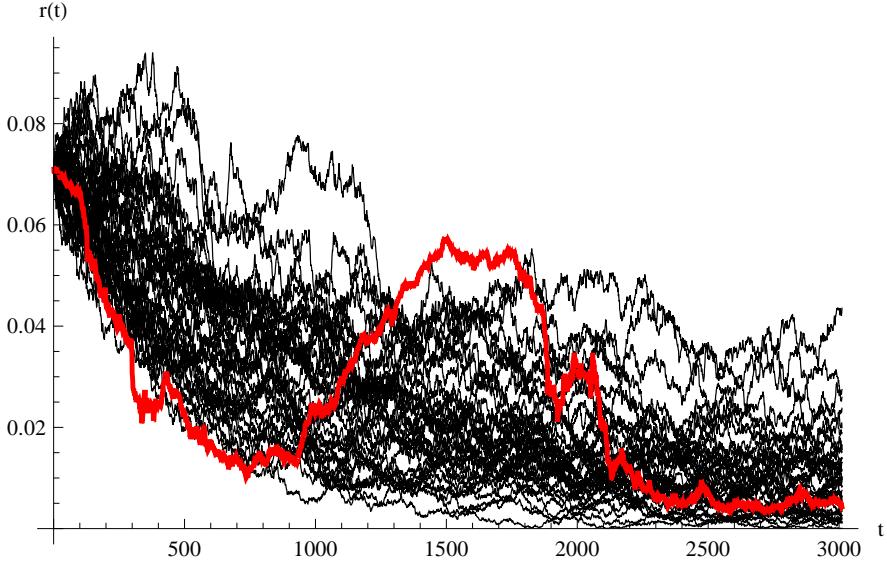
kde

$$\begin{aligned} c &= \frac{2a}{\sigma^2(1 - e^{-a\Delta t})}, \\ u &= cr_{t_i}e^{-a\Delta t}, \\ v &= cr_{t_{i+1}}, \\ q &= \frac{2ab}{\sigma^2} - 1, \end{aligned}$$

kde  $I_q(2\sqrt{uv})$  je modifikovaná Besselova funkce prvního stupně a řádu  $q$  a  $\theta = (a, b, \sigma)$ .

Logaritmická věrohodnostní funkce pro metodu maximální věrohodnosti z postupu dle [19] a [20] má tedy tvar

$$l(\theta) = \sum_{i=0}^{N-1} \ln p(r_{t_{i+1}}|r_{t_i}; \theta, \Delta t) \quad (3.5)$$



Obrázek 3.43: Porovnání jedinečné trajektorie reálných dat se čtyřiceti simulacemi diskrétní verze CIR modelu s parametry odhadnutými dle prvního postupu.

a odtud již najdeme maximálně věrohodný odhad  $\hat{\theta}$  parametru  $\theta$  maximalizováním logaritmické věrohodnostní funkce  $l(\theta)$  následujícím způsobem:

$$\hat{\theta} \equiv (\hat{\alpha}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \arg \max_{\theta} l(\theta). \quad (3.6)$$

Odhady parametrů jsou  $\hat{\alpha} = 0.264666$ ,  $\hat{\mu} = 0.00604528$  a  $\hat{\sigma} = -0.0493562$ . Tyto hodnoty parametrů splňují podmínu pro nenabývání záporných hodnot úrokových sazob, jak lze pozorovat na obrázku (3.43), kde je ilustrováno porovnání jedinečné trajektorie reálných dat se čtyřiceti simulacemi vývoje úrokových sazob dle diskrétní verze CIR modelu (1.11) s námi odhadnutými parametry.

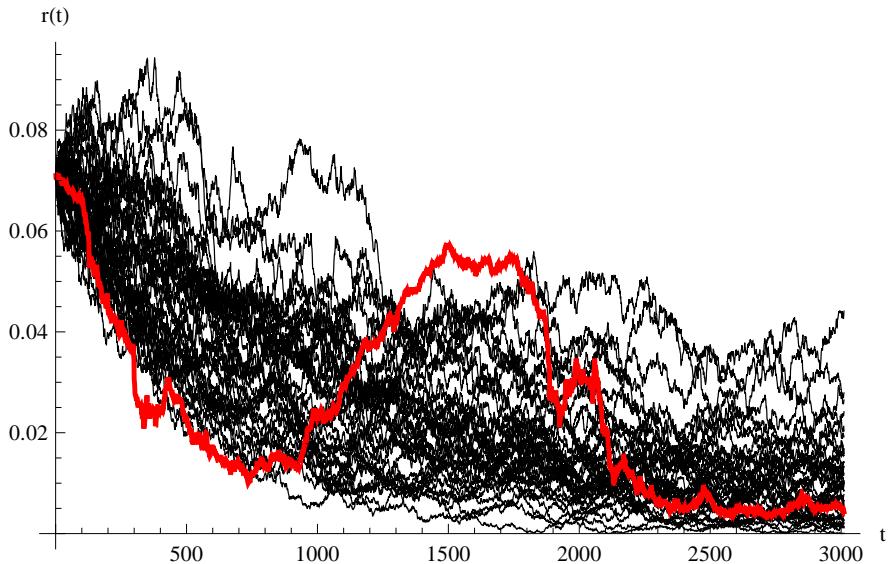
Dle zdroje [21] lze volit pro metodu maximální věrohodnosti logaritmickou věrohodnostní funkci ve tvaru

$$l(\theta) = \sum_{i=0}^{N-1} \ln [\phi(r_{t_{i+1}}; m(r_{t_i}, \Delta t | \theta), v(r_{t_i}; \Delta t | \theta)], \quad (3.7)$$

kde

$$\begin{aligned} \phi(y; m, v) &= \frac{e^{\frac{-(y-m)^2}{2v}}}{\sqrt{2\pi v}}, \\ m(r_{t_i}, \Delta t | \theta) &= r_{t_i} e^{-a\Delta t} + b(1 - e^{-a\Delta t}), \\ v(r_{t_i}, \Delta t | \theta) &= r_{t_i} \frac{\sigma^2}{a} (e^{-a\Delta t} - e^{-2a\Delta t}) + b \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-a\Delta t})^2. \end{aligned}$$

Maximalizováním této logaritmické věrohodnostní funkce dostaneme odhady  $\hat{a} = 0.26706$ ,  $\hat{b} = 0.00594167$  a  $\hat{\sigma} = -0.0493148$ , které se jen velice nepatrně liší od předchozích odhadů. Tyto hodnoty parametrů také splňují podmínu pro nenabývání záporných hodnot úrokových sazob, jak lze pozorovat na obrázku (3.44), kde je ilustrováno porovnání jedinečné trajektorie reálných dat se čtyřiceti simulacemi vývoje úrokových sazob dle diskrétní verze CIR modelu (1.11) s těmito



Obrázek 3.44: Porovnání jedinečné trajektorie reálných dat se čtyřiceti simulacemi diskrétní verze CIR modelu s parametry odhadnutými dle druhého postupu.

odhadnutými parametry. Tyto simulace jsou taktéž téměř totožné se simulacemi na obrázku (3.43).

Jak lze vidět na obrázcích (3.42) a (3.43), resp. (3.44) ani jeden zvolený model není vhodný pro simulaci vývoje reálných úrokových sazob. Cox-Ingersoll-Rossův model se zdá být přesto vhodnější, jelikož zaručuje nabývání pouze kladných úrokových sazob, což Vašíčkův model nezaručuje.

Výše použité odhady parametrů jsme použili z důvodu nejsnadnější implementace, proto, že jsou dostačující pro studované simulace v této práci a také proto, abychom prostudovali více možných způsobů odhadů parametrů.

# Závěr

V této práci byly prostudovány některé typy spojitéch finančních modelů. Byly uvedeny dva modely vývojů cen aktiv (model vývoje cen, model vývoje logaritmických cen), některé jednofaktorové modely krátkodobých sazeb ze skupiny rovnovážných modelů (Mertonův model, Vašíčkův model, Cox-Ingersoll-Rossův model) a několik jednofaktorových modelů krátkodobých sazeb ze skupiny nearbitrážních modelů (Hull-Whiteův model, Ho-Leeův model, Black-Derman-Toyův model). U většiny z nich byly zhodnoceny jejich výhody a nevýhody. Aby bylo možné ilustrovat simulace těchto spojitéch finančních modelů, byly na jejich základě formulovány jejich diskrétní verze za pomoci Eulerova a Milsteinova diskretizačního schematu.

Ve většině vyobrazených simulacích vývoje krátkodobých sazeb dle diskrétních verzí modelů vzniklých pomocí Eulerova schematu a Milsteinova schematu byly vypozorovány pouze nepatrné vizuální rozdíly. Použitím Milsteinova diskretizačního schematu došlo pouze v Dothanově modelu s parametry druhé varianty k nevelkému, ale přeci jen pozorovatelnému, zvýšení rozptylu hodnot oproti použití Eulerova schematu. V ostatních simulacích platilo, že použitím Milsteinova schematu se buď dospělo k menšímu rozptylu anebo rozdíl rozptylu nebyl pozorovatelný.

Co však simulované vývoje úrokových sazeb ovlivnilo mnohem více, byly hodnoty parametrů. Některé zapříčinily nereálný vývoj krátkodobých úrokových sazub, jako například při simulaci diskrétní verze CKLS modelu s parametry první varianty: již po méně než deseti krocích byly zaznamenány velmi vysoké hodnoty. Jiné volby parametrů vedly ke stabilnímu vývoji úrokových sazub, jenž lze pozorovat například při simulaci diskrétní verze Hull-Whiteova modelu (2.48) s parametry první varianty. Obecně se tedy dá říci, že se v našich simulacích nearbitrážní modely zdají být stabilnější a vyznačují zřetelnější trend nežli modely rovnovážné.

Na závěr se provedly odhady parametrů Vašíčkova a Cox-Ingersoll-Rossova modelu z reálných dat, jež byly použity při porovnávání vývoje specifikovaného témoto daty a nasimulovaných trajektorií dle těchto modelů s odhadnutými parametry. Jak lze vidět na těchto příkladech, Vašíčkův model, Cox-Ingersoll-Rossův model a ani žádný jiný zmíněný model není schopen zachytit výkyvy vývoje reálných úrokových sazub či vývojů cen akcií, které jsou způsobené ekonomickým vývojem, krizí, pádem vlády, válkou atp. K tomuto by bylo možné použít myšlenky z článku [2], který by stál společně s parametrickými a především neparametrickými metodami odhadů parametrů za další studium a výhledově by mohl být brán jako jeden z podkladů pro diplomovou práci.

# Seznam použité literatury

- [1] DUPAČOVÁ, J., HURT, J. a ŠTĚPÁN, J.: *Stochastic Modeling in Economics Finance*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 2002. ISBN 1-4020-0840-6.
- [2] ZHOU, N. a MAMON, R.: *An accessible implementation of interest rate models with Markov-switching*. Expert Systems with Applications. 2012, roč. 39, č. 5, s. 4679-4689.
- [3] CHAN, K. C., KAROLYI, G. A., LONGSTAFF, F. A. a SANDERS, A. B.: *An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate*. J. of Finance. 1992, roč. 47, č. 3, s. 1209-1227.
- [4] SORWAR, G., BARONE-ADESI, G. a ALLEGRETTO W.: *Valuation of derivatives based on single-factor interest rate models*. Global Finance J. 2007, roč. 18, č. 2, s. 251–269.
- [5] Ho-Lee model. In: *Wikipedia: the free encyklopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikipedia Foundation, [cit. 2012-07-20]. Dostupné z [http://en.wikipedia.org/wiki/Ho-Lee\\_model](http://en.wikipedia.org/wiki/Ho-Lee_model)
- [6] Black-Derman-Toy model. In: *Wikipedia: the free encyklopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikipedia Foundation, [cit. 2012-07-21]. Dostupné z [http://en.wikipedia.org/wiki/Black-Derman-Toy\\_model](http://en.wikipedia.org/wiki/Black-Derman-Toy_model)
- [7] MERTON, R. C.: *Theory of rational option pricing*. The Bell J. of Economics and Management Science. 1973, roč. 4, č. 1, s. 141-183.
- [8] VAŠÍČEK, O.: *An equilibrium characterization of the term structure*. J. of Financial Economics. 1977, roč. 5, s. 177-188.
- [9] COX, J. C., INGERSOLL, J. E. a ROSS, S. A.: *A theory of the term structure of interest rates*. Econometrica. 1985, roč. 53, č. 2, s. 385-407.
- [10] BRENNAN, M. J. a SCHWARTZ, E. S.: *Analyzing convertible bonds*. J. of Financial and Quantitative Analysis. 1980, roč. 15, č. 4, s. 907-929.
- [11] VAŠÍČEK, O.: *Term structure models*. 47th European Working Group on Financial Modelling. Praha, 2010.
- [12] COX, J. C., INGERSOLL, J. E. a ROSS, S. A.: *An analysis of variable rate loan contracts*. J. of Finance. 1980, roč. 35, č. 2, s. 389-403.
- [13] BLACK, F. a SCHOLES, M.: *The pricing of options and corporate liabilities*. J. of Political Economy. 1973, roč. 81, č. 3, s. 637-654.
- [14] SEYDEL, R.: *Tools for Computational Finance*. Springer, Berlin, 2002. ISBN 3-540-43609-X.
- [15] GLASERRMAN, P.: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, New York, 2004. ISBN 03-870-0451-3.

- [16] BRIGO, D. a MERCURIO, F.: *Interest Rate Models: Theory and Practice*. Springer, Berlin, 2001. ISBN 3-540-41772-9.
- [17] YOLCU, Y.: *One-factor interest rate models: Analytical solutions and approximations*. [online]. Middle East Technical University, 2005 [cit. 2012-07-23]. Dostupné z: <http://www3.iam.metu.edu.tr/iam/images/9/9e/Yelizyolcuthesis.pdf>
- [18] ROUAH, F. D.: *Euler and Milstein Discretization*. [online]. [cit. 2012-07-20]. Dostupné z: <http://www.frouah.com/finance%20notes/Euler%20and%20Milstein-%20Discretization.pdf>
- [19] FAN, J.: *A selective overview of nonparametric methods in financial econometrics*. Statistical Science. 2005, roč. 20, č. 4, s. 317-337.
- [20] KLADÍVKO, K.: *Maximum likelihood estimation of the Cox-Ingersoll-Ross process: The Matlab implementation*. [online]. University of Economics, Praha. [cit. 2012-08-02]. Dostupné z: [http://dsp.vscht.cz/konference\\_matlab/MATLAB07/prispevky/kladivko\\_k-/kladivko\\_k.pdf](http://dsp.vscht.cz/konference_matlab/MATLAB07/prispevky/kladivko_k-/kladivko_k.pdf)
- [21] POULSEN, R.: *Working with the Cox-Ingersoll-Ross model*. [online]. University of Copenhagen, Kodan, 2003. [cit. 2012-08-02]. Dostupné z: <http://www.math.ku.dk/~rolf/teaching/ctff03/cir.pdf>
- [22] Selected Interest rates (Daily) - H.15: Historical Data. *Board of Governors of the Federal Reserve System* [online]. [cit. 2012-07-29]. Dostupné z: <http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.htm#fn1>