Oponentský posudek doktorandské disertační práce Mgr. Michala Krause
„Some results in convexity and in Banach space theory"

Předložená práce sestává z krátkého úvodu a čtyř původních článků, z nichž tři byly publikovány a jeden byl zaslán k publikaci. Jeden z publikovaných článků je napsán se spoluautorem, jímž je Petr Hájek.

První kapitola obsahuje článek, jehož je uchazeč jediným autorem a který byl publikován v časopise *Bull. Sci. Math.* Článek je středně dlouhý (12 stran). Jeho tématem je studium množiny bodů simpliciality pro funkční prostory na nemetrizovatelných kompaktech. Jde o přirozenou otázku, nakolik analogie výsledků Choquetovy teorie pro Choquetovu hranici a maximální míry platí pro množinu bodů simpliciality a míry, pro které existuje jediná větší maximální míra.

Je-li $\mathcal{H}$ funkční prostor na kompaktu K, pak Choquetova hranice je množina bodů v K, pro které existuje jediná reprezentující míra (Diracova). Pak platí známé věty – každý bod K je reprezentován nějakou maximální mírou, maximální míry jsou neseny každou F_σ množinou obsahující Choquetovu hranici, v případě metrizovatelného K je Choquetova hranice typu G_δ a maximální míry jsou neseny Choquetovou hranicí.

V práci se zkoumá množina $\mathrm{Sim}_{\mathcal{H}}(K)$, tvořená těmi body z K, které mají jedinou maximální reprezentující míru. $\mathrm{Sim}_{\mathcal{H}}(K)$ zřejmě obsahuje Choquetovu hranici a rovnost $\mathrm{Sim}_{\mathcal{H}}(K) = K$ platí, právě když $\mathcal{H}$ je simpliciální. Dále se zkoumají pravděpodobnostní míry, pro které existuje jediná větší maximální míra. Říkejme jim třeba kvazimaximální.

M. Bačák dokázal ve svém článku, že pro metrizovatelný K je množina $\mathrm{Sim}_{\mathcal{H}}(K)$ typu G_δ, že pravěpodobnostní míra je kvazimaximální, právě když je nesena $\mathrm{Sim}_{\mathcal{H}}(K)$ a navíc množina $\mathrm{Sim}_{\mathcal{H}}(K)$ je $\mathcal{H}$-extremální.

V posuzované práci se dokazuje, že nic z toho neplatí pro nemetrizovatelný K. Modifikací standardních příkladů ukazujících, že pro nemetrizovatelný kompakt nemusí být Choquetova hranice borelovská, se dokazuje, že $\mathrm{Sim}_{\mathcal{H}}(K)$ se může rovnat neborelovské Choquetově hranici a také, že $\mathrm{Sim}_{\mathcal{H}}(K)$ může být neborelovská, i když Choquetova hranice je borelovská. Další modifikace ukazuje, že kvazimaximální míra může být nesena kompaktní množinou disjunktní s $\mathrm{Sim}_{\mathcal{H}}(K)$ i v případě, že $\mathrm{Sim}_{\mathcal{H}}(K)$ je borelovská. Tyto příklady až tak překvapivé nejsou - víceméně kopírují vlastnosti Choquetovy hranice a maximálních měr pro nemetrizovatelné kompakty.

Kromě toho jsou uvedeny dva příklady, které dokumentují podstatný rozdíl oproti Choquetově hranici a maximálním mírám. I v případě, že $\mathrm{Sim}_{\mathcal{H}}(K)$ je borelovská se totiž může stát, že není $\mathcal{H}$-extremální nebo že kvazimaximální míra je nesená kompaktní množinou disjunktní s **uzávěrem** $\mathrm{Sim}_{\mathcal{H}}(K)$.

Výsledky této kapitoly jsou nepříliš obtížnou modifikací standardních příkladů. Nicméně určitě nejsou triviální. Důkazy jsou elegantní a srozumitelně napsané.

Druhá kapitola obsahuje článek, jehož je uchazeč jediným autorem, publikovaný v časopise *J. Approx. Theory.* Je to velmi krátký článek (4 stránky v časopise, 3 stránky v práci). Obsahuje příklad omezené slabě uzavřené podmnožiny prostoru c_0, která nemá prvek s největší normou, zatímco její uzavřený konvexní obal takový prvek má. To odpovídá na otázku položenou v článku autorů Martín a Rao. Dále je v práci obsažen alternativní důkaz jedné věty ze zmíněného článku.

Kapitola je psaná velmi pěkně a srozumitelně. Výsledky nejsou těžké – příklad je velmi přirozená konstrukce, alternativní důkaz vychází ze standardního využití Jamesovy věty doplněného šikovnou definicí příslušné množiny. Výsledky jsou nicméně cenné, protože vyjasňují situaci.

Třetí kapitola obsahuje článek napsaný společně s Petrem Hájkem publikovaný v *J. Math. Anal. Appl.* Je středně dlouhý (17 stran v práci, 12 stran v časopise). Zabývá se polynomy na Banachových prostorech a souvisejícími identitami, tedy funkcionálními rovnicemi, které charakterizují určitý druh polynomů (zejména polynomy nejvýše daného stupně).

Autoři zvolili abstraktní přístup pomocí vztahu kompatibility mezi jistými lineárními funkcionály a spojitými funkcemi mezi Banachovými prostory. Tím dostali abstraktní výsledky charakterizující identity charakterizující jisté druhy polynomů. Snadným důsledkem pak jsou některé známé věty o charakterizaci polynomů.

Výsledky této kapitoly jsou netriviální, důkazy místy technicky náročné, vyžadující přesnou práci s různými formalismy. Prezentace je nicméně pěkná a srozumitelná.

Autoři zavádějí a využívají vlastní formalismus (formální lineární kombinace prvků $\mathbb{R}^n$ se sčítáním pomocí $\boxplus$). Domnívám se, že lepší by bylo použít již existující formalismus. Konkrétně, prostor $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ je prostor lineárních kombinací evaluačních funkcionálů na prostoru $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, který lze přirozeně ztotožnit s prostorem konečně nesených měr na $\mathbb{R}^n$, tj. lineárních kombinací Diracových měr. Pak není překvapivé, že obecně $\xi\epsilon_z \neq \epsilon_{\xi z}$ (viz strana 26 uprostřed, ϵ_z označuje Diracovu míru nesenou z). Tento prostor měr je možné uvažovat jako podprostor prostoru lineárních funkcionálů na $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, ale také jako podrostor prostoru lineárních operátorů z $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, X)$ do X, kde X je Banachův prostor. Pokud se na to díváme takto, lze některé věci zformulovat snad srozumitelněji. Například:

- $\tilde{L}\mathbf{x}$ je vlastně obraz míry $\mathbf{x}$ při zobrazení L.
- $f : X \to Y$ je kompatibilní s $\mathbf{x} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$, právě když

$$\mathbf{x} \in \{f \circ L : L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, X)\}^\perp \qquad \Big(\subset \mathcal{L}(\mathcal{C}(\mathbb{R}^m, Y), Y) \Big)$$

- Věta 3.4.4 (první část): Nechť $m \geq 2$, nechť míra $\mathbf{x} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ je nesena afinní nadrovinou neobsahující počátek (ekvivalentně - afinní obal jejího nosiče neobsahuje počátek). Pokud $\mathbf{x}(\mathbf{R}^n) = 0$, pak existuje $l \leq n$ takové, že spojitá zobrazení kompatibilní s $\mathbf{x}$ jsou právě polynomy stupně nejvýše l.

Za zdůraznění stojí, že právě uvedená definice kompatibility odpovídá platnosti jisté funkcionální identity (viz Remark 3.2.7). Za klíčové kroky považuji Lemma 3.3.3 (v němž se ukazuje, že míry kompatibilní s homogenním polynomem stupně d nezávisí na tomto polynomu, ale jen na d) a Větu 3.3.8 (která udává postačující podmínku na míru $\mathbf{x}$, aby zobrazení s ní kompatibilní byly jen polynomy).

Čtvrtá kapitola obsahuje článek, jehož jediným autorem je uchazeč, a který byl zaslán k publikaci. Je středně dlouhý (13 stran). Týká se uniformních a hrubých („coarse“) vnoření mezi Orliczovými prostory posloupností. Autor nejprve doplňuje analýzu takových vnoření mezi ℓ_p prostory o tvrzení, že existuje silné uniformní vnoření (tj. vnoření, které je zároveň uniformní i hrubé) ℓ_2 do ℓ_p pro $p \in [1, 2)$. Dále zkoumá existenci vnoření tohoto typu mezi Orliczovými prostory posloupností h_M pomocí indexů Matuszewkské-Orliczových α_M a β_M. Tedy, hlavně pomocí horního indexu β_M. Výsledky, shrnuté na konci článku, jsou tyto:

Nechť M a N jsou Orliczovy funkce.

- Pokud $\beta_M < \beta_N$ nebo $\beta_N \leq \beta_M < 2$ nebo $\beta_M = \beta_N = \infty$, pak existuje silné uniformní vnoření h_M do h_N.
- Pokud $\beta_M > \max\{2, \beta_N\}$, pak neexistuje ani uniformní ani hrubé vnoření h_M do h_N.
- Pokud $\beta_N \leq 2 = \beta_M$, pak existence vnoření není určena hodnotami těchto indexů. Přesněji po každé $p \leq 2$ existují Orliczovy funkce M_i, N_i pro $i = 1, 2$ takové, že $\alpha_{M_i} = \beta_{M_i} = 2$ a $\alpha_{N_i} = \beta_{N_i} = p$ pro $i = 1, 2$, a přitom existuje silně uniformní vnoření h_{M_1} do h_{N_1}, ale neexistuje ani uniformní ani hrubé vnoření h_{M_2} do h_{N_2}. (Lze vzít $h_{M_1} = \ell_2$, $h_{N_1} = h_{N_2} = \ell_p$, funkci M_2 je třeba šikovně definovat.)
- Pokud $2 < \beta_M = \beta_N < \infty$, pak silně uniformní vnoření existovat může (třeba když $M = N$), ale není známo, zda musí.

  Výsledky této kapitoly jsou netriviální, důkazy místy technicky náročné. Prezentace je vcelku dobrá a srozumitelná. Mám jen následující výhrady:

  1. Důkaz Věty 4.3.1:

  (i) „Simple computation“, na které se autor odkazuje na čtvrtém řádku, mi chvíli trvalo. Lze se nicméně odkázat na [BeLi00, Proposition 8.5(ii)].

  (ii) „The rest is clear.“ To píše na konci prvního odstavce. Je to víceméně pravda, ale bylo by lépe to rozvést: Vezměme $\varphi_t = T$. Pak φ_t zobrazuje ℓ_2 do S_H a je splněna rovnost (4.4). Ale je ještě potřeba zaručit separabilitu H. Protože φ_t je spojité díky (4.4), je $\varphi_t(\ell_2)$ separabilní, a tedy H lze nahradit uzavřeným lineárním obalem obrazu ℓ_2.

2. Grafická poznámka: Čísla formulí (4.5) a (4.6) by asi měly označovat celý řetěz nerovností, nejen poslední řádek.

3. Důkaz Tvrzení 4.4.1: Tvrzení „We may clearly suppose that $Ct^q \leq M(t) \leq Dt^q$ for some $D \geq 1$ and for every $t > 1$.“ by stálo za vysvětlení. Je sice pravda, že můžeme Orliczovu funkci změnit na intervalu $(1, +\infty)$, aniž ovlivníme platnost dokazovaného tvrzení, ale i nová funkce musí být spojitá, neklesající a konvexní. Udělat to lze celkem snadno, ale bylo by dobré to naznačit.

Závěr: Všechny články obsažené v disertaci obsahují netriviální nové výsledky. Zároveň jsou psány pečlivě a srozumitelně. První dva články obsahují výsledky spíše jednodušší, ale zbylé dva obsahují technicky náročné pasáže.

Konkrétní výhrady mám jen ke čtvrtému článku (viz výše), nedostatků je málo a jsou snadno odstranitelné. Výše uvedené náměty ke třetímu článku nejsou výtkami, ale spíše pokusem o alternativní pohled na věc.

Pokud má práce jako celek nějaký nedostatek, pak snad jen to, že se jedná o čtyři články bez hlubší vazby na sebe, tedy jde o řešení čtyř izolovaných problémů. To však nesnižuje vědeckou kvalitu práce, navíc poslední dva články obsahují problémy dosti komplexní.

Domnívám se, že autor jednoznačně prokázal, že je schopen samostatné vědecké práce, a předložená práce splňuje všechny požadavky kladené na doktorandskou disertační práci.

V Praze dne 13. srpna 2012

Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc.
KMA MFF UK