Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

Matematika na šachovnici

Jiří Šperl

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
Studijní program: Učitelství pro střední školy (M-TIV)

2012

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Matematika na šachovnici vypracoval pod vedením vedoucího diplomové práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato diplomová práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Datum

....

podpis

Rád bych touto cestou vyjádřil poděkování RNDr. Antonínovi Jančaříkovi Ph.D. za jeho cenné rady a trpělivost při vedení mé diplomové práce.

Velkou zásluhu na výzkumné části práce mají i kolegové Mgr. Milan Coufal z Karlínského gymnázia, RNDr. Ludmila Ortinská a RNDr. Švarcová Dagmar, obě z Gymnázia Christiana Dopplera. Bez jejichž vstřícné pomoci bych nezískal materiály pro srovnání výsledků žákovských řešení vybraných úloh.

....
podpis

NÁZEV:

Matematika na šachovnici

AUTOR:

Jiří Šperl

KATEDRA (ÚSTAV)

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

VEDOUCÍ PRÁCE:

RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

ABSTRAKT:

Diplomová práce se zabývá matematickými úlohami v prostředí šachovnice a šachových figur. Jejím cílem je ověření několika typických úloh z hlediska řešení středoškoláka. Tedy ukázat možnosti zařazení šachových úloh do výuky matematiky. V práci najdeme ucelenou sbírku řešených úloh na šachovnici, která se může stát inspirací pro obohacení matematiky netradičními úlohami v tradičním matematickém prostředí.

Podstatnou část této práce pokrývá vlastní matematický výzkum. Výzkum probíhal formou testování ve třech třídách. Pro větší objektivitu byly vybrány třídy s různým studijním zaměřením. Kromě toho byly tyto třídy v různých věkových kategoriích.

Teoretická část práce nahlíží do historie a všímá se několika zajímavých historických úloh řešených na šachovnici.

V neposlední řadě se práce věnuje rozboru řešení úloh publikovaných v konkrétní učebnici matematiky.

KLÍČOVÁ SLOVA: Kombinatorika, šachovnice, šachové figury, matematika na šachovnici

TITTLE:

Mathematics on the chessboard

AUTHOR:

Jiří Šperl

DEPARTMENT:

The Department of mathematics and the teaching of mathematics

SUPERVISOR:

RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

ABSTRACT:

The main subject of my thesis is mathematical problems on the chessboard using chess pieces. The work aims to demonstrate how a secondary school student would approach and solve several typical mathematical tasks of this nature. Consequently, it outlines ways to incorporate chessboard mathematical problems and exercises in mathematical classes. Moreover, the thesis includes a compact collection of solved problems on the chessboard that can serve as an inspiring source of unconventional mathematical tasks in conventional mathematical education.

My own mathematical research forms a major part of the thesis. The research was conducted as a series of tests in three school classes. In order to achieve a high degree of objectivity classes of students with different specializations were selected to take part in the tests. The participating classes were also of different age groups.

The theoretical part of the thesis takes a look at the past of the subject and presents several interesting historical problems concerning the mathematics on the chessboard.

Last but not least, the thesis contains a discussion of solutions of the problems that were published in one particular textbook of mathematics.

KEYWORDS: Combinatory, chessboard, chess pieces, mathematics on the chessboard

OBSAH

1. ÚVOD

Šachy jsou jak známo, jednou z nejstarších her. Anglický orientalista G. Murray ve své knize „Historie šachové hry“ předpokládá vznik této hry už v V. století našeho letopočtu. Při některých archeologických průzkumech na Blízkém východě se dokonce našly šachové figury, které mají původ už ve II. století našeho letopočtu.

Historický význam šachové hry je úzce spjat už s dějinami starověku. Není proto divu, že s touto hrou jsou spojeny mnohé pověsti a legendy. Jejich pravdivost se však už dá jen těžce dokázat. Uveďme alespoň tu nejznámější; legendu o zakladateli šachové hry.

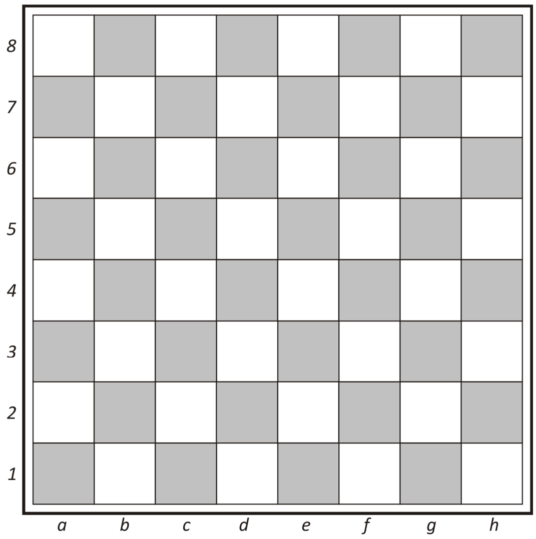
Když se perský šach seznámil poprvé se šachovnicí a šachovými figurami, pozval k sobě mudrce, který tuto hru vymyslel a chtěl ho za tuto geniální myšlenku odměnit. Byl ochoten splnit jakékoli přání. Proto ho udivila mudrcova skromnost, když žádal pouze pšeničná zrna. Na první pole šachovnice 1 zrno, na druhé dvě, atd., na každé následující dvakrát víc zrn, než na pole předešlé. Brzy se však zjistilo, že toto přání nelze splnit. Mudrc si totiž přál „pouze“ $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$ zrn. Toto fantasticky velké číslo se zapisuje pomocí dvaceti cifer. Součet ukazuje, že sýpka pro uložení tak velkého počtu zrn (vysoká 4 a široká 20 metrů) by musela být dlouhá tak, jaká je vzdálenost Slunce od Země. Tento jeden ze známějších historických příkladů dobře ilustruje velké možnosti matematiky, skryté v šachové hře.

Co se týče šachové hry a matematiky, je mezi nimi mnoho společného. Formy přemýšlení matematika a šachisty si jsou dosti blízké, a ne náhodou je matematické nadání často spojeno s možností stát se dobrým šachistou. Šachovnice, šachové figury a konečně i sama hra se často používají pro ilustraci rozličných matematických příkladů a úloh. S šachovými termíny se setkáváme v různých matematických odvětvích, jako je kombinatorika, teorie grafů, teorie čísel, teorie her.

Jednou z dalších možností, kdy se potkávají šachy a matematika je dosti populární druh matematiky, a to: matematické hry a úlohy na šachovnici. Tento žánr je ve vědním oboru matematika znám jako šachová matematika nebo matematika na šachovnici. Řeší se zde úlohy, z nichž mnohé mají zajímavou historii. Přitahovali na sebe pozornost známých matematiků. Například úlohou o tazích jezdce se zabýval Leonard Euler. Nebo úloha o rozestavení osmi dam, které věnoval pozornost německý matematik Karl Friedrich Gauss.

Tato práce se bude zabývat řešenými příklady a úlohami právě toho druhu matematiky, jakým je matematika na šachovnici.

Ještě dříve než začneme zkoumat tyto matematické úlohy, je nutné ujasnit si některá pravidla, kterými se budeme při řešení řídit. Obvyklá šachovnice se 64 poli je všeobecně známa; budeme ji označovat symbolem šachovnice 8 x 8 a používat označení jejích polí *a*1, *a*2, ... , *h*8 (obr. 1).



Obr. 1

Kromě ní však občas použijeme i obdélníkových šachovnic $m \times n$ s m čtverci v řádcích a s n čtverci ve sloupcích.

Pohyb šachových figur se bude ve všech případech řídit obvyklými pravidly. Upozorněme však na odchylky v pojetí šachových a matematických úloh.

Při řešení některých typů matematických úloh se využívá pouze šachovnice bez figur (úlohy na pokrytí, matematické vzorce, apod.). Jiné matematické úlohy, zvláště pak úlohy kombinatorické nekladou omezení v počtu figur téhož druhu (např. dam, věží, králů se rozmísťuje na šachovnici i daleko více, než jich je v soupravě šachové hry). Obvykle se nerozlišuje ani barva figur, zato ohrožení figury má širší význam; každá figura ohrožuje kteroukoliv další na poli, kam může vstoupit.

Samozřejmě, že ve smyslu šachové hry se figury jedné barvy vzájemně neohrožují. Ale v příkladech, kdy mluvíme o dvou navzájem se ohrožujících figurách, budeme uvažovat pouze to, že pole, na kterých tyto figury stojí, mají tu vlastnost, že jsou mezi sebou spojena tahy těchto figur.

Práce je koncipována jako sbírka řešených úloh, které jsou pro toto odvětví matematiky charakteristické. V úvodních kapitolách se seznámíme s příklady řešenými bez využití šachových figur; pouze na šachovnici. V dalších kapitolách jsou pak uvedeny řešené úlohy úzce spjaté s kombinatorickými problémy a do řešení úloh vstupují i šachové figury.

Sbírka je určena nejen učitelům, ale i středoškolským studentům k rozšíření si vědomostí a matematického přehledu v oboru kombinatoriky, důkazových úloh i logického myšlení.

2. POHLED DO HISTORIE MATEMATIKY NA ŠACHOVNICI

2.1. Jezdec - chameleón[1]

Každý, kdo se kdy setkal s šachovou hrou a možnostmi pohybu jednotlivých figur, nemusí být zrovna velkým šachistou, aby nepoznal, která šachová figura je skutečně zvláštní. Ano, mluvíme zde o jezdci.

Už tvar jeho tahu, který má tvar písmene L, ho odlišuje od ostatních figur. Při své cestě, na rozdíl od ostatních šachových figur, může navíc přeskakovat jiné figury. Toto privilegium není žádné další figuře, samozřejmě podle mezinárodních pravidel šachu[2], přiznáno.

Ale tou nejdůležitější vlastností jezdce zůstává to, že při každém svém tahu změní barvu pole, na kterém stojí. Proto se jezdec v literatuře často nazývá jezdec - chameleón. Jeden z nejvýznamnějších šachových velmistrů první poloviny dvacátého století Savielly Tartakower, který byl známý svými vtipnými aforismy o šachové hře, shrnul vlastnosti jezdce do jediné věty: „Každá šachová partie – to je pouze jeden maskovaný tah jezdcem“.

A právě díky využití vlastností jezdce - chameleóna se dají mnohé matematické úlohy o jezdci řešit rychle a efektivně[3].

2.2. Úloha o tahu jezdce

Šachová úloha, která je známá jako úloha o jezdcově cestě či procházce, je jednou z nejznámějších matematických úloh na šachovnici vůbec. Řešení této úlohy tkví v nalezení cesty jezdce při jeho pohybu na šachovnici. Znění úlohy o tahu jezdce může vypadat třeba takto:
„Projděte jezdcem všechny pole šachovnice tak, aby každé pole navštívil právě jednou“.

V literatuře tuto úlohu často nazývají jednoduše jako úlohu o tahu jezdce. Zvláštní popularitu úlohy vysvětluje i to, že se jejím řešením zabývali takoví velcí matematici 18. a 19. století, jako byl např. Adrien-Marie Legendre[4],

[1] ГИК, Е. Я. Математика на шахматной доске. Москва: НАУКА, 1976, str 41.

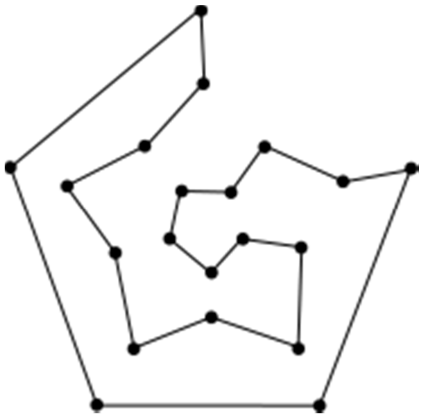
[2] Standardní pravidla šachu jsou definována Mezinárodní šachovou federací FIDE. Aktuální pravidla šachu byla schválena 79. kongresem FIDE v Drážďanech v listopadu 2008 a vstoupila v platnost 1. července 2009.

[3] Kapitola Úlohy o tazích jezdce v této práci; př. 1 a př. 2.

[4] Francouzský matematik (18. 9. 1752 - 10. ledna 1833). Významně přispěl k rozvoji statistiky, teorie čísel, abstraktní algebry a matematické analýzy.

Alexandre-Théophile Vandermonde[5], ale hlavně sám Leonhard Euler[6].
V polovině 18. století se Euler se začal problémem tahů koněm důkladně věnovat a jako první provedl jeho hlubokou analýzu, která vedla k důležitým konceptům v teorii grafů[7]. Zásluhu na tom má i jiný švýcarský matematik L. Bertrand, jehož myšlenkami se Euler nechal inspirovat.

Na šachovnici uvažujeme graf, jehož vrcholy (uzly) tvoří jednotlivá pole šachovnice a dva vrcholy jsou spojeny hranou právě tehdy, když můžeme jezdcem táhnout z jednoho pole na druhé. Nezbývá tedy nic jiného než najít v grafu tzv. hamiltonovskou kružnici obr 2. Tedy takovou kružnici (cestu) v tomto grafu, která projde právě jednou všemi jeho vrcholy.



Obr. 2[8]

Toto řešení vystihuje tu variantu jezdcovy procházky, kdy se jezdec po navštívení všech polí šachovnice vrátí na pole původní. Hovoříme o „uzavřeném" řešení. Je známo, že taková kružnice existuje. Cestu jezdcem po šachovnici podle podmínek úlohy lze provést.

Jiná varianta řešení připouští, že jezdec sice navštíví všechna pole šachovnice, ale na konci své cesty stojí na poli, které již pole, na kterém cesta začala, neohrožuje. Toto řešení se nazývá „otevřené". Z hlediska teorie grafů stačí nalézt tzv. hamiltonovskou cestu. Tato cesta, na rozdíl od hamiltonovské kružnice nemusí začínat i končit ve stejném vrcholu. Podmínka navštívení všech vrcholů cesty je však zachována.

---

[5] Francouzský matematik a chemik (28. 2. 1735 – 1. 1. 1796). Zabýval se především teorií determinantů.

[6] Švýcarský matematik (15. 4. 1707 - 18. 9. 1783). Jeden z nejlepších matematiků historie vůbec. Zakladatel teorie grafů. Autor mnoha objevů na poli infinitezimálního počtu a algebry, ale i mechaniky, optiky a astronomie.

[7] Teorie grafů zkoumá vlastnosti struktur, zvaných grafy. Ty jsou tvořeny vrcholy, které jsou vzájemně spojené hranami.

[8] [cit. 2012-04-30]. Dostupný pod licencí Creative Commons na WWW: http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Hamiltonovakruz.svg

Ačkoli byla úloha o tahu jezdce známa již daleko před Eulerem (první zmínky o jezdcově procházce se objevily již v 9. století u arabských a indických učenců), Euler jako první ukázal souvislosti s matematickými strukturami a zdůraznil její matematický význam. I proto je tato úloha často spojována s jeho jménem. V následující kapitole uvedeme jedno z konkrétních Eulerových řešení jezdcovy procházky.

Jak již bylo řečeno, tahem jezdce se zabývali jak významní matematici, ale i matematici - amatéři. Uveďme alespoň jedno zajímavé řešení jezdcova cestovatelského problému. A to rámečkovou metodu.

Tato metoda pochází od Cosima Alessandra Collini[9]. Zajímal se nejen o historii, fyziku a biologii, ale také o zajímavé matematické problémy. Jedním z nich je právě tah jezdce.

Šachovnici rozdělíme na dvě části, viz obr. 3: vnitřní, obsahující 16 polí a vnější, připomínající tvar rámu (odtud pochází i název této metody), se 48 poli. Do polí vnitřního čtverce zapíšeme velká písmena *A*, *B*, *C*, D tak, že každé z písmen je zapsané čtyřikrát a stejná písmena jsou vždy uspořádána do čtverce nebo do kosočtverce. Ale tak, aby se po jednotlivých polích se stejným písmenem mohl pohybovat jezdec.

Stejná, avšak malá písmena se zapíší do polí, které tvoří rámovou část rozdělené šachovnice. Vždy však tak, aby bylo možno táhnout jezdcem po polích se stejným písmenem a tah jezdce tvořil mnohoúhelník ohraničující vnitřní čtverec.

a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	A	B	C	D	d	c
d	c	C	D	A	B	b	a
a	b	B	A	D	C	c	d
c	d	D	C	B	A	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a

Obr. 3

[9] Sekretář osvíceneckého francouzského filozofa Voltairea.

Jezdec začne svou cestu šachovnicí z jakéhokoli „rámového“ pole. Prochází rámovou částí po vybraném písmenu, například *a*. Když se vyčerpá toto písmeno (nesmí se skončit na úhlovém poli), přejde dalším tahem na vnitřní čtverec. Na pole s jiným písmenem, než bylo vybrané v prvním kroku. Tedy ne na písmeno *A*, ale na libovolné ze zbylých *B*, *C*, *D*. Následně projde všechna pole se zvoleným velkým písmenem. Po průchodu všech těchto polí přeskočí jezdec zpět na rámovou část, na další z malých písmen. Projde dokola celý vnější rám a opět se vrátí do vnitřního čtverce. Atd. až projde všechna pole šachovnice.

2.3. Magický čtverec

Souvislost jezdcovy cesty šachovnicí a problému magického čtverce neukázal nikdo menší než sám Leonhard Euler.

Nejprve snad, co je vlastně onen magický čtverec. První zmínka o úloze s magickým čtvercem je datována kolem roku 2200 př. n. l. a pro její řešení se musíme přesunout až do Číny. Jedná se o čtverec o 3 x 3 polích, ve kterém platí jistá pravidla. Každé pole je očíslováno jedním z čísel 1 - 9. Součet čísel v jednotlivých svislých, vodorovných i příčných směrech, tedy v řadách, sloupcích a hlavních diagonálách je vždy konstantní. V případě magického čtverce 3 x 3 je tato konstanta rovna číslu 15, obr. 4.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Obr. 4

Magický čtverec lze pochopitelně zobecnit. Při délce hrany čtverce n lze každé pole očíslovat jedním z posloupnosti čísel 1, 2, 3, …, n^2.

Nás bude zajímat, jak vyřešit magický čtverec odpovídající šachovnice o rozměru 8 x 8. Euler se pokusil takovýto čtverec sestrojit a navíc jeho řešení spojil s jezdcovou procházkou. Jeho magický čtverec je založen na očíslování tahů šachového jezdce, tedy tahů ve tvaru písmene L. Eulerův magický čtverec má osm řádků a osm sloupců. Každé obsažené číslo v rozmezí 1 až 64 udává pořadí tahu šachového jezdce na základě předchozího čísla.

Když zahájíme cestu jezdce na poli s číslem 1, dokážeme jezdcem projít všechna zbylá pole. Navíc při každém dalším tahu jezdec navštíví pole s číslem, které odpovídá číslu v daném pořadí. Z pole s číslem 1 se přesune na pole s číslem 2, pak na pole s číslem 3, dále na 4, až v posledním tahu na pole s číslem 64. Součet hodnot na polích jednotlivých řad a sloupců je roven 260. Ověříme-li i součet na obou hlavních diagonálách, zjistíme, že v tomto případě je součet jiný než číslo 260, obr. 5.

Tedy nejedná se o magický čtverec v pravém slova smyslu[10]. Přesto je řešení tohoto čtverce zajímavé a z hlediska matematických problémových úloh a hádanek na šachovnici historicky přínosné. Euler zde totiž spojil dvě, v té době složité a zajímavé úlohy, které dokázal vyřešit. Úlohu o jezdcově procházce a problém magického čtverce 8 x 8.

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Obr. 5

2.4. Úloha o osmi dámách

Stejně tak jako úloha o jezdcově cestě i úloha o osmi dámách je jednou ze slavných matematických úloh, které se odehrávají na šachovnici. Jestliže se úlohou o jezdcově procházce úzce zabýval Leonhard Euler a také jí vyřešil, úloha o osmi dámách přitahovala dalšího velkého matematika Carla Friedricha Gausse[11]. Jaké je znění této úlohy a proč je vlastně tolik zajímavá?

Úloha o osmi dámách, která se v literatuře také někdy uvádí jako problém osmi dam, se poprvé objevila v časopise *Schachzeitung* v roce 1848[12]. Zve-

---

[10] V literatuře se o tomto čtverci hovoří jako o polomagickém čtverci.

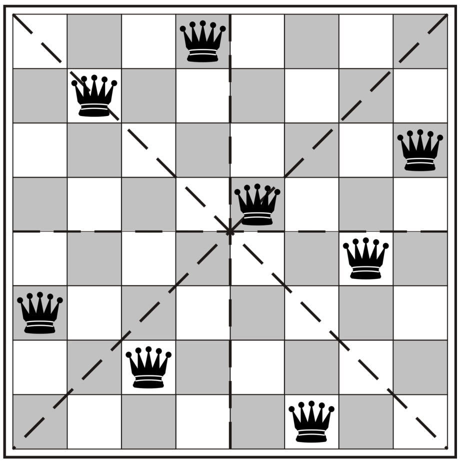
[11] Slavný německý matematik a fyzik (30. 4. 1977 – 23. 2. 1855). Zabýval se mimo jiné, matematickou analýzou, teorií čísel, ale i geometrií, astronomií a geodézií.

[12] http://cs.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A9m_osmi_dam

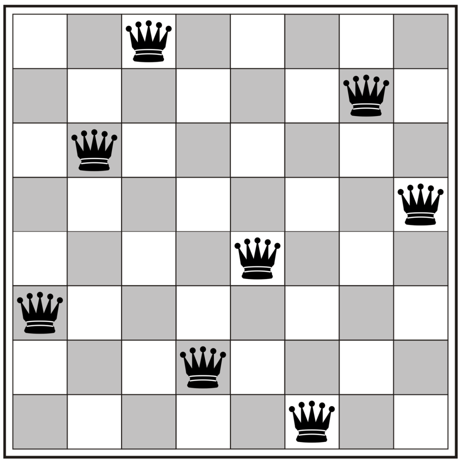
řejnil ho zde německý šachista Max Bezzel. Samotné znění úlohy je velmi prosté. Jde o to, rozmístit na šachovnici 8 x 8 osm dam tak, aby se navzájem neohrožovaly. Najít alespoň jedno takové rozmístění dam, odpovídající zadání úlohy není zas tak složité.

Mnohem složitější je však najít, kolika způsoby lze těchto osm dam na šachovnici rozestavit. Jedná se vlastně o zobecnění původní jednoduché kombinatorické úlohy.

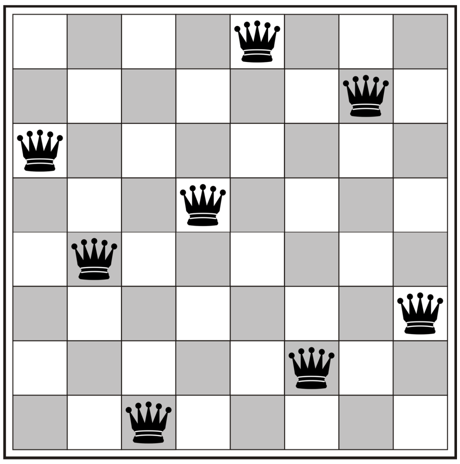
Gausse tato úloha uchvátila natolik, že v roce 1850 posílá svému příteli astronomovi H. Ch. Schumacherovi 72 vlastních řešení tohoto problému. V témže roce stanovil správný počet všech řešení úlohy dr. Franz Nauck. Našel dvanáct základních rozestavení dam. Pomocí symetrií (otočení a osová souměrnost) lze získat 92 různých řešení. Jedenáct rozestavení má osm symetrií, poslední dvanácté je souměrné podle středu šachovnice a má tedy jen čtyři symetrie; viz obr. 6 rozmístění 4.



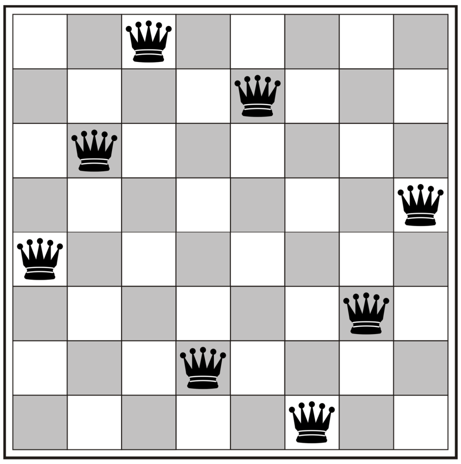
Rozmístění 1



Rozmístění 2



Rozmístění 3



Rozmístění 4

Obr. 6

Vhodným použitím rotace získáme z každého základního řešení úlohy o dámách sérii dalších rozestavení. Vhodným otočením mám na mysli otočení o 90^o, 180^o, 270^o ve směru hodinových ručiček (rotací o 360^o získáme původní rozestavení). Z daného rozestavení získáme také další možnosti zobrazením pomocí osové souměrnosti (zrcadlovým obrazem). Nová řešení získáme v osových souměrnostech podle čárkovaných os z obr. 6. Např. z prvního rozestavení při rotaci o 90^o získáme rozestavení druhé. Při osové souměrnosti prvního rozestavení se svislou osou (hranice mezi sloupcem *d* a *e*) získáme rozestavění třetí. Díky dalším otočení a zrcadlení získáme ještě pět řešení pro rozestavení první z obr 6.

3. PRAVIDLA ŠACHOVÉ HRY Z POHLEDU MATEMATIKY

Cílem této práce není řešit šachové úlohy a zkoumat šachové partie. Myslím si navíc, že šachová hra ani není vážným aspirantem na první pozice v pomyslném žebříčku oblíbenosti různých her dnešních středoškoláků. Jistě se ale najde dost těch, kteří se se šachovnicí a šachovými figurami již někdy setkali.

Pro řešení matematických úloh spojených s šachovnicí, ať už standardní 8×8, či jinou čtvercovou $n \times n$, případně netradiční obdélníkovou $m \times n$, je však nutné žáky se základními pravidly šachů přesto seznámit. Získáme tak jistotu, že při řešení úloh budou žáci zkoumat skutečnou podstatu úlohy z matematického hlediska a nebudou se zdržovat úvahami, jak která šachová figura táhne, případně dokonce jak vypadá. Pokud najdeme ve třídě šachistu, zapojíme ho do seznamování třídy s taji šachové hry a hlavně pak s vlastnostmi jednotlivých šachových figur. Všechny tyto poznatky pak doporučuji mít zapsány v sešitech, případně využít další didaktické techniky. Nabízí se jistě interaktivní tabule, ale vystačíme si i z dataprojektorem připojeným k počítači. Pro usnadnění práce si mohou žáci zhotovit učební pomůcku, kde bude znázorněna šachovnice, tvary šachových figur a jejich základní vlastnosti. Případně lze připravit pracovní list, kde již jednotlivé prvky šachové hry budou znázorněny a žáci si jen doplní další informace. Tento pracovní list pak budou využívat pro další řešení matematických úloh na šachovnici.

Nehodlám touto prací z žáků vychovávat šachisty, ale myslím a můj výzkum to jen potvrdil, že zařazení některých úloh do výuky matematiky podpoří matematické, logické a kombinatorické myšlení žáků.

Samotnou šachovnici tvoří čtvercová deska tvořena šedesáti čtyřmi poli, která se pravidelně barevně střídají. Zažité barevné označení polí je černá a bílá. V mnoha případech se od tohoto standardu z různých důvodů upouští. Častěji pak od černé barvy. Dokonce se dá říci, že pro samotnou hru není tato vlastnost střídání „světlé“ a „tmavé“ nikterak zásadní. Jde zde hlavně o orientaci na šachovnici. Tahy jednotlivých figur po šachovnici se řídí přísnými pravidly. Těžko si tedy představit tahy na jednobarevné šachovnici. Pro řešení některých úloh uvedených v této práci, je toto barevné střídání polí nutností. Úlohy na pokrytí šachovnice to ve svém řešení vyžadují. Minimálně pro správné uchopení postupu řešení.

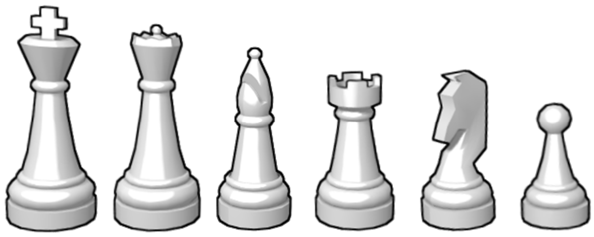
Z geometrického hlediska lze na šachovnici pohlížet jako na čtverec tvořený osmi sloupci a osmi řadami. Pro matematické úlohy na šachovnici jsou důležité také úhlopříčky neboli diagonály[13]. Zatímco ve sloupcích a řadách se barevná pole pravidelně střídají, diagonála je vždy jednobarevná. Dvě nejdelší diagonály nazveme hlavními diagonálami. Každá je zobrazena jinou barvou. Tedy jedna je „černá“ a druhá „bílá“.

V některých kapitolách sbírky úloh v této práci se úlohy řeší pouze s využitím samotné šachovnice. A to nejen šachovnice 8 x 8, ale i další šachovnicové desky s různým počtem polí[14].

Jak již bylo řečeno, nebudu se zabývat šachovou hrou jako takovou. Vlastnosti tahů jednotlivých šachových figur jsou však pro úlohy na šachovnici velice důležité. Zadání a následně i řešení těchto úloh se řídí pravidly těchto tahů. Pojďme si nyní shrnout tato pravidla.

Omezíme se jen na ta pravidla, která nutně potřebujeme k řešení úloh ze sbírky.

K samotné hře je potřeba dvě sady figur – bílé a černé. Každé sada obsahuje: krále, dámu, dva střelce, dva jezdce, dvě věže a osm pěšců, viz obr. 7.



Obr. 7[15]

Pro matematické úlohy nebudeme omezeni počtem ani barvou jednotlivých figur. Většinou využíváme větší počet figur, než obsahuje sada pro šachovou hru. Tento počet je vždy dán řešením úlohy.

Vraťme se teď k tahům jednotlivých figur. Tahem rozumíme přesun figury na další pole šachovnice. Přesun se řídí předem danými pravidly.

[13] Pro pohyb jednotlivých figur na šachovnici jsou tyto řady a diagonály označeny jedním pojmem, a to dráhy. Podle polohy a směru pak dráhy svislé, vodorovné a šikmé.

[14] Kapitoly: Úlohy na pokrytí, Matematické vzorce na šachovnici, Úlohy spojené s řezy, vedené šachovnicí, Důkazy matematických vět metodou šachovnice.

[15] [cit. 2012-04-24]. Dostupný pod licencí Creative Commons na WWW: http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Chess_pieces.png

Král

Král se může pohybovat vždy pouze o jedno pole. Ale zase ve všech směrech. Tzn., že jeho pohyb je možný na libovolné pole sousedící s polem, na kterém král před tahem stojí.

Dáma

Dáma se pohybuje po všech drahách šachovnice. Tedy po sloupcích, řadách i diagonálách. Její pohyb je v rámci šachové partie velmi cenný.

Střelec

Střelec se pohybuje po svislých drahách (diagonálách) šachovnice. Při svém pohybu stojí vždy na poli téže barvy. Po celou dobu šachové partie se tedy může dostat jen na ta pole, která mají stejnou barvu, jakou mělo pole, na kterém stál na začátku.

Jezdec

Jezdcův pohyb po šachovnici je charakterizován písmenem L. Tah jezdce je vlastně skok o dvě pole vodorovně nebo svisle a poté ještě o jedno pole kolmo na původní směr. Pojem skok je velmi výstižný. Jezdec je totiž jedinou figurou, která může při svém pohybu přeskakovat jiné figury stojící mu v cestě. Ale nejen touto vlastností je jezdec výjimečný. V literatuře se často setkáváme s pojmem „jezdec chameleón“ (ГИК, 1976). Toto označení charakterizuje jezdce jako figuru, která při každém svém pohybu změní barvu pole. Tato vlastnost je velice důležitá pro řešení řady úloh, ve které jezdec figuruje.

Věž

Věž se může pohybovat po vodorovných nebo svislých drahách šachovnice. Při svém pohybu se může dostat je na ta pole, která jsou ve stejném sloupci nebo řadě jako pole, na kterém stála před tahem.

Pěšec

Přestože je pěšec z hlediska matematických úloh nezajímavá a v úlohách se v podstatě nevyskytuje, pro získání úplného přehledu základních tahů šachových figur jeho pohyb uvedeme. Může se posunout jen o jedno pole vpřed. Výjimku tvoří základní (startovní) postavení. Tehdy se může posunout o dvě pole vpřed[16].

[16] Popisy tahů šachových figur se řídí ještě dalšími pravidly. Pro matematické úlohy nejsou však důležité.

4. ÚLOHY V UČEBNICÍCH MATEMATIKY PRO GYMNÁZIA

Hlavním cílem této práce je řešení a možnost zařazení matematických úloh, které se řeší na šachovnici a pomocí šachových figur. Jistě tedy bude zajímavé, nejprve se podívat přímo do učebnic matematiky pro střední školy. Mnohá témata jistě nabízí možnosti zařazení i takovýchto typů úloh.

Se šachovnicí se většinou každý již setkal. Ať už při šachové hře, tak třeba u zdánlivě jednodušší hry dáma. Šachovnice by tedy mohla posloužit i jako učební pomůcka. Nebo jako prostředek pro získání jistého vhledu do dané problematiky.

Šachovnici lze jistě vhodně zařadit do úloh, které se týkají výpočtů obvodů a obsahů rovinných útvarů. Jak „pravidelných“, složených z jednotlivých polí šachovnice, tak těch „nepravidelných“, jejichž hranice nekopíruje obvod pole šachovnice, ale může polem procházet.

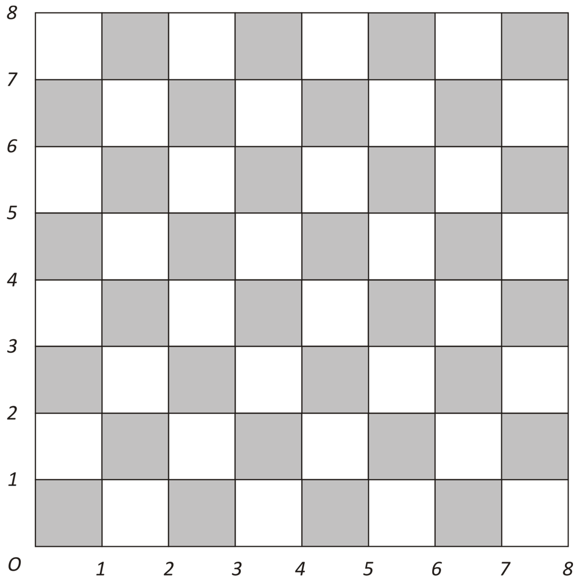
Další možností využití šachovnice v matematice nabízí téma kartézské soustavy souřadnic. A to jak ortonormální, tak i ortogonální[17]. Při vhodně zvoleném středu soustavy souřadnic lze na šachovnici demonstrovat systém souřadnicových os a hledat souřadnice jednotlivých bodů.

Toho se využívá už i při samotné šachové hře, kdy se například jezdec přesune z pole *c4* a na pole *e5*. Tato místa na šachovnici označená podle průsečíku sloupce a řady můžeme označit jako souřadnice pohybu dané figury. V našem případě jezdce.

Při využití šachovnice jako učební pomůcky pro zavedení souřadnicové soustavy bude však výhodnější označovat hranice mezi sloupci a řadami. Tedy ne celé jednotlivé sloupce a řady tak, jak je zvykem při šachové hře či např. při velmi oblíbené dětské hře lodě. Vzhledem k zavedení ortogonálního souřadnicového systému do matematiky tyto hranice již neoznačujeme písmenem a číslem, ale písmeno nahradíme taktéž číslem. Zvolíme-li např. počátek soustavy souřadnic v levém dolním rohu šachovnice. Levá a dolní hranice šachovnice se stanou souřadnicovými osami a získáme systém 8 x 8 viz obr. 8. Zde pouze pro kladná celá čísla 1 – 8. Systém 8 x 8 získáme na

[17] Ortogonální soustava souřadnic představuje systém souřadnic, pro které jsou v každém bodě souřadnicové osy na sebe kolmé. Ortonormální soustava má pak navíc na svých souřadnicových osách jednotky stejné délky.

standardní šachovnici vždy. Záleží vždy na umístění počátku soustavy souřadnic. Umístění počátku tak získáme polohy souřadnicových os. Tedy os s hodnotou nula.



Obr. 8

Toto využití šachovnice bych zařadil do výuky matematiky spíše na základní školu, kde se žáci poprvé setkávají s kartézskou soustavou souřadnic.

Pro zjišťování, která témata, a které typy úloh na šachovnici najdeme v učebnicích matematiky pro střední školy, jsem si vybral známý soubor učebnic pro gymnázia, vydaných nakladatelstvím Prométheus. Jedná se o učebnice, které sám několik let využívám při výuku matematiky na Karlínském gymnáziu. Nejsou tedy pro mě neznámé. Je pravdou, že mě přesto překvapilo, že i tyto učebnice obsahují několik zajímavých úloh, využívající šachovnici a šachové figurky. Na druhou stranu se tyto typy příkladů dostaly pouze do jedné učebnice a to do učebnice Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. A i zde je najdeme převážně v první části, která se týká právě kombinatoriky. Tedy základních kombinatorických pravidel, variací, permutací, kombinací a také jejich variant s opakováním. Jednu úlohu jsem našel i v tématu pravděpodobnost.

Pokud tedy shrnu výskyt matematických úloh na šachovnici v již zmiňovaném souboru učebnic, úlohy s touto tématikou najdeme pouze v jedné z nich. A tou je Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika[18].

[18] CALDA, E., V. DUPAČ *Matematika pro gymnázia*: *kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2006.

V další části této kapitoly uvádím přehled všech úloh na šachovnici, které lze najít v uvedené učebnici. Včetně přesného zadání a mého vlastního řešení těchto úloh.

Úlohy jsou uspořádány podle kapitol, pod kterými se v učebnici nachází. Číslo úlohy odpovídá číslu úlohy v učebnici. Zadání úlohy je doplněno o stránku, na které se daná úloha nachází. U jednotlivých úloh jsou uvedeny základní teoretické znalosti, které je nutné osvojit si pro úspěšné řešení úloh.

4.1. Základní kombinatorická pravidla

Ve většině kombinatorických úloh si vystačíme se dvěma jednoduchými pravidly. Jsou to pravidla, které lze běžně použít bez toho, že bychom měli další kombinatorické znalosti. V mnohých případech reálného života tato pravidla používáme, aniž bychom si uvědomili, že již vlastně kombinatorické úlohy řešíme.

Prvním pravidlem je kombinatorické pravidlo součinu:

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd., až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Druhým je kombinatorické pravidlo součtu:

Jsou-li $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1,\ p_2, \ldots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Úloha 1 *Určete kolika způsoby, lze na šachovnici 8 x 8 vybrat dvě různobarevná políčka tak, aby obě neležela v téže řadě ani v témže sloupci.*
(Calda, 2006, s. 11)

Řešení: Úlohu řešíme rychle a úspěšně pomocí kombinatorického pravidla součinu. Na šachovnici 8 x 8 je právě 32 bílých a 32 černých polí. Pro výběr pole jedné barvy máme tedy 32 možností. Protože pole druhé barvy nesmí ležet ve stejném sloupci ani ve stejné řadě, můžeme ho vybrat už jen 24 způsoby. Celkem tedy získáme $32 \cdot 24 = 768$ způsobů výběru polí dle zadání.

Úlohu můžeme řešit i pomocí kombinatorického pravidla součtu.
Vycházíme z toho, že dvě pole různé barvy můžeme vybrat $32 \cdot 32 = 1024$

způsoby. Tento výběr polí je rozdělen do dvou disjunktních skupin tak, že v první jsou dvojice polí různé barvy, která leží ve stejné řadě nebo ve stejném sloupci a ve druhé dvojice polí, které tuto vlastnost nesplňují. Počet způsobů výběru polí pro první skupinu je $32 \cdot 8 = 256$. Označíme-li p počet způsobů výběru polí, které neleží v témže sloupci ani v téže řadě, platí:

$$p + 256 = 1024$$

Odtud dostáváme, že $p = 768$.

4.2. Kombinace

Na rozdíl od variací, kde hledáme k-tice uspořádané, nám u kombinací půjde hlavně o skupiny, ve kterých na pořadí prvků nezáleží. Budeme i nadále uvažovat, aby se v těchto skupinách vyskytoval nejvýše jeden z n prvků.

k-členná kombinace z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavná z těchto prvků tak, že každý se v nich vyskytuje nejvýše jednou.

Při řešení jednoduchých příkladů, při kterých vybíráme neuspořádané k-tice z n prvků zjistíme, že pojem k-členná kombinace z n-prvků má stejný význam jako termín k-prvková podmnožina n-prvkové podmnožiny.

Počet k-členných kombinací z n-prvků se vyjadřuje pomocí kombinačního čísla a platí:

Pro všechna celá nezáporná čísla $n, k, k \leq n$, je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ tak určuje počet k-členných podmnožin z n-prvkové množiny.

Příklad 1[19] *Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8 x 8 vybrat*

a) trojici políček,

b) trojici políček neležících v jednom sloupci,

c) trojici políček neležících v témže sloupci ani v téže řadě

d) trojici políček, která nejsou všechna téže barvy. (CALDA, 2006, s. 28)

Úloha 2 *Na černá políčka šachovnice 8 x 8 máme rozmístit 12 bílých a 12 černých pěšců. Určete, kolika způsoby to lze provést. Úloha je označena jako obtížnější*.* (CALDA, 2006, s. 32)

Řešení: Na šachovnici je právě 32 černých polí. Pro určení počtu rozmístění pěšců ze zadání úlohy nejprve rozmístíme 12 bílých pěšců a na zbylá černá pole pak rozmístíme 12 černých pěšců.

Pro umístění 12 bílých pěšců máme $\binom{32}{12}$ možností rozmístění. Vytváříme tedy dvanácti-prvkové kombinace z 32 prvků. Po každém z těchto rozmístění zůstane vždy 20 volných černých polí. Na tato pole rozmístíme zbylých 12 černých pěšců. To lze udělat $\binom{20}{12}$ způsoby.

Využitím kombinatorického pravidla součinu získáme celkový počet všech možných rozestavění pěšců. Tedy

$$\binom{32}{12} \cdot \binom{20}{12}$$

4.3. Úlohy k opakování – Variace, permutace a kombinace

Úloha 3 *Určete kolika způsoby, lze na šachovnici 8 x 8 postavit pět různých figur tak, aby dvě stály na černých polích a tři na bílých polích.* (CALDA, 2006, s. 33).

Řešení: Nejprve vybereme dvě černá a tři bílá pole, na která rozmístíme pět různých šachových figur. Dvě bílá pole lze na šachovnici vybrat $\binom{32}{2}$ způsoby. Podobně lze vybrat tři pole černá. Tedy $\binom{32}{3}$ způsobů výběru.

Celkem lze tuto pětici polí vybrat

$\binom{32}{2} \cdot \binom{32}{3}$ způsoby.

[19] Příklad je řešený v učebnici, s. 28.

Na takto vybraná pole rozmístíme pět figur. Jde o permutace z pěti prvků, takže všech možných pořadí těchto figur je $5! = 120$.

Počet rozestavení figur ze zadání je dáno číslem:

$$\binom{32}{2} \cdot \binom{32}{3} \cdot 5!.$$

4.4. Permutace s opakováním

Permutace z n prvků je pořadí, v jakém se dají prvky seřadit. Každá permutace tedy odpovídá nějakému pořadí zadaných prvků. Počet permutací n prvků, ve kterých se vyskytuje každý z těchto prvků, avšak nejvýše jednou, je určen číslem $n!$.

Pokud se v pořadí mohou prvky opakovat, hovoříme o permutacích s opakováním.

Počet permutací s opakováním z n prvků, ve kterých se jednotlivé prvky opakují $k_1, k_2, \dots, k_n$-krát je dán zlomkem:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

Úloha 4 *Určete počet způsobů, jimiž lze umístit všechny bílé šachové figurky (král, dáma, 2 věže, 2 jezdci, 2 střelci, 8 pěšáků)*
a) na dvě pevně zvolené řady šachovnice 8 x 8,
b) na libovolné dvě řady šachovnice 8 x 8. (CALDA, 2004, s. 45)

Řešení: Zadání a) řešíme pomocí vztahu pro výpočet permutací s opakování. Výskyt a tedy i opakování jednotlivých figur v pořadí permutace je dán jejich počtem. Tedy:

$$\frac{16!}{1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 8!}.$$

V řešení b) využijeme výsledek z a). Pouze je třeba řešení doplnit o výběr dvou libovolných řad. Ty vybereme $\binom{8}{2}$ způsoby. Tedy z osmi řad šachovnice vybíráme dvě libovolné řady; tedy sestavujeme dvou-prvkové kombinace z osmi.

$$\frac{16!}{1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 8!} \cdot \binom{8}{2}$$

4.5. Kombinace s opakováním

Kombinace s opakováním jsou skupiny, při nichž nezáleží na pořadí prvků a jednotlivé prvky se v nich mohou opakovat. Typickým příkladem z reálného života je zaplacení určitého obnosu. Kolik částek můžeme např. zaplatit třemi mincemi, pokud máme k dispozici korunové, dvoukorunové a pětikorunové mince, každý druh alespoň v pěti exemplářích?

k-členná kombinace s opakováním z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k-krát.

Počet všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků je dán kombinačním číslem:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Lze tedy také říci, že počet všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků je roven počtu všech k-členných kombinací (bez opakování) z $n+k-1$ prvků.

Úloha 1.67 *Ze všech bílých šachových figurek bez krále a dámy (tj. z osmi pěšců, dvou věží, dvou jezdců a dvou střelců) vybereme*

a) trojici,

b) dvojici.

Jaký je počet možností pro jejich složení? (CALDA, 2006, str. 51)

Řešení: Sečteme-li všechny druhy figur ze zadání, dostaneme hodnotu 4. Tedy budeme hledat tříčlenné resp. dvoučlenné kombinace s opakováním ze 4 prvků.

V řešení a) nelze vybrat trojice ze dvou věží, ze dvou jezdců, ani ze dvou střelců. Protože však všechny ostatní výběry uskutečnit lze, je počet způsobů výběru roven číslu:

$$\binom{4+3-1}{3}-3=\binom{6}{3}-3=20-3=17$$

V řešení b) nejsme ničím limitováni. Lze utvořit všechny možné dvojice ze čtyř druhů figur, neboť figur od každého druhu je dostatečný počet, tj. dvě. Počet způsobů výběru je tedy:

$$\binom{4+2-1}{2}=\binom{5}{2}=10$$

4.6. Úlohy k opakování – variace, permutace a kombinace s opakováním

Úloha 1.79 *Určete, kolika způsoby lze všechny figurky šachové hry (tj. od každé barvy jednoho krále, jednu dámu, dvě věže, dva jezdce, dva střelce a 8 pěšců) rozmístit na 64 políček šachovnice.*
[Návod: myslete si, že na 64 polích rozmisťujete kromě 32 figurek ještě 32 stejných předmětů, třeba mincí.] (CALDA, 2006, s. 54)

Řešení: Díky návodu, uvedeném v zadání úlohy není zas tak obtížné tuto úlohu vyřešit. Protože jde o rozmisťování všech šachových figur (je jich 32), ke kterým ještě rozmisťujeme 32 dalších, ale stejných předmětů, úlohu řešíme jako permutace s opakováním z 64 prvků.
Po dosazení do vztahu pro výpočet permutací s opakováním získáme

$$\frac{64!}{32! \cdot (8!)^2 \cdot (2!)^6}$$

Úloha 1.80 *Určete kolika způsoby lze na černá políčka šachovnice 8 x 8 rozmístit 12 bílých (nerozlišitelných) a 12 černých (také nerozlišitelných) černých kostek tak, aby toto rozmístění bylo symetrické podle středu šachovnice.*
[Návod: Na černá políčka zvolené poloviny šachovnice rozmístíme 6 bílých a 6 černých kostek a další 4 nerozlišitelné předměty, čímž je postavení zbývajících černých a bílých kostek určeno.] (CALDA, 2006, s. 54)

Řešení: Využijeme návodu k této úloze a také řešení úlohy předchozí. Kostky a čtyři další stejné předměty (třeba mince) rozmístíme na polovinu šachovnice. Ale pouze na černá pole, viz zadání. Pro řešení úlohy stačí tedy najít počet rozmístění těchto 16 předmětů (6 kostek bílých, 6 kostek černých, 4 stejné mince) na 16 černých polí vybrané poloviny šachovnice. Tímto rozmístěním je dáno i rozestavení zbylých 6 bílých a 6 černých kostek.
Počet rozestavení určíme ze zlomku

$$\frac{16!}{6! \cdot 6! \cdot 4!}$$

4.7. Úlohy k opakování – Vlastnosti kombinačních čísel

Úloha 1.117 *Určete, kolika způsoby lze na šachovnici n x n rozmístit*
a) n věží tak, aby se žádné dvě navzájem neohrožovaly;
b) k věží tak, aby se žádné dvě navzájem neohrožovaly.
(Dvě věže se navzájem ohrožují, jsou-li obě v téže řadě nebo v témže sloupci.) Oba příklady řešte jednak pro případ, kdy věže jsou navzájem nerozlišitelné, jednak pro případ, kdy jsou navzájem rozlišitelné (např. barvou nebo očíslováním).
[Návod: a) pro nerozlišitelné věže – umisťujeme postupně jednotlivé věže na řady šachovnice, použijte kombinatorické pravidlo součinu; pro rozlišitelné věže – kolik postavení navzájem rozlišitelných věží vznikne z postavení věží nerozlišitelných? b) pro nerozlišitelné věže – vybereme k řad a k sloupců, čímž vznikne šachovnice k x k, na níž se má rozmístit k věží; pro rozlišitelné věže – viz a).] (CALDA, 2006, s. 79)

Řešení: Podrobné řešení této úlohy najdeme v kapitole 12 této diplomové práce; Př. 12.1 a 12.2.

4.8. Pravděpodobnosti jevů

V kapitole Pravděpodobnost najdeme jediný příklad v němž se při řešení účastní prvky šachové hry. Pro jeho řešení si vystačíme se znalostmi kombinatorických pravidel a základní definicí pravděpodobnosti nezávislého jevu.
Ta je dána vztahem:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m}$$

Kde $P(A)$ je pravděpodobnost jevu A, $m(A)$ je počet výsledků příznivých jevu A a m je počet všech možných výsledků.

Tuto definici můžeme také vyjádřit takto:
V pokusu, jehož všechny možné výsledky jsou stejně pravděpodobné, je pravděpodobnost jevu rovna podílu

$$\frac{počet\ příznivých\ výsledků}{počet\ všech\ možných\ výsledků}$$

Úloha 2.19 *Na šachovnici postavíme náhodně dvě věže, bílou a černou. Jaká je pravděpodobnost, že se mohou navzájem brát?* (CALDA, 2006, s. 97)

Řešení: Při řešení této úlohy vyjdeme ze základní definice pravděpodobnosti jevu. Tedy najdeme počet všech příznivých výsledků danému jevu a počet všech možných výsledků.

Uvažujeme šachovnici 8 x 8. Pro všechna rozmístění černé a bílé věže využijeme kombinatorické pravidlo součinu. Černou věž můžeme na šachovnici umístit na libovolné z 64 polí šachovnice. Bílou věž pak na 63 polí. Celkem získáme $64 \cdot 63$ různých rozestavení vzájemně se neohrožující černé a bílé věže.

Dvě věže se vzájemně ohrožují (mohou se navzájem brát) pokud obě stojí v jedné řadě nebo v jednom sloupci šachovnice. Pro umístění první věže máme opět 64 možností. Umístěním první věže získáme řadu a sloupec, kam můžeme umístit druhou věž tak, že se obě vzájemně ohrožují. Pro výběr tohoto pole máme 14 možností. 7 polí v řadě a 7 polí ve sloupci. Pole, na kterém je umístěna první věž samozřejmě použít nelze. Tedy pro rozmístění černé a bílé navzájem se ohrožující věže dostaneme $64 \cdot 14$ možností.

Pravděpodobnost, že se v následujícím tahu budou věže brát, vypočítáme ze známého vztahu

$$\frac{64 \cdot 14}{64 \cdot 63} = \frac{14}{63} = \frac{2}{9},$$

což je přibližně 0,22.

4.9. Shrnutí

Kombinatorické úlohy, které jsem v již zmíněné učebnici matematiky našel a vzorově vyřešil, jsou zajímavé a nepatří rozhodně k těm složitým. Pro řešení si žáci vystačí se základním kombinatorickým aparátem. Řešení většinou vychází z využití kombinatorického pravidla součinu. Pro řešení dalších úloh stačí uvědomit si, do jaké kategorie řešení patří. Zda se jedná o variace, permutace nebo kombinace, či snad o jejich varianty s opakováním. Je pravdou, že většina řešení těchto úloh se neobejde bez požadovaného vztahu pro určování těchto jednotlivých $\boldsymbol{k}$-tic. Ale bez jakéhokoli pochopení smyslu kombinatorických úloh nejsme schopni tyto „vzorce“ úspěšně aplikovat. Při řešení by tedy nemělo jít jen o to, použít na zadání odpovídající vzorec.

Jedna úloha se však jak svým obsahem, tak i řešením vymyká ze standardu všech mnou vyhledaných učebnicových úloh. Jedná se o úlohu 1.117. Je komplikovaná nejen svým zadáním, ale také svou obecností. Z vlastní zkušenosti vím, že žáci podvědomě odmítají zadání úloh, která nejsou vyjádřena číselně. Je to škoda. Obecné úlohy dávají větší prostor pro různé možnosti a výsledky řešení.

5. PŘÍPRAVA A REALIZACE VÝZKUMU

Ověření učebních úloh jako námětů pro rozšíření výuky matematiky, matematických seminářů a matematických cvičení se zaměřením na kombinatorické myšlení byl jedním z hlavních cílů mé DP. Pevně věřím, že by tyto úlohy mohly v neposlední řadě pomoci při motivaci ve výuce stále méně oblíbené matematiky na gymnáziích.

Dalším z cílů ověřování úloh, které jsem vybral do výzkumu, bylo zjistit, zda jsou žáci schopni zorientovat se v dané problematice. Najít souvislosti mezi látkou probíranou při výuce matematiky ve škole a těmito, pro mnohé netradičními úlohami.

V návaznosti na RVP jsou pomocí těchto úloh rozvíjeny některé z klíčových kompetencí. Volbou a zařazením takovýchto úloh do výuky matematiky učitel motivuje žáka. Žák bere úlohy na šachovnici jako hru vhodně spojenou s matematickým aparátem. Žáci využívají své vlastní postupy k řešení daného problému. Problémové úlohy, a myslím, že mnohé úlohy, které se alespoň trochu vymaní z učebnicového standardu, se za problémové považovat dají, podporují samostatné myšlení žáků. Vzhledem k tomu, že úlohy jsou vybírány tak, aby je mohli vyřešit i slabší žáci, lze k jejich vyřešení najít různé cesty a rozmanité způsoby postupu řešení. Rozvíjí se zde kompetence k samostatnosti, ale lépe i kompetence k diskuzi o různých způsobech řešení. A to jak na úrovni učitel – žák, tak i mezi žáky.

5.1. Hypotéza výzkumu

Do svého výzkumu jsem zařadil ověření řešení některých typů matematických úloh na šachovnici. Předpokládám jejich možné zařazení do výuky a to nejenom do tématu kombinatorika, tak jak tomu bylo doposud. Pro výzkumné úlohy, ale ne jenom pro ty, se nabízí další témata. Jako je např. dělitelnost přirozených čísel, matematické důkazy, obvody obsahy rovinných útvarů, ověřování matematických vzorců (součty posloupností čísel), shodná zobrazení apod.

Do výzkumu se zapojili žáci s různým studijním zaměřením. Mojí další hypotézou bylo, že žáci matematických tříd budou při řešení jednotlivých úloh úspěšnější. Předpokládají se u nich také větší matematické kompetence při zdůvodňování vlastních závěrů.

U žáků s humanitním zaměřením očekávám spíše povrchní zdůvodňování svých řešení, podpořených grafickým znázorňováním.

Vzhledem k tomu, že do výzkumu byly zařazeny úlohy poměrně méně náročné, které navíc nevyžadují vysoké matematické znalosti a schopnosti, očekávám velké množství úspěšně vyřešených úloh.

Na jednotlivých listech se objevují úlohy s jednou otázkou, ale i úlohy, při kterých musí žáci odpovědět na více problémů, či své řešení zdůvodnit nebo dokázat. Obávám se, že takto pojaté úlohy mohou dělat žákům větší problémy. A to z důvodu nedočtení zadání do konce, nebo z matematické nekompetentnosti své závěry jakkoli obhájit.

Vzhledem k tomu, že jsem úlohy, použité ve výzkumu zadával prostřednictvím kolegů na jiné škole, výzkum byl anonymní. Nešlo se však nevyhnout podrobnějšímu seznámení se s úlohami ve třídě, kterou sám celý školní rok učím. I to by mohlo ovlivnit úspěšnost řešení.

5.2. Cílová skupina žáků

Dalším krokem bylo najít vhodnou skupinu žáků, kteří by mnou vybrané úlohy vyřešili a svým výsledky dali základ pro vyhodnocení výzkumu.

Protože učím matematiku a informatiku na Karlínském gymnáziu, Pernerova 25, Praha 8, první skupina se nabídla okamžitě. Do výzkumu jsem tak zapojil třídu, kterou sám vyučuji. Jsou to žáci prvního ročníku, a jak jsem správně předpokládal, s tématem matematika na šachovnici se ještě nikdy nesetkali. U další třídy jsem naopak věděl, že se s některými úlohami na šachovnici již setkat mohli. A to při výuce kombinatoriky. Tedy volba padla na žáky třetího ročníku kolegy Mgr. Milana Coufala.

Pro srovnání s jinou školou jsem využil svých kontaktů na gymnáziu Christiana Dopplera. Zde jsem za pomoci RNDr. Dagmar Švarcové a RNDr. Ludmily Ortinské zadal stejné úlohy jako na Karlínském gymnáziu.

Srovnání řešení úloh tak proběhlo jak na úrovni třídní, mezitřídní tak i na úrovni mezi školami s různým zaměřením. Úlohy z pracovních listů řešili žáci prvního a třetího ročníku čtyřletého studia Karlínského gymnázia - humanitní zaměření a žáci prvního ročníku čtyřletého studia spolu se žáky septimy studia osmiletého[20] gymnázia Christiana Dopplera. Obě naposled uvedené třídy jsou zaměřeny na rozšířenou výuku matematiky.

Žáci, které jsem vybral pro realizaci výzkumu, splňovali několik zásadních kritérií. Chtěl jsem získat žáky, kteří se s úlohami na šachovnici ještě nikdy nesetkali. Dále byli ve výzkumu žáci, kteří měli již probrané téma středoškolské kombinatoriky. V neposlední řadě jsem chtěl srovnávat řešení žáků s různým zaměřením studia. Důležité bylo také to, aby byli žáci ochotni se na požadovaném výzkumu účastnit. Nutná byla i spolupráce učitelů, kteří v experimentálních třídách sami matematiku učí.

5.3. Příprava výzkumu

Hlavní částí přípravy výzkumu byl výběr úloh, sestavení kritérií hodnocení žákovských řešení a oslovení účastníků samotného výzkumu.

5.4. Výběr úloh

Vzhledem k tomu, že součástí této práce je sbírka řešených úloh na šachovnici, k výběru jednotlivých úloh pro výzkum jsem měl k dispozici dostatečné množství zadání. Zvolil jsem jak úlohy, které se řeší pouze s využitím šachové desky, tak úlohy, které využívají i šachových figur.

V připravených žákovských úlohách jsem využil dva typy úloh. Úlohy na šachovnici, které pro své řešení nevyužívají šachové figury. V tomto konkrétním případě šlo o úlohy, které se zabývají pokrytím šachovnice obrazci, jejichž tvar je tvořen jednotlivými poli šachovnice. Tedy např. dominovými kameny 2 x 1, sjednocením dvou dominových kamenů, tj. kameny 2 x 2, apod.

Druhý typ úloh již využívá i šachové figury. Do těchto ověřovacích úloh jsem vybral úlohy o rozmístění maximálního počtu figur téhož druhu.

Navržené úlohy lze realizovat jako součást vyučovací hodiny, matematického cvičení, v rámci matematických seminářů či dalších organizačních forem výuky.

Skupiny úloh jsem uspořádal do pracovních listů. Úlohy na pracovním listu č. 1 (Příloha č. 1), byly zaměřeny na pokrytí šachovnice 8 x 8 (v úloze č. 3 pokrytí šachovnice 10 x 10) různými obrazci. Pro správné řešení těchto úloh se

[20] Septima věkově odpovídá třetímu ročníku čtyřletého studia.

předpokládá geometrická představivost, základní znalosti dělitelnosti přirozených čísel, sudost a lichost přirozených čísel. Tedy schopnosti, které žáci získávají již na základní škole. Předpokládal jsem, že se samotným řešením zadaných úloh žáci nebudou mít větší problémy. Co by však problém způsobit mohlo, je matematické zdůvodnění vlastních řešení. Na pracovním listu žáci našli čtyři úlohy. Z nichž dvě se týkaly pokrytí šachovnice klasickými dominovými kameny 2 x 1 a dvě kameny dalších tvarů. U prvních dvou úloh byly navíc předtištěny odpovídající šachovnice.

Pracovní list č. 2 (Příloha č. 2) obsahoval pět úloh na rozmístění neohrožujících se figur téhož druhu. Čtyři úlohy byly klasické, tedy najít maximální počet odpovídajících si figur, které lze na šachovnici 8 x 8 rozestavit. Pátá úlohy byla bonusová. Zadání obsahovalo i historickou motivační poznámku. Úloha se týká známého problému osmi dam. Tedy rozmístění vzájemně se neohrožujících osmi dam na šachovnici 8 x 8. Řešení jako takové nebylo zahrnuto do samotného výzkumu. Přesto bylo zajímavé zjistit, zda žáci alespoň jedno rozmístění osmi dam najdou.

5.5. Kritéria hodnocení úloh

Pro jednotlivé pracovní listy jsem sestavil kritéria, podle kterých jsou žákovská řešení hodnocena. Úlohy byly ohodnoceny podle následující škály přístupu k řešení.

Kritéria pro úlohy na pracovním listu 1 – Úlohy na pokrytí

Pouze řešení – žák uvede správnou odpověď na otázku ze zadání úlohy; svůj závěr nezdůvodní ani ho žádným způsobem nenaznačí do připravené šachovnice.

Řešení s částečným zdůvodněním – žák uvede správné řešení; snaží se zdůvodnit své postupy.

Řešení s úplným zdůvodněním – uvedení správného řešení; žák své řešení zdůvodní; uvědomuje si souvislosti a postupy ve svém řešení.

Řešení s využitím zakreslení – žák svá řešení zdůvodňuje pomocí zakreslení do šachovnice, která je součástí každého zadání.

Nezvládnuté řešení – žák úlohu neřeší, příp. nevhodně postupuju při získání správné odpovědi; zakreslení do pomocné šachovnice nevede ke správnému výsledku; žák má špatný výsledek.

Kritéria pro úlohy na pracovním listu 2 – Úlohy o rozmístění maximálního počtu figur téhož druhu

Pouze řešení – žák uvede správnou odpověď na otázku ze zadání úlohy; svůj závěr nezdůvodní ani ho žádným způsobem nenaznačí do připravené šachovnice.

Částečné řešení – žák uvede správnou odpověď na otázku nebo na část zadání úlohy; své řešení podpoří zakreslením rozestavení daných figur.

Úplné řešení – uvedení správného řešení celé úlohy; žák své řešení zdůvodní matematickým zápisem nebo zakreslením řešení do předtištěné šachovnice.

Nezvládnuté řešení – žák úlohu neřeší, příp. nevhodně postupuju při získání správné odpovědi; zakreslení do pomocné šachovnice nevede ke správnému výsledku; žák má špatný výsledek.

5.6. Průběh výzkumu

Výzkum probíhal v hodinách matematiky ve vybraných třídách. Žáci byli s výzkumem seznámeni. Byli informováni o kritériích řešení. Ve své třídě jsem v úvodu hodiny společně se žáky zopakoval základní pravidla šachu. Hlavně pak vlastnosti jednotlivých figur. K mému překvapení i v dnešní digitální době převážná většina žáků někdy šachy hrála, případně znala princip hry a charakteristiky tahů šachových figur.

Tento postup jsem doporučil i kolegům v ostatních třídách, které se výzkumu zúčastnili.

Po tomto úvodu byly žákům rozdány pracovní listy a ohlášeno zahájení výzkumu. Žáci měli k dispozici i list s osmi šachovnicemi pro pomocné nákresy. Řešení a náčrtky na pomocných listech do výzkumu z pochopitelných důvodů započítány nebyly. Na oba pracovní listy byla vyhrazena celá vyučovací hodina. Žáci pracovali samostatně. Případné dotazy mohli konzultovat s vyučujícím. Vyučující však mohl jen upřesnit zadání nebo znovu zopakovat pravidla šachové hry. Do samotného řešení nezasahoval.

V mém případě úvod hodiny probíhal tak, že žáci obdrželi další vytištěné šachovnice, do kterých si tahy jednotlivých figur mohli zakreslit. Souběžně se žáky tuto nutnou nápovědu zakreslil na tabuli student, který šachovou hrou ovládá.

Byl popsán princip pokrytí šachovnice. Tedy že šachovnice musí být pokrytá celá. Žádný kámen při položení na šachovnici nesmí svým obsahem šachovnici přesáhnout. A kameny pro pokrytí jsou tvořeny vždy ze čtverců, které svým obsahem odpovídají jednotlivým polím šachovnice.

5.7. Výsledky řešení úloh

Vyhodnocení žákovských řešení jsem provedl na základě vyplněných pracovních listů. Výsledky řešení z jednotlivých pracovních listů jsou zaneseny do tabulek. Hlavním výstupem, i díky své přehlednosti, zůstávají grafy.

Pro vyhodnocení úloh na úrovni jedné třídy jsem zvolil sloupcový graf skládaný. Tento graf umožňuje pomocí svislých obdélníků porovnat, do jaké míry přispívají jednotlivé hodnoty k celkovému součtu pro různé kategorie. Slouží ke zvýraznění celkového součtu z hlediska řad pro jednu kategorii.

Vyhodnocení úloh na úrovni mezitřídní znázorňují sloupcové grafy skupinové. Tyto grafy umožňují porovnat hodnoty mezi kategoriemi pomocí svislých obdélníků.

V tabulkách je přehledné shrnutí počtu studentů, kteří zvládli dané úlohy na určité úrovni. Kritériem hodnocení byla dovednost samostatné formulace řešení a závěru, zakreslení řešení do připravené šachovnice a vlastní správnost odpovědí na zadané úkoly.

Na závěr výzkumu jsem provedl rozbor úspěšnosti zvládnutí jednotlivých úloh, který hodnoty uvedené v tabulkách blíže konkretizuje.

5.7.1. Výsledky řešení jednotlivých tříd – Pracovní list č. 1

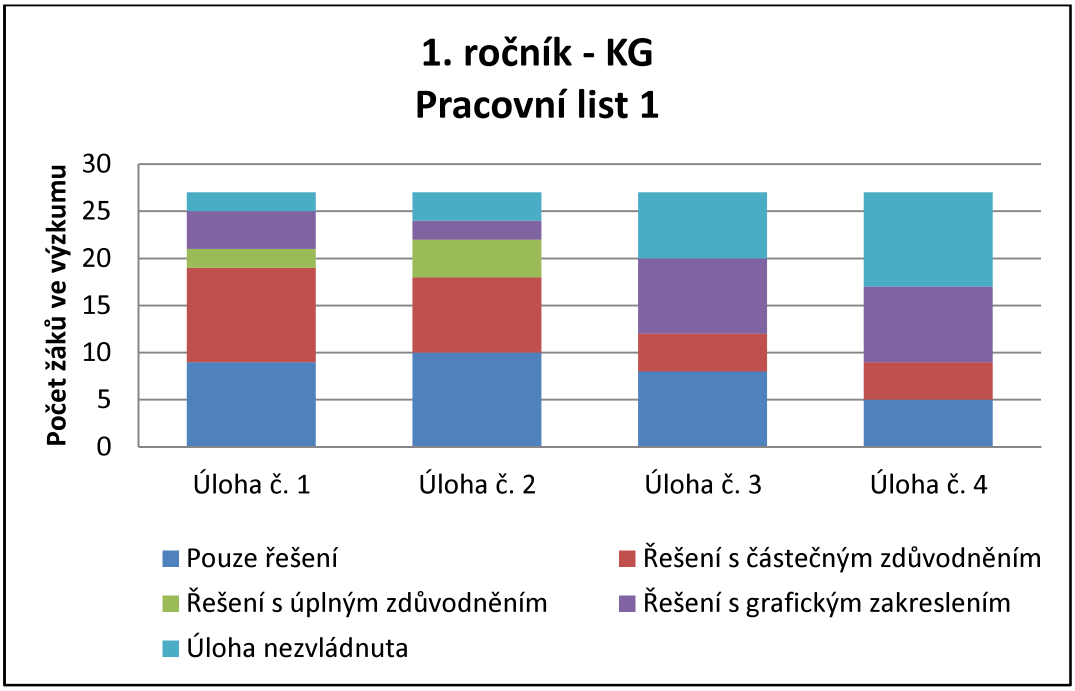
V první části vyhodnocení výzkumu řešených úloh jsem se zaměřil na řešení v jednotlivých třídách. Pro každou třídu jsem sestavil tabulku žákovských řešení a z těchto tabulek byly vygenerovány grafy.

Úlohy na pokrytí šachovnice řešili žáci vybraného prvního ročníku Karlínského gymnázia a gymnázia Christiana Dopplera. Výzkumu se zúčastnila i třída třetího ročníku čtyřletého studia. Opět z Karlínského gymnázia.

Tabulka 1

1. ročník – KG	Úloha č. 1	Úloha č. 2	Úloha č. 3	Úloha č. 4
Pouze řešení	9	10	8	5
Řešení s částečným zdůvodněním	10	8	4	4
Řešení s úplným zdůvodněním	2	4	0	0
Řešení s grafickým zakreslením	4	2	8	8
Úloha nezvládnuta	2	3	7	10
Celkem studentů	**27**	**27**	**27**	**27**

Graf 1

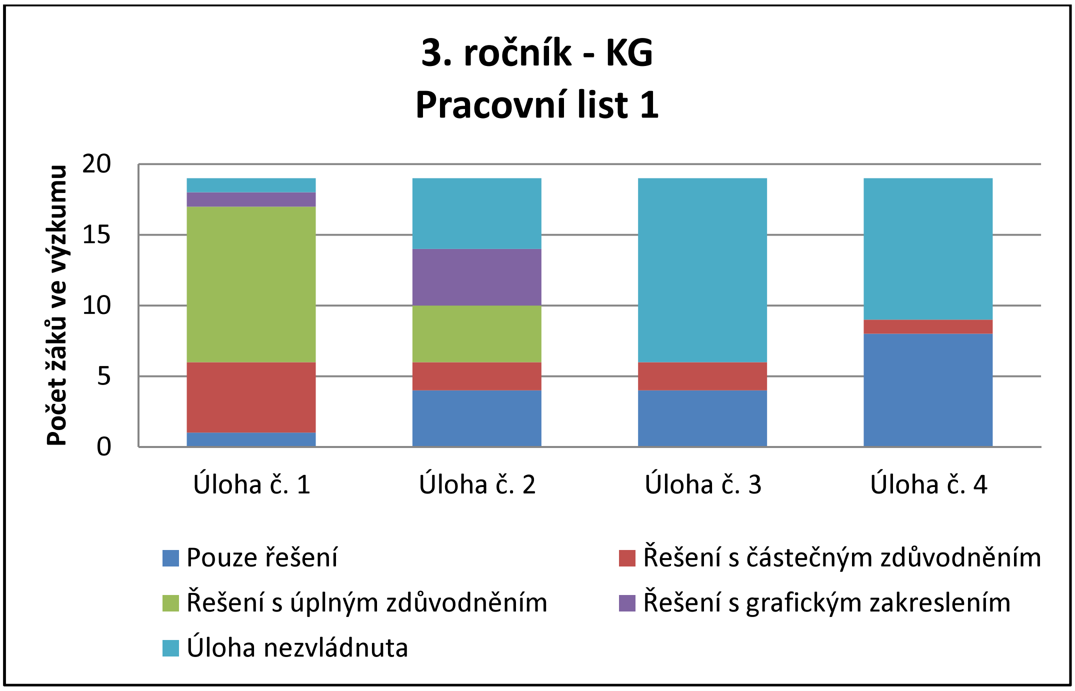


Již první graf napovídá, jakým směrem se budou žákovská řešení 1. ročníku KG ubírat. V každé úloze převažují řešení bez jakéhokoli zdůvodnění. U prvních dvou příkladů lze výsledek i odhadnout. Přesto je nutné své závěry nějak zdůvodnit. U třetí a čtvrté úlohy se můžu domnívat, že žáci svůj závěr pouze tipovali. Úplná řešení se vyskytují pouze u první a druhé úlohy. To jen potvrzuje rozdílnost v obtížnosti mezi první a druhou polovinou úloh z pracovního listu. Z hlediska nezvládnutí úlohy se příklady na pracovním listu jeví řazené od nejjednodušší po tu nejtěžší. Alespoň to tak žákům zřejmě připadalo a výzkum to jen potvrzuje. Záměr to však nebyl. I když tendence k takovému sestavování souboru úloh vždy jsou. Na začátek zařadit úlohy lehčí a postupně zvyšovat jejich obtížnost. Lze se také domnívat, že počáteční chuť řešit „jiné“ úlohy, vystřídal jistý nezájem o řešení třetí, případně čtvrté úlohy.

Tabulka 2

3. ročník – KG	Úloha č. 1	Úloha č. 2	Úloha č. 3	Úloha č. 4
Pouze řešení	1	4	4	8
Řešení s částečným zdůvodněním	5	2	2	1
Řešení s úplným zdůvodněním	11	4	0	0
Řešení s grafickým zakreslením	1	4	0	0
Úloha nezvládnuta	1	5	13	10
Celkem studentů	**19**	**19**	**19**	**19**

Graf 2

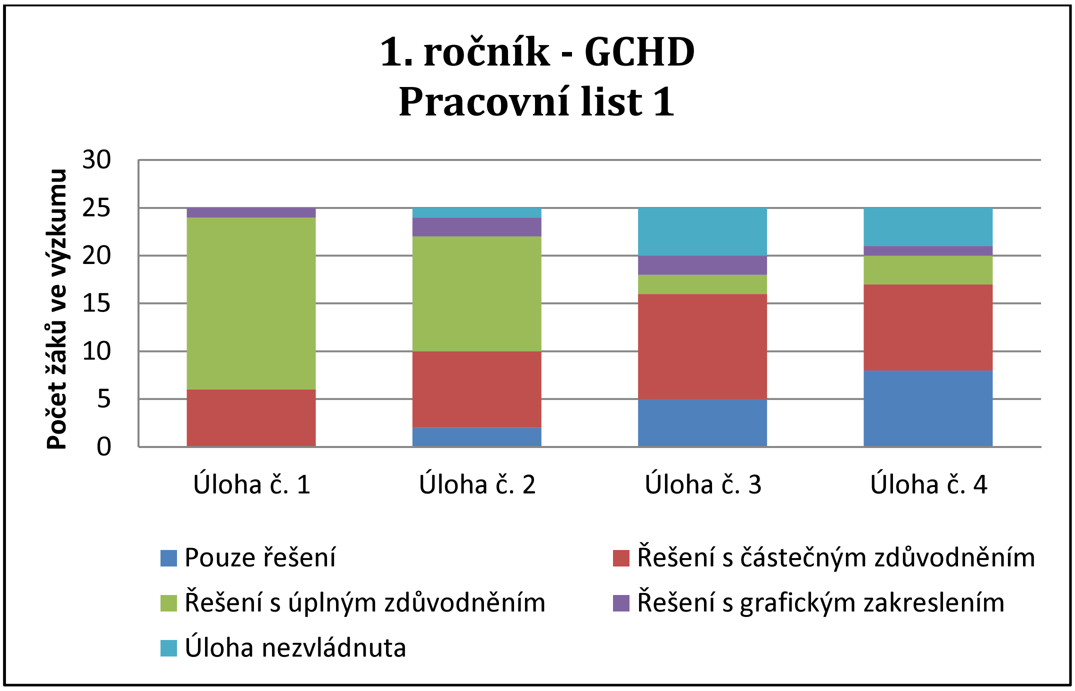


Jak vyplývá z grafu č. 2, u první úlohy převažují řešení s úplným zdůvodněním. Druhou úlohu žáci ještě řeší, nebo se o to alespoň snaží. Velký problém vidím ve druhé a třetí úloze. Zvlášť ve druhé úloze, kdy úlohu nezvládlo 13 žáků z celkového počtu 19 řešících. Při opravě řešení jednotlivých úloh jsem zjistil, že u třetí a čtvrté úlohy se většina žáků o řešení ani nepokusila. Když jsem se jich po skončení výzkumu ptal, proč zůstala druhá strana části pracovních listů zcela prázdná, odpovědi byly rozpačité a neurčité. Někdo tvrdil, že nepochopil zadání, jiný, že nevěděl jak úlohu řešit. Dokonce se objevili i takové odpovědi, které se mi nezdály moc věrohodné. Tedy, že žáci pracovní list vůbec neotočili na druhou stranu, neboť netušili, že na druhé straně další příklady jsou. Proto řešili jen první dvě úlohy. Nakonec možná i toto je možný důvod neúspěšnosti řešení úloh 2 a 3.

Tabulka 3

1. ročník - GCHD	Úloha č. 1	Úloha č. 1	Úloha č. 3	Úloha č. 4
Pouze řešení	0	2	5	8
Řešení s částečným zdůvodněním	6	8	11	9
Řešení s úplným zdůvodněním	18	12	2	3
Řešení s grafickým zakreslením	1	2	2	1
Úloha nezvládnuta	0	1	5	4
Celkem studentů	**25**	**25**	**25**	**25**

Graf 3



Graf č. 3 výsledků žáků 1. ročníku GCHD jasně dokázal tu skutečnost, že se jedná o třídu se zaměřením na matematiku. Úlohu první vyřešili v podstatě všichni z 25 řešitelů. Dokonce 18 z nich správně zdůvodnilo, proč nelze šachovnici ze zadání pokrýt dominovými kameny. Řešení druhé úlohy ukázalo podobný trend. Pouze jeden žák úlohu nevyřešil správně. Důvodem byla nesprávná představa dominového kamene 2 x 1. Šachovnici i v tomto případě pokrýval kameny z úlohy 3. Tedy kameny, které jsou na rozdíl od dvou polí domina složeny z polí čtyřech.

Problém nastává v úlohách 3 a 4. Není to problém matematický. Spíš problém s představou pokrytí šachovnice kamenem, který je složen z více polí jedné barvy než z druhé. Žáci chápou zadání o pokrytí tak, že kámen musí ležet svým černým polem na černém poli šachovnice. Stejně tak se musí překrývat i bílá pole. A opět jak kamene, tak šachovnice[21]. To je však zásadní omyl. Po tomto zjištění jsem ještě jednou prošel všechna řešení úloh jedna a dvě a zdá se, že tato teorie převládala i u řešení těchto úloh. Na správné vyřešení těchto úloh to však nemá pražádný vliv. Dominový kámen má jedno bílé a jedno černé pole. Budeme-li pokrývat pole šachovnice dominem 2 x 1, a budeme-li dodržovat žákovskou teorii o pokrytí, tedy černé pole na černé a bílé na bílé, stejně vždy pokryjeme právě dvě pole šachovnice.

Opět se ale ukazuje, že problém nedělají úlohy jedna a dvě. Naproti tomu, čtvrtá úloha je i pro tuto matematickou třídu úlohou, která s sebou přináší největší úskalí.

5.7.2. Výsledky řešení úloh v mezitřídním srovnání – Pracovní list č. 1

V mezitřídním výzkumu jsem se zaměřil na porovnávání jednotlivých úloh z hlediska jejich řešení. Zvláště pak vzhledem k úrovni matematických kompetencí jednotlivých tříd. Zkoumají se řešení třídy 1. ročníku humanitního zaměření a 1. ročníku třídy matematické. Tedy tříd na stejné věkové úrovni, ale s odlišným cílem vzdělávání. Kvalitativně by se tedy měla řešení zásadně lišit. Pro objektivnost výzkumu bylo také důležité, že se sešel velice podobný vzorek i z hlediska kvantity. Z jedné třídy se výzkumu zúčastnilo 27 žáků z druhé pak žáků 25.

Protože jsem měl k dispozici i řešení žáků 3. ročníku humanitního zaměření, společně s prvními ročníky jsem pro zajímavost porovnal i jejich řešení. Do výzkumu tedy vstupuje třída na vyšší věkové úrovni, s téměř ukončeným studiem gymnaziální matematiky za tři roky, ale na druhé straně třída žáků, jejichž studijní preferencí není studium přírodních věd. Tedy ani studium matematiky. Početní vzorek je také o dost menší. Zúčastnilo se 19 žáků.

Jistě bude zajímavé sledovat postupy a úspěšnost řešení úloh mezi třídami na stejné věkové úrovni, s rozdílným studijním zaměřením, ale i srovnání se třídou z vyššího ročníku.

Každý graf obsahuje srovnání celkových počet řešení úloh podle úspěšnosti, viz kritéria pro pracovní list 1, kapitola 1.2.2. Hodnoty v grafu vyjadřují, kolik procent žáků z konkrétní třídy danou úlohu řešilo na základě zkoumaného

[21] Tento problém je podrobněji popsán v kapitole 1.5

kritéria řešení. Ve výzkumu nás budou pochopitelně zajímat hlavně ta řešení, která se opírají o správná matematická zdůvodnění.

5.7.2.1. Výsledky řešení – Úloha 1

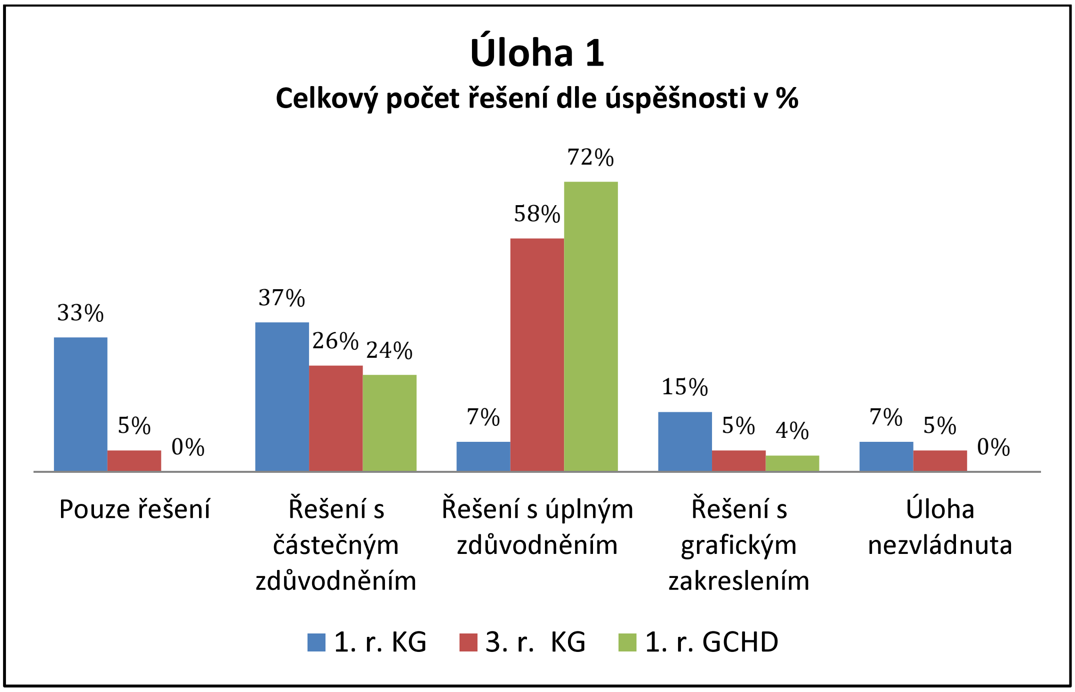
Úloha 1 *Šachovnice 8×8, ve které jsou vyříznutá dvě protilehlá úhlová pole (tj. šachovnice, která má 62 polí) by měla být pokryta 31 dominovými kameny 2×1. Lze to provést? Řešení zdůvodněte.*

Z grafu 4 jasně vyplývá, že nejméně řešení s úplným zdůvodněním mají žáci 1. ročníku KG. Žáci matematické třídy pak řeší úlohu vždy s nějakým zdůvodněním. Ať už s úplným, částečným či za využití grafického zakreslení řešení. Při pohledu na výsledky úlohy 1 se lze také domnívat, že někteří žáci z KG svá řešení odhadli, případně nedokázali vůbec zdůvodnit.
Najít řešení úlohy, není obtížné. Co však žákům problém dělá, je pomocí odpovídajícího matematického aparátu středoškoláka své postupy obhájit.
I přesto u první úlohy uvedlo řešení úlohy s úplným zdůvodněním nejvíce žáků. Úlohu nezvládli vyřešit pouze tři žáci. Žáci prvního ročníku GCHD zde jasně předčili svými výkony žáky humanitního studia.

Tabulka 4

Úloha 1	**1. r. KG**		**3. r. KG**		**1. r. GCHD**	
Pouze řešení	9	33,3%	1	5,3%	0	0,0%
Řešení s částečným zdůvodněním	10	37,0%	5	26,3%	6	24,0%
Řešení s úplným zdůvodněním	2	7,4%	11	57,9%	18	72,0%
Řešení s grafickým zakreslením	4	14,8%	1	5,3%	1	4,0%
Úloha nezvládnuta	2	7,4%	1	5,3%	0	0,0%
Celkem studentů	**27**		**19**		**25**	

Graf 4



5.7.2.2. Výsledky řešení – Úloha 2

Úloha 2 *Šachovnice 8 x 8, ve které jsou vyříznutá dvě pole různé barvy má být pokryta kameny 2 x 1. Lze to provést?*

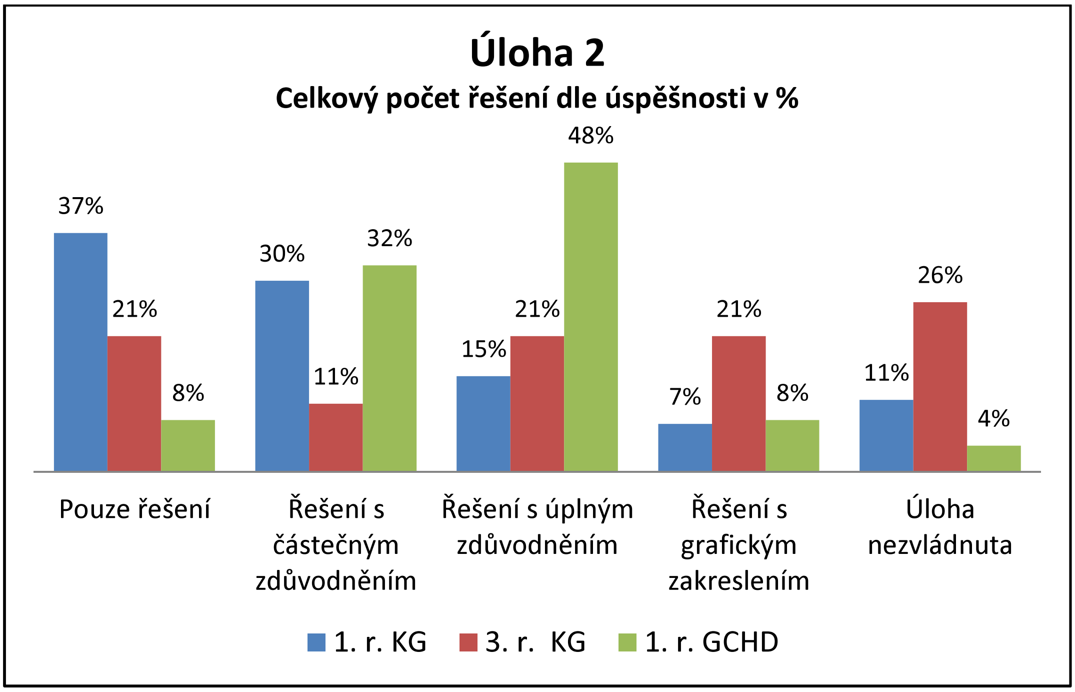
V této úloze se zvýšil celkový počet odpovědí „LZE/NELZE“. Tedy odpovědí bez jakéhokoli zdůvodnění a případy, kdy se úloha neřešila vůbec či byla vyřešena nesprávně.

V řešení s úplným zdůvodněním jsou pořád nejlepší žáci GCHD. V tomto případě však dokázali i 4 žáci z 1. ročníku (stejný počet i ze 3. ročníku) KG matematicky zdůvodnit své úvahy.

Tabulka 5

Úloha 2	**1. r. KG**		**3. r. KG**		**1. r. GCHD**	
Pouze řešení	10	37,0%	4	21,1%	2	8,0%
Řešení s částečným zdůvodněním	8	29,6%	2	10,5%	8	32,0%
Řešení s úplným zdůvodněním	4	14,8%	4	21,1%	12	48,0%
Řešení s grafickým zakreslením	2	7,4%	4	21,1%	2	8,0%
Úloha nezvládnuta	3	11,1%	5	26,3%	1	4,0%
Celkem studentů	**27**		**19**		**25**	

Graf 5



Nerad bych podceňoval i ta řešení, kdy se žáci snaží úlohu řešit pomocí zakreslení postupu pokrývání do vytisknuté šachovnice[22]. Kdo se rozhodl takto řešit první dvě úlohy, jistě by uvítal pevnou šachovnici společně s odpovídajícím počtem dominových kamenů. Lze však předpokládat, že při takto řešených úlohách se žák skutečně spokojí jen s tou možností, zda lze takto šachovnici pokrýt či nikoli. Považuje pak za zbytečné jakkoli zdůvodňovat svá řešení. Myslím, že tím dochází k jisté devalvaci řešení těchto jistě zajímavých úloh.

Dalším problém vidím v tom, že žáci při zdůvodňování svých postupů nezohledňovali možnosti vyříznutí polí, které spolu sousedí a polí, které společnou hranici nemají. V podstatě se vždy spokojili se závěrem, že když se vyříznou dvě pole různé barvy, lze takto vyříznutou šachovnici pokrýt vždy. Ve své podstatě mají pravdu. Pro úplné řešení by však měly být tyto dva případy vyříznutí polí od sebe odlišeny.

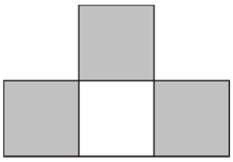
5.7.2.3. Výsledky řešení – Úloha 3

Podívejme se teď na druhou část pracovního listu 1. Jsou zde další dvě úlohy na pokrytí šachovnice. U nich se díky řešení studentů GCHD potvrdilo, že některá zadání těchto netradičních úloh je třeba se studenty předem projít a upřesnit některé, na první pohled možná ne zcela jasné, části textu zadání.

[22] Na pracovním listu měli žáci vedle znění úlohy předtištěnou i šachovnici odpovídající zadání. Dále měli k dispozici v podstatě neomezený počet vytištěných šachovnic pro testování svých řešení.

Při výzkumu se totiž ukázalo, že některé úlohy byly žáky chybně pochopeny. Původně jsem chtěl, aby byli žáci seznámeni maximálně s pravidly pokrývání šachovnice a případně s vlastnostmi jednotlivých šachových figur. A samotné úlohy pak řešili bez asistence učitele. Jak se však ukázalo, na zadání některých úloh mohou žáci nahlížet z různých směrů. Nemyslím si, že by byla zadání úloh nejednoznačná, ale jsou zde informace, které je třeba žákům zdůraznit. Zvláště pak u úloh, které jsou pro žáky nové.

Úloha 3 *Lze pokrýt šachovnici 10x10 dvaceti pěti kameny z obrázku?*



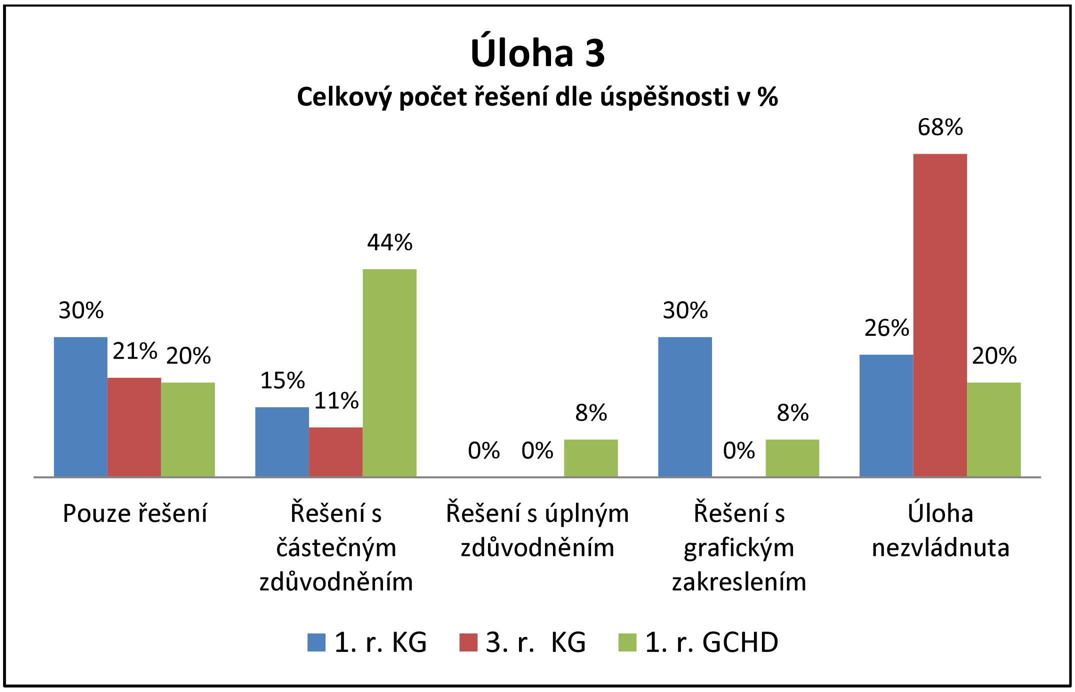
Problém nastal při řešení právě této úlohy. Šachovnice se má pokrývat kameny, viz obrázek ze zadání úlohy.

Zřejmě už u předchozích úloh, kdy se pokrývalo dominovými kameny 2 x 1, který je složen z jednoho černého a jednoho bílého pole, se při pokrytí šachovnice žáci mylně domnívali, že se kámen musí na šachovnici pokládat k sobě odpovídajícími barevnými poli. Tedy černé pole na černé a bílé opět na bílé. Sice to při řešení první a druhé úlohy nevadilo, ale tato domněnka je mylná.

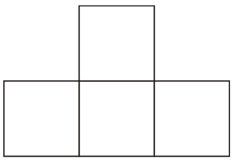
Tabulka 6

Úloha 3	**1. r. KG**		**3. r. KG**		**1. r. GCHD**	
Pouze řešení	8	29,6%	4	21,1%	5	20,0%
Řešení s částečným zdůvodněním	4	14,8%	2	10,5%	11	44,0%
Řešení s úplným zdůvodněním	0	0,0%	0	0,0%	2	8,0%
Řešení s grafickým zakreslením	8	29,6%	0	0,0%	2	8,0%
Úloha nezvládnuta	7	25,9%	13	68,4%	5	20,0%
Celkem studentů	**27**		**19**		**25**	

Graf 6



Ve třetí úloze tato úvaha zaúřadovala a většina žáků tedy řešila pokrývání šachovnice přes odpovídající si barevná pole. Což přineslo nesprávné postupy při řešení této úlohy. Pravděpodobně jsou dvě možnosti jak tomuto chybnému pochopení zadání předejít. Důkladně žákům zdůraznit možnosti a pravidla pokrývání šachové desky, nebo kámen ze zadání obarvit pouze jednou barvou. Tak, jak je to vidět na následujícím obrázku.



Při vyhodnocování úlohy se tedy v minimálním počtu objevila řešení s úplným zdůvodněním. Úlohy řešené pomocí této mylné myšlenky jsem přesto ve výzkumu započítal do skupiny s řešeními s částečným zdůvodněním.

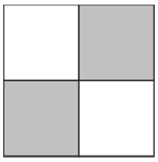
Bohužel se tato mylná úvaha přenesla i do čtvrté úlohy pracovního listu.

Ve třetí úloze se zásadně zvýšil počet chybně či vůbec neřešených úloh. Podílí se na tom hlavně žáci třetího ročníku KG, kteří ve více než 60% odpovědí tuto úlohu vůbec nezačali řešit. Protože se podobný počet objevil i ve čtvrté úloze a jen u těchto žáků, vede to skutečně k domněnce, že žáci neotočili list. Tyto úlohy byly na totiž na druhé straně pracovního listu. Má domněnka se však nepotvrdila. Kolega, který úlohy v této třídě zadával, tvrdí, že celé třídě důrazně vysvětlil, že pracovní list obsahuje čtyři úkoly. Tedy i na druhé straně. I z tohoto důvodu jsou tyto výsledky zaneseny do grafu 3.

Řešení s úplným zdůvodněním mají pouze dva žáci a žáci z GCHD. Dalších 11 mají správná řešení s částečným zdůvodněním. Proč jsou tato čísla tak nízká bylo již vysvětleno.

5.7.2.4. Výsledky řešení – Úloha 4

Úloha 4 *Na obrázku je znázorněno sjednocení dvou dominových kamenů 2 x 1, tj. kámen 2 x 2. Ukažte, že nelze pokrýt šachovnici 8 x 8 patnácti kameny z obrázku úlohy 3 a jedním kamenem 2 x 2.*

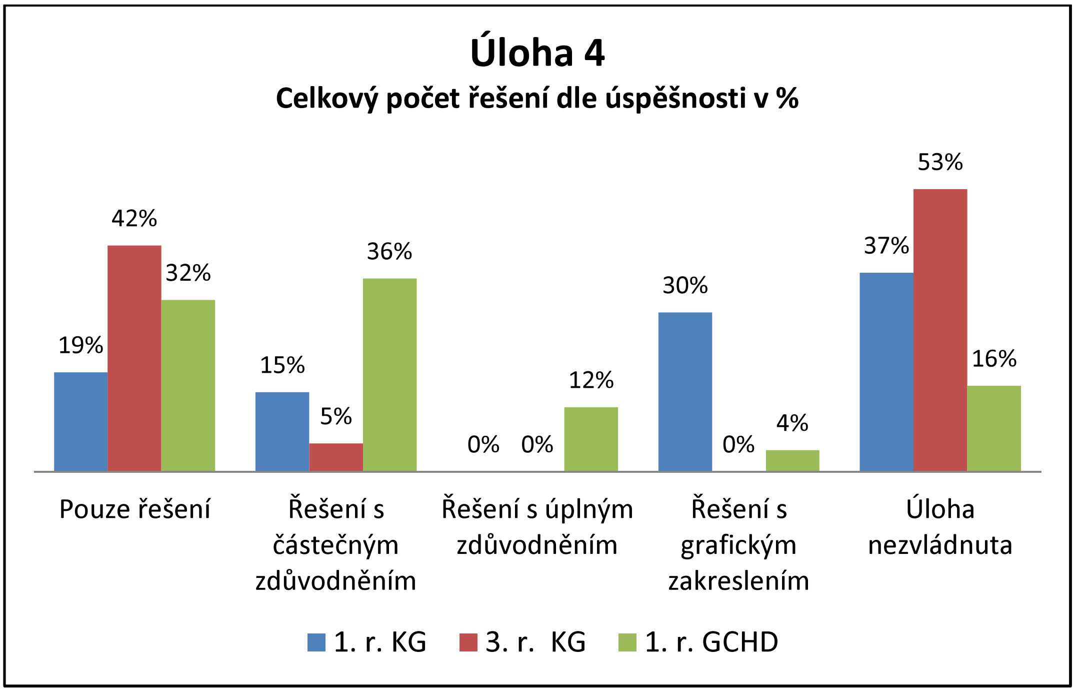


Poslední úloha z pracovního listu nepřinesla další větší změny oproti výsledkům předchozí úlohy. Žáci matematické třídy GCHD si drží první pozice ve všech kategoriích, které vedou ke správnému řešení úlohy. Snad jen v řešení s grafickým zakreslením si drží svou kvalitu žáci 1. ročníku KG. Vyjma druhé úlohy, jejíž řešení nevyžadovalo zásadní zakreslení do šachovnice, řešil pomocí obrázku nebo jiného grafického záznamu vždy nejvyšší počet žáků z této třídy. Mě osobně to těší, neboť v této třídě matematiku učím a snažím se, aby žáci své postupy často vyjadřovali grafickým náčrtkem. Ať už se to týká zakreslování množin a intervalů, řešení jednoduchých úloh týkající se obvodů a obsahů rovinných útvarů nebo např. grafického řešení rovnic a nerovnic a jejich soustav.

Tabulka 7

Úloha 4	**1. r. KG**		**3. r. KG**		**1. r. GCHD**	
Pouze řešení	5	18,5%	8	42,1%	8	32,0%
Řešení s částečným zdůvodněním	4	14,8%	1	5,3%	9	36,0%
Řešení s úplným zdůvodněním	0	0,0%	0	0,0%	3	12,0%
Řešení s grafickým zakreslením	8	29,6%	0	0,0%	1	4,0%
Úloha nezvládnuta	10	37,0%	10	52,6%	4	16,0%
Celkem studentů	**27**		**19**		**25**	

Graf 7



5.7.3. Výsledky řešení jednotlivých tříd – Pracovní list č. 2

Pracovní list č. 2 obsahuje opět čtyři základní úlohy. V tomto případě do řešení zasáhnou i samotné šachové figury. Úlohy jsou zaměřeny na problém pokrytí šachovnice maximálním počtem téhož druhu, které se navzájem neohrožují. Pro zajímavost jsem jako poslední pátou úlohu zařadil problém osmi dam. V této úloze jde o to, nalézt jedno z 92 rozmístění osmi navzájem se neohrožujících dam[23]. Z historického hlediska se tato úloha stala jednou z nejvyhledávanějších úloh zaměřených na matematiku na šachovnici.

Pátou úlohu jsem do samotného výzkumu nezařadil. Přesto bylo zajímavé pozorovat jednotlivé žákovské pokusy o její vyřešení.

Úlohy řešili žáci prvního a třetího ročníku KG. Pro srovnání s vyššími ročníky jsem měl tentokrát k dispozici úlohy řešené žáky septimy GCHD. Tedy třídy osmiletého studia se zaměřením na matematiku.

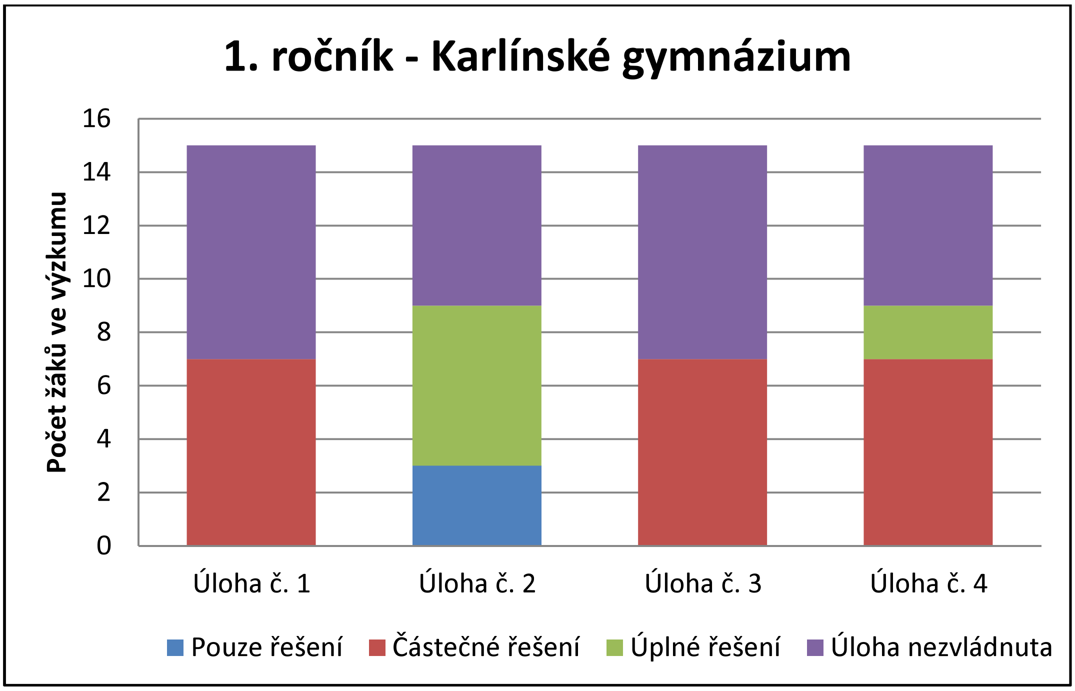
Kvantitativní vzorek je v případě těchto úloh menší, než byl při výzkumu řešení pracovního listu č. 1. V prvním ročníku KG jsem tentokrát úlohy řešil pouze s částí třídy při dělené hodině matematiky. Nízký počet řešitelů septimy GCHD je dán velkou studijní „úmrtností“ žáků v některých matematických třídách tohoto gymnázia.

[23] 92 možností jako maximální počet rozmístění osmi dam dokázal pomocí teorie determinantů v roce 1874 Angličan James Whitbread Lee Glaisher.

Tabulka 8

1. ročník - KG	Úloha č. 1	Úloha č. 2	Úloha č. 3	Úloha č. 4
Pouze řešení	0	3	0	0
Částečné řešení	7	0	7	7
Úplné řešení	0	6	0	2
Úloha nezvládnuta	8	6	8	6
Celkem studentů	**15**	**15**	**15**	**15**

Graf 8



Při řešení pracovního listu č. 2 dělala žákům problémy již první úloha. Ne však svým samotným řešením, ale zdůvodněním druhé části zadání. Tu žáci většinou opominuli. Spokojili se s odpovědí na první otázku ze zadání. Tedy jaký je maximální počet jezdců. To je častý problém slovních úloh, ve kterých se má odpovědět na více věcí najednou. Setkávám se s tím ve své učitelské praxi běžně. Ti žáci, kteří našli alespoň maximální hodnotu počtu jezdců, jsou v grafu vedeni podle kritéria částečné řešení.

Druhá úloha vše jen potvrzuje. Zde se totiž hledal „pouze“ maximální počet, tentokrát neohrožujících se králů. Proč je maximální, se zdůvodňovat nemuselo. Výsledky úspěšných řešení jsou patrné z grafu.

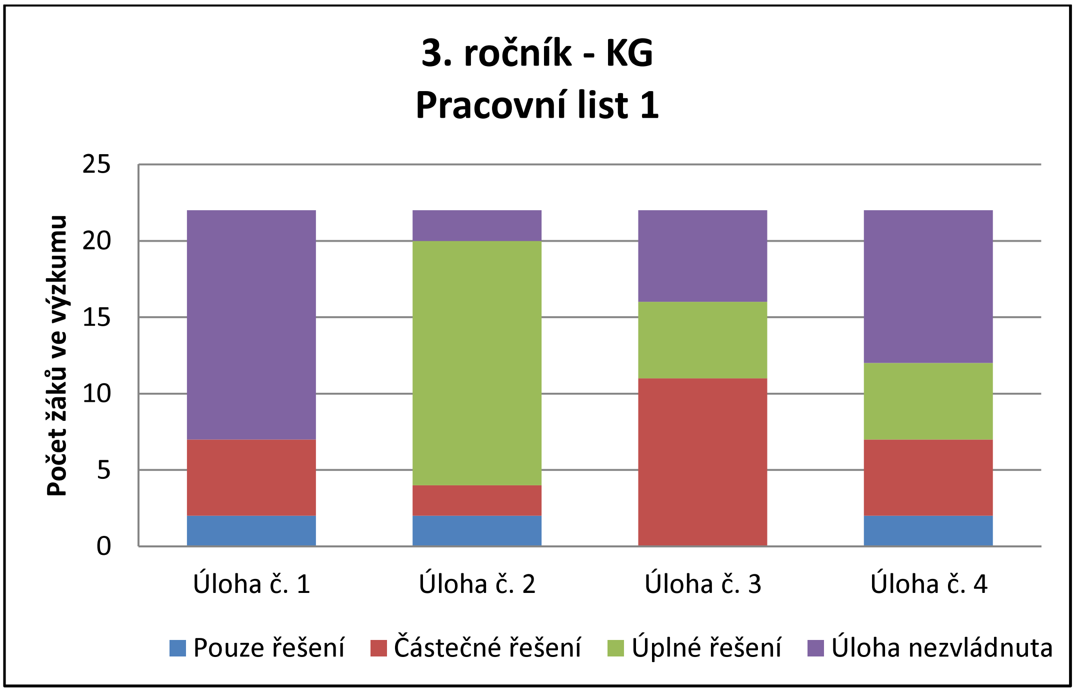
Ve třetí úloze byl již maximální počet figur přímo určen. Mělo se dokázat, proč větší být nemůže. Velké množství částečných a hlavně nezvládnutých řešení jen potvrzuje slabou stránku orientace žáků humanitního zaměření v matematickém problému a mezery při dokazování úloh. I když se pochopitelně v tomto případě nejedná o matematický důkaz v pravém slova smyslu.

Čtvrtá úloha je opět úlohou tvořenou dvěma částmi. Opět zde převažují úplně nezvládnutá či jen částečná řešení.

Tabulka 9

3. ročník KG	Úloha č. 1	Úloha č. 2	Úloha č. 3	Úloha č. 4
Pouze řešení	2	2	0	2
Částečné řešení	5	2	11	5
Úplné řešení	0	16	5	5
Úloha nezvládnuta	15	2	6	10
Celkem studentů	**22**	**22**	**22**	**22**

Graf 9



Z grafu 9 jsou patrné velké rozdíly v řešení úlohy první a druhé. V první úloze vůbec neřeší nebo řeší s chybou 15 žáků. Což je téměř 70% ze všech řešení. Naopak druhou úlohu řeší bez připomínek téměř stejný počet žáků. Takový propastný rozdíl mezi dvěma úlohami v jedné třídě v tomto výzkumu nenajdeme.

Třetí úlohu, jejíž řešení není postaveno na nalezení maximálního počtu figur, ale právě na zdůvodnění, proč je daný počet maximální a nemůže být větší, vyřešilo překvapivě velké procento žáků. Částečné řešení uvádí 11 žáků a 5 žáků řeší úlohu úplně.

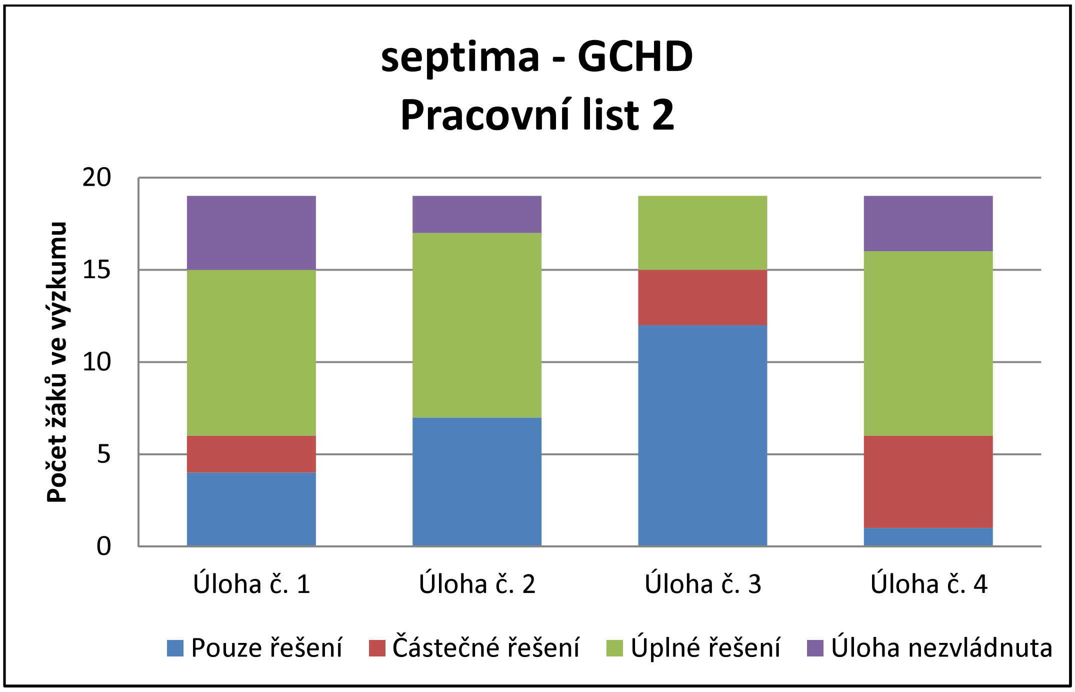
Ve čtvrté úloze se potvrzuje problém vícenásobných odpovědí na zadání. Přesto si 5 žáků (23%) obě části zadání uvědomuje a úlohu řeší bezchybně. 10 žáků úlohu neřeší vůbec.

I přesto, že žáci těsně před tímto výzkumem dokončili ve výuce matematiky téma kombinatorika a měli by být i při svém humanitním zaměření na jisté matematické úrovni, výsledky výzkumných úloh tomu nenasvědčovali. Možná je to dáno i jistým formalismem při řešení kombinatorických úloh na humanitním gymnáziu, spíš se však přikláním k možnosti neznalosti přístupu k netradičním úlohám, kterými jistě matematické úlohy na šachovnici jsou. Žáci se s nimi ve výuce prakticky nesetkají. Pominu-li úlohy z učebnice matematiky uvedené ve kapitole 4 této práce. Ale i ty jsou formulovány tak, aby se na ně dal aplikovat formální kombinatorický aparát. Tedy poznat nebo uhádnout o jakou kombinatorickou skupinu jde a na výpočet použít vzorec. A o tom úlohy z pracovního listu č. 2 rozhodně nebyly.

Tabulka 10

Septima - GCHD	Úloha č. 1	Úloha č. 2	Úloha č. 3	Úloha č. 4
Pouze řešení	4	7	12	1
Částečné řešení	2	0	3	5
Úplné řešení	9	10	4	10
Úloha nezvládnuta	4	2	0	3
Celkem studentů	**19**	**19**	**19**	**19**

Graf 10



Poslední třídou ve výzkumu byla septima - matematická třída gymnázia Christiana Dopplera. Zde se dalo pochopitelně očekávat velké procento úspěšných řešení. Výzkum to jen potvrdil. Nerad bych nějak znehodnocoval řešení těchto žáků, ale úlohy byly primárně vybírány pro žáky humanitního gymnázia. Můžu se domnívat, že řešení základních matematických úloh na šachovnici mohlo žákům septimy matematického zaměření připadat až zoufale triviální. Přesto se i při řešení úloh, které žáci na svých pracovních listech našli, najdou řešitelé neúspěšní.

U první, druhé a čtvrté úlohy tak převažují úplná řešení. Tedy odpovědi na všechny otázky i s případným zdůvodněním.

Z grafu lze také jednoduše vyčíst, že pouze u třetí úlohy nenajdeme žáka, který by řešení alespoň částečně nezvládl. Ovšem u této úlohy procento odpovědí, které ve výzkumu klasifikuji jako „Pouze řešení“ přesahuje hodnotu šedesáti.

Z tabulky a grafu je zřejmé, že úlohy, které byly pro výzkum vybrány, žákům rok před ukončením vzdělání na matematickém gymnáziu výraznější problémy nedělají.

5.7.4. Výsledky řešení úloh v mezitřídním srovnání – Pracovní list č. 2

Výzkumu řešení se opět srovnávala řešení dvou tříd s humanitním zaměřením a jedné třídy matematické. Rozdíl byl ve věkovém zařazení třídy GCHD. Měl jsem k dispozici řešení žáků septimy. Celkový počet respondenů výzkumu byl nižší než u výzkumu řešení pro pracovní list 1. Srovnání se nakonec zúčastnilo 15 žáků prvního ročníku, 22 žáků třetího ročníku (obě třídy jsou z KG) a 19 žáků septimy GCHD.

Pro srovnání výsledků byla stěžejní řešení prvních čtyřech úloh na pracovním listu 2. Úloha 5 byla zařazena na pracovní list z důvodu historického významu matematiky na šachovnici. Tato úloha byla tedy vyhodnocena samostatně. Neočekával jse sice moc úspěšných řešení, přesto jsem byl závěrem výzkumu docela překvapen.

5.7.4.1. Výsledky řešení – Úloha 1

Úloha 1 *Určete maximální počet jezdců, které lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují. Dokažte, že vámi nalezený počet je skutečně maximální.*

Řešení úlohy se rozděluje na dvě části. Nejprve se hledá maximální počet vzájemně se neohrožujících jezdců a pak se dokazuje, že je toto číslo maximální.

Vyřešit celou úlohu včetně zdůvodnění, proč nalezený počet jezdců větší být nemůže, se podařilo pouze 9 žákům z GCHD. Ostatní řešitelé GCHD a žáci KG vyřešili úlohu jen částečně, tedy našli maximální počet neohrožujících se jezdců, nebo úlohu neřešili vůbec.

Překvapivě velký počet žáků třetího ročníku úlohu nedokázal vyřešit vůbec. Z jejich řešení je vidět, že si neuvědomují zásadní vlastnost šachové figury – jezdce. Tou je změna barvy pole při každém jezdcově tahu. Hodnota 24 (správná odpověď je 32) byla nejčastější hodnotou počtu jezdců v chybných řešeních.

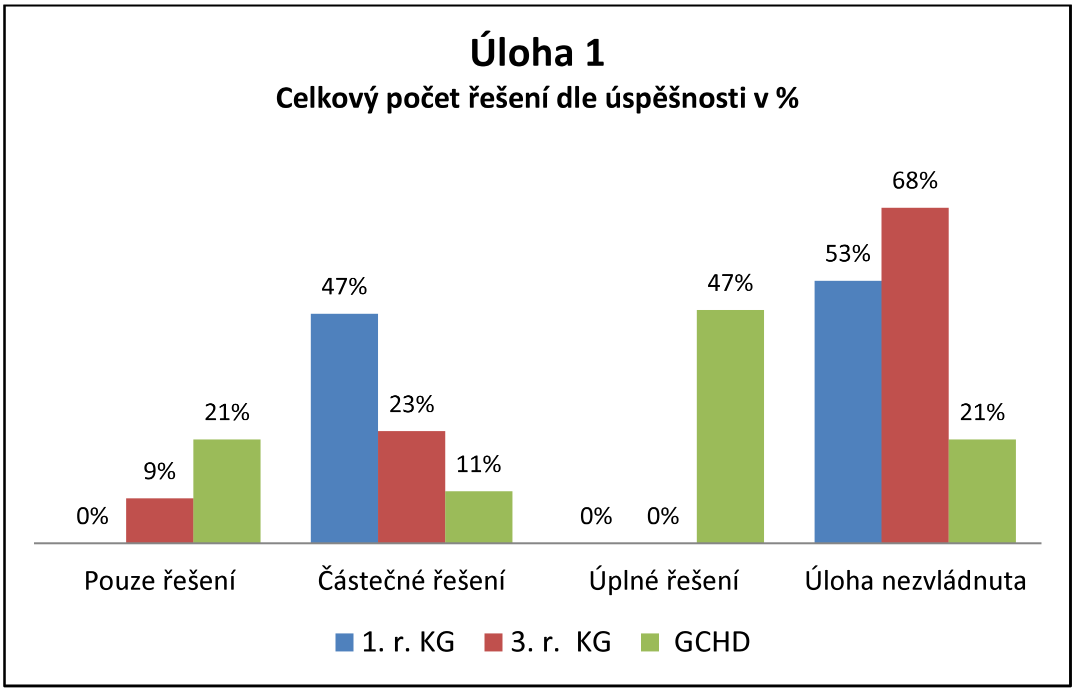
Ze septimy GCHD úlohu nezvládli pouze 4 žáci. Tedy i v tomto případě žáci matematického zaměření předčili své humanitní kolegy. Z tohoto počtu dva žáci úlohu neřešili vůbec a dva žáci napsali jako odpověď 20 jezdců (zde se můžu domnívat, že je to odpověď vzájemně domluvená).

U většiny žáků KG pak chybí odpověď na druhou část otázky. Případně grafická podpora jejich správného číselného závěru.

Tabulka 11

Úloha 1	1. r. KG		3. r. KG		septima GCHD	
Pouze řešení	0	0,0%	2	9,1%	4	21,1%
Částečné řešení	7	46,7%	5	22,7%	2	10,5%
Úplné řešení	0	0,0%	0	0,0%	9	47,4%
Úloha nezvládnuta	8	53,3%	15	68,2%	4	21,1%
Celkem studentů	**15**		**22**		**19**	

Graf 11



5.7.4.2. Výsledky řešení – Úloha 2

Úloha 2 *Jaký maximální počet králů lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují?*

Vzhledem k tomu, že zadání druhé úlohy je založeno pouze na zjištění maximálního počtu králů, počty úplných řešení dominovali nad ostatními možnostmi výsledů řešení. A to překvapivě u 3. ročníku KG. Zde byla třídní úspěšnost kompletního řešení více jak 70%. Ve srovnání s podobnou úlohou 1, kde naopak žádný ze žáků této třídy úlohu nevyřešil, je nárůst úplných řešení v úloze 2 přinejmenším zajímavý.

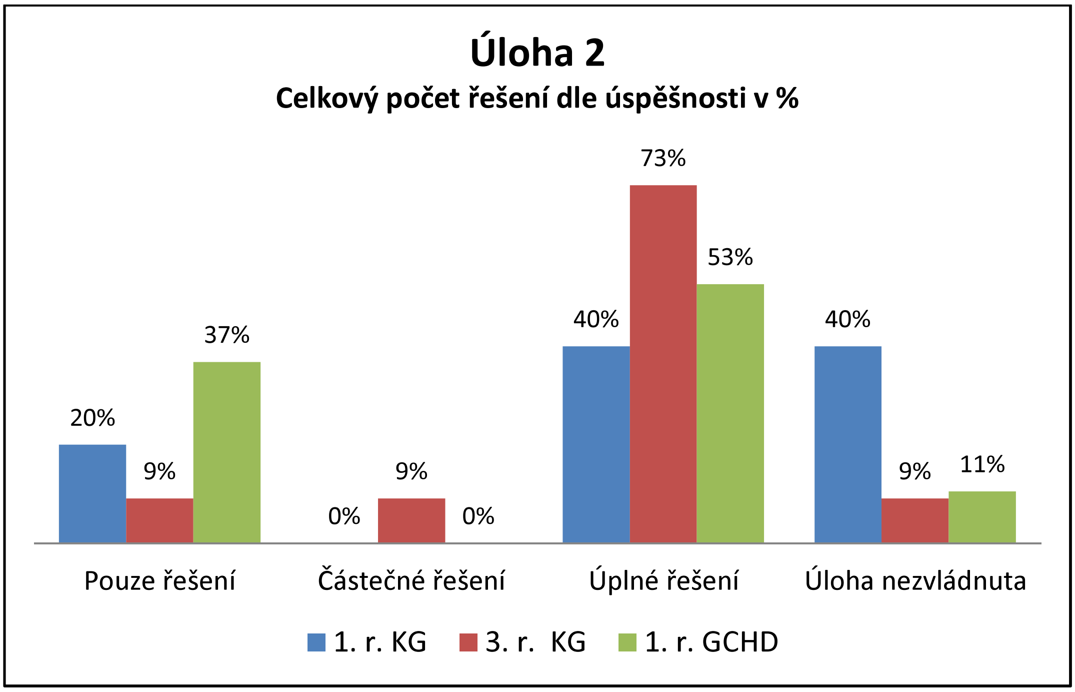
40% řešení žáků prvního ročníku KG úlohu vůbec nevyřešilo. Chybná řešení vycházela především v nevhodném zakreslování králů do předtištěné šachovnice.

Co se týká řešení, která se neopírala o grafický zápis či o jakékoli jiné zdůvodnění odpověděli takto v téměř 37 % žáci GCHD. Myslím si, že tato úloha byla pro žáky, zvyklé řešit a zdůvodňovat mnohem obtížnější úkoly až „směšně" jednoduchá. Potvrdili to i některé žákovské poznámky u jednotlivých řešení.

Tabulka 12

Úloha 2	**1. r. KG**		**3. r. KG**		**septima GCHD**	
Pouze řešení	3	20,0%	2	9,1%	7	36,8%
Částečné řešení	0	0,0%	2	9,1%	0	0,0%
Úplné řešení	6	40,0%	16	72,7%	10	52,6%
Úloha nezvládnuta	6	40,0%	2	9,1%	2	10,5%
Celkem studentů	**15**		**22**		**19**	

Graf 12



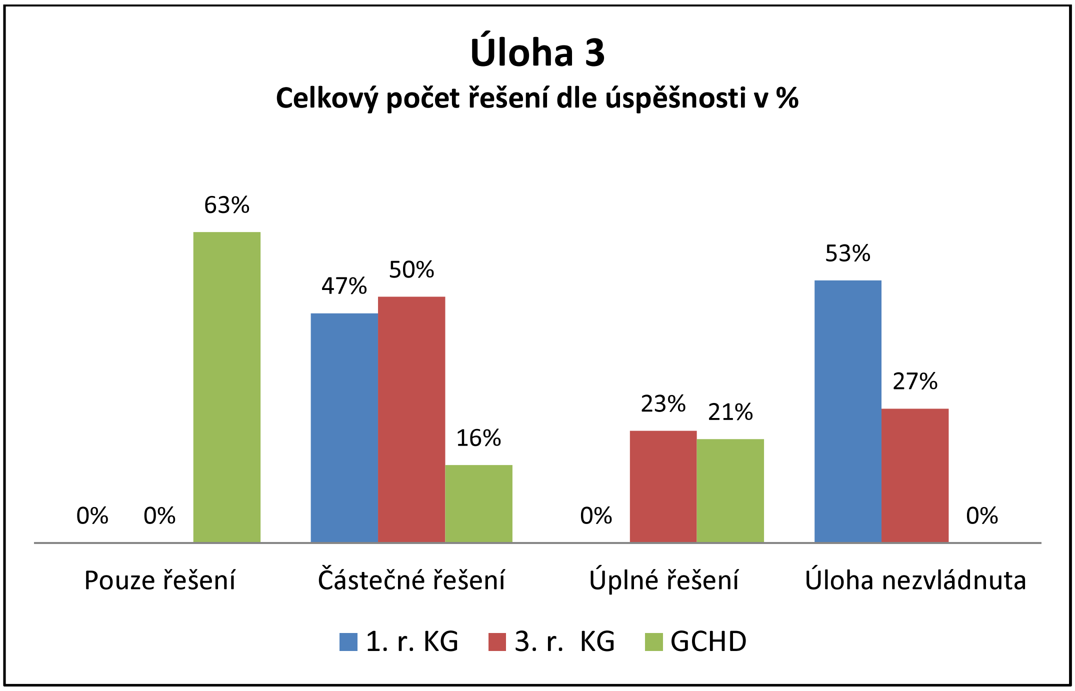
5.7.4.3. Výsledky řešení – Úloha 3

Úloha 3 *Lze na šachovnici 8 x 8 rozestavit více než 8 věží tak, aby se navzájem neohrožovaly?*

Tabulka 12

Úloha 3	**1. r. KG**		**3. r. KG**		**septima GCHD**	
Pouze řešení	0	0,0%	0	0,0%	12	63,2%
Částečné řešení	7	46,7%	11	50,0%	3	15,8%
Úplné řešení	0	0,0%	5	22,7%	4	21,1%
Úloha nezvládnuta	8	53,3%	6	27,3%	0	0,0%
Celkem studentů	**15**		**22**		**19**	

Graf 12



Odpovědi na otázku ze zadání úlohy 3 jsem do kritéria „pouze řešení“ zařadil ty odpovědi, které skutečně jen odpovídali na danou otázku. V této skupině jasně dominovali žáci GCHD a opět si myslím, že jen z důvodu méně obtížné úlohy své odpovědi nijak nezdůvodňovali.

V částečných řešeních tak převažují odpovědi zbylých dvou tříd. Jde o odpovědi podpořené alespoň jedním zakresleným rozestavěním osmi vzájemně se neohrožujících figur.

Úlohu nezvládla vyřešit více jak polovina řešitelů prvního ročníku KG. Toto číslo by možná mohlo být jiné, kdybych měl řešení celé třídy a ne jen 15 žáků. Zde se všech 15 řešení rozdělilo do dvou, v podstatě stejných skupin. Již zmíněná skupina žáků, kteří úlohu nevyřešili a žáci, kteří uvedli alespoň částečné řešení.

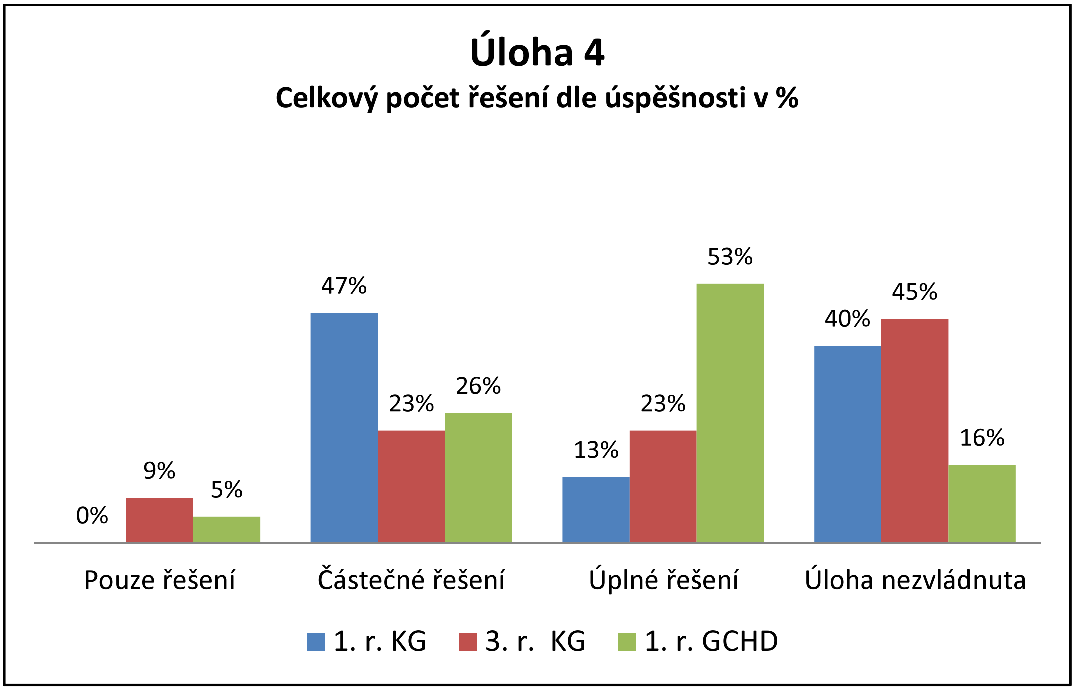
5.7.4.4. Výsledky řešení – Úloha 4

Úloha 4 *Jaký maximální počet střelců lze rozestavit na šachovnici 8x8 tak, že se žádní dva neohrožují? Kolik úhlopříčných „drah“ pro střelce existuje na šachovnici?*

Tabulka 13

Úloha 4	1. r. KG		3. r. KG		septima GCHD	
Pouze řešení	0	0,0%	2	9,1%	1	5,3%
Částečné řešení	7	46,7%	5	22,7%	5	26,3%
Úplné řešení	2	13,3%	5	22,7%	10	52,6%
Úloha nezvládnuta	6	40,0%	10	45,5%	3	15,8%
Celkem studentů	**15**		**22**		**19**	

Graf 13



Čtvrtá úloha typově patří mezi úlohy, ve kterých je nutné odpovědět na dvě otázky. To se povedlo více jak 50% žáků septimy GCHD. Opět se potvrzuje, že pokud mají žáci matematické třídy řešit úlohu, která vyžaduje širší vhled do úlohy, úlohu řeší úplně a svá řešení doplňují odpovídajícím matematickým komentářem. Taková úloha je pro ně zajímavá.

Úplně vyřešit tuto úlohu zvládlo i pět žáků třetího a dva žáci druhého ročníku KG.

Srovnání výsledků čtvrté úlohy ale jasně ukázalo, že humanitní třídy mají větší problém s pochopením a následným vyřešením úloh, které se v souboru úloh s danou problematikou něčím odlišují. Zde hledání úhlopříčných „drah“. Znamená to tedy, že často žáci našli maximální počet vzájemně se neohrožujících střelců, ale určení správného počtu diagonál bylo nad jejich síly. Možná i proto, že si nedokázali spojit vlastnosti tahu střelce společně s úhlopříčnými „drahami“ na šachovnici.

5.7.4.5. Řešení úlohy 5

Úloha 5 *Maximální počet navzájem se neohrožujících dam na šachovnici 8 x 8 je osm. Najděte alespoň jedno rozmístění těchto osmi dam.*

I přesto, že pátá úloha nebyla zařazena do samotného výzkumu, považoval jsem za zajímavé ji na pracovní list 2 zařadit. Je to jedna z několika historických úloh matematiky na šachovnici, se kterými by se žáci měli seznámit. Žáky může motivovat i proto, že svá řešení mohou konfrontovat s těmi nejvýznamnějšími světovými matematiky, kteří se problémem osmi dam zabývali.

Nepředpokládal jsem sice velké procento úspěšných řešení, přesto bylo zajímavé přístup žáků k této úloze sledovat.

V humanitní třídě třetího ročníku úlohu nikdo nevyřešil. Dokonce se o její řešení ani nepokusil. Naopak v prvním ročníku se několik žáků o nalezení takového rozmístění dam pokusilo, ale pouze jeden žák toto rozestavení našel. A to dokonce dva způsoby rozestavení. Věnoval sice této úloze v podstatě celý čas, určený pro řešení všech úloh listu 2, bylo však zajímavé vidět jeho uspokojení nad tím, že jako jediný dokázal najít řešení úlohy, kterou se zabýval i C. F. Gauss. Jeho snahu jsem jistě po právu ocenil známkou výbornou.

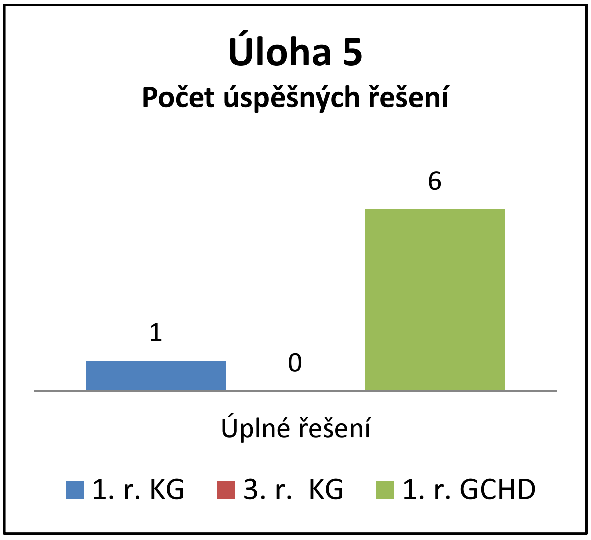
V septimě GCHD se o řešení páté úlohy pokusili všichni a šest žáků bylo úspěšných.

Celkem tuto úlohu vyřešilo 7 žáků. Z toho jeden ze žáků našel dvě rozestavení dam.

Tabulka 14

Úloha 5	**1. r. KG**	**3. r. KG**	**septima GCHD**
Úplné řešení	1	0	6
Celkem studentů	**15**	**22**	**19**

Graf 14



5.8. Shrnutí výsledků řešení úloh

Řešení úloh potvrdilo některé mé hypotézy. Mnozí žáci úlohy řeší, aniž by své závěry jakkoli zdůvodňovali. Je pravdou, že byly voleny záměrně jednodušší úlohy, které by žáky hned na začátku od řešení neodradily. Cením si řešení, která jsou podpořena grafickým znázorněním. Tento způsob řešení převažoval u žáků s humanitním zaměřením studia. Naopak žáci ze třídy s matematickým zaměřením zdůvodňovali svá řešení vesměs užitím algebry. Tedy např. dělitelnosti přirozených čísel.

Většina řešitelů se zde setkává s typově úplně novými úlohami a jistě se najdou tací, kteří nedokáží úlohu správně uchopit. To se mým výzkumem také potvrdilo. Problém nebyl ani tak v samotném nalezení správného řešení. Spíše ve zdůvodnění vlastních závěrů. V 1. ročníku humanitního gymnázia nemají žáci potřebný matematický aparát pro zdůvodňování svých řešení. Je to způsobeno i tím, že základní učivo obsahuje témata, která žáky nenutí k dalšímu přemýšlení o vlastních řešeních. V mnohých případech žáci požadují po učiteli algoritmus řešení, který jim většinu gymnaziálních úloh pomáhá vyřešit. Není to správný postup. Přesto se mnoho učitelů k těmto metodám uchyluje. Vítám proto jakékoli úlohy, které jakkoli vybočují z okruhu učebnicových úloh. A i pro většinu žáků jsou takovéto úlohy zpestřením, pro ně často nudné výuky matematiky.

Ve většině úloh byli úspěšnější žáci z gymnázia Christiana Dopplera. To jsem ostatně předpokládal. Ve výzkumu se ale objevili i úlohy, které lépe řešili žáci ze třídy humanitní. Např. úloha 2 z pracovního listu 2.

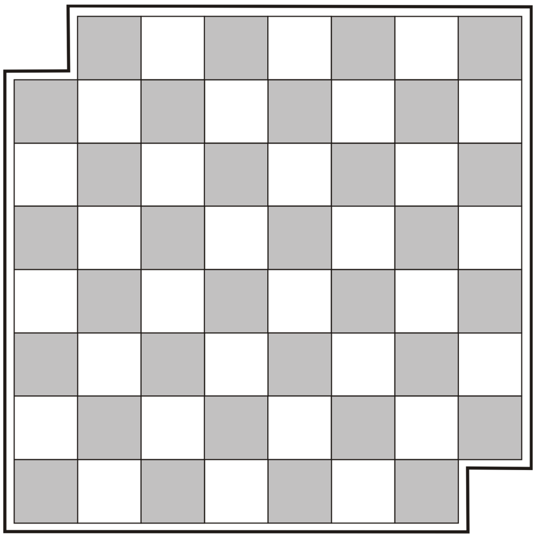
Některá neúspěšná či méně úspěšná řešení přisuzuji nedostatečnému seznámení se úlohou a nedostatečnému pochopení zadání. Tyto úlohy jsou pro žáky nové. I to má jistě vliv na řešení úloh. Myslím si, že by bylo vhodné nejprve některou z úloh se žáky vyřešit společně. Získají tím prvotní vhled do problematiky úloh na šachovnici a udělají si představu o postupech řešení těchto úloh.

6. ÚLOHY NA POKRYTÍ

Při úlohách na pokrytí šachovnice obrazci různých tvarů se budeme řídit určitými pravidly způsobu pokrytí. U převážné většiny těchto příkladů budeme o obrazcích hovořit jako o kamenech složených ze čtverců, které odpovídají jednotlivým polím šachovnice. Úplným pokrytím šachovnice pak rozumíme to pokrytí, kdy se žádné dva kameny navzájem nepřekrývají a současně každý z kamenů leží celým svým obsahem na šachovnici.

Př. 6.1 *Šachovnice 8 x 8, ve které jsou vyříznutá dvě protilehlá úhlová pole (tj. šachovnice, která má 62 polí, obr. 10) by měla být pokryta 31 dominovými kameny 2 x 1. Lze to provést?*

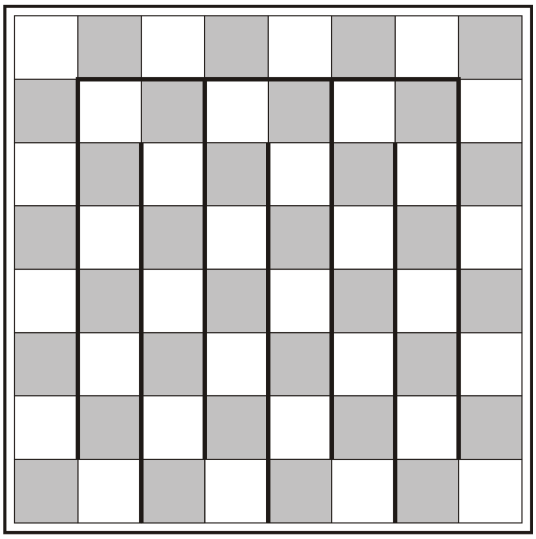
Řešení: Při libovolném pokrytí šachovnice každý kámen pokrývá právě jedno bílé a jedno černé pole. Naše oříznutá šachovnice má však o 2 pole jedné barvy méně než kolik je polí barvy druhé (vyřízneme-li pole *a8* a *h1*, je na šachovnici bílých polí o 2 méně než černých, to samé platí pro černá pole *a1* a *h8*). Proto pokrytí kameny nelze provést.



Obr. 10

Př. 6.2 *Šachovnice 8 x 8, ve které jsou vyříznutá dvě pole různé barvy má být pokryta kameny 2 x 1. Lze to provést?*

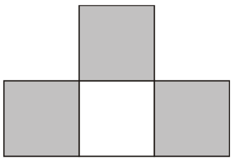
Řešení: Vyznačíme na šachovnici hranici mezi vertikálami a horizontálami tak, jak je ukázáno na obr. 11. V labyrintu mezi těmito hranicemi jsou černá a bílá pole vždy za sebou. Znamená to, že při procházení labyrintem se každým krokem mění barva pole (cesta, kterou je třeba vykonat při průchodu labyrintem je uzavřená).



Obr. 11

Vyřízneme-li dvě libovolná pole šachovnice různé barvy, cesta se přeruší: v jednom místě, pokud tato pole leží za sebou; ve dvou místech, pokud tato pole spolu nesousedí. Vždy však bude mít každá část přerušené cesty sudý počet polí (tj. stejný počet bílých i černých polí). Znamená to tedy, že takto upravenou šachovnici 8 x 8 lze pokrýt kameny 2 x 1 v každém z výše popsaných případů.

Př. 6.3 *Lze pokrýt šachovnici 10 x 10 dvaceti pěti kameny z obr. 12?*



Obr. 12

Řešení: Šachovnice 10 x 10 má právě 50 bílých a 50 černých polí. Pro umístění našeho kamene máme dva způsoby:

1) obrazec pokrývá právě jedno černé pole
2) obrazec pokrývá právě tři černá pole.

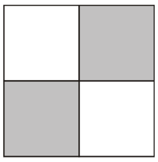
Pokaždé však pokrývá lichý počet černých polí. Obrazců pro pokrytí má být 25, tzn., že všechny pokrývají lichý počet černých polí. Černých polí je ale padesát, což je číslo sudé. Požadované pokrytí proto nelze provést.

Př. 6.4 *Na obr. 13 je znázorněno sjednocení dvou dominových kamenů 2×1, tj. kámen 2×2. Ukažte, že nelze pokrýt šachovnici 8×8 patnácti kameny z obr. 12 a jedním kamenem 2×2.*

Řešení: Nejprve zjistíme, jestli souhlasí počet polí, které by měly pokrýt kameny ze zadání úlohy. Skutečně, počet polí šachovnice 8x8 souhlasí s počtem polí obrazců.

$$15 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 64$$

Nyní se budeme zabývat možností pokrytí šachovnice. Při libovolném umístění kamene 2×2 na šachovnici (libovolným umístěním budeme rozumět to umístění, kdy kámen leží celým svým obsahem na šachovnici), pokrývá tento kámen dvě černá a dvě bílá pole. Na rozmístění zbylých patnácti kamenů z obr. 12 nám tedy na šachovnici zbude 30 černých a 30 bílých polí. Nyní je zřejmé, že takovéto pokrytí nelze provést. Číslo 30 je číslo sudé, ale kameny z obr. 12 pokrývají vždy lichý počet černých resp. bílých polí, viz př. 6.3.



Obr. 13

Obr. 14

Př. 6.5 *Lze pokrýt šachovnici 10×10 kameny 4 x 1, viz obr. 14?*

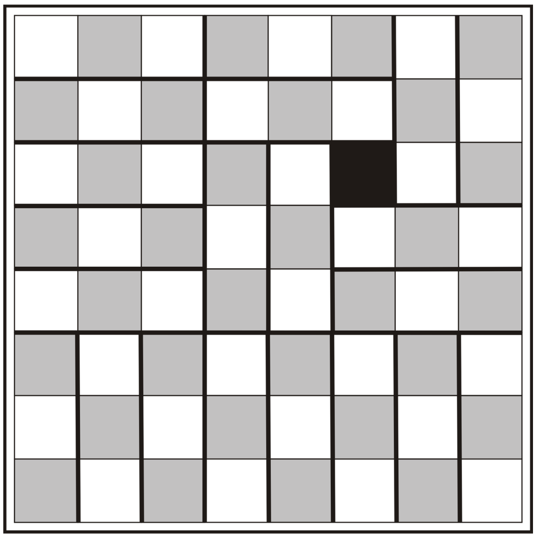
Řešení: K řešení tohoto a jemu podobných příkladů si zavedeme teorii, která nám jednoduše umožní určit možnost pokrytí libovolné pravoúhlé šachovnice kameny $k \times 1$.

Teorie: Šachovnici $m \times n$ lze pokrýt kameny $k \times 1$ právě tehdy, když alespoň jedno z čísel m a n je dělitelné číslem k.

Vraťme se nyní k řešení našeho příkladu a využijme zavedenou teorii. Kámen ze zadání úlohy má rozměry 4×1. To znamená, že 25 těchto kamenů by mohlo šachovnici 10×10 pokrýt. Ovšem využitím nové teorie je takovéto pokrytí vyloučeno. Číslo deset není totiž dělitelné čtyřmi.

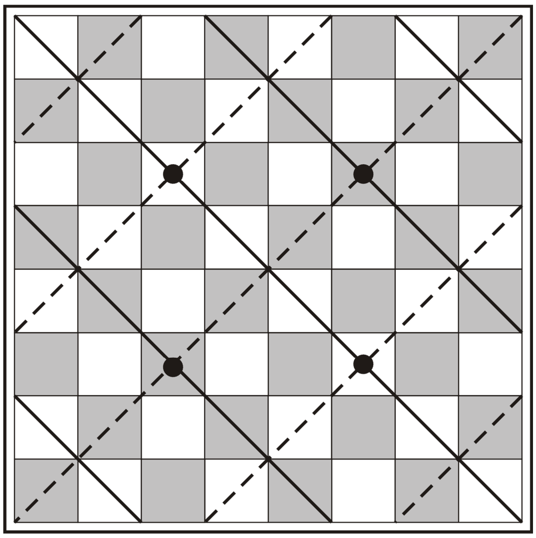
Př. 6.6 *Je možné pokrýt šachovnici 8 x 8 dvaceti jedním kamenem 3 x 1 a jedním kamenem 1 x 1? Pokud to jde, na jakém poli může ležet kámen 1 x 1?*

Řešení: Jedno z pokrytí je znázorněno na obr. 15.



Obr. 15

Pro získání všech možností umístění kamene 1 x 1 sestrojíme na šachovnici dva systémy rovnoběžných přímek, obr. 16.



Obr. 16

Při libovolném pokrytí šachovnice každý kámen 3 x 1 pokrývá právě jedno pole, které protíná přímka ze systému čárkovaných, a taktéž právě jedno pole protnuté přímkou ze systému plných čar. Polí, která protínají přímky čárkované, je právě dvacet dva, stejně tak je polí, která jsou protnuta čarami plnými. Ovšem kamenů 3 x 1 je právě dvacet jedna; viz zadání úlohy. Proto může kámen 1 x 1 pokrývat vždy právě to pole, které protínají přímky z obou skupin.

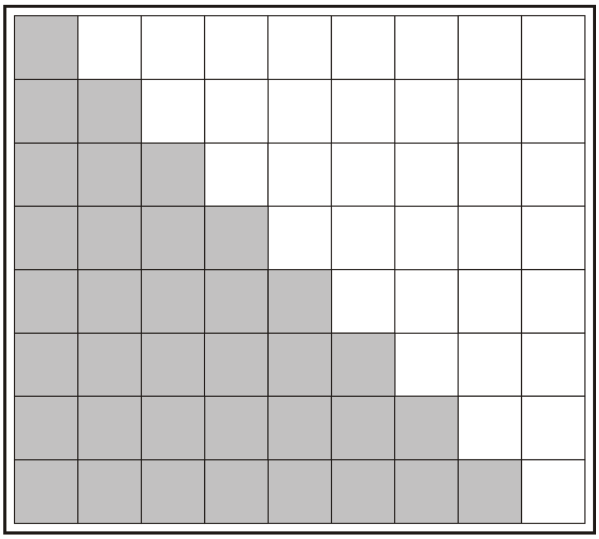
Tato pole jsou čtyři: *c3, c6, f3, f6.* Tzn., že pokrytí lze provést, jestliže je kámen 1 x 1 umístěn na jedno z těchto polí.

7. MATEMATICKÉ VZORCE NA ŠACHOVNICI

Př. 7.1 *Součet přirozených čísel 1 až n.*

Řešení: Pro odvození vzorce pro součet prvních *n* přirozených čísel vezmeme šachovnici $(n + 1) \times n$.

Na šachovnici obarvíme na černo všechna pole první vertikály, všechna pole druhé vertikály (kromě prvního horního pole), všechna pole třetí vertikály (kromě prvních dvou horních) atd.; nakonec obarvím nejnižší pole k-té vertikály, (na obr. 17. je pro představu odvození vzorce šachovnice 9 x 8).



Obr. 17

Po tomto obarvení dostaneme stejný počet polí černých i bílých, a to

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ + n$

Celá šachovnice má $n \times (n + 1)$ polí. Černých a bílých polí je dohromady

$2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n)$.

Pak platí

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n) = n \cdot (n + 1)$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5\ + \ldots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2},$$

což je vzorec pro součet prvních *n* přirozených čísel.

Př. 7.2 *Metodou šachovnice odvoďte vztah:*

$8 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) + 1 = (2n + 1)^2$.

Řešení: Pro odvození daného vzorce použijeme šachovnici

$(2n + 1)$ x $(2n + 1)$.

Šachovnicová pole pak barvíme tak, jak je znázorněno na obr. 18

(zde pro $n = 4$, tedy šachovnice 9 x 9).

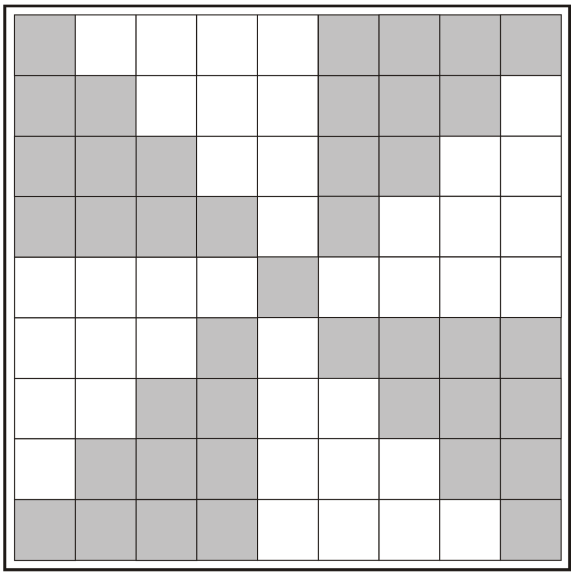
Po tomto obarvení je na šachovnici celkem osm shodných obrazců a jedno pole středové.

Každý bílý obrazec obsahuje právě $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$ polí. Každý černý obrazec obsahuje stejný počet polí jako bílý.

Šachovnice má celkem $(2n + 1)^2$ polí tj.

$8 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n) + 1$,

což je vzorec, který měl být odvozen.



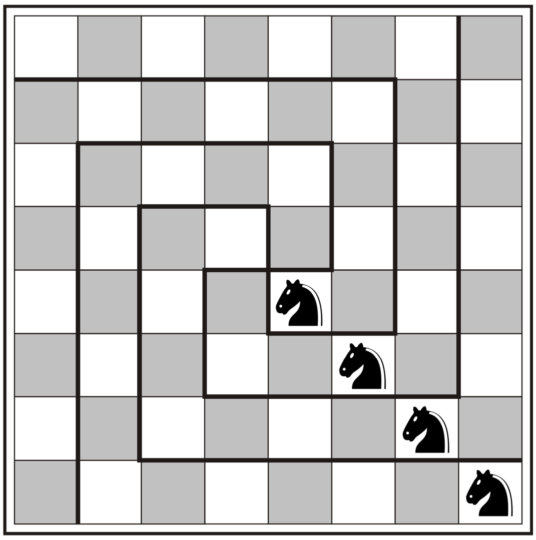
Obr. 18

8. ÚLOHY SPOJENÉ S ŘEZY, VEDENÉ ŠACHOVNICÍ

V úlohách na rozřezání šachovnice se ve většině případů předpokládá, že řezy jsou vedeny pouze po hranicích mezi vertikálami a horizontálami. Řežeme vždy tak, abychom získali shodné části.

Př. 8.1 *Na polích h8, g7, f6, e5 stojí čtyři jezdci. Rozřežte šachovnici na čtyři shodné části tak, aby na každé z nich stál jeden jezdec.*

Řešení: Úloha je řešena na obr. 19.



Obr. 19

Pozn. V úlohách tohoto typu plní šachové figury pouze symbolickou roli.

Př. 8.2 *Připusťme, že lze šachovnici řezat tak, aby se vždy po provedeném řezu vzniklé shodné části mohly přemístit na sebe a následujícím řezem pak bylo možno získat současně několik částí. Kolik řezů je za těchto podmínek potřeba k získání 64 oddělených polí šachovnice?*

Řešení: Nejprve rozřízneme šachovnici na dva obdélníky 4×8. Tyto dva obrazce přemístíme na sebe tak, aby se překrývaly, a vedeme další řez. Získáme čtyři shodné obdélníky 4×4. Ty opět umístíme na sebe a pokračujeme stejným způsobem. Posledním řezem pak získáme 64 oddělených polí. Lehce se zjistí, že je potřeba 6 řezů (pokud je dodrženo pravidlo shodnosti získaných částí).

1. řez $2^1 = 2$ části
2. řez $2^2 = 4$ části
3. řez $2^3 = 8$ částí
4. řez $2^4 = 16$ částí

5. řez $2^5 = 32$ částí

6. řez $2^6 = 64$ částí,

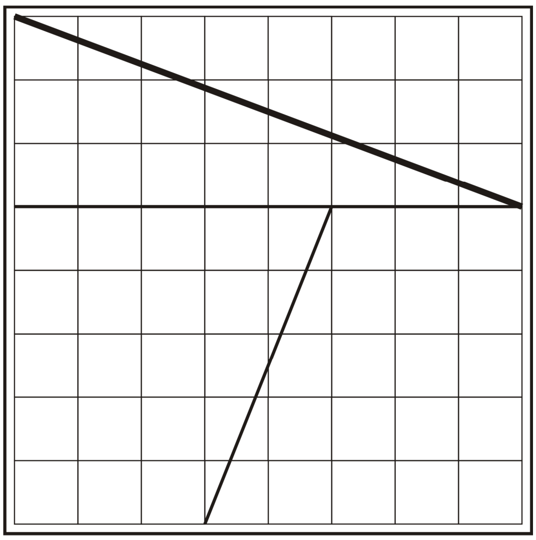
a tím je i dokázáno, že s menším číslem počtu řezů si nevystačíme.

Př. 8.3 *Nechť se nyní mohou části šachovnice řezat pouze odděleně. Kolik řezů je třeba pro získání 64 polí v tomto případě?*

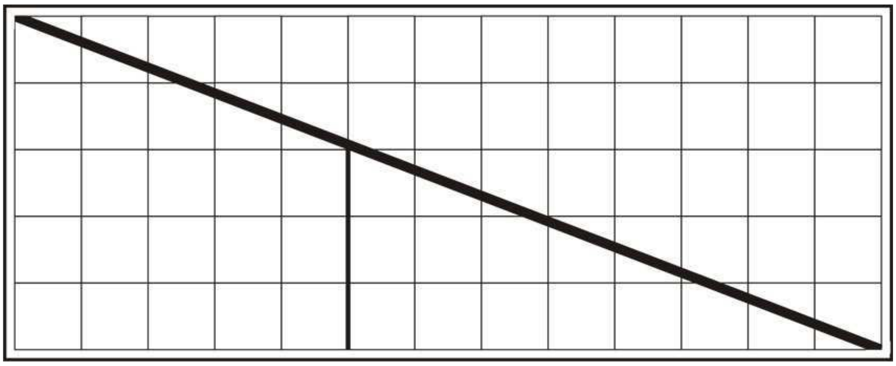
Řešení: Je patrné, že je potřeba právě 63 řezů. Každý řez totiž zvětší číslo počtu rozřezaných částí o jedničku; přičemž při nultém řezu máme jednu část (celou šachovnici), při prvním řezu dvě části atd., až v posledním 64 částí (všechna oddělená pole šachovnice).

Př. 8.4 *Matematický paradox spojený s rozřezáním šachovnice*.
Rozřežeme šachovnici na čtyři geometrické útvary tak, jak je to ukázáno na obr. 20 (v daném případě vezmeme šachovnici, jejíž pole jsou pouze jedné barvy, bílá resp. černá), a ze vzniklých obrazců složíme obdélník obr. 21. Obsah šachovnice 8 x 8 je roven 64, ale obsah získaného obdélníka je roven 65. Odkud se tedy vzalo jedno pole navíc?

Řešení: Řešení paradoxu spočívá v tom, že náš nákres nebyl proveden úplně přesně (některé čáry jsou úmyslně vyznačeny tlustě za účelem zakrytí nepřesností). Pokud vezmeme jednotlivé části rozřezané šachovnice a pokusíme se je složit na obdélník z obr. 21, místo úhlopříčky obdélníka obdržíme kosodélník, jako slabě vytaženou část se stranami, které téměř splývají (toto je zakryto tlustou čarou z obr. 21). Obsah tohoto kosodélníku je roven právě té jedničce, o kterou se liší plochy čtverce 8 x 8 a obdélníka 13 x 5.



Obr. 20



Obr. 21

Př. 8.5 *Určete, kolik různých pravoúhelníků o rozměrech $k \times l$ složených z celého čísla počtu polí, lze nalézt na šachovnici 8×8?*

Řešení: Každý takovýto pravoúhelník lze získat, jestliže vybereme na šachovnici *k* za sebou následujících vertikál a *l* za sebou následujících horizontál, obr. 22.

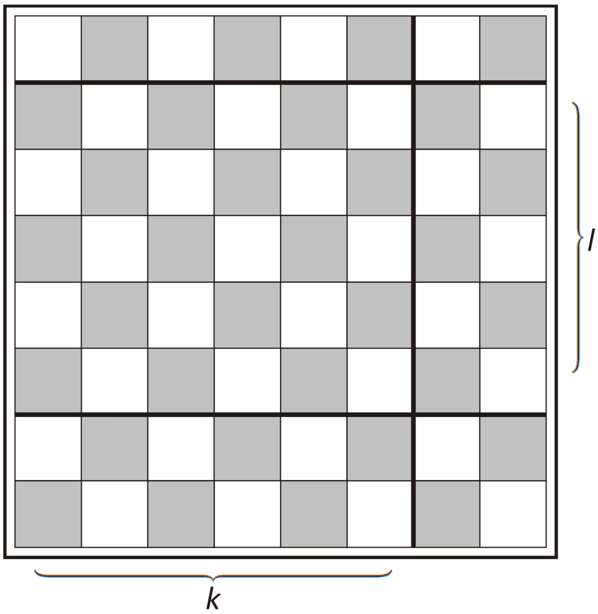
Skupiny obsahující *k* po sobě následujících vertikál lze vybrat

$8 - k + 1 = 9 - k$ různými způsoby.

První vertikálou skupiny může být první, druhá, …, $8 - k + 1$-ní vertikála šachovnice.

Analogicky *l* po sobě následujících horizontál lze vybrat

$8 - l + 1 = 9 - l$ způsoby.



Obr. 22

Odtud plyne, že pravoúhelník šířky *k* a výšky *l* lze vybrat právě

$(9 - k) \cdot (9 - l)$ různými způsoby.

Tedy na šachovnici 8 x 8 existuje nejvýše $(9-k)\cdot(9-l)$ takových pravoúhelníků.

Nyní sečteme, kolik existuje na šachovnici různých pravoúhelníků dané šířky *k.* Výška *l* pravoúhelníku se může měnit od 1 do 8.

Počet takových pravoúhelníků je roven číslu

$$(9-k)(9-1)+(9-k)(9-2)+\ldots+(9-k)(9-8)=$$
$$=(9-k)(8+7+6+\ldots+1)=36(9-k)$$

Vezmeme nyní v úvahu, že šířka *k* pravoúhelníku se také mění od 1 do 8. Hledaný počet pravoúhelníků v tomto případě je

$$36(9-1)+36(9-2)+\ldots+36(9-8)=$$
$$=36\cdot 36=1296$$

Zobecníme-li tuto úlohu a zjišťujeme-li počet pravoúhelníků šířky *k* a délky *l* na šachovnici *n* x *n,* dostaneme se k číslu
$(n-k+1)(n-l+1).$

Počet existujících pravoúhelníků dané šířky *k,* je roven

$$(n-k+1)(1+2+3+\ldots+n)=(n-k+1)\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

a počet všech možných pravoúhelníků na šachovnici *n* x *n* je

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}(1+2+3+\ldots+n)=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2.$$

Př. 8.6 *Kolik různých čtverců existuje na šachovnici 8 x 8?*

Řešení: Řešení této úlohy je úzce spjato s řešením př. 8.5. Využijeme-li všech vztahů odvozených v této úloze. Počet různých čtverců složených z *k* x *k* polí, které lze najít na šachovnici o 64 polích, je roven $(9-k)^2$. Odtud získáme počet všech možných čtverců jako součet kvadrátů

$$8^2+7^2+\ldots+1^2=64+49+36+25+16+9+4+1=$$
$$=\sum_{i=1}^{8} i^2 \;=204$$

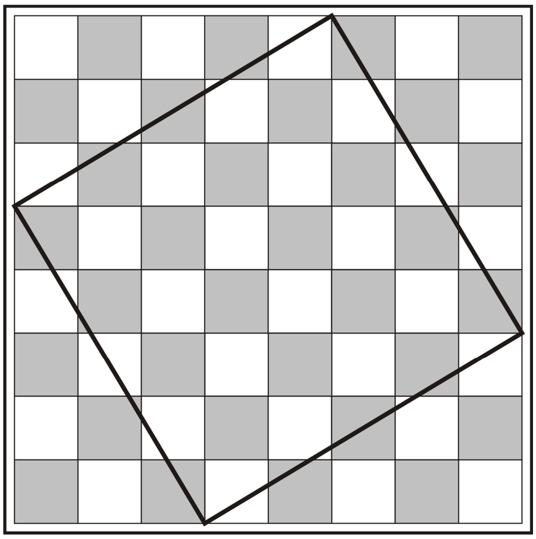
Obecným řešením této úlohy pro šachovnici n x n dostaneme

$$1^2+2^2+3^2\ldots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\text{ různých čtverců.}$$

9. DŮKAZY MATEMATICKÝCH VĚT METODOU ŠACHOVNICE

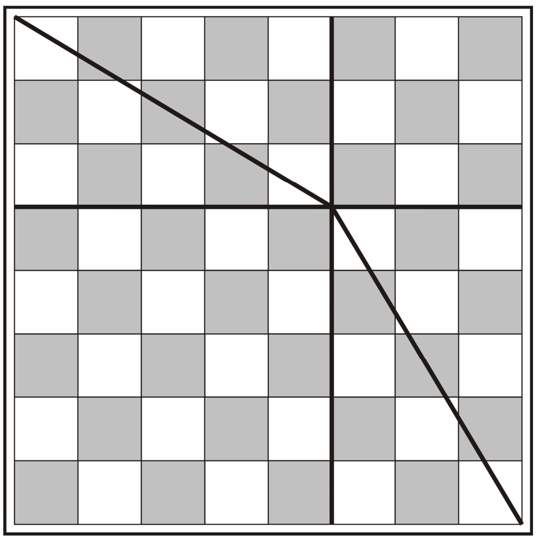
Př. 9.1 *Dokažte metodou šachovnice Pythagorovu větu.*

Řešení: Na šachovnici sestrojíme čtverec tak, jak je vidět na obr. 23. Šachovnice se rozpadne na tento čtverec a čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky.



Obr. 23

Na obr. 24 jsou vidět tytéž čtyři trojúhelníky, ale tentokrát dva různé čtverce.



Obr. 24

Trojúhelníky v obou případech pokrývají stejnou část šachovnice. Je tedy jasné, že zbylé části šachovnice mají také stejný obsah; na obr. 23 tvořené jedním čtvercem; na obr. 24 tvořené dvěma různými čtverci.

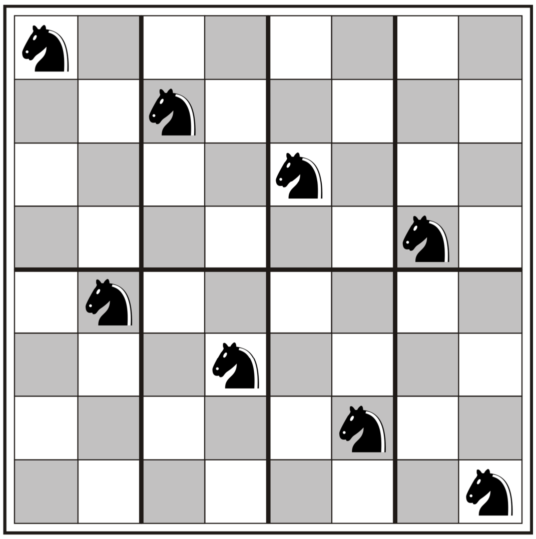
Vzhledem k tomu, že velký čtverec je sestrojen nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka a menší dva po řadě nad oběma jeho odvěsnami, je znění Pythagorovy věty zcela dokázáno.

10. ÚLOHY O ROZMÍSTĚNÍ MAXIMÁLNÍHO POČTU FIGUR TÉHOŽ DRUHU

Př. 10.1 *Určete maximální počet jezdců, které lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují.*

Řešení: Jezdec stojící na bílém poli ohrožuje jen černé pole, proto je možné rozestavit 32 jezdců na stejnobarevná pole. Maximální počet jezdců je tedy větší nebo roven 32. Dokažme, že větší být nemůže.

Šachovnici rozdělíme na obdélníky 2 x 4, tak jak to ukazuje obr. 25.



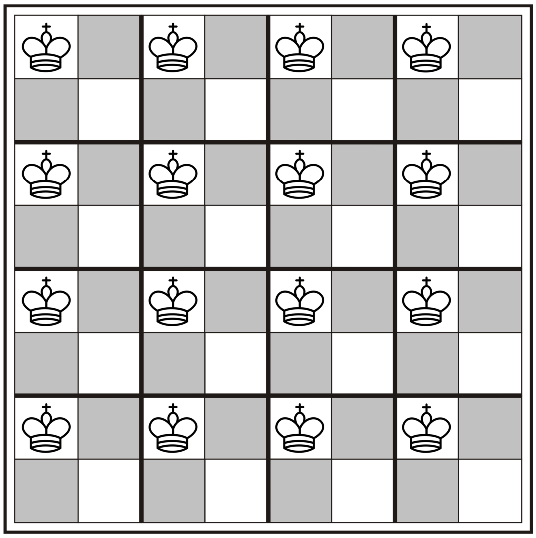
Obr. 25

Jezdec umístěný na jednom poli obdélníka ohrožuje právě jedno další pole tohoto obdélníka. Toto přiřazení je prosté. Z tohoto důvodu mohou být v obdélníku nejvýše čtyři jezdci, celkem na šachovnici nejvýše 32 jezdci.

Př. 10.2 *Jaký maximální počet králů lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují?*

Řešení: Král stojící na libovolném poli šachovnice ohrožuje všechna pole přímo sousedící s tímto polem. Pro určení maximálního počtu vzájemně se neohrožujících králů rozdělíme šachovnici na čtvercová pole 2 x 2. Těchto polí je právě 16.

Král umístěný na libovolné pole tohoto čtverce ohrožuje zbylá 3 pole v tomto čtverci. Při vhodném rozmístění králů do čtverců 2 x 2 dostaneme právě 16 navzájem se neohrožujících králů, obr. 26.

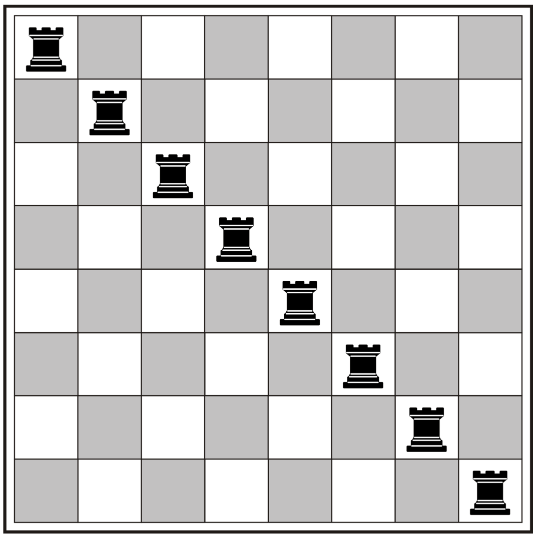


Obr. 26

Př. 10.3 *Lze na šachovnici 8 x 8 rozestavit více než 8 věží tak, aby se navzájem neohrožovaly?*

Řešení: Každá věž libovolně postavená na šachovnici, ohrožuje právě dvě na sebe kolmé „dráhy“ (tj. vodorovnou a svislou). Vodorovných drah je 8. Stejně tolik je i drah svislých. Dohromady tedy 16 drah pro pohyb věže.

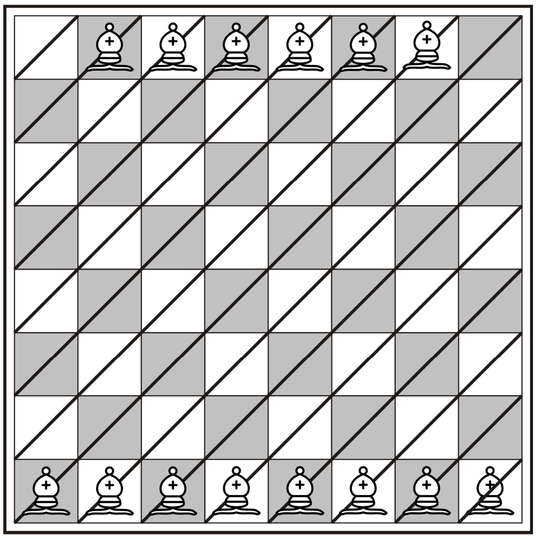
Vzhledem k ohrožení dvou kolmých drah jedinou věží a celkovému počtu těchto drah na šachovnici lze rozestavit nejvýše 8 věží tak, že se žádné dvě navzájem neohrožují. Jedno z možných rozestavění je znázorněno na obr. 27.



Obr. 27

Př. 10.4 *Jaký maximální počet střelců lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují? Kolik úhlopříčných „drah“ pro střelce existuje na šachovnici?*

Řešení: Pro nalezení počtu navzájem se neohrožujících střelců sestrojíme na šachovnici systém patnácti diagonál znázorněných na obr. 28. Jestliže se žádní dva střelci neohrožují, nesmí na každé z těchto diagonál (úhlopříčných „drah“ pro střelce) stát více jak jeden střelec. Vzhledem k tomu, že diagonály pokrývají všechna pole šachovnice, počet neohrožujících se střelců nebude větší než patnáct. Patnáct navzájem se neohrožujících střelců se však nepodaří rozestavit, protože obě krajní diagonály se skládají pouze z jednoho pole, přičemž obě tyto pole leží na diagonále *a1 - h8.* Rozestavení na obr. 28 ukazuje, že těchto střelců může být maximálně čtrnáct.



Obr. 28

Př. 10.5 *Na 64 polích šachovnice jsou napsána čísla od 1 do 64 (na první horizontále a1 - a8 od 1 do 8, na další b1 – b2 od 9 do 16, atd.). Rozmístíme na šachovnici osm navzájem se neohrožujících věží. Jakou hodnotu bude mít součet čísel na polích, obsazených věžemi?*

Řešení: Číslo na *i*-té vertikále a *j*-té horizontále je možné zapsat takto:

$i + 8(j-1); i, j = 1, 2, 3, \dots, 8$

Vzhledem k tomu, že se věže navzájem neohrožují, na každé vertikále a horizontále stojí pouze jedna z nich. To znamená, že součet čísel na polích, obsazených těmito věžemi, je roven

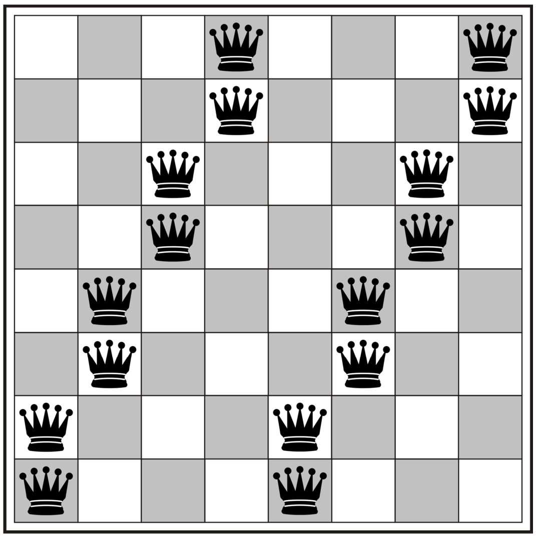
$$\sum_{i=1}^{8} i + \sum_{j=1}^{8} 8(j-1) = (1+2+3+\dots+8) + 8(0+1+2+\dots+7)$$

Jednoduchým výpočtem zjistíme, že je tento součet roven 260 a není závislý na rozestavení těchto vzájemně se neohrožujících věží.

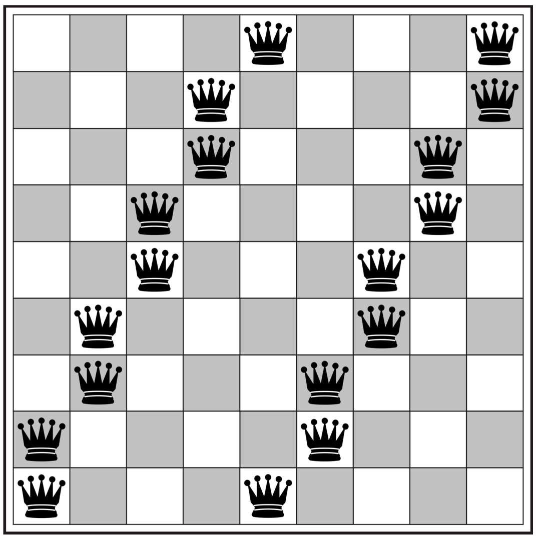
Př. 10.6 *Rozmístěte na šachovnici $n \times n$ ($n > 1$) $2n$ dam tak, aby na každé vertikále, horizontále a diagonále stály maximálně dvě dámy.*

Řešení: Je zřejmé, že více jak 2*n* dam, vyhovujících podmínkám úlohy, rozestavit nelze.

Na obr. 29 je znázorněno rozestavení 16 dam na šachovnici 8 x 8 a na obr. 30 pak 18 dam na šachovnici 9 x 9. Je vidět, že rozestavení na obr. 29 je zobecněním všech sudých šachovnic (šachovnic se sudým číslem *n)* a rozestavení na obr. 31 všech šachovnic lichých (šachovnic s lichým číslem *n*). Na sudých šachovnicích jsou dámy vždy rozestaveny ve dvojicích; oproti šachovnicím lichým, kde jsou dámy z jedné dvojice (na prostřední vertikále) odděleny od sebe.

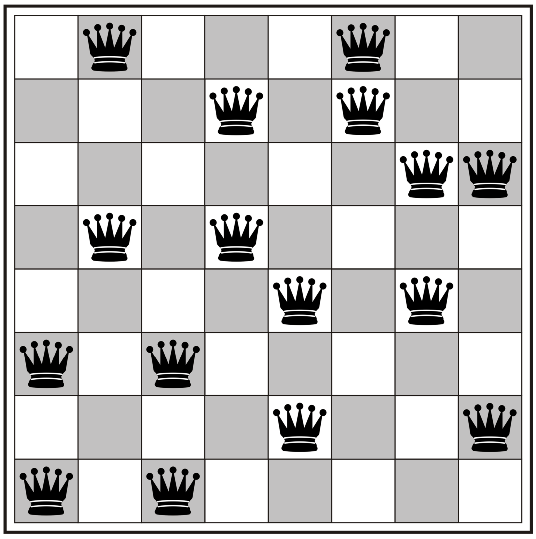


Obr. 29



Obr. 30

Pozn. Všimněme si, že řešení této úlohy pro šachovnici 8x8 objevené britským „šachovým matematikem“ Samuelem Loydem, kdy dámy stojí na polích *a2, a6, b4, b6, c7, c8, d2, d4, e5, e7, f1, f3, g5, g8, h1, h3* viz obr. 31, je na první pohled jiné než řešení z obr. 21, ale toto řešení se nepodaří zobecnit pro jiné šachovnice.



Obr. 31

11. ÚLOHY, URČUJÍCÍ POČET ROZESTAVENÍ VZÁJEMNĚ SE NEOHROŽUJÍCÍCH FIGUR TÉHOŽ DRUHU

Př. 11.1 *Kolika různými způsoby lze na šachovnici n x n rozestavit n vzájemně se neohrožujících věží?*

Řešení: Všimněme si, že při rozestavení více než *n* věží bude aspoň na jedné vertikále nebo horizontále více jak jedna věž. Z toho plyne, že číslo *n* je největší možné číslo počtu rozestavení vzájemně se neohrožujících věží na šachovnici *n x n.* Jedním z nejjednodušších rozmístění je rozestavení věží na pole hlavní diagonály (pole *a1*, *b2*, *c3*, *d4*, *e5*, *f6*, *g7*, *h8*,pro šachovnici 8 x 8 ; obr. 32).

Pokusíme se nyní zjistit celkový počet takovýchto rozestavení. Označme věž, stojící na první horizontále, jako věž „první“, věž stojící na druhé horizontále jako „druhou“, atd., až věž, stojící na *n-té* horizontále jako věž „*n*-tou“.

První věž je možno umístit na libovolnou z *n* horizontál, druhou na libovolnou z (*n* - 1) zbylých horizontál, třetí na libovolnou z (*n* - 2) horizontál, až (*n* - 1)-ní věž lze umístit na jednu ze dvou zbylých horizontál a poslední *n*-tou, která může stát na jediné zbylé horizontále. Zkombinujeme-li *n* různých rozestavení první věže s (*n* - 1) rozestaveními druhé, (*n* - 2) třetí, atd., získáme

$$n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 \ = n!$$

Výpočtem snadno zjistíme, že rozestavit osm navzájem se neohrožujících věží na šachovnici 8 x 8 můžeme právě $8!$. Tedy 40 320 způsoby.

Jiné řešení dostaneme, pokud se budou jednotlivé věže od sebe navzájem lišit. Např. budou-li mít každá jinou barvu nebo budou-li očíslované. V tomto případě získáme $(n!)^2$ různých rozestavení *n* věží vzájemně se neohrožujících. To vyplývá z toho, že *n* vyhovujících polí lze vybrat $n!$ způsoby a stejně tolik způsobů je pro rozestavení *n* od sebe se rozlišujících věží na těchto polích.

Pozn. Tohoto čísla počtu rozmístění rozlišujících se věží lze dosáhnout ještě jiným způsobem. První věž lze postavit na libovolné z n^2 polí. Vyškrtneme-li vertikálu a horizontálu, které má v držení tato věž, zbyde šachovnice s n - 1 horizontálami a s n - 1 vertikálami, to znamená šachovnice s $(n-1)^2$ poli.

Druhá věž může tedy být postavena $(n-1)^2$ způsoby. Stejně tak třetí věž může být postavena $(n-2)^2$ způsoby, atd.
Výpočtem získáme

$$n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot (n-2)^2 \cdot \ldots \cdot 2^2 \cdot 1^2 = (n!)^2$$

způsobů rozestavení věží.

Př. 11.2 *Mějme šachovnici m x n (tj. šachovnici, která má m vertikál a n horizontál). Kolika způsoby lze rozestavit na tuto šachovnici k věží tak, aby se navzájem neohrožovali?*

Řešení: Pro řešení úlohy je nutné, aby čísla m, n a k splňovaly podmínky $k \leq m$ a $k \leq n$, jinak by nějaké dvě věže stály na jedné a té samé horizontále nebo vertikále, a tak se vzájemně ohrožovaly.

Nechť jsou tedy tyto podmínky splněny. Rozestavení věží pak můžeme rozdělit na dvě části. Nejdříve vybereme horizontály, na kterých budou stát tyto věže. Protože je počet horizontál *n* a pro rozmístění *k* vzájemně se neohrožujících věží potřebujeme vybrat právě *k* horizontál, je tento výběr jednoznačně určen číslem $\binom{n}{k}$.

Stejně tak vertikály, na kterých mohou tyto navzájem se neohrožující věže stát lze vybrat právě $\binom{m}{k}$.

Vzhledem k tomu, že výběr vertikál není závislý na výběru horizontál, podle kombinatorického pravidla součinu získáme $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$ způsobů výběru linií, kde stojí.

Tímto ovšem hledání počtu věží s požadovanými vlastnostmi nekončí. Je jasné, že *k* horizontál a *k* vertikál se protíná právě v k^2 polích. Dáme-li k sobě, je-li to nutné, tyto pole, získáme tak novou šachovnici o *k* horizontál a *k* vertikál. Z př. 7.1 již víme, že na takovéto šachovnici lze *k* vzájemně se neohrožujících věží rozestavit právě *k!* způsoby.

Číslo požadovaných rozestavení těchto věží je pak rovno součinu

$$\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{m! \cdot n!}{k! \cdot (m-k)! \cdot (n-k)!}$$

Pozn. Např., tři navzájem se neohrožující věže lze na šachovnici 8 x 8 rozestavit právě

$$\frac{8! \cdot 8!}{3! \cdot (8-3)! \cdot (8-3)!} \text{ způsoby.}$$

Při $k = m = n$ má počet rozestavení hodnotu *n!,* což odpovídá řešení př. 7.1. Pokud zrušíme podmínku, že se rozestavené věže vzájemně neohrožují, stačí nám vybrat *z m* x *n* polí libovolných *k* polí. To lze udělat

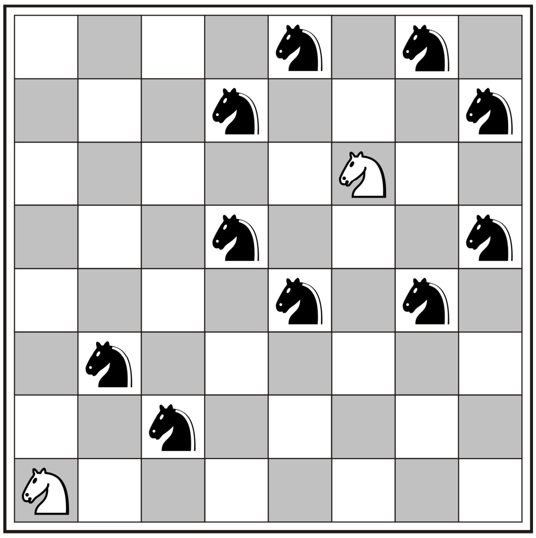
$$\binom{m \cdot n}{k} = \frac{(m \cdot n)!}{k!\, m!\, n!}$$

A pokud by se ještě navíc jednotlivé věže od sebe lišily (očíslování, různá barva), získaná čísla bychom vynásobili číslem *k!.*

Př. 11.3 *Kolika různými způsoby lze na šachovnici 8 x 8 rozestavit 32 vzájemně se neohrožujících jezdců?*

Řešení: Více jak 32 vzájemně se neohrožujících jezdců se na šachovnici 8 x 8 rozestavit nepodaří (důkaz byl proveden v př. 10.1).

Vyjdeme-li z tohoto důkazu a obr. 17, snadno zjistíme, že umístění těchto jezdců na šachovnici 8 x 8 lze provést pouze dvěma způsoby. A to mohou být rozmístěni právě na bílých resp. černých polích. To vyplývá i z vlastnosti tahu jezdce, kdy jezdec mění v každém táhnutí barvu pole, na kterém stojí.



Obr. 32

Jakmile by tedy stál libovolný jezdec z těchto třiceti dvou na poli jiné barvy než ostatní, okamžitě by byl ohrožován nejméně dvěma a maximálně osmi jinými jezdci, viz obr. 32.

12. ÚLOHY O OVLÁDNUTÍ VŠECH POLÍ MINIMÁLNÍM POČTEM FIGUR TÉHOŽ DRUHU

Existuje dvojí pojetí úloh, pokud jde o pole obsazená figurami:

a) tato pole se považují za ovládnutá

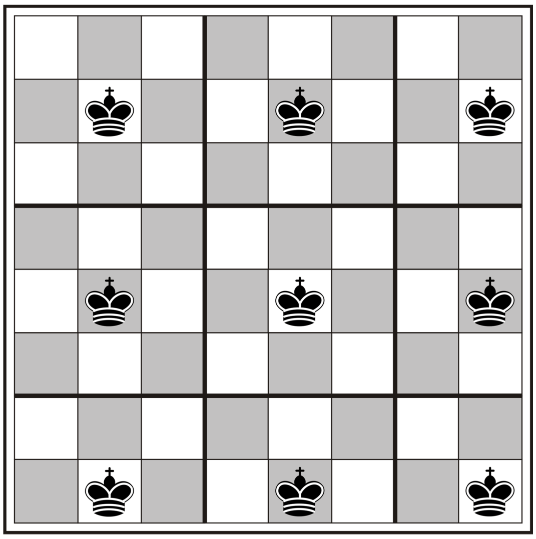
b) tato pole se nepovažují za ovládnutá a požaduje se, aby je ovládala figura z jiného pole.

Př. 12.1 *Určete minimální počet králů, kteří mohou ovládat všechna pole šachovnice 8 x 8 způsobem a) resp. b).*

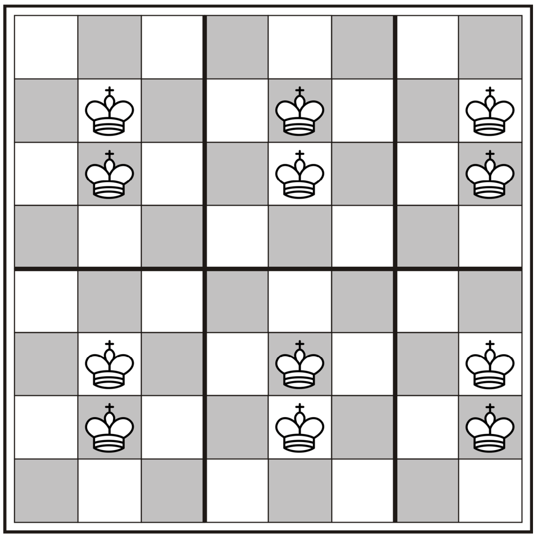
Řešení: Úlohu budeme řešit oběma způsoby.

Při způsobu a) můžeme vytvořit „panství“ každého krále jako čtverec 3 x 3 a pokrývat jimi šachovnici tak, aby se nepřekrývaly. Protože číslo není dělitelem čísla 8, vyjde podle obr. 25 devět „panství“, z nichž pět je neúplných (na šachovnici 9 x 9 by to bylo devět úplných panství).

Způsob b) vyžaduje, aby šachovnice byla pokrývána sjednoceními dvou „panství“, jejichž středové čtverce sousedí. Obr. 33 ukazuje, že jde o obdélníky 3 x 4 a že vystačí 12 králů.



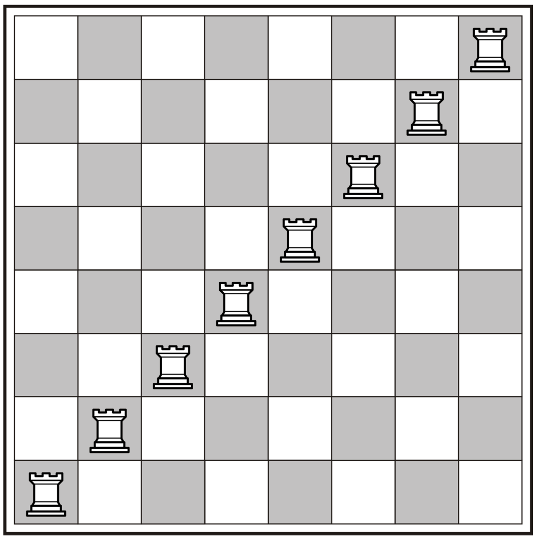
Obr. 33



Obr. 34

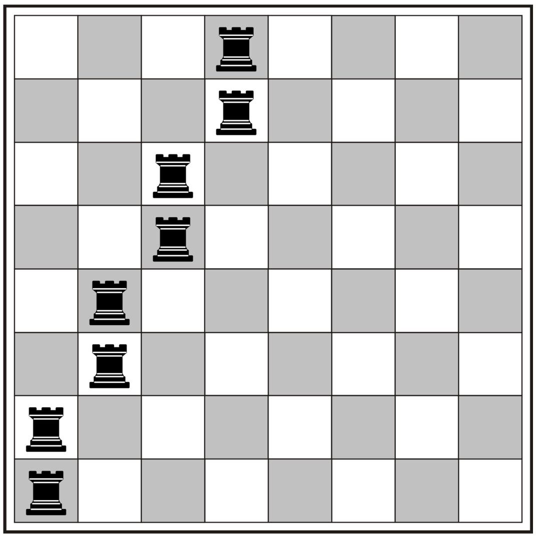
Př. 12.2 *Určete minimální počet věží, které mohou ovládat všechna pole šachovnice 8 x 8 kterýmkoli ze způsobů a), b).*

Řešení: Každá věž umístěná na libovolné pole šachovnice ovládá právě jednu vodorovnou nebo svislou dráhu. Vzhledem k tomu, že na šachovnici 8 x 8 je osm vodorovných resp. svislých drah, k ovládnutí celé šachovnice způsobem a) stačí minimálně 8 věží. Jedno z možných rozestavení je znázorněno na obr. 35.



Obr. 35

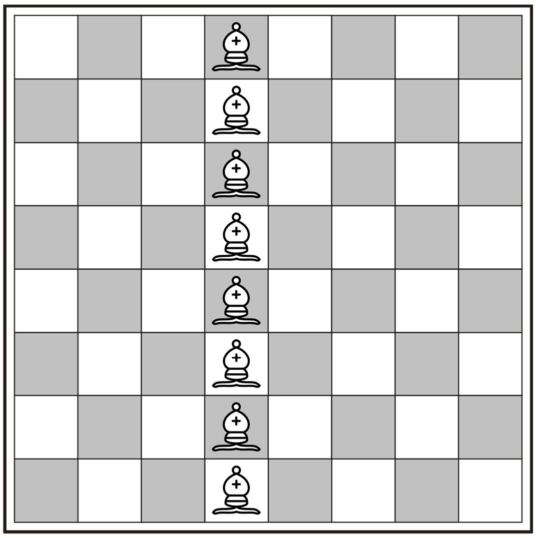
Při řešení úlohy druhým způsobem využijeme stejného principu ovládání všech svislých resp. vodorovných drah osmi věžemi jako v pojetí úlohy a), ale při rozestavování věží na šachovnici musíme zachovat tu vlastnost, kdy věž z jiného pole ovládá pole, na kterém již stojí jiná věž. Např. rozestavění na obr. 36.



Obr. 36

Př. 12.3 *Při kterém rozmístění osmi střelců lze ovládnout všechna pole šachovnice 8 x 8 způsobem a)?*

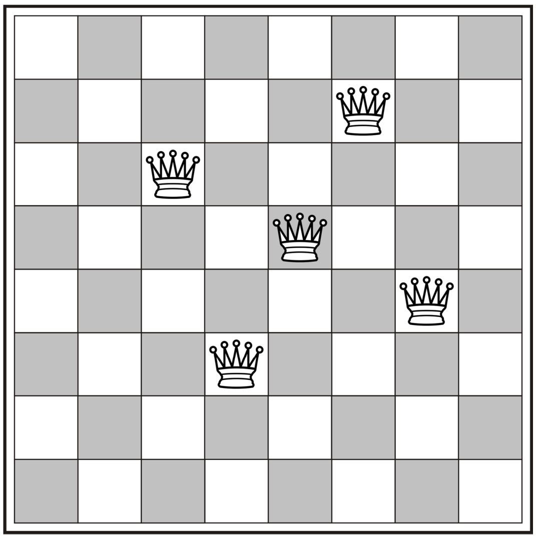
Řešení: Vycházíme z toho, že střelec umístěný na libovolné pole šachovnice ovládá dvě úhlopříčné dráhy, které toto pole obsahují. Výjimku tvoří pole rohová, tj. pole *a1, a8,* kde stojící střelec ovládá jednu diagonálu složenou z osmi polí. Brzy zjistíme, že zadání úlohy vyhovuje jedno z takových rozestavění, kdy všech osm střelců stojí ve sloupci *a4-h4* nebo *a5-h5* resp. řadě *d1-d8* nebo *e1-e8.* Osmi střelci ovládneme celou šachovnici 8 x 8 způsobem a) např. tak, jak je vidět na obr. 37.



Obr. 37

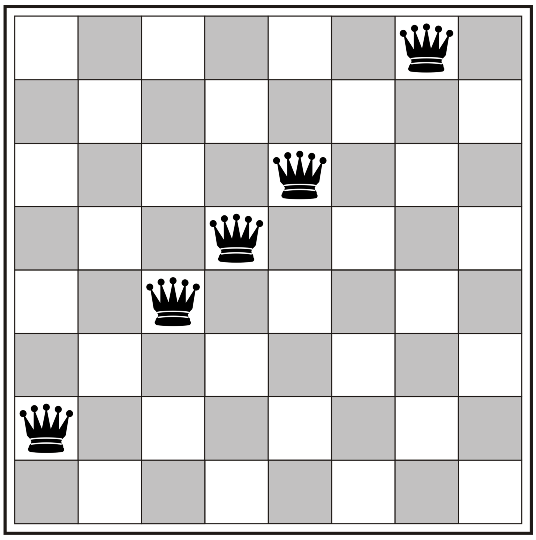
Př. 12.4 *Jaký nejmenší počet dam lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, aby ovládaly všechna pole šachovnice?*

Řešení: Ukazuje se, že pět dam plně postačí k ovládnutí všech polí šachovnice 8 x 8. Při rozestavení na obr. 38 dámy ovládají všechna volná pole šachovnice, ale samy se neohrožují.

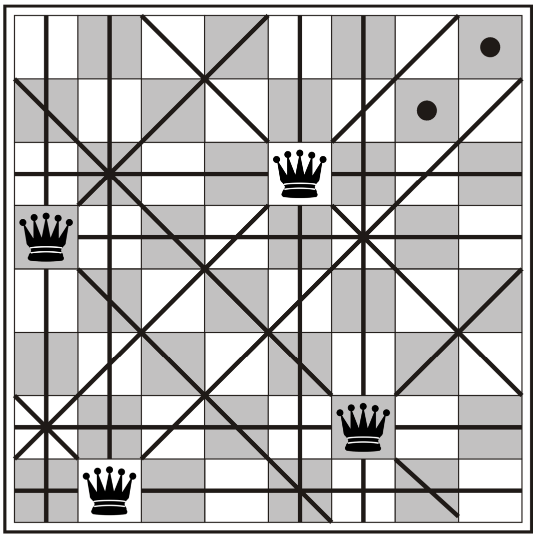


Obr. 38

Na obr. 39 stojí všechny dámy na jedné diagonále a současně se navzájem ohrožují. Je vidět, že při druhém rozestavení mají dámy v držení nejen volná pole šachovnice, ale i pole obsazená. Pokud bychom rozestavili na šachovnici pouze čtyři dámy, v nejlepším případě by dvě její pole zůstala neovládnutá, např. pole *a8* a *b7,* pokud dámy stojí na polích *a5, b1, e6, f2,* obr. 40.



Obr. 39



Obr. 40

13. ÚLOHY O TAZÍCH JEZDCE

Co se týče možností pohybu po šachovnici, je jezdec pravděpodobně tou nejzajímavější šachovou figurou. Jeho výjimečnost spočívá hlavně v tom, že po každém libovolném tahu „změní“ barvu. Jinak řečeno barvu pole, na kterém stojí před a po uskutečnění tahu.

Př. 13.1 *Na všech polích šachovnice s lichým počtem polí stojí jezdci. Mohou se všichni jedním tahem přemístit tak, aby na každém poli stál právě jeden jezdec?*

Řešení: Označme „černým“ jezdcem jezdce stojícího na černém poli a analogicky „bílým“ jezdcem jezdce stojícího na poli bílém.

Využijeme-li vlastnosti „jezdce-chameleóna“, snadno zjistíme, že pokud chceme přemístit všechny jezdce na jiná pole šachovnice, znamená to, že každý „černý“ jezdec se stane jezdcem „bílým“ a naopak, každý „bílý“ jezdec „černým“. Šachovnice by se pak musela skládat ze stejného počtu bílých i černých polí. V našem případě má však šachovnice lichý počet polí, tzn. počet polí jedné barvy je o 1 větší než počet polí barvy druhé. Úloha je proto neřešitelná.

Př. 13.2 *Mějme šachovnici 8×8. Může se jezdec z pole a1 dostat na pole h8, pokud povolíme pouze jedno navštívení každého pole šachovnice?*

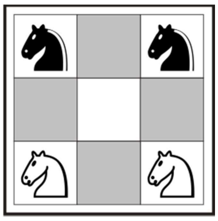
Řešení: Výchozí pole *a1* je černé. Tedy po každém lichém tahu stojí jezdec na bílém poli. Číslo 63 (právě po tolika tazích se dostane jezdec na pole *h8*, po předchozím navštívení všech polí) je liché. To by znamenalo, že pole *h8* má jinou barvu než pole *a1*, tj. bílou. Ovšem pole *h8* je černé. Daná úloha nemá řešení.

Př. 13.3 *V rozích šachovnice 3×3 stojí dva bílí a dva černí jezdci (obr. 41). Určete minimální počet tahů, kterými se vymění bílí s černými jezdci.*

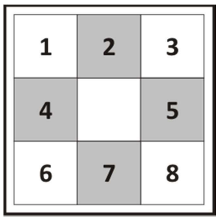
Řešení: Tato známá úloha, jejímž řešením se matematici zabývali již v XVI. století, se nejelegantněji řeší pomocí tzv. *metody knoflíků a nitě*.

Očíslujeme pole naší malé šachovnice, tak jak je vidět na obr. 34 (středové pole zůstane bez čísla; toto pole nás však stejně nebude při řešení zajímat: žádný ze čtyř jezdců, umístěných na šachovnici, na něj při žádném libovolném tahu nevstoupí). Nyní na každé očíslované pole položíme knoflík. Jestliže jsou dvě pole spojena tahem jezdce, svážeme nití ty knoflíky, které leží na těchto polích. Získanou „posloupnost“ svázaných knoflíků rozložíme tak, aby všechny knoflíky ležely na kružnici, obr. 42.

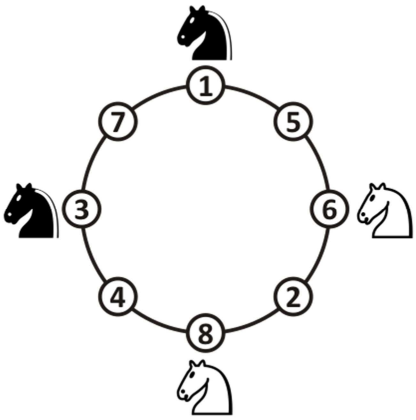
Řešení je již patrné. Umístíme jezdce do kruhu tak, jak je vidět na obr. 43, a táhneme jimi po kružnici, dokud si nevymění černí s bílými místa. Není těžké přesvědčit se, že řešením je 16 tahů, jimiž si inverzně zbarvení jezdci vymění svá místa (8 tahů bílými, 8 tahů černými), přičemž bílí i černí jezdci se pohybují po řadě.



Obr. 41



Obr. 42



Obr. 43

Pozn. Řešení zpřesněné úlohy, kdy požadujeme, aby se jezdci různé barvy při svém pohybu po šachovnici vzájemně neohrožovali (pořadí tahů je v tomto případě libovolné), bezprostředně vychází z obr. 43. Je však třeba dávat pozor na to, aby bílí a černí jezdci nestáli v našem kruhu hned za sebou (při libovolném zastavení jezdce). Po těchto omezeních pohybu po kružnici získáme opět 16 tahů na přemístění všech jezdců.

14. ÚLOHY O POČTECH DVOJIC NAVZÁJEM SE NEOHROŽUJÍCÍCH FIGUR

Dvě pole lze na šachovnici *n* x *n* vybrat $n^2(n^2-1)$ způsoby. Postavíme-li na tato pole figury téhož druhu (kromě pěšců), pak se buď navzájem ohrožují, nebo neohrožují. To znamená, že celkový počet $n^2(n^2-1)$ dvojic rozdělujeme na dvě disjunktní třídy. Někdy je snazší počítat dvojice, které se ohrožují, jindy naopak.

Př. 14.1 *Určete počet všech dvojic střelců, které lze umístit na šachovnici n x n tak, že se vzájemně neohrožují.*

Řešení: Snadněji určíme počet všech dvojic střelců, kteří se ohrožují. Protože nerozlišujeme střelce ve dvojici, vyhledáváme jen neuspořádané dvojice polí na diagonálách s poli téže barvy.

Na šachovnici *n* x *n* je jedna černá diagonála s *n* poli a po dvou černých diagonálách s $n-1, n-2, n-3, \ldots, 3, 2$ poli.

Na těchto diagonálách lze tedy nalézt

$\binom{n}{2} + 2\binom{n-1}{2} + 2\binom{n-2}{2} + \cdots + 2\binom{2}{2}$ dvojic polí.

Výpočtem

$$\binom{n}{2} + 2\sum_{i}^{n-1}\binom{i}{2} = \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3}$$

získáme počet dvojic ohrožujících se střelců na černých polích. Se stejným počtem dvojic střelců na bílých polích dostáváme celkový

$$2\binom{n}{2} + 4\binom{n}{2} = n(n-1) + \frac{2}{3}n(n-1)(n-2)$$

počet dvojic ohrožujících se střelců.

Hledaný počet všech dvojic neohrožujících se střelců je roven

$$\frac{1}{2}n^2(n^2-1) - n(n-1) - \frac{2}{3}n(n-1)(n-2) =$$

$$= \frac{1}{6}n(n-1)(3n^2-n+2)$$

15. METODA UMĚLÝCH FIGUR

Řešení kombinatorických úloh o šachových figurách se komplikuje tím, že každá figura má několik možností tahu. Proto se osvědčují *umělé figury* s jednoznačně určeným způsobem pohybu po šachovnicích.

Představme si libovolnou šachovnici $m \times n$, jejíž pole znázorňují uspořádané dvojice

$[x, y] \in \{1, 2, 3, \dots, m\}\ x\ \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Umělá figura

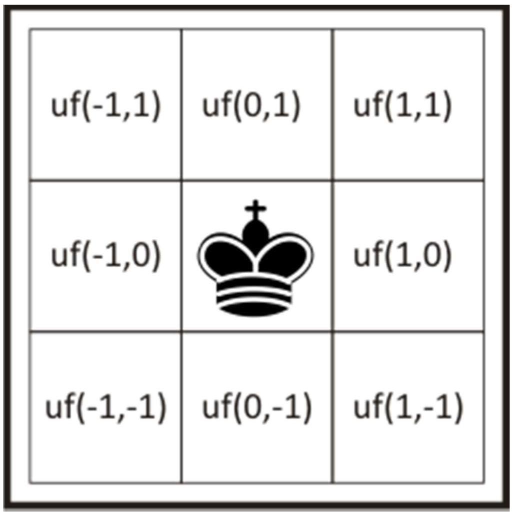
$uf(r, s)$ má tahy $[x, y] \ \rightarrow\ [x + r, y + s]$,

kde čísla r, s jsou celá, tedy i záporná, ale ne obě rovna nule.

Běžné šachové figury jsou pak jakýmisi „srůsty“ několika umělých figur. Nezávisle na typu šachovnice, je král „srůstem“ umělých figur

$uf(0, 1), uf(1, 0), uf(1, 1), uf(-1, 1),$

$uf(-1, 0), uf(0, -1), uf(-1, -1), uf(1, -1)$; viz obr. 44.



Obr. 44

Rovněž jezdec je „srůstem“ osmi šachových figur $uf(r, s)$, kde $|r \cdot s| = 2$. Střelec, věž a dáma jsou na různých typech šachovnic „srůsty“ různých počtů umělých figur $uf(r, s)$; dáma je však vždy „srůstem“ věže a střelce.

Př. 15.1 *Určete počet všech uspořádaných dvojic figur $uf(r,s)$ na šachovnici n x n, ve kterých první figura ohrožuje druhou.*

Řešení: Je-li $r \geq n$ nebo $s \geq n$, neexistuje žádná dvojice $uf(r,s)$ na *n* x *n.* Je-li $r < n$ a $s < n$, existuje aspoň jedna taková dvojice $uf(r,s)$; jejich celkový počet je počtem polí šachovnice zmenšené o *r* sloupců a *s* řádků, tj. je ven $(n - |r|) \cdot (n - |s|)$.

Př. 15.2 *Určete počet všech dvojic králů, kteří se na šachovnici n x n navzájem ohrožují.*

Řešení: Podle rozpisu v úvodu kapitoly 15, zahrnuje šachový král osm umělých figur.

Pro $uf(0,1), uf(1,0), uf(-1,0), uf(0,-1)$ dostaneme podle př. 11.1 po $n(n-1)$ uspořádaných dvojicích, v nichž první figura ohrožuje druhou. Celkem $4n(n-1)$ takových uspořádaných dvojic a tedy $2n(n-1)$ neuspořádaných dvojic králů.

Pro každou figuru $uf(1,1), uf(-1,1), uf(-1,-1), uf(1,-1)$získáme po $(n-1)(n-1)$uspořádaných dvojicích.
Tím také 2$(n-1)(n-1)$ neuspořádaných dvojic králů.

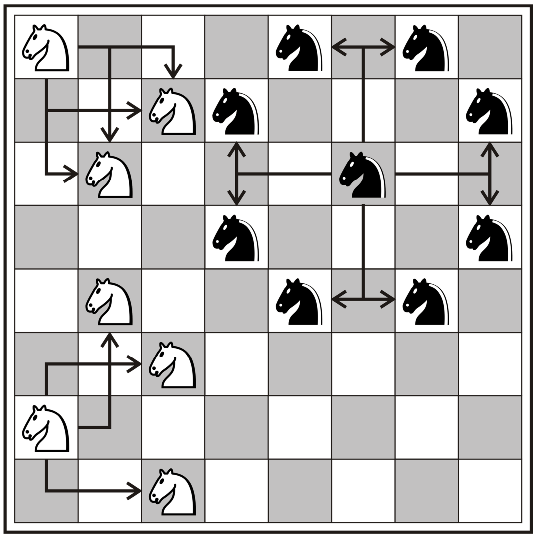
Jako výsledek máme počet

$$2\mathrm{n}(\mathrm{n}-1) + 2(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-1) = 2(\mathrm{n}-1)(2\mathrm{n}-1)$$

dvojic ohrožujících se králů.

Př. 15.3 *Kolika způsoby lze na šachovnici m x n rozestavit bílého a černého jezdce tak, aby se navzájem neohrožovali?*

Řešení: Řešení této úlohy je složitější tím, že na různých polích šachovnice má jezdec různý počet možností tahu. Je-li $m \geq 5$ a $n \geq 5$, může jezdec stojící v rohu šachovnice vykonat dva tahy resp. čtyři tahy, ale vždy dva a dva jsou spolu spojeny jediným polem, kam se může jezdec dostat, na určitých krajních polích tři tahy resp. šest tahů, na dalších krajních polích čtyři tahy atd., dokonce jezdec stojící uvnitř šachovnice může vykonat až 8 tahů resp. šestnáct, obr. 45.

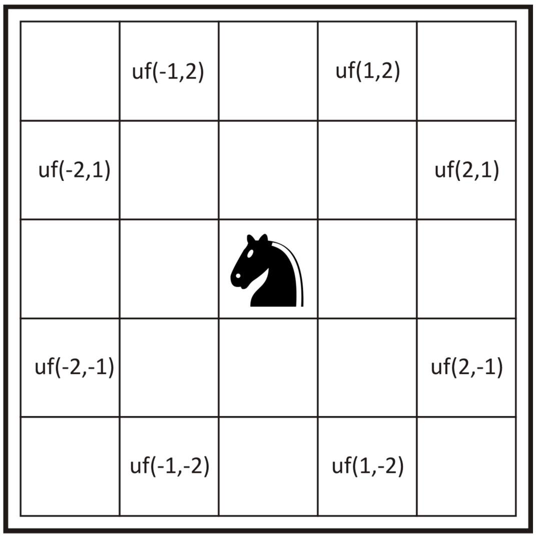


Obr. 45

Toto je spojeno s tím, že se jezdec pohybuje tahy různých typů. Může jít na jedno pole dopředu a dvě nahoru nebo na dvě pole dozadu a jedno dolu atd. K usnadnění řešení tohoto příkladu nám právě pomůže nadefinování si jezdce jako „srůst“ osmi umělých figur

$uf(1,2), uf(2,1), uf(2,-1), uf(1,-2),$

$uf(-1,0), uf(0,-1), uf(-1,-1), uf(1,-1)$; viz obr. 46



Obr. 76

Podíváme se nejprve, kolika způsoby lze umístit na naší šachovnici $m \times n$ (2,1)-jezdce neboli umělou figuru $uf(2,1)$, tak aby měla v držení nějaká pole šachovnice.

Je jasné, že tato figura může stát na libovolné vertikále, kromě dvou posledních, tj. vertikál *g* a *h,* a libovolné horizontále, kromě první, tj. horizontále *1.* Znamená to, že vertikálu lze vybrat (m - 2) způsoby a horizontálu (n - 1) způsoby. Celkem pak (m - 2)(n - 1) způsobů umístění bílého (2,1)-jezdce. Vzhledem k symetrii tahů jezdce je stejný počet způsobů na umístění každého bílého (±2, ±1)-jezdce tak, že ohrožuje černého jezdce.

Pro bílé (±1, ±2)-jezdce je počet způsobů roven (m - 1)(n - 2). Z toho plyne, že počet rozestavení dvou různobarevných jezdců, při kterých se vzájemně ohrožují, je

$$4[(m-1)(n-2)]+[(m-2)(n-1)]=2[(2m-3)(2n-3)-1].$$

Pokud bychom chtěli rozestavit jezdce stejné barvy tak, aby se mohli vzájemně ohrožovat, počet způsobů získáme snadno; dělíme-li obdrženou hodnotu dvěma.

Řešením naší úlohy, což bylo najít počet způsobů rozestavení dvou jezdců různé barvy tak, aby se nemohli navzájem ohrožovat, je číslo

$$m^2n^2-9mn+12m\,+\,I2n — 16$$

Pozn. Dva jezdce lze rozestavit na m x n šachovnici právě $mn(mn\ -1)$ způsoby.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY A ELEKTRONICKÉ ZDROJE

[1] ŠEDIVÝ, J., E. CALDA, O. ODVÁRKO a A. ŠAROUNOVÁ. *Metody řešení matematických úloh*: *II. část*. Praha: SPN, 1978.

[2] CALDA, E., V. DUPAČ. *Matematika pro gymnázia: kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, c2001, 170 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-807-1961-475.

[3] ГИК, Е. Я. *Математика на шахматной доске*. Москва: НАУКА, 1976.

[4] ЯГЛОМ, А. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. Москва: Гастехиздат, 1954.

[5] ВИЛЕНКИН, Н. Я. *Комбинаторика*. Москва: НАУКА, 1969.

[6] Elements of Matematics, Book B, EM Problem Book/Volume I, Cemrel Inc., St. Louis Missouri, 1975.

[7] Kombinatorické úlohy v matematických soutěžích. Praha, 2011. Bakalářská práce. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, Praha. Vedoucí práce RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

[8] VOLFOVÁ, Marta. Matematika na šachovnici [online]. 2010 [cit. 2012-05-13]. Dostupné z: http://black-hole.cz/cental/wp-content/uploads/2010/10/Matematika-na-%C5%A1achovnici.pdf.

[9] Matematický a přírodovědný důkaz: problém vykousnuté šachovnice. In: Science World [online]. 2007 [cit. 2012-05-20]. Dostupné z: http://scienceworld.cz/matematika/matematicky-a-prirodovedny-dukaz-problem-vykousnute-sachovnice-995.

[10] Dějiny šachové hry. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. 2012, 14.6.2012 [cit. 2012-06-14].Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/D%C4%9Bjiny_%C5%A1achov%C3%A9_hry.

[11] Jezdcova procházka. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. 2011, 15.12.2011 [cit. 2012-03-20]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Jezdcova_proch%C3%A1zka.

[12] Jezdcova procházka. In: Šachy [online]. 2011 [cit. 2012-03-22]. Dostupné z: http://www.sach.estranky.cz/clanky/jezdcova-prochazka.html.

[13] Problém osmi dam. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. 2011 [cit. 2012-04-10]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A9m_osmi_dam.

[14] Problém N dam. In: KREJČÍ, Martin. [online]. 2005 [cit. 2012-06-10]. Dostupné z: http://ui.glimpse.cz/sbirka/N_dam/N_dam.html.

P Ř Í L O H Y

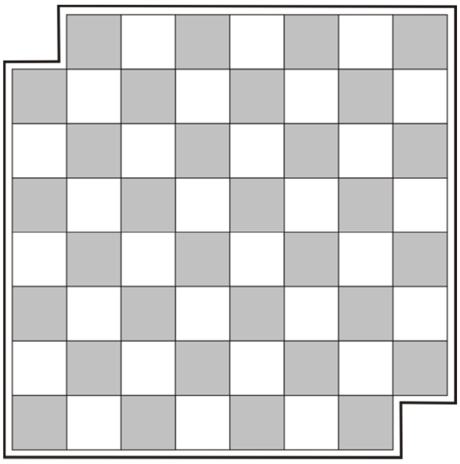
Příloha 1

Pracovní list č. 1 – matematika na šachovnici

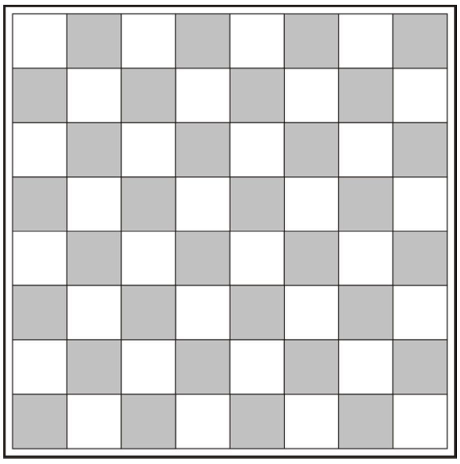
Úlohy na pokrytí

Při úlohách na pokrytí šachovnice obrazci různých tvarů se budeme řídit určitými pravidly způsobu pokrytí. Pro pokrytí šachovnice použijeme kameny složené ze čtverců, které odpovídají jednotlivým polím šachovnice. Úplným pokrytím šachovnice pak rozumíme to pokrytí, kdy se žádné dva kameny navzájem nepřekrývají a současně každý z kamenů leží celým svým obsahem na šachovnici.

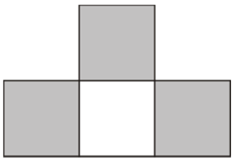
1. Šachovnice 8 x 8, ve které jsou vyříznutá dvě protilehlá úhlová pole (tj. šachovnice, která má 62 polí, obr. 2) by měla být pokryta 31 dominovými kameny 2 x 1. Lze to provést? Řešení zdůvodněte.



2. Šachovnice 8 x 8, ve které jsou vyříznutá dvě pole různé barvy má být pokryta kameny 2 x 1. Lze to provést?

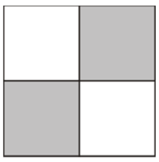


3. Lze pokrýt šachovnici 10 x 10 dvaceti pěti kameny viz obr 1.?



Obr. 1

4. Na obr. 2 je znázorněno sjednocení dvou dominových kamenů 2 x 1, tj. kámen 2 x 2. Ukažte, že nelze pokrýt šachovnici 8 x 8 patnácti kameny z obr. 1 a jedním kamenem 2 x 2.



Obr. 2

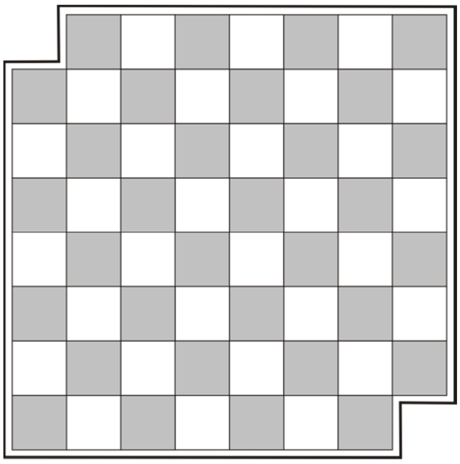
Příloha 2

Metodický list 1 – matematika na šachovnici

Úlohy na pokrytí

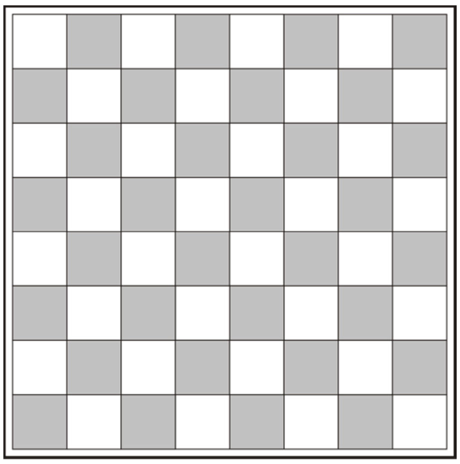
Při úlohách na pokrytí šachovnice obrazci různých tvarů se budeme řídit určitými pravidly způsobu pokrytí. Pro pokrytí šachovnice použijeme kameny složené ze čtverců, které odpovídají jednotlivým polím šachovnice. Úplným pokrytím šachovnice pak rozumíme to pokrytí, kdy se žádné dva kameny navzájem nepřekrývají a současně každý z kamenů leží celým svým obsahem na šachovnici.

1. Šachovnice 8 x 8, ve které jsou vyříznutá dvě protilehlá úhlová pole (tj. šachovnice, která má 62 polí, obr. 2) by měla být pokryta 31 dominovými kameny 2 x 1. Lze to provést? Řešení zdůvodněte.



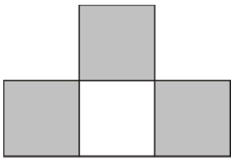
Při libovolném pokrytí šachovnice každý kámen pokrývá právě jedno bílé a jedno černé pole. Naše oříznutá šachovnice má však o 2 pole jedné barvy méně než kolik je polí barvy druhé (vyřízneme-li pole *a8* a *h1*, je na šachovnici bílých polí o 2 méně než černých, to samé platí pro černá pole *a1* a *h8*). Proto pokrytí kameny nelze provést.

2. Šachovnice 8 x 8, ve které jsou vyříznutá dvě pole různé barvy má být pokryta kameny 2 x 1. Lze to provést.



Vyznačíme na šachovnici hranici mezi vertikálami a horizontálami tak, jak je ukázáno na obr. 3. V labyrintu mezi těmito hranicemi jsou černá a bílá pole vždy za sebou. Znamená to, že při procházení labyrintem se každým krokem mění barva pole (cesta, kterou je třeba vykonat při průchodu labyrintem je uzavřená). Vyřízneme-li dvě libovolná pole šachovnice různé barvy, cesta se přeruší: v jednom místě, pokud tato pole leží za sebou; ve dvou místech, pokud tato pole spolu nesousedí. Vždy však bude mít každá část přerušené cesty sudý počet polí (tj. stejný počet bílých i černých polí). Znamená to tedy, že takto upravenou šachovnici 8 x 8 lze pokrýt kameny 2 x 1 v každém z výše popsaných případů.

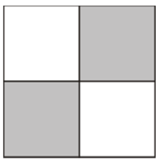
3. Lze pokrýt šachovnici 10x10 dvaceti pěti kameny viz obr 1.?



Obr. 1

Řešení úlohy vyžaduje základní znalost dělitelnosti v oboru celých čísel a vlastnosti čísel sudých a lichých.
Šachovnice 10 x 10 má právě 50 bílých a 50 černých polí. Pro umístění našeho kamene máme dva způsoby:
1) obrazec pokrývá právě jedno černé pole
2) obrazec pokrývá právě tři černá pole.
Pokaždé však pokrývá lichý počet černých polí. Obrazců pro pokrytí má být 25, tzn., že všechny pokrývají lichý počet černých polí. Černých polí je ale padesát, což je číslo sudé. Požadované pokrytí proto nelze provést.

4. Na obr. 2 je znázorněno sjednocení dvou dominových kamenů 2 x 1, tj. kámen 2 x 2. Ukažte, že nelze pokrýt šachovnici 8 x 8 patnácti kameny z obr. 1 a jedním kamenem 2 x 2.



Obr. 2

Nejprve zjistíme, zda souhlasí počet polí, které by měly pokrýt kameny ze zadání úlohy. Skutečně, počet polí šachovnice 8 x 8 souhlasí s počtem polí obrazců.

$$15 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 64$$

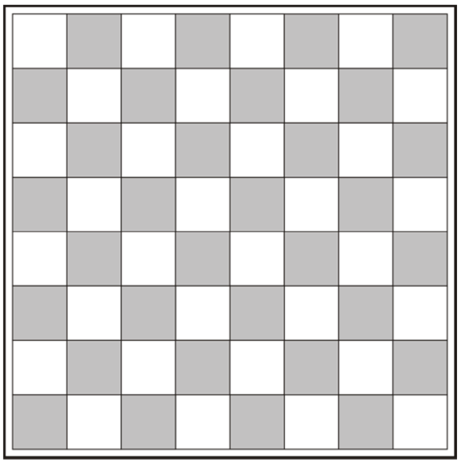
Nyní se budeme zabývat možností pokrytí šachovnice. Při libovolném umístění kamene 2 x 2 na šachovnici (libovolným umístěním budeme rozumět to umístění, kdy kámen leží celým svým obsahem na šachovnici), pokrývá tento kámen dvě černá a dvě bílá pole. Na rozmístění zbylých patnácti kamenů z obr. 4 nám tedy na šachovnici zbyde 30 černých a 30 bílých polí. Nyní je zřejmé, že takovéto pokrytí nelze provést. Číslo 30 je číslo sudé, ale kameny z obr. 1 pokrývají vždy lichý počet černých resp. bílých polí, viz př. 3.

Příloha 3

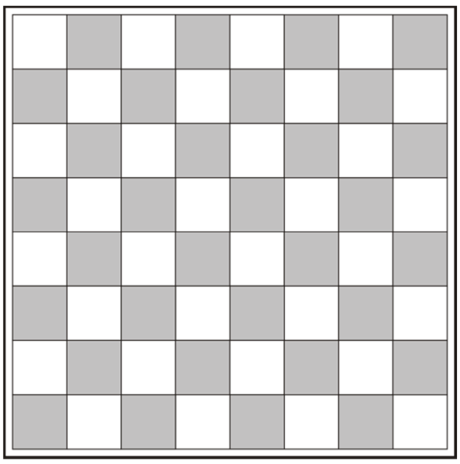
Pracovní list 2 – matematika na šachovnici

Úlohy o rozmístění maximálního počtu figur téhož druhu

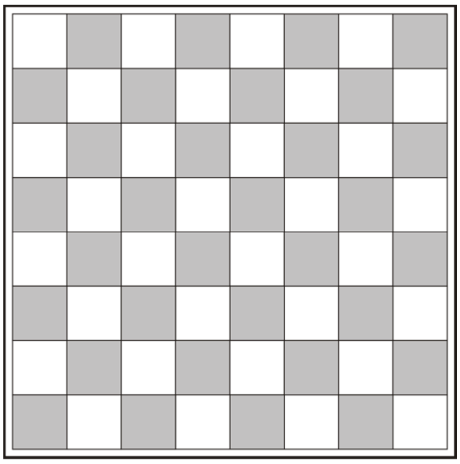
1. Určete maximální počet jezdců, které lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují. Dokažte, že vámi nalezený počet je skutečně maximální.



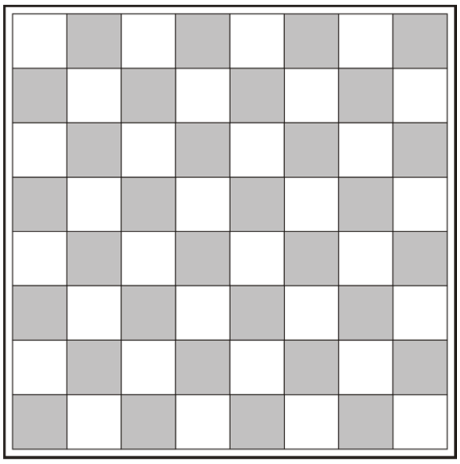
2. Jaký maximální počet králů lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují?



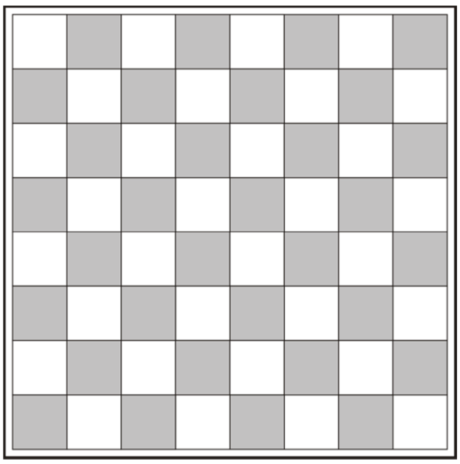
3. Lze na šachovnici 8 x 8 rozestavit více než 8 věží tak, aby se navzájem neohrožovaly?



4. Jaký maximální počet střelců lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují? Kolik úhlopříčných „drah“ pro střelce existuje na šachovnici?



5. Maximální počet navzájem se neohrožujících dam na šachovnici 8 x 8 je osm. Najděte alespoň jedno rozmístění těchto osmi dam.
Pozn. existuje 92 řešení této úlohy; dokázáno již roku 1874 anglickým matematikem James Whitbread Lee Glaisherem.



Příloha 4

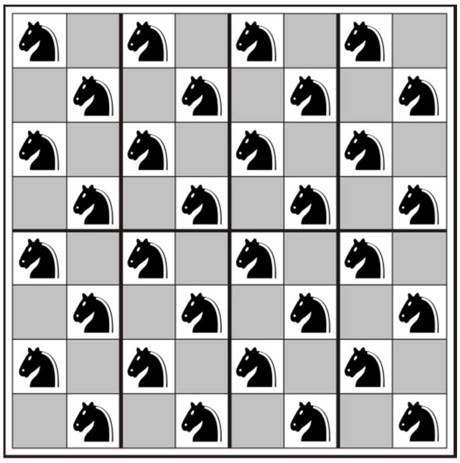
Metodický list 2 – matematika na šachovnici

Úlohy o rozmístění maximálního počtu figur téhož druhu

Pro řešení úloh tohoto typu, je nutné žáky seznámit se základními pravidly šachové hry a vlastnostmi jednotlivých šachových figur. Tedy zvláště s možnostmi jejich tahu a vzájemného se ohrožování. Bez těchto znalostí nelze v podstatě tyto úlohy řešit.

Úlohy se řeší hlavně pro tzv. „zajímavé“ figury. Jako je král, jezdec, věž nebo střelec. Obtížně řešitelná, ale o to víc zajímavá, je pak úloha s dámami.

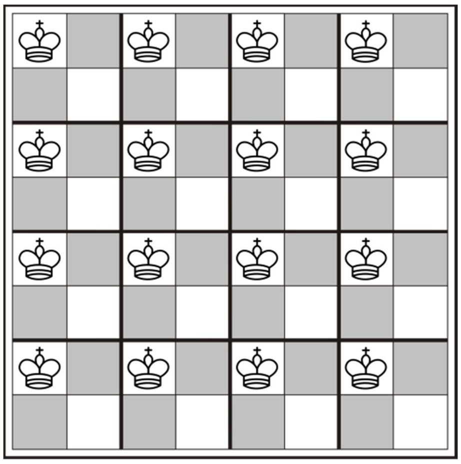
1. Určete maximální počet jezdců, které lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují. Dokažte, že vámi nalezený počet je skutečně maximální.



Jezdec stojící na bílém poli ohrožuje jen černé pole a naopak. Proto je možné rozestavit 32 jezdců na stejnobarevná pole. Maximální počet jezdců je tedy větší nebo roven 32. Dokažme, že větší být nemůže.

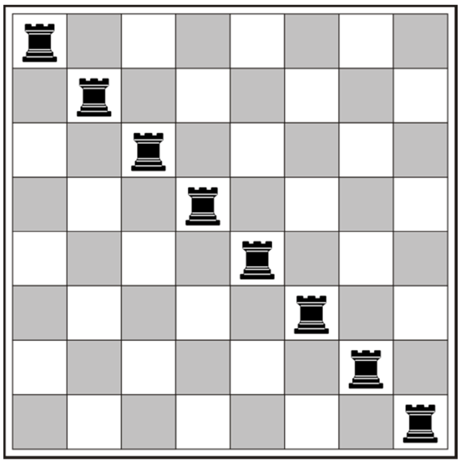
Šachovnici rozdělíme na obdélníky 2x4. Jezdec umístěný na jednom poli obdélníka ohrožuje právě jedno další pole tohoto obdélníka. Toto přiřazení je prosté. Z tohoto důvodu mohou být v obdélníku nejvýše čtyři jezdci, celkem na šachovnici nejvýše 32 jezdci.

2. Jaký maximální počet králů lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují?



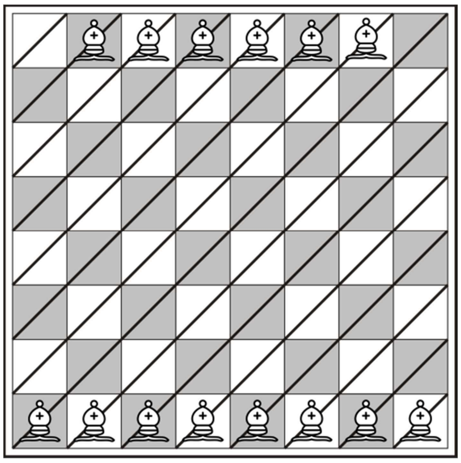
Král stojící na libovolném poli šachovnice ohrožuje všechna pole přímo sousedící s tímto polem. Pro určení maximálního počtu vzájemně se neohrožujících králů rozdělíme šachovnici na čtvercová pole 2x2. Těchto polí je právě 16.

3. Lze na šachovnici 8 x 8 rozestavit více než 8 věží tak, aby se navzájem neohrožovaly?



Každá věž libovolně postavená na šachovnici, ohrožuje právě dvě na sebe kolmé „dráhy“ (tj. vodorovnou a svislou). Vodorovných drah je 8. Stejně tolik je i drah svislých. Dohromady tedy 16 drah pro pohyb věže.
Vzhledem k ohrožení dvou kolmých drah jedinou věží a celkovému počtu těchto drah na šachovnici lze rozestavit nejvýše 8 věží tak, že se žádné dvě navzájem neohrožují. Jedno z možných rozestavění je znázorněno na obrázku.

4. Jaký maximální počet střelců lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují? Kolik úhlopříčných „drah“ pro střelce existuje na šachovnici?



Pro nalezení počtu navzájem se neohrožujících střelců sestrojíme na šachovnici systém patnácti diagonál znázorněných na obr. 20. Jestliže se žádní dva střelci neohrožují, nesmí na každé z těchto diagonál (úhlopříčných „drah“ pro střelce) stát více jak jeden střelec. Vzhledem k tomu, že diagonály pokrývají všechna pole šachovnice, počet neohrožujících se střelců nebude větší než patnáct. Patnáct navzájem se neohrožujících střelců se však nepodaří rozestavit, protože obě krajní diagonály se skládají pouze z jednoho pole, přičemž obě tyto pole leží na diagonále *a1 - h8.* Rozestavení na obr. 20 ukazuje, že těchto střelců může být maximálně čtrnáct.

5. Maximální počet navzájem se neohrožujících dam na šachovnici 8 x 8 je osm. Najděte alespoň jedno rozmístění těchto osmi dam.

Pozn. existuje 92 řešení této úlohy; dokázáno již roku 1874 anglickým matematikem James Whitbread Lee Glaisherem.

Žáci tento úkol řeší samostatně. Hodnotíme každé nalezené řešení.

Příloha 5

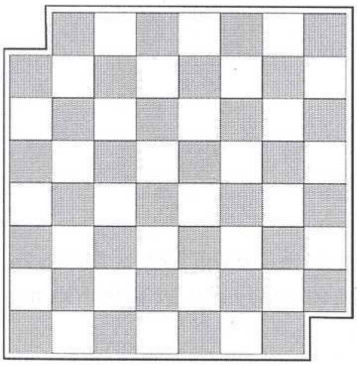
Pracovní list 1 – Příklad řešení žáka 1. ročníku KG

Pracovní list č.1 – matematika na šachovnici

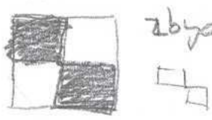
Úlohy na pokrytí

Při úlohách na pokrytí šachovnice obrazci různých tvarů se budeme řídit určitými pravidly způsobu pokrytí. Pro pokrytí šachovnice použijeme kameny složené ze čtverců, které odpovídají jednotlivým polím šachovnice. Úplným pokrytím šachovnice pak rozumíme to pokrytí, kdy se žádné dva kameny navzájem nepřekrývají a současně každý z kamenů leží celým svým obsahem na šachovnici.

1. Šachovnice 8 x 8, ve které jsou vyříznutá dvě protilehlá úhlová pole (tj. šachovnice, která má 62 polí) by měla být pokryta 31 dominovými kameny 2 x 1. Lze to provést? Řešení zdůvodněte.

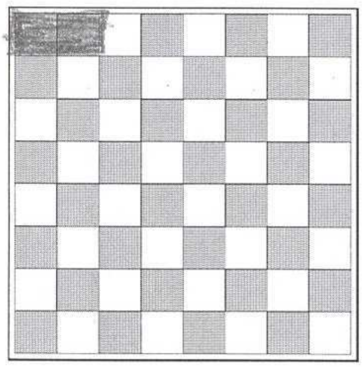


Nelze když uberu 2 bílá políčka → zbyde nám



32 černých
30 bílých

2. Šachovnice 8 x 8, ve které jsou vyříznutá dvě pole různé barvy má být pokryta kameny 2 x 1. Lze to provést?



31 bílých
31 černých
Lze.
- Sudé, odebrali jsme od každé barvy 1 pole.

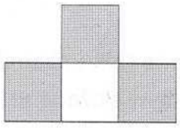
100 polí

3. Lze pokrýt šachovnici 10 x 10 dvaceti pěti kameny viz obr 1.?

Nelze

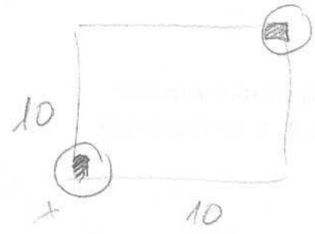
50 černých

50 bílých



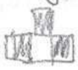
Obr. 1

50 : 3 = 26 zb. 2



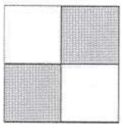
← zbydou

zbyde 34 bílých (na 1



se spotřebuje 1 bílé)

4. Na obr. 2 je znázorněno sjednocení dvou dominových kamenů 2 x 1, tj. kámen 2 x 2. Ukažte, že nelze pokrýt šachovnici 8 x 8 patnácti kameny z obr. 1 a jedním kamenem 2 x 2.



Obr. 2

Příloha 6

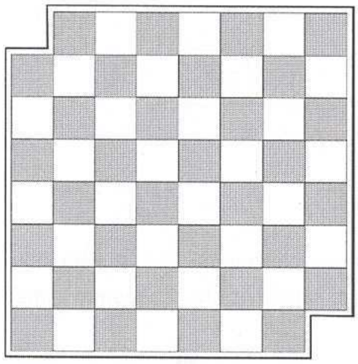
Pracovní list 1 – Příklad řešení žáka 1. ročníku GCHD

Pracovní list č.1 – matematika na šachovnici

Úlohy na pokrytí

Při úlohách na pokrytí šachovnice obrazci různých tvarů se budeme řídit určitými pravidly způsobu pokrytí. Pro pokrytí šachovnice použijeme kameny složené ze čtverců, které odpovídají jednotlivým polím šachovnice. Úplným pokrytím šachovnice pak rozumíme to pokrytí, kdy se žádné dva kameny navzájem nepřekrývají a současně každý z kamenů leží celým svým obsahem na šachovnici.

1. Šachovnice 8 x 8, ve které jsou vyříznutá dvě protilehlá úhlová pole (tj. šachovnice, která má 62 polí) by měla být pokryta 31 dominovými kameny 2 x 1. Lze to provést? Řešení zdůvodněte.



31

62

nelze

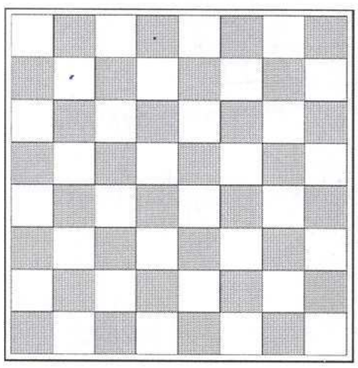
~~stojí na stejném místě v možnosti otočen~~

vždy 1 černé a 1 bílé pole na 1 kusu domina

=> po vyříznutí 2 bílých nám přebývají 2 černá

$\boxed{\text{nelze}}$

2. Šachovnice 8 x 8, ve které jsou vyříznutá dvě pole různé barvy má být pokryta kameny 2 x 1. Lze to provést?



ano

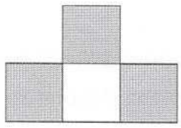
nepřebývají ani nechybí pole

1 domino => po vyříznutí

$\boxed{\text{lze}}$

3. Lze pokrýt šachovnici 10 x 10 dvaceti pěti kameny viz obr 1.?

nejednoznačné zadání



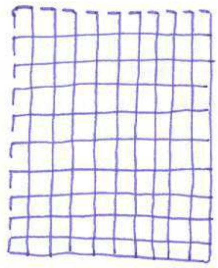
Obr. 1

• měli to sedět barevně

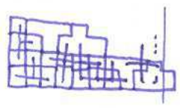
100 polí = 50 černých 50 bílých

25 · 3 černé pole = 75 černých polí (je jich moc)

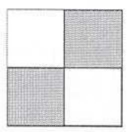
• neměli to sedět barevně $\boxed{\text{nelze}}$



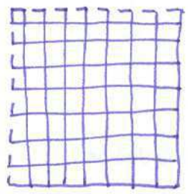
$\boxed{\text{nelze}}$



4. Na obr. 2 je znázorněno sjednocení dvou dominových kamenů 2 x 1, tj. kámen 2 x 2. Ukažte, že nelze pokrýt šachovnici 8 x 8 patnácti kameny z obr. 1 a jedním kamenem 2 x 2.



Obr. 2



15x 15 · 4 = 60

1 x 1 · 4 = 4

8 · 8 = 64

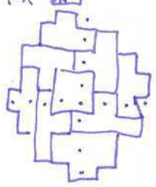
nemám čím vyplnit

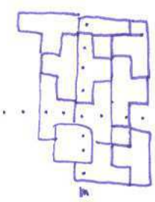
nemám čím vyplnit

nemá-li 1 díru pole nejde to vyplněný

15x

1 x





$\boxed{\text{nelze}}$

$\boxed{\text{nelze}}$

Příloha 7

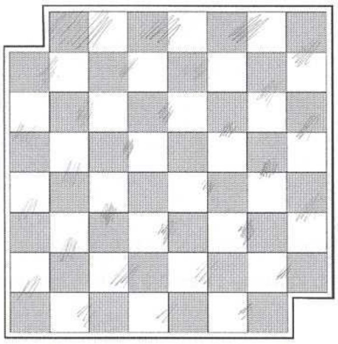
Pracovní list 1 – Příklad řešení žáka 1. ročníku GCHD

Pracovní list č.1 – matematika na šachovnici

Úlohy na pokrytí

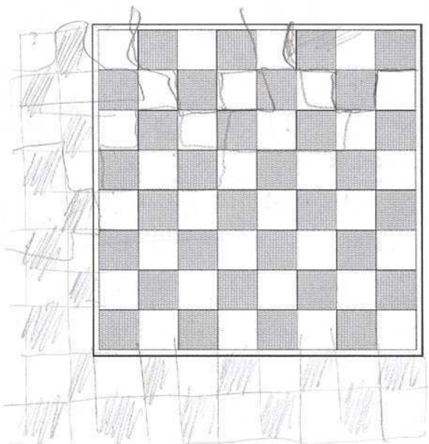
Při úlohách na pokrytí šachovnice obrazci různých tvarů se budeme řídit určitými pravidly způsobu pokrytí. Pro pokrytí šachovnice použijeme kameny složené ze čtverců, které odpovídají jednotlivým polím šachovnice. Úplným pokrytím šachovnice pak rozumíme to pokrytí, kdy se žádné dva kameny navzájem nepřekrývají a současně každý z kamenů leží celým svým obsahem na šachovnici.

1. Šachovnice 8 x 8, ve které jsou vyříznutá dvě protilehlá úhlová pole (tj. šachovnice, která má 62 polí) by měla být pokryta 31 dominovými kameny 2 x 1. Lze to provést? Řešení zdůvodněte.



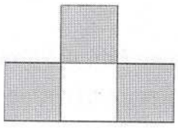
nelze, 1 kámen zabere jak černé, tak bílé, takže chybí 2 bílé

2. Šachovnice 8 x 8, ve které jsou vyříznutá dvě pole různé barvy má být pokryta kameny 2 x 1. Lze to provést?

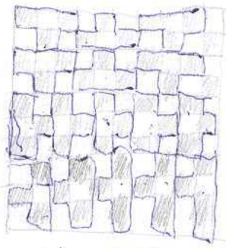


Vždy to jde, protože budeme mít stejný počet černých i bílých polí

3. Lze pokrýt šachovnici 10 x 10 dvaceti pěti kameny viz obr 1.?



Obr. 1

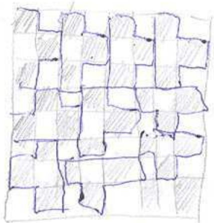


~~ne~~

nejde, protože max na řádku jde dát 5 kamenů, ale zaberou 3 políčka ve sloupci max jde umístit 16 kamenů

4. Na obr. 2 je znázorněno sjednocení dvou dominových kamenů 2 x 1, tj. kámen 2 x 2. Ukažte, že nelze pokrýt šachovnici 8 x 8 patnácti kameny z obr. 1 a jedním kamenem 2 x 2.

Obr. 2



nejde, protože v šachovnici 8x8 je 64 polí => 32 černých a na 15 obr. 1 je potřeba 45 černých + 2 z obr. 2 a to NEJDE!!

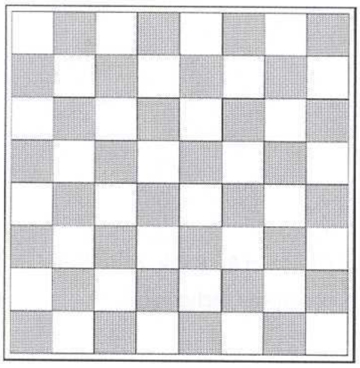
Příloha 8

Pracovní list 2 – Příklad řešení žáka 3. ročníku GCHD

Pracovní list 2 – matematika na šachovnici

Úlohy o rozmístění maximálního počtu figur téhož druhu

1. Určete maximální počet jezdců, které lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují. Dokažte, že vámi nalezený počet je skutečně maximální.



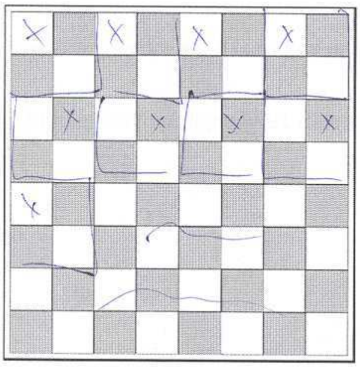
32 – zaplním jezdci jen všechna bílá nebo jen všechna černá pole

Jakmile bych měl dalšího tak musí stát na poli jiné barvy což nemůže, a ~~[illegible]~~ jelikož i kůň v rohu ohrožuje 2 pole jiné barvy

tak ~~nemůže být jen 16 polí černých teoreticky [illegible] 16 polí zaplněných koňmi~~

~~tak za při 16 zaplní~~

2. Jaký maximální počet králů lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují?

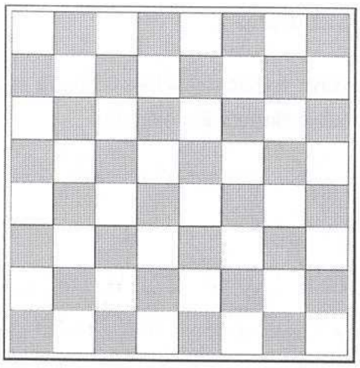


$\frac{64}{4} = 16 \rightarrow 16$ králů

neboť král mi vždy bude zabírat alespoň 4 pole (na 1 stojí a minimálně 3 ohrožuje pokud stojí v rohu, jinak ohrožuje víc)

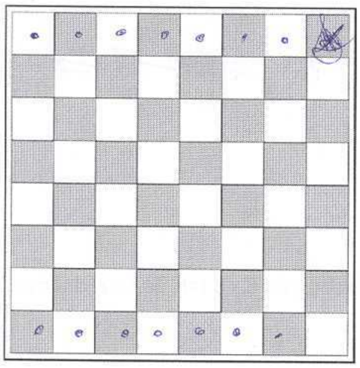
Postupným ověřováním šachovnice mohu dokázat že ~~tak skutečně lze~~ 16 králů lze skutečně umístit.

3. Lze na šachovnici 8 x 8 rozestavit více než 8 věží tak, aby se navzájem neohrožovaly?



Ne, neboť by každá věž musela být ve vlastním sloupci i řádku a těch je jen 8. => Určitě jich nemůže být víc než 8.

4. Jaký maximální počet střelců lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují? Kolik úhlopříčných „drah" pro střelce existuje na šachovnici?



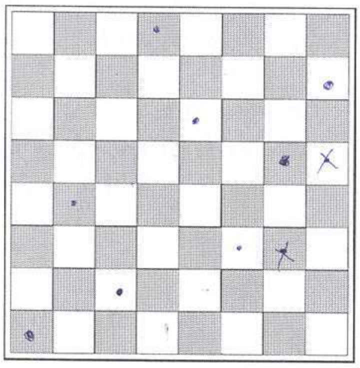
14

$(7+6)\cdot 2 = 26$

↳ je 26 drah

(dráhu vnímám jako úhlopříčku šachovnice, která však má alespoň 2 políčka)

5. Maximální počet navzájem se neohrožujících dam na šachovnici 8 x 8 je osm. Najděte alespoň jedno rozmístění těchto osmi dam.
Pozn. existuje 92 řešení této úlohy; dokázáno již roku 1874 anglickým matematikem James Whitbread Lee Glaisherem.



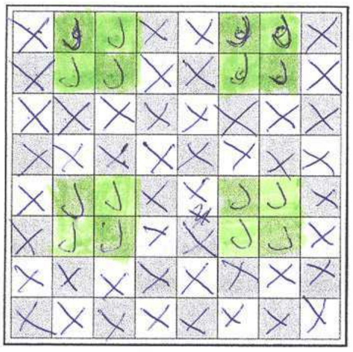
Příloha 8

Pracovní list 2 – Příklad řešení žáka 3. ročníku KG

Pracovní list 2 – matematika na šachovnici

Úlohy o rozmístění maximálního počtu figur téhož druhu

1. Určete maximální počet jezdců, které lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují. Dokažte, že vámi nalezený počet je skutečně maximální.

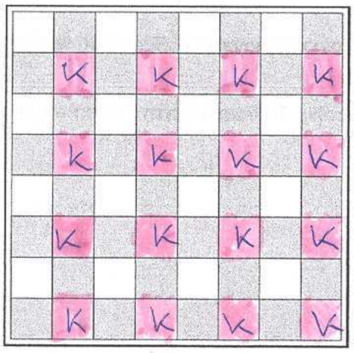


16 jezdců

X... tam, kam můžou jezdci jet

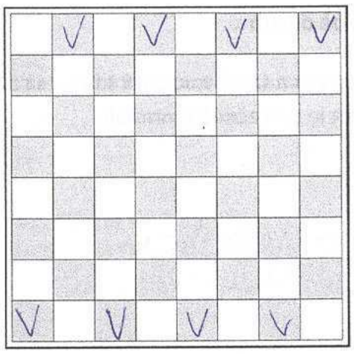
J... jezdec

2. Jaký maximální počet králů lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují?



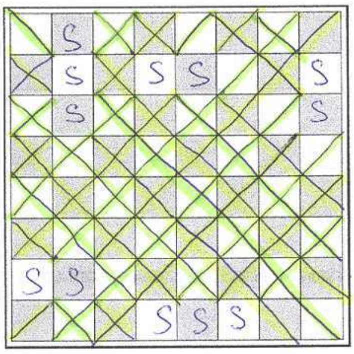
16 králů

3. Lze na šachovnici 8 x 8 rozestavit více než 8 věží tak, aby se navzájem neohrožovaly?



více, jak 8 věží nelze!
věže nesmí být na stejné lajně, proto dobře

4. Jaký maximální počet střelců lze rozestavit na šachovnici 8 x 8 tak, že se žádní dva neohrožují? Kolik úhlopříčných „drah" pro střelce existuje na šachovnici?



12 střelců

5. Maximální počet navzájem se neohrožujících dam na šachovnici 8 x 8 je osm. Najděte alespoň jedno rozmístění těchto osmi dam.
Pozn. existuje 92 řešení této úlohy; dokázáno již roku 1874 anglickým matematikem James Whitbread Lee Glaisherem.