Posudek oponenta na disertační práci Jany Šnupárkové „Stochastic evolution equations with multiplicative fractional noise“

Frakcionální Brownovy pohyby (indexované tzv. Hurstovým parametrem $H \in]0,1[$) tvoří důležitou třídu gaussovských procesů, užitečnou v modelech, kdy náhodná porucha připomíná bílý šum, ale předpoklad nezávislých přírůstků je nerealistický. Až na klasický případ Wienerova procesu ($H = \frac{1}{2}$) však frakcionální Brownovy pohyby nejsou semimartingaly a při práci s nimi nelze užíti standardní theorii stochastické integrace. Lze na ně rozšířiti integrační theorii založenou na Malliavinově kalkulu, jež je ovšem i ve „wienerovském“ případě značně technická. Pokud integrátor není semimartingal, z principiálních důvodů nemohou platit žádné jednoduché momentové odhady stochastických integrálů a dokázat existenci a jednoznačnost řešení stochastických diferenciálních rovnic je obtížné i v případech, které jsou v klasické theorii $H = \frac{1}{2}$ spíše triviální.

Jedním z takových případů jsou i bilineární rovnice

$$(\aleph) \qquad \mathrm{d}X = A(t)X\,\mathrm{d}t + BX\,\mathrm{d}B^H, \quad X(0) = x,$$

jimž je věnována předložená doktorská práce; vzhledem k aplikacím na stochastické parciální diferenciální rovnice jsou uvažovány rovnice v Hilbertově prostoru.

V prvé kapitole je velmi stručně připomenuta theorie stochastické integrace pro frakcionální Brownův pohyb. V druhé kapitole je odvozena explicitní formule pro řešení $(\aleph)$. V případě $H = \frac{1}{2}$ jde o dobře známý výsledek, pro $H > \frac{1}{2}$ byl příslušný vzorec odvozen B. Maslowským, pro $H < \frac{1}{2}$ jde o původní (již publikovaný) výsledek J. Šnupárkové. Případ $H < \frac{1}{2}$ je přitom zdaleka nejobtížnější: jednak theorie stochastické integrace klade daleko větší omezení na integrandy, než při $H > \frac{1}{2}$, jednak representační formule zahrnuje evoluční systém, jehož generátor je singulární při $t = 0$. Známé výsledky o fundamentálních řešeních pro diferenciální operátory singulární v čase nelze, zdá se, použít, takže jádrem důkazu jsou dosti komplikované úvahy funkcionálně-analytické, vedoucí ke konstrukci požadovaného evolučního systému.

Ve třetí kapitole je odvozený výsledek užit v několika speciálních případech, v nichž umožňuje analysovati asymptotické chování řešení pro velké časy, ukázati jeho závislost na Hurstově parametru a odlišnost od chování, známého ve „wienerovském“ případě.

V krátké čtvrté kapitole je Maslowského výsledek o rovnici $(\aleph)$ s $H > \frac{1}{2}$ rozšířen na případ, kdy je počáteční podmínka zadána v libovolném čase $s \geq 0$; jde jen o průpravnou úvahu pro kapitolu následující.

V závěrečné, páté kapitole jsou vyšetřovány semilinearní perturbace bilineárních rovnic tvaru

$$(\beth) \qquad \mathrm{d}X = \left\{A(t)X + F(t,X)\right\}\mathrm{d}t + BX\,\mathrm{d}B^H, \quad X(0) = x.$$

Pokud $H = \frac{1}{2}$, lze řešení (❏) vyjádřit pomocí formule variace konstant zahrnující (náhodné) fundamentální řešení bilineární rovnice. V práci je ukázáno, že pro $H > \frac{1}{2}$ takováto representace selže, formuli variace konstant však lze vztáhnout k odlišné rovnici s korekčním členem. To je velmi zajímavý a překvapivý výsledek, byl odvozen těsně před odevzdáním práce a je proto presentován v dosti syrovém tvaru, kdy na mnohé přirozené otázky zatím není známa odpověď.

Práce tedy obsahuje původní netriviální výsledky v perspektivní oblasti stochastické analysy, bohužel, kvalita formálního zpracování neodpovídá kvalitě obsahové.

Angličtina je pro autorku velmi cizí jazyk, srozumitelnost však není ohrožena, i proto, že množství překlapů je minimální.[1] Výklad je však někdy až příliš stručný, to se týká speciálně první kapitoly, která by přitom měla čtenáři, nespecialisujícímu se na frakcionální Brownův pohyb, umožnit sledovat následující výklady. (Typický příklad: na straně 12, 2. řádek shora, je uvedena formule $\mathcal{K}_H^*(D^H F) = D^W F$ pro $F \in \mathbb{D}_W^{1,2}$, na čtenáři je, aby si vyjasnil, zda to znamená, že pro $F \in \mathbb{D}_W^{1,2}$ je $D^H F$ dobře definována etc.) Míra je překročena v podkapitole věnované stochastické integraci pro $H < \frac{1}{2}$: nejsou-li specifikovány definiční obory a obory hodnot operátorů $\mathcal{K}_H^*$ a $\mathcal{K}_H^{*;a}$, je definice špatně srozumitelná. Autorka se odvolává na práci Cheridito-Nualart, což je zavádějící, neboť v ní je zvolen postup odlišný (pomoci rozkladů na chaosy), takže z této práce nelze načerpat potřebné poučení, co má autorka vlastně na mysli. Dále, autorka skoro nikdy nepřipomene význam označení jednou zavedeného, i když oba výskyty dělí mnoho stránek (ku příkladu, na straně 6, řádek 8 zdola, nebo straně 33, řádek 1 zdola, lze váhat nad přesným významem U). Rozhodnutí nezařadit do kapitoly 2 úplný důkaz pokládám za velmi nešťastné.[2] Nakonec, v Example 3.3 bych uvítal, pokud by bylo naznačeno, proč je zde $U(t,0) = \exp(-b^2 t^{2H}/2) S_A(t)$.

Mnohde by prospěly jasnější formulace, například: Z abstraktu nelze poznat, že je práce věnována bilineárním úlohám. Na straně 5, 5. řádek shora, se klasickým řešením možná míní řešení jemné. Z formulace Corollary 2.2 nemusí být úplně zřejmé, že existence a jednoznačnost U jsou součástí tvrzení. Komutativita neomezených operátorů je obecně dosti delikátní záležitost, takže zcela explicitní formulace předpokladu (AB) by neuškodila (byť risiko nepochopení je asi malé). Na straně 26 se autorka odvolává na Corollary 4.8 z práce [6], aniž by bylo zmíněno, že ve skutečnosti je užito folklorní tvrzení obecnější. (Přitom ve čtvrté kapitole v analogické situaci je problém diskutován.) Na straně 27, 8. řádek shora, se patrně míní, že pro libovolně malé fixované $\lambda > 0$ platí: pro každé $b \in \mathbb{R}$ existuje $C_b \geq 0$ etc.

Některé úvahy, zdá se mi, vyžadují precisaci. Formule (1.4) platí patrně pro $\varphi \in L^2([0,T])$, nikoliv pro $\varphi \in \mathcal{H}$. Analogicky, (1.6) patrně platí jen pro $\varphi \in \mathbb{D}_H^{1,2}(L^{1/H}([0,T]))$, nikoliv $\varphi \in \mathbb{D}_H^{1,2}(|\mathcal{H}|)$. Bod 0 obecně neleží v resolventní množině operátoru $A(0)$, proto je v (2.8) nutno psáti $(A(0) - \omega I)^{-1}$ místo $A(0)^{-1}$; podobně v několika následujících formulích nelze psát přímo $A(t)^{-1}$ nebo uvažovat $(-A(0))^\alpha$. Postup na straně 21, první řádek zdola, vyžaduje doplnění: podle předpokladu je $t \mapsto U_A(t,r)x$ spojitá funkce pro každé $x \in V$, tedy $t \mapsto U_A(t,r)B^2 x$ je

[1] Objevil jsem jen dva, které by mohly být potenciálně zavádějící: na straně 26, řádek 7 zdola, má býti X_t^n místo X_t, na straně 46, řádek 4 zdola, má býti nonlinear místo linear.

[2] Úplný důkaz byl přitom podán v autorčině práci v *Acta Universitatis Carolinæ*!

spojitá funkce pro $x \in \mathrm{Dom}(B^2)$. Vzhledem k (2.11) víme, že $U_A(t,r)B^2$ je možno spojitě rozšířit na celé V, ale spojitost funkce $t \mapsto U_A(t,r)B^2x$ pro libovolné $x \in V$ není samozřejmá. Dále, Lebesgueova věta o majorisované konvergenci předpokládá odhad integrandu stejnoměrný v parametru, autorka však zpravidla odvozuje odhad celého integrálu. Viz třeba strana 22, 9. řádek shora; je nutno podotknout, že autorčiny výpočty lze vždy přeorganisovat na správný důkaz.

Poznámky zatím uvedené se týkaly prvých čtyř kapitol. Již jsem se zmínil, že pátá kapitola obsahuje pozoruhodné výsledky, leč *in statu nascendi*. Skoro každý důkaz či příklad zde uvedený vyžaduje, aby si čtenář logickou strukturu provedených úvah částečně zrekonstruoval sám. Nemá asi význam zde stylistické námitky kupit, uvedu jen připomínky vztahující se ke korektnosti úvah. Nikde v celé kapitole není uveden (pokud jsem se nepřehlédl) předpoklad $H > \frac{1}{2}$, ač se s ním patrně pracuje. Jsou-li tedy předpoklady specifikovány jen vágně jako „všechny předpoklady kapitoly 2“, je to asi nutno interpretovat jako předpoklady vztahující se k případu $H > \frac{1}{2}$. Dále, ve formulích (5.11) a (5.18) je uvažováno supremum přes $r \in [0,t]$, ač odhadovaný výraz $u_H(r,s)$ je definován pouze pro $r \geq s$.

Úhrnem však konstatuji, že formální závady práce jsou sice nepříjemné a nesvědčí o pečlivé přípravě textu, ale matematický přínos je nesporný a prokazuje předpoklady Jany Šnupárkové pro tvůrčí práci v mathematice, tudíž předložená práce *zcela splňuje požadavky na doktorskou disertační práci kladené.*

Praha, 6. srpna 2012 Jan Seidler