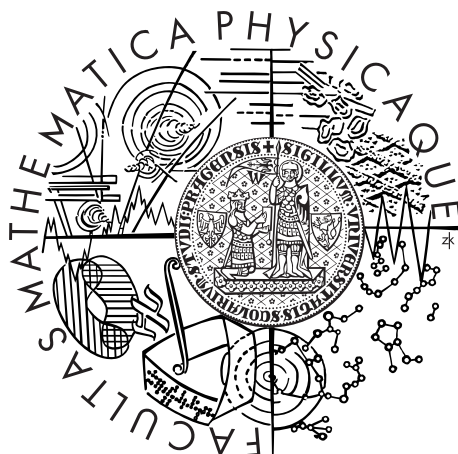


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Martin Doucha

Výpočetní složitost v teorii grafů

Katedra aplikované matematiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.

Studijní program: Informatika

Studijní obor: Diskrétní modely a algoritmy

Praha 2012

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu a všem lidem, kteří mne během psaní této práce podporovali.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Výpočetní složitost v teorii grafů

Autor: Martin Doucha

Katedra: Katedra aplikované matematiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.

Abstrakt: Tato práce zavádí dvě nové parametrizace grafových úloh zobecňující vrcholové pokrytí, které v hierarchii grafových parametrizací vyplňují část prostoru mezi vrcholovým pokrytím a klikovou šířkou. Dále zde zkoumáme parametrizovanou složitost hledání Hamiltonovské cesty a kružnice, klasického barvení grafu, problému PRECOLORING EXTENSION a EQUITABLE COLORING pro tyto nové parametrizace. Kromě problému PRECOLORING EXTENSION, který je pro jednu parametrizaci $W[1]$ -těžký, se pro všechny ostatní problémy podařilo najít FPT algoritmus pro obě parametrizace. Hranici mezi třídami FPT a $W[1]$ se tak u těchto problémů podařilo posunout blíže směrem k parametrizaci klikovou šířkou.

Klíčová slova: parametrizovaná složitost, Hamiltonovská cesta, barvení grafu, pre-coloring extension, equitable coloring

Title: Computational complexity in graph theory

Author: Martin Doucha

Department: Department of Applied Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.

Abstract: This work introduces two new parameterizations of graph problems generalizing vertex cover which fill part of the space between vertex cover and clique width in the hierarchy of graph parameterizations. We also study parameterized complexity of Hamiltonian path and cycle, vertex coloring, pre-coloring extension and equitable coloring parameterized by these two parameterizations. With the exception of pre-coloring extension which is $W[1]$ -hard in one case, all the other problems listed above are tractable for both parameterizations. The boundary between tractability and intractability of these problems can therefore be moved closer to parameterization by clique width.

Keywords: parameterized complexity, Hamiltonian path, vertex coloring, pre-coloring extension, equitable coloring

Obsah

1	Úvod	2
2	Grafové parametrizace	4
2.1	Definice	4
2.2	Vlastnosti parametrizací	5
3	Precoloring extension	10
3.1	Definice	10
3.2	Pokrytí s omezenými klikami	10
3.3	Pokrytí s neomezenými klikami	11
4	Barvení grafu	12
4.1	Definice	12
4.2	Pokrytí s neomezenými klikami	12
5	Equitable coloring	14
5.1	Definice a obecné výsledky	14
5.2	Pokrytí s neomezenými klikami	16
5.3	Pokrytí s omezenými klikami	17
6	Hamiltonovská cesta a kružnice	19
6.1	Definice a známé výsledky	19
6.2	Pokrytí s neomezenými klikami	19
7	Shrnutí	21
	Literatura	22

1. Úvod

První důležité výsledky teoretické informatiky vznikly ve 30. letech 20. století, kdy několik matematiků nezávisle na sobě vymyslelo navzájem ekvivalentní teoretické modely počítače včetně slavného Turingova stroje. Hlavním předmětem zájmu informatiky v té době byl výzkum algoritmické rozhodnutelnosti různých úloh. Jedním z nejslavnějších výsledků té doby je známý Halting problém, tedy důkaz existence algoritmicky nerozhodnutelných úloh.

V 60. a 70. letech 20. století, kdy pokrok ve výrobě počítačů umožnil praktické využití teoretických poznatků o algoritmické řešitelnosti, se zvedla vlna zájmu o výpočetní složitost algoritmů. Důvod byl prostý: Principiálně velmi jednoduché algoritmy, které pracují v exponenciálním čase (počtu vykonaných elementárních instrukcí stroje) nebo prostoru (počtu paměťových buněk nutných pro výpočet), nejsou použitelné v praxi pro větší objem vstupních hodnot. Proto může být výhodné navrhnout principiálně složitější algoritmus, který si však vystačí pouze s polynomiálním časem a prostorem vzhledem k velikosti vstupu.

Poprvé tak byla formulována definice tříd **P** a **NP** (a později ještě dalších složitostních tříd), které tvoří základní intuitivní rozdělení úloh na „lehké“ a „těžké“. Jedním z hlavních výsledků ze 70. let je slavná Cook-Levinova věta, důkaz existence **NP**-úplné úlohy (tedy úlohy v třídě **NP**, pomocí které lze efektivně řešit všechny ostatní úlohy spadající do třídy **NP**). Základní otázka, zda **P=NP**, tedy zda všechny úlohy v třídě **NP** lze řešit pomocí deterministického algoritmu pracujícího v polynomiálním čase, ovšem zůstává i po více než 40 letech stále otevřená.

Protože pro **NP**-těžké úlohy jsou v jejich plné obecnosti známy pouze algoritmy s exponenciální časovou složitostí, pozornost se logicky zaměřila na dvě základní možnosti, jak přesto dosáhnout polynomiální časové složitosti: Hledat algoritmy pro speciální případy vstupů nebo aproximovat řešení polynomiálním algoritmem s předem známou maximální odchylkou od přesného výsledku, respektive schématem polynomiálních algoritmů, kde je možné požadovanou maximální odchylku zvolit na úkor stupně polynomu časové složitosti. První přístup slavil velký úspěch v podobě Courcellovy věty, podle které je každá úloha popsitelná pomocí monadické logiky druhého řádu řešitelná v lineárním čase na třídách grafů se stromovou šířkou omezenou konstantou. Nejslavnějším výsledkem aproximačního přístupu je pak PCP věta, která říká, že pro některé úlohy je aproximace s požadovanou odchylkou menší než určitá konstanta **NP**-těžká. Pokud tedy **P≠NP**, jejich přesnému řešení se nelze přiblížit libovolně blízko.

V 90. letech 20. století pak vznikl nový přístup k hledání efektivních algoritmů pro **NP**-těžké úlohy, který je svým způsobem i abstrakcí obou předchozích přístupů. Nazývá se parametrizovaná složitost. Jeho základem je myšlenka, že určité vlastnosti úlohy, vstupu nebo speciálních požadavků (třeba požadované přesnosti řešení jako v případě aproximačních schémat) by bylo možné omezit malým samostatným parametrem, na který se přesune veškerá exponenciální složitost algoritmu. Část algoritmu závislá na velikosti celého vstupu by pak zůstala polynomiální s konstantním stupněm polynomu. Třída úloh řešitelných takovýmto algoritmem se nazývá FPT (Fixed parameter tractable).

Definice. *FPT algoritmus*

Nechť (x, k) je zadání parametrizované úlohy L , kde k je parametr. Algoritmus A je FPT algoritmus, pokud korektně řeší úlohu L a na vstupu (x, k) pracuje v čase $O(f(k)|x|^{O(1)})$, kde f je libovolná vyčíslitelná funkce nezávislá na $|x|$.

Dalo by se říct, že výše zmíněná Courcellova věta předběhla svou dobu, protože ji lze přeformulovat na existenci FPT algoritmu pro úlohy popsatelné pomocí monadické logiky druhého řádu a parametrizované stromovou šířkou vstupního grafu. Její důkaz totiž využívá konstantní stromovou šířku vstupního grafu k odvedení veškeré exponenciální práce. Vše ostatní se tak redukuje na průchod stromovým rozkladem lineární velikosti vzhledem k velikosti vstupu a operace s binárními vektory délky omezené vhodnou funkcí stromové šířky.

Jednu úlohu je možné parametrizovat mnoha různými parametry a ne pro každý existuje FPT algoritmus. Podobně jako dříve u klasické výpočetní složitosti, i v parametrizované složitosti existuje hierarchie tříd „těžkých“ úloh, kde je existence algoritmů s lepší časovou složitostí než $O(n^{g(k)})$ velmi nepravděpodobná. Jako základní třída „těžkých“ úloh se většinou bere třída $W[1]$. Otázka, zda $FPT=W[1]$, je opět otevřená. Podrobnosti o třídě $W[1]$ není třeba čtenáře unavovat, spolu s podrobným úvodem do problematiky parametrizované složitosti je lze nalézt v knize *Parameterized Complexity* [6].

Mezi základní techniky hledání FPT algoritmů patří prohledávání stromu hloubky omezené parametrem a tzv. *kernelizace*, kdy se vstup pomocí vhodných operací postupně zmenšuje na velikost omezenou parametrem a zmenšený vstup se následně prohledá hrubou silou. V této práci, kde zavádíme dvě nové parametrizace grafových úloh a zkoumáme jejich souvislost s obtížností řešení některých variant barvení grafu, najdete příklady obou těchto technik.

2. Grafové parametrizace

Jak už bylo naznačeno v úvodní kapitole, při tvorbě parametrizací se představivosti meze nekladou. Vhodnou parametrizací může být v podstatě cokoliv, co poskytuje dodatečnou informaci užitečnou pro řešení dané úlohy. Tato práce je ale zaměřena na grafové problémy parametrizované pomocí strukturálních vlastností vstupního grafu.

Nejoblíbenější a nejlépe prostudovanou parametrizací tohoto typu je samozřejmě stromová šířka, mimo jiné i díky již zmíněné Courcellově větě. Spousta problémů ovšem není vyjádřitelná pomocí monadické logiky druhého řádu a mnohé z nich jsou těžké i na grafech s omezenou stromovou šířkou. Jako příklad může posloužit například problém `EQUITABLE COLORING` [7], kterému je věnována jedna z následujících kapitol.

V poslední době se také věnuje velká pozornost parametrizaci pomocí vrcholového pokrytí nebo klikové šířky vstupního grafu. Motivací pro použití vrcholového pokrytí je jeho menší obecnost oproti stromové šířce, která dovoluje najít FPT algoritmy pro mnohem více problémů. Motivací pro použití klikové šířky je naopak její větší obecnost proti stromové šířce a snaha zjistit, jestli by nebylo možné najít FPT algoritmy i pro mnohem složitější třídy grafů než jaké dovoluje omezená stromová šířka. V této práci se budeme snažit podrobněji prozkoumat prostor mezi vrcholovým pokrytím a klikovou šířkou.

2.1 Definice

Definice. *Graf*

Graf je dvojice množin $G = (V, E)$, kde $E \subseteq \binom{V}{2}$.

Definice. *Úplný graf*

Úplný graf (klika) je graf $G = (V, E)$, kde $E = \binom{V}{2}$.

Definice. *Indukovaný podgraf*

Nechť G je graf, $W \subseteq V(G)$. Indukovaný podgraf $G[W] = (W, E(G) \cap \binom{W}{2})$. $G \setminus W = G[V(G) \setminus W]$.

Definice. *Korektní obarvení grafu*

Mějme graf G a množinu barev C . Zobrazení $q : V(G) \rightarrow C$ nazveme korektním obarvením grafu G , pokud pro každou hranu $uv \in E$ platí $q(u) \neq q(v)$.

V této práci se zaměříme především na dvě zobecnění vrcholového pokrytí. Nejprve ale definujme několik klasických grafových parametrizací, do jejichž hierarchie pak nové parametrizace zařadíme.

Definice. *Vrcholové pokrytí*

Vrcholové pokrytí grafu G je množina $W \subseteq V(G)$, že $G \setminus W$ neobsahuje žádné hrany.

Definice. *Stromová šířka, cestová šířka*

Graf T je stromový rozklad grafu G , pokud T je strom a existuje zobrazení $f : V(T) \rightarrow 2^{V(G)}$, že:

- $\bigcup_{x \in V(T)} f(x) = V(G)$
- $\forall uv \in E(G) \exists x \in V(T) : \{u, v\} \subseteq f(x)$
- T_u podgraf T indukovaný množinou $\{x \mid u \in f(x)\}$ je souvislý pro každé $u \in V(G)$

Šířka stromového rozkladu T je $\max_{x \in V(T)} |f(x)| - 1$. Stromová šířka G je nejmenší šířka jeho stromových rozkladů.

P je cestový rozklad G , pokud je to stromový rozklad G , který je cesta. Cestová šířka G je nejmenší šířka jeho cestových rozkladů.

Definice. *Kliková šířka*

Kliková šířka G je nejmenší počet značek nutných k vytvoření grafu G pomocí následujících operací:

- Vytvoření izolovaného vrcholu se značkou i
- Spojení všech vrcholů se značkou i hranou se všemi vrcholy se značkou j pro $i \neq j$
- Přeznačování všech vrcholů se značkou i na značku j
- Disjunktní sjednocení dvou grafů vytvořených pomocí těchto čtyř operací

Definice. *Twin cover*

Množina $X \subseteq V(G)$ je twin cover, pokud pro každou hranu $uv \in E(G)$ platí buď:

- $u \in X$ nebo $v \in X$, nebo
- $N(u) \setminus \{v\} = N(v) \setminus \{u\}$

A teď definujeme nové dvě parametrizace, kterým se budeme ve zbytku práce věnovat.

Definice. *Pokrytí s neomezenými klikami*

Pokrytí s neomezenými klikami je množina W vrcholů grafu G , že $G \setminus W$ je disjunktní sjednocení klik. Velikost nejmenší takové množiny W budeme značit $ucvc(G)$. Pokud $ucvc(G) \leq k$, budeme říkat, že graf G má k -pokrytí.

Definice. *Pokrytí s omezenými klikami*

Graf G má (k, c) -pokrytí s omezenými klikami, pokud existuje $W \subseteq V(G)$, $|W| \leq k$, že $G \setminus W$ je disjunktní sjednocení klik, každá na nejvýše c vrcholech. Pro dané c budeme značit $bcvc(G, c) = \min\{k \mid G \text{ má } (k, c)\text{-pokrytí}\}$.

2.2 Vlastnosti parametrizací

Ještě než začneme jednotlivé parametrizace aplikovat na jiné problémy, nabízí se otázka, jak těžké je najít samotné jádro parametrizace a jaké vzájemné vztahy mezi různými parametrizacemi existují. Nejprve si shrneme známé vlastnosti klasických parametrizací, především složitost hledání jádra.

Vrcholové pokrytí je jeden z Karpových NP-úplných problémů [13]. Zároveň je znám FPT algoritmus, který dokáže rozhodnout, zda graf G má vrcholové pokrytí velikosti nejvýše k v čase $O(1,2738^k + k|V(G)|)$ a v polynomiálním prostoru [5].

Stromová šířka je také NP-úplný problém [1]. Pro jeho řešení je znám FPT algoritmus, který pro daný graf a parametr k v čase $O(f(k)n)$ buď nalezne stromový rozklad šířky k , nebo rozhodne, že graf má stromovou šířku ostře větší než k [4].

Kliková šířka jako obecný problém je NP-těžká. Parametrizovaná složitost hledání klikové šířky je zatím otevřený problém [9].

Věta 1. *Rozhodovací problém, zda $bvcv(G, c) \leq k$, je NP-úplný pro každé c .*

Důkaz. Větu dokážeme převodem na vrcholové pokrytí, jeden ze známých NP-úplných problémů [13].

Nechť G je zadání vrcholového pokrytí a $c \in \mathbb{N}$ je libovolné. Zadání G' vytvoříme tak, že každý vrchol G nahradíme úplným grafem na c vrcholech. Těmto úplným grafům budeme ve zbytku důkazu říkat „bubliny“. Pokud $uv \in E(G)$, pak všechny vrcholy příslušných dvou bublin v G' propojíme hranami (tedy dohromady budou indukovat úplný graf na $2c$ vrcholech).

Pokud G má vrcholové pokrytí velikosti k , pak triviálně $bvcv(G', c) \leq kc$. Do pokrytí zvolíme bubliny odpovídající vrcholům v pokrytí G . Zbytek G' nutně tvoří disjunktní sjednocení klik, každá na právě c vrcholech.

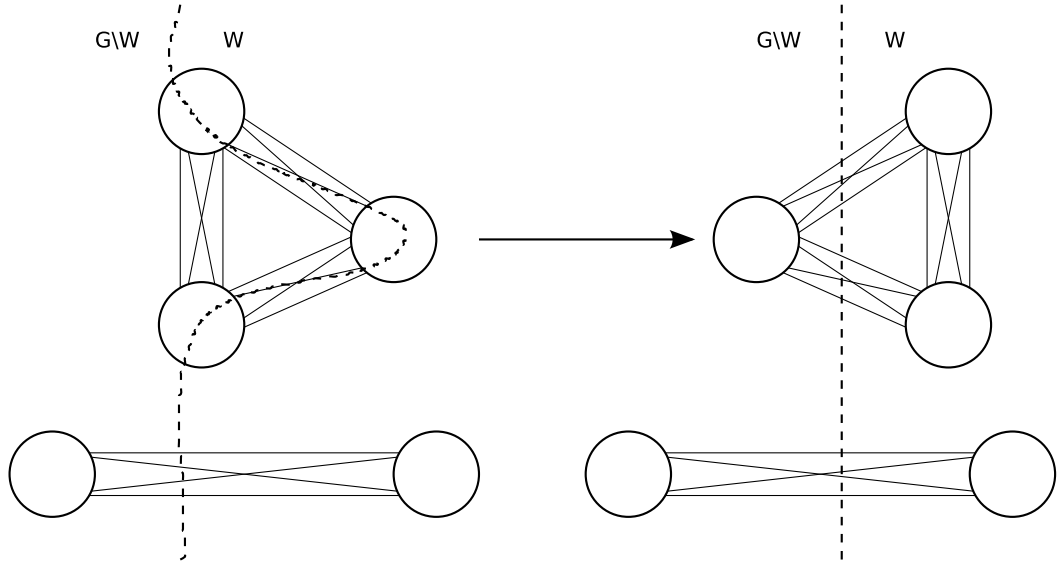
Pokud G' má (l, c) -pokrytí W , pak z tohoto pokrytí lze sestavit vrcholové pokrytí G velikosti nejvýše $\lfloor \frac{l}{c} \rfloor$. Nejprve si všimněme, že dané (l, c) -pokrytí G' nám bubliny rozdělí do tří skupin:

- Bubliny zcela mimo pokrytí
- Bubliny zcela uvnitř pokrytí
- Bubliny přepůlené pokrytím

Bubliny zcela uvnitř a zcela mimo pokrytí nejsou zajímavé, protože pro ně můžeme snadno definovat, zda jim odpovídající vrcholy G mají patřit do pokrytí nebo ne. Přepůlené bubliny ale ještě budeme muset dále zpracovat.

Nechť C je přepůlená bublina. Pokud neexistuje žádná hrana s oběma koncovými vrcholy mimo pokrytí, která by spojovala C s nějakou další bublinou, můžeme C z pokrytí zcela vyndat a nijak si tím neuškodíme. Nevznikne tím nic, co by nebylo úplný graf nebo bylo moc velké, a pokrytí se tím jen zmenší. Pokud taková hrana existuje, nutně spojuje C s další přepůlenou bublinou. Podívejme se tedy na všechny přepůlené bubliny, které s C sousedí. Jim odpovídající vrcholy v G tvoří úplný graf na nejvýše c vrcholech. Když tedy C z pokrytí zcela vyndáme a sousední přepůlené bubliny do pokrytí celé vložíme, nijak si tím neuškodíme. Opět nevznikne nic, co by nebylo úplný graf nebo bylo moc velké, a pokrytí se opět nezvětší. Pokud máme všechny bubliny buď zcela uvnitř, nebo zcela mimo pokrytí, pak vrcholy G odpovídající bublinám uvnitř pokrytí G' tvoří vrcholové pokrytí G velikosti nejvýše $\lfloor \frac{l}{c} \rfloor$. \square

Věta 2. *Rozhodovací problém, zda $ucvc(G) \leq k$, je NP-úplný.*



Obrázek 2.1: Příklad, jak opravit přepůlené bubliny v důkazu Věty 1

Důkaz. Větu opět dokážeme převodem na vrcholové pokrytí. Nechť graf G na n vrcholech je zadání vrcholového pokrytí. Zadání G' pokrytí s neomezenými klikami vytvoříme přilepením úplného grafu na n vrcholech ke každému vrcholu původního grafu.

Označme W pokrytí s neomezenými klikami grafu G' , $|W| \leq k$. Bez újmy na obecnosti W neobsahuje žádný z nově přidaných vrcholů, protože jejich vyhozením si nijak neuškodíme. Kdyby W nebylo vrcholovým pokrytím G , nutně $G' \setminus W$ nebude disjunktním sjednocením úplných grafů. \square

Věta 3. *Pokud graf G má (k, c) -pokrytí, lze ho nalézt v čase $O(|V(G)| + |E(G)| + (k + kc(k + c))^{k+2})$.*

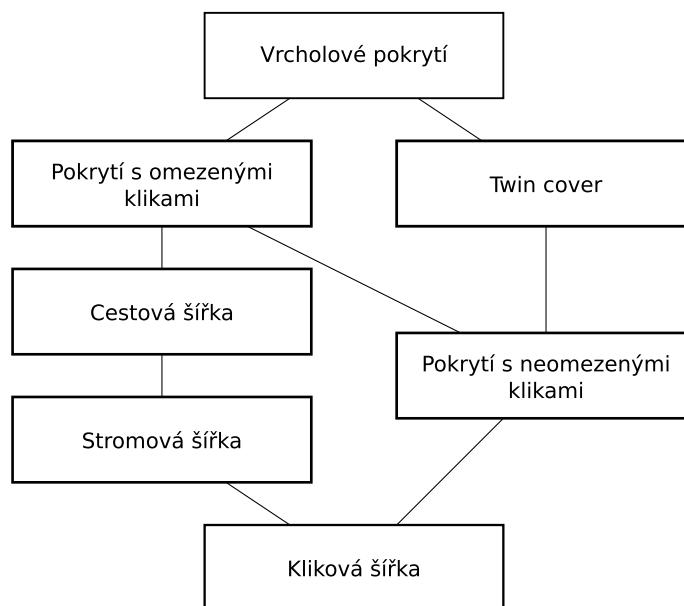
Důkaz. Nejprve si všimněme, že vrchol mimo pokrytí musí mít stupeň ostře menší než $k + c$. Tedy všechny vrcholy s vyšším stupněm z G odebereme a dáme do pokrytí. Zároveň o odebrané vrcholy snížíme parametr k .

Pokud všechny vrcholy G mají stupeň nižší než $k + c$, po odebrání všech izolovaných úplných podgrafů na nejvýše c vrcholech musí zůstat podgraf G' na nejvýše $k + kc(k + c)$ vrcholech, jinak (k, c) -pokrytí neexistuje. Na G' ale můžeme (k, c) -pokrytí najít hrubou silou v čase $O((k + kc(k + c))^{k+2})$ vyzkoušením všech možností. \square

Ze vzájemných vztahů je nejjednodušší porovnání pokrytí s omezenými a neomezenými klikami s vrcholovým pokrytím. Přesněji pokrytí s omezenými klikami je speciálním případem pokrytí s neomezenými klikami. Pokud G má (k, c) -pokrytí, pak platí $ucvc(G) \leq k$. Dále vrcholové pokrytí je speciálním případem (k, c) -pokrytí pro $c = 1$. Tedy pokud G má vrcholové pokrytí velikosti k' , pak má také (k, c) -pokrytí pro libovolné $c \in \mathbb{N}$ a platí $k \leq k'$.

Problémy v FPT parametrizované (k, c) -pokrytím jsou tedy v FPT i pro parametrizaci vrcholovým pokrytím a problémy v FPT parametrizované pokrytím s neomezenými klikami jsou v FPT i pro parametrizaci (k, c) -pokrytím.

Věta 4. *Pokud $ucvc(G) \leq k$, pak G má klikovou šířku velikosti nejvýše $k + 3$.*



Obrázek 2.2: Hasseův diagram vztahů mezi parametrizacemi. Pro parametrizace A, B definujeme $A \geq B$, pokud velikost parametrizace B je shora omezena nějakou funkcí parametrizace A .

Důkaz. Označme W množinu vrcholů v pokrytí, $|W| \leq k$. Konstrukci G zahájíme vytvořením vrcholů z W , každý s vlastní unikátní značkou, a přidáním hran mezi nimi. Celkem jsme použili nejvýše k značek.

Dále vyhradíme značku $k + 1$ pro již dokončené komponenty $G \setminus W$ a značku $k + 2$ pro rozpracované komponenty. Poslední značku $k + 3$ vyhradíme pro právě zpracováváný vrchol. Zbytek konstrukce bude probíhat po jednotlivých komponentách souvislosti $G \setminus W$.

Pokud v aktuálně zpracovávané komponentě souvislosti $G \setminus W$ nezbývá žádný nezpracovaný vrchol, přeznačuji $k + 2$ na $k + 1$ a začnu zpracovávat další komponentu. Pokud mám nezpracovaný vrchol, vytvořím nový vrchol se značkou $k + 3$ a sjednotím ho s již vytvořenou částí grafu. Dále ho spojím hranami s příslušnými vrcholy v pokrytí a s vrcholy značky $k + 2$. Nakonec přeznačuji $k + 3$ na $k + 2$ a pokračuji dalším vrcholem. \square

Pokrytí s omezenými a neomezenými klikami tak vyplňují mezeru mezi vrcholovým pokrytím a klikovou šířkou. Umožňují tedy přesněji určit, kde jsou jednotlivé problémy ještě řešitelné pomocí FPT algoritmů, a kde už začínají být těžké.

Další triviální vztah je mezi (k, c) -pokrytím a cestovou šířkou, kde graf G mající (k, c) -pokrytí má zároveň cestovou šířku nejvýše $k + c - 1$. Pokud W bude označovat množinu vrcholů v pokrytí, pak každý uzel cestového rozkladu bude obsahovat W jako podmnožinu a k tomu navíc jednu komponentu souvislosti $G \setminus W$.

Za zmínku stojí ještě vztah s parametrizací označovanou jako Twin cover, která zjevně leží mezi vrcholovým pokrytím a pokrytím s neomezenými klikami, ale s (k, c) -pokrytím je vzájemně neporovnatelná. Twin cover se velmi podobá pokrytí s neomezenými klikami, ale navíc vyžaduje, aby všechny vrcholy ve stejné komponentě souvislosti $G \setminus W$ měly stejné sousedy ve W .

Výše uvedené vztahy navíc neplatí v opačném směru. Nalezení tříd grafů, které znemožňují obrátit tyto vztahy, ponecháme jako jednoduché cvičení pro čtenáře.

3. Precoloring extension

Problém PRECOLORING EXTENSION patří do široké rodiny problémů barvení vrcholů grafu. Podobně jako u většiny ostatních problémů z této rodiny je jeho hlavní motivací plánování časových rozvrhů. Jednotlivé vrcholy grafu odpovídají úlohám, které je třeba rozvrhnout, hrany představují konflikty mezi úlohami, kvůli kterým je není možné naplánovat do stejného časového úseku, a barvy pak představují jednotlivé časové úseky, do kterých chceme úlohy rozvrhnout. Specialitou tohoto problému je pak to, že některé úlohy jsou předem rozvržené do jednoznačně daných časových úseků.

Tomuto problému se budeme věnovat jako prvnímu, protože pěkně ilustruje smysl rozdělení zde studovaných pokrytí na variantu s omezenými klikami a variantu s neomezenými klikami. Pokud máme zaručenu omezenou velikost klik po odebrání pokrytí nebo vrcholy klik mají v pokrytí uniformní okolí (Twin cover), problém je lehký. Pokud ale kliky nemají omezenou velikost a ani uniformní okolí, problém se stává $W[1]$ -těžkým.

3.1 Definice

Definice. *Úloha problému PRECOLORING EXTENSION*

Je dán graf G , číslo $r \in \mathbb{N}$, množina $X \subseteq V(G)$ a předbarvení $p : X \rightarrow \{1, \dots, r\}$. Existuje $q : V(G) \rightarrow \{1, \dots, r\}$ korektní obarvení G , že $q \upharpoonright X = p$?

O problému je známo, že pro parametrizaci stromovou šířkou je $W[1]$ -těžký [7]. Za předpokladu $W[1] \neq \text{FPT}$ je tedy $W[1]$ -těžký i pro parametrizaci klikovou šířkou. Pro parametrizaci vrcholovým pokrytím je problém naopak v FPT [10].

Pro potřeby důkazů v této kapitole ještě definujeme problém LIST COLORING.

Definice. *Úloha problému LIST COLORING*

Je dán graf G , číslo $r \in \mathbb{N}$ a zobrazení $p : V(G) \rightarrow 2^{\{1, \dots, r\}}$ přiřazující seznamy barev vrcholům. Existuje $q : V(G) \rightarrow \{1, \dots, r\}$ korektní obarvení G , že $\forall u \in V(G) : q(u) \in p(u)$?

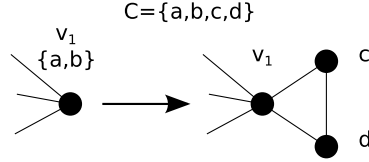
3.2 Pokrytí s omezenými klikami

Problém PRECOLORING EXTENSION parametrizovaný pokrytím s omezenými klikami je řešitelný lehce upraveným algoritmem pro parametrizaci vrcholovým pokrytím [10].

Věta 5. PRECOLORING EXTENSION lze na grafech s (k, c) -pokrytím (s omezenými klikami) vyřešit v čase $O((k + c)^{k+2}c|V(G)|r)$

Důkaz. Označme W množinu vrcholů, po jejichž odebrání z G zbyde disjunktní sjednocení úplných grafů, každý z nich na nejvýše c vrcholech. $|W| \leq k$

Na začátku pro nepředbarvené vrcholy sestavíme seznamy přípustných barev a z G i W odebereme všechny předbarvené vrcholy. Pokud $r \geq k + c$, pak každé korektní obarvení W lze na vrcholy mimo W rozšířit hladovým algoritmem. Dále



Obrázek 3.1: Příklad gadgetu z důkazu Věty 6

pokud nějaký vrchol $u \in W$ má v seznamu alespoň $|W|$ různých barev, pak libovolné korektní obarvení $W \setminus \{u\}$ lze vždy rozšířit na korektní obarvení W .

Označme $W_0 = W$ a $W_i = W_{i-1} \setminus \{v_i\}$, pokud ve W_{i-1} existuje vrchol v_i se seznamem velikosti alespoň $|W_{i-1}|$. Poslední W_i v posloupnosti označme W' . Triviálně platí, že každé $u \in W'$ má seznam velikosti menší než $|W'| \leq k$. Pro W' budeme postupně zkoušet všechny možnosti obarvení (nejvýše k^k možností) a pokud některá z nich bude korektní, rozšíříme toto obarvení nejprve na celé W (postupně od W' po W_0), a pak i na zbytek G hladovým algoritmem.

Pokud $r < k + c$, postupně projdeme všechna korektní obarvení W (těch je maximálně $(k + c)^k$), a pro každé z nich zkusíme dobarvit zbylé vrcholy pomocí párování na pomocném bipartitním grafu.

Při konstrukci pomocného grafu pro každou komponentu souvislosti $G \setminus W$ sjednotíme seznamy všech jejích vrcholů a za každou barvu ve sjednocení přidáme do pomocného grafu jeden vrchol. Pak přidáme ještě vrcholy odpovídající nepředbarveným vrcholům komponenty a spojíme je hranami s vrcholy odpovídajícími barvám v jejich seznamech. Každé komponentě souvislosti $G \setminus W$ tak v pomocném grafu odpovídá samostatná bipartitní komponenta souvislosti na nejvýše $2c + k$ vrcholech. Triviálně platí, že korektní obarvení W lze rozšířit na zbytek grafu právě když v pomocném grafu lze párováním uspokojit partitu odpovídající vrcholům klik $G \setminus W$. \square

3.3 Pokrytí s neomezenými klikami

Pokud vypustíme požadavek na omezenou velikost klik, PRECOLORING EXTENSION se stane $W[1]$ -těžkým. Pro důkaz použijeme převod na problém LIST COLORING, který je $W[1]$ -těžký pro parametrizaci vrcholovým pokrytím [7],[8].

Věta 6. *Problém PRECOLORING EXTENSION parametrizovaný pokrytím s neomezenými klikami je $W[1]$ -těžký.*

Důkaz. Nechť G je zadání problému LIST COLORING s vrcholovým pokrytím velikosti k . Označme $C = \{1, \dots, r\}$ množinu všech barev.

Zadání PRECOLORING EXTENSION G' vytvoříme z G tak, že ke každému vrcholu v přilepíme úplný graf na $|C \setminus p(v)|$ vrcholech předbarvený právě všemi barvami z $C \setminus p(v)$. Tím získáme graf s k -pokrytím (množina vrcholů v pokrytí zůstává stejná jako v G) a předbarvené vrcholy ekvivalentně nahradí seznamy barev. \square

4. Barvení grafu

Klasický problém barvení grafu je jeden z nejstarších a nejlépe prostudovaných ve své rodině. Jeho historie sahá až do poloviny 19. století, kdy byla poprvé zformulována slavná věta o čtyřech barvách, tehdy jen jako hypotéza. Motivací k tomu bylo barevné rozlišení územních celků na politických mapách.

S rozvojem informatiky se zvýšil zájem o efektivní algoritmy pro hledání konkrétních obarvení grafů. Jak už bylo řečeno v předchozí kapitole, jedním z možných využití algoritmů pro hledání obarvení grafu je rozvrhování úloh v čase, ale také pro alokování registrů procesoru při kompilování software.

4.1 Definice

Definice. *Barvení grafu*

Je dán graf G a číslo $r \in \mathbb{N}$. Existuje $q : V(G) \rightarrow \{1, \dots, r\}$ korektní obarvení grafu?

O problému je známo, že pro parametrizaci klikovou šířkou je W[1]-těžký [11]. Naopak pro parametrizaci stromovou šířkou je v FPT [2].

4.2 Pokrytí s neomezenými klikami

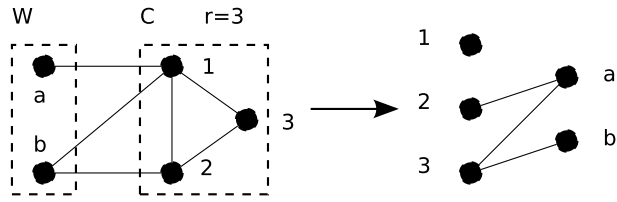
Pro parametrizaci pokrytí s omezenými klikami problém zjevně nemá smysl podrobně řešit, protože ho stačí prohlásit za zadání problému PRECOLORING EXTENSION s prázdnou množinou předbarvených vrcholů. V případě pokrytí s neomezenými klikami to ale tak jednoduché není, protože pro tuto parametrizaci je problém PRECOLORING EXTENSION W[1]-těžký.

Věta 7. *Nechť G je zadání barvení grafu, $ucvc(G) \leq k$, $r \in \mathbb{N}$ je počet barev. Pak lze řešení problému nalézt v čase $O\left(\left(\frac{0,792k}{\ln(k+1)}\right)^k (k|V(G)|)^{\frac{3}{2}}\right)$, pokud nějaké existuje.*

Důkaz. Nejprve si všimněme, že jednotlivé barvy jsou narozdíl od předchozího problému navzájem zcela zaměnitelné. Celkový počet obarvení pokrytí, které bude nutné zkusit, se tím zredukuje na Bellovo číslo, které lze shora odhadnout vzorcem $\left(\frac{0,792k}{\ln(k+1)}\right)^k$ [3]. Pro korektní obarvení vrcholů v pokrytí pak budeme dále zjišťovat, jestli lze obarvení rozšířit i na zbytek grafu.

Označme W množinu vrcholů v pokrytí, $|W| \leq k$. Zafixujme C libovolnou komponentu souvislosti $G \setminus W$. Označme d počet barev použitých na okolí C . Zjevně pokud $|C| > r$, obarvení nemůže existovat. Naopak pokud $|C| \leq r - d$, komponentu můžeme dobarvit hladově. Ve zbývajícím případě musíme v komponentě C najít vhodné vrcholy, které by šlo obarvit dostatečným počtem barev použitých na okolí C . Hledat budeme párováním na pomocném grafu.

Každé C komponentě $G \setminus W$, kterou nelze dobarvit hladově, bude v pomocném grafu odpovídat samostatná bipartitní komponenta souvislosti. Do jedné partity vložíme vrcholy C , prozatím bez hran. Do druhé partity komponenty pak vložíme vrchol za každou barvu použitou na okolí C . Každý vrchol u z první partity nakonec spojíme hranou s vrcholy odpovídajícími barvám, které se nevyskytují



Obrázek 4.1: Příklad pomocného grafu z důkazu Věty 7; a, b jsou barvy

v okolí u . Obarvení W lze rozšířit do C právě tehdy, když na příslušné komponentě pomocného grafu existuje párování velikosti alespoň $|C| - r + d$.

Exponenciální část časové složitosti jsme už probrali na začátku důkazu. Pomocný graf lze postavit v čase $O(k|V(G)|)$, což je zároveň horní odhad i na počet jeho vrcholů a hran, a párování lze pomocí Hopcroft-Karpova algoritmu nalézt v čase $O((k|V(G)|)^{\frac{3}{2}})$. \square

5. Equitable coloring

Problém EQUITABLE COLORING je dalším z rodiny barvení grafů. Od předchozích dvou problémů se odlišuje tím, že ke korektnímu obarvení grafu přidává ještě požadavek, aby každou barvou byl obarven stejný počet vrcholů. EQUITABLE COLORING grafu G pomocí r barev je tak ekvivalentní otázce, zda graf G je podgrafem Turánova grafu na $|V(G)|$ vrcholech s r partitami.

Jednou z jeho aplikací je opět rozvrhování, tentokrát s požadavkem na rovnoměrné rozložení úloh v čase.

5.1 Definice a obecné výsledky

Definice. *Úloha problému EQUITABLE COLORING*

Je dán graf G a číslo $r \in \mathbb{N}$. Existuje $q : V(G) \rightarrow \{1, \dots, r\}$ korektní obarvení grafu G , že pro každé dvě barvy $i, j \in \{1, \dots, r\}$ platí $||q^{-1}(i)| - |q^{-1}(j)|| \leq 1$?

O problému je známo, že pro parametrizaci stromovou šířkou je $W[1]$ -těžký [7]. Za předpokladu $W[1] \neq \text{FPT}$ je tedy $W[1]$ -těžký i pro parametrizaci klikovou šířkou. Pro parametrizaci vrcholovým pokrytím je problém naopak v FPT [10].

Problém EQUITABLE COLORING nebudeme řešit přímo, ale v podobě dvou jeho zobecnění. První zobecnění vznikne předepsáním libovolných počtů vrcholů k obarvení jednotlivým barvám. Této variantě budeme říkat NUMBER COLORING. Druhou zobecněnou variantu vytvoříme z problému NUMBER COLORING přidáním seznamů povolených barev vrcholům grafu G . Této variantě budeme říkat NUMBER LIST COLORING a nejprve pro ni dokážeme jedno pomocné lemma, které pak budeme používat v důkazech FPT -řešitelnosti. Problém NUMBER LIST COLORING používá i Fellows a kol. v důkazu $W[1]$ -těžkosti problému EQUITABLE COLORING parametrizovaného stromovou šířkou [7].

Definice. *Úloha problému NUMBER COLORING*

Je dán graf G , $r \in \mathbb{N}$ počet barev a předepsané počty vrcholů $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$, že $\sum_{i=1}^r n_i = |V(G)|$. Existuje $q : V(G) \rightarrow \{1, \dots, r\}$ korektní obarvení G , že pro každou barvu $i \in \{1, \dots, r\}$ platí $|q^{-1}(i)| = n_i$?

Definice. *Úloha problému NUMBER LIST COLORING*

Je dán graf G , $r \in \mathbb{N}$ počet barev, předepsané počty vrcholů $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$, že $\sum_{i=1}^r n_i = |V(G)|$ a $p : V(G) \rightarrow 2^{\{1, \dots, r\}}$ přiřazení seznamů. Existuje $q : V(G) \rightarrow \{1, \dots, r\}$ korektní obarvení G , že $\forall u \in V(G) : q(u) \in p(u)$ a $\forall i \in \{1, \dots, r\} : |q^{-1}(i)| = n_i$?

Definice. *Podgraf indukovaný barvou*

Nechť G je graf a $p : V(G) \rightarrow 2^{\{1, \dots, r\}}$ je přiřazení seznamů barev. Pro $i \in \{1, \dots, r\}$ označme $U_i = \{u \in V(G) | i \in p(u)\}$. Podgraf indukovaný barvou i je $G[i] = G[U_i]$.

Definice. *Nosná množina barev*

Nechť G je graf a $p : V(G) \rightarrow 2^{\{1, \dots, r\}}$ je přiřazení seznamů barev. Dvojici (X, i)

nazveme nosnou množinou barvy i , pokud X je komponentou souvislosti $G[i]$. Dvojici (X, C) nazveme nosnou množinou, pokud $C \subseteq \{1, \dots, r\}$, X je nosná množina barvy i pro každou barvu $i \in C$ a X není nosnou množinou barvy j pro žádné $j \in \{1, \dots, r\} \setminus C$.

Lemma 8. *Mějme zadání problému NUMBER LIST COLORING na grafu G . Pokud pro každou barvu $i \in \{1, \dots, r\}$ je $G[i]$ disjunktním sjednocením klik, pak lze NUMBER LIST COLORING rozhodnout v čase $O(|V(G)|^{\frac{5}{2}} r^{\frac{3}{2}})$.*

Důkaz. Mějme zadání problému NUMBER LIST COLORING splňující předpoklady lemmatu. Zkonstruujeme pomocný bipartitní graf H , na kterém budeme obarvení hledat pomocí párování.

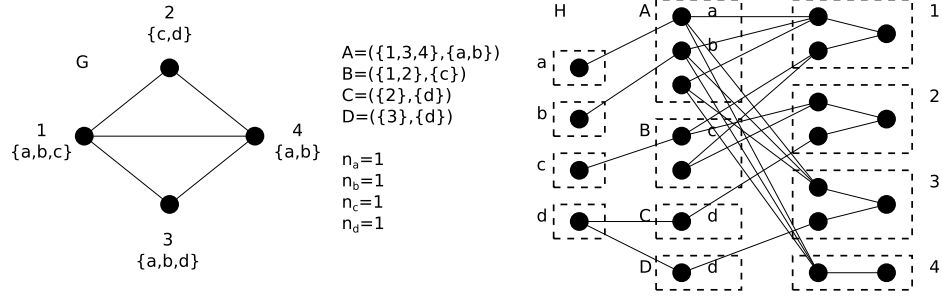
Nejprve do partity A pomocného grafu vložíme $|V(G)|$ předbarvených vrcholů (barvou i jich bude předbarvených právě n_i pro každé $i \in \{1, \dots, r\}$).

Dále vytvoříme seznam nosných množin (X, C) . Tento seznam je jednoznačně určen seznamy barev a dle předpokladů lemmatu každé (X, C) indukuje úplný podgraf. Za každé (X, C) v seznamu nosných množin přidáme do pomocného grafu vrcholy následujícím způsobem:

- Do partity B přidáme $|C|$ obarvitelných vrcholů, každé barvě i z C bude odpovídat právě jeden z těchto vrcholů. Vrchol odpovídající barvě i spojíme hranou se všemi vrcholy předbarvenými barvou i z partity A .
- Pokud $|C| < |X|$, doplníme $|X| - |C|$ vycpávkových vrcholů do partity B . Prozatím k nim nebudeme přidávat žádné hrany.
- Pokud $|C| > |X|$, doplníme $|C| - |X|$ redukčních vrcholů do partity A . Redukční vrcholy spojíme hranou se všemi obarvitelnými vrcholy ze stejné nosné množiny.

Po zpracování všech nosných množin ještě přidáme pomocné vrcholy, které zajistí správné přidělení barev mezi jednotlivé nosné množiny. Postupně budeme procházet jednotlivé vrcholy z $V(G)$. Pro vrchol $u \in V(G)$ nejprve určíme, v kolika nosných množinách (X, C) leží. Za každé (X, C) obsahující u přidáme do partity A jeden pomocný vrchol spojený se všemi obarvitelnými a vycpávkovými vrcholy příslušujícími (X, C) . Následně pro vrchol u přidáme ještě jeden selekční vrchol do partity B spojený se všemi vrcholy vytvořenými v tomto kroku pro vrchol u . Pokud existuje korektní obarvení G splňující zadání problému NUMBER LIST COLORING, pak na pomocném grafu H existuje perfektní párování. Obarvení jednoznačně určuje výběr párování vrcholů z partity B přidaných v posledním kroku (selekční vrchol spárujeme s pomocným vrcholem odpovídající nosné množině, do které patří barva vrcholu u). Dále je obarvením určeno párování předbarvených vrcholů (až na permutaci předbarvených vrcholů jednoznačně). Pro spárování připadají v úvahu pouze obarvitelné vrcholy odpovídající barvám z příslušné nosné množiny použitým v obarvení. Po odebrání všech již spárovaných vrcholů pak zbývá pouze disjunktní sjednocení úplných bipartitních grafů $K_{x,x}$, které lze napárovat hladově.

Pokud na pomocném grafu existuje perfektní párování, pak existuje korektní obarvení G splňující zadání problému NUMBER LIST COLORING. Párování selekčních



Obrázek 5.1: Příklad pomocného grafu z důkazu Lemmatu 8

vrcholů jednoznačně určuje, z jaké nosné množiny se budou vybírat barvy pro příslušné vrcholy G . Konstrukce grafu zároveň zaručuje, že obarvitelné vrcholy z každé nosné množiny budou spárovány s právě tolika předbarvenými vrcholy, kolik se z dané nosné množiny má použít barev.

Párování lze najít v čase $O(|E(H)|\sqrt{|V(H)|})$ pomocí Hopcroft-Karpova algoritmu. Předbarvených vrcholů je $|V(G)|$, každý stupně maximálně $|V(G)|$. Obarvitelných a vycpávkových vrcholů je dohromady maximálně $|V(G)|r$ a sousedí s přesně stejným počtem redukčních a pomocných vrcholů. Dohromady přidávají maximálně $|V(G)|^2r$ dalších hran. Z posledního kroku konstrukce ještě zbývá právě $|V(G)|$ selekčních vrcholů, každý stupně maximálně r . Celkem tedy $|V(H)| \leq 2|V(G)|(r+1)$ a $|E(H)| \leq |V(G)|^2 + |V(G)|^2r + |V(G)|r$. Seznam nosných množin lze zkonstruovat pomocí opakovaného DFS v čase $O(|V(G)|r + |E(G)|r)$, respektive v čase $O(|V(G)|^2r)$ při reprezentaci G maticí sousednosti. Obarvení lze při vhodné reprezentaci párování zkonstruovat v čase $O(|V(G)|r)$. \square

Triviálně je vidět, že dvě barvy se stejným předepsaným počtem vrcholů jsou v řešení problému NUMBER LIST COLORING zcela zaměnitelné. Toho budeme u obou parametrizací využívat při výběru barev, které musíme vyzkoušet do obarvení pokrytí.

5.2 Pokrytí s neomezenými klikami

Věta 9. *Mějme zadání problému NUMBER COLORING na grafu G , že $ucvc(G) \leq k$ a barvy lze rozdělit do s přihrádek tak, že v každé přihrádce mají všechny barvy stejnou velikost. Pak lze tuto úlohu rozhodnout v čase $O((ks)^k |V(G)|^{\frac{5}{2}} r^{\frac{3}{2}})$.*

Důkaz. Nechť W je množina vrcholů v pokrytí, $|W| \leq k$. Když z každé přihrádky vybereme k zástupců (respektive celou přihrádku, pokud je v ní méně než k barev) a vyzkoušíme všech $(ks)^k$ možností obarvení W pomocí vybraných barev, vyzkoušeli jsme tím až na přejmenování barev uvnitř stejné přihrádky všechny možnosti obarvení W .

Pro každé z $(ks)^k$ obarvení W tedy zbývá ověřit, jestli lze obarvení rozšířit i na zbytek grafu. Pokud je obarvení W korektní a nepřekračuje předepsaný počet vrcholů některé použité barvy, přidělíme vrcholům $V(G) \setminus W$ seznamy podle obarvení jejich sousedů z W . Pak ještě z předepsaných počtů vrcholů jednotlivých barev odečteme počty použití ve W a $G \setminus W$ necháme dobarvit pomocí párování dle lemmatu. Pokud žádné korektní obarvení W nelze rozšířit na zbytek grafu, řešení neexistuje. \square

Klasický **EQUITABLE COLORING** je tedy FPT-řešitelný při parametrizaci pokrytím s neomezenými klikami, protože v klasické variantě platí $s \leq 2$.

5.3 Pokrytí s omezenými klikami

Při parametrizaci pokrytím s omezenými klikami můžeme díky omezené velikosti klik odstranit požadavek na omezený počet přihrádek na barvy, kterých obecně může být $O(\sqrt{|V(G)|})$.

Věta 10. **NUMBER COLORING lze na grafech $s(k, c)$ -pokrytím (s omezenými klikami) vyřešit v čase $O((2k^2 + k + c)^k |V(G)|^{\frac{5}{2}r^{\frac{3}{2}}})$.**

Důkaz. Označme W množinu vrcholů v pokrytí, $|W| \leq k$. Barvy opět rozdělíme do přihrádek podle počtu předepsaných vrcholů. Z každé přihrádky s předepsaným počtem nejvýše $2k$ vybereme k zástupců do množiny C , případně celou přihrádku, pokud obsahuje méně než k barev. Kdyby $|C| < k$, budeme do $|C|$ postupně přidávat zástupce i z přihrádek s větším předepsaným počtem od nejmenších po největší, dokud nebude $|C| \geq k$. Nakonec do C přidáme ještě $k + c$ barev s největším předepsaným počtem, tentokrát už bez ohledu na rozdělení do přihrádek. Tím máme vybráno nejvýše $2k^2 + k + c$ barev, kterými budeme zkoušet obarvit W .

Množinu W lze barvami z C obarvit nejvýše $(2k^2 + k + c)^k$ možnostmi. Pro každé korektní obarvení W barvami z C , které nepřekračuje předepsaný počet vrcholů některé použité barvy, opět přidělíme vrcholům $V(G) \setminus W$ seznamy podle obarvení jejich sousedů z W . Od předepsaných počtů vrcholů jednotlivých barev odečteme počty použití ve W a $G \setminus W$ zkusíme dobarvit pomocí párování podle lemmatu. Tvrzení: Pokud žádné obarvení W pomocí barev z C nelze rozšířit na zbytek grafu, řešení neexistuje.

Nechť žádné obarvení W pomocí barev z C nelze rozšířit na zbytek grafu a nepřítel mi dá korektní řešení dle zadání. Označme D množinu barev použitých nepřitelem k obarvení W . Nechť $D \setminus C$ je nejmenší možná.

Zvolme libovolnou barvu $d \in D \setminus C$. Nutně platí $n_d > 2k$, jinak mám v $C \setminus D$ alespoň jednu barvu se stejným předepsaným počtem vrcholů \Rightarrow prohodím tuto barvu s d a mám menší $D \setminus C \Rightarrow$ spor.

Označme $W_d \subseteq W$ množinu vrcholů obarvených barvou d . Zvolím $I \subseteq C \setminus D$ tak, aby platilo $|W_d| \leq \sum_{i \in I} n_i \leq n_d$. Taková množina musí existovat, protože platí

$|W_D| \leq k < 2k < n_d$ a v $C \setminus D$ je alespoň $|W_d|$ různých barev s předepsaným počtem vrcholů menším než n_d . Všechny vrcholy obarvené barvami z $I \cup \{d\}$ odbarvím a vrcholy původně obarvené barvou d hladově obarvím barvami z I , vrcholy z W přednostně. V grafu G tedy teď mám n_d neobarvených vrcholů v $\leq n_d$ komponentách souvislosti $G \setminus W$ a barva d není nikde použita.

Z výběru množiny C platí, že existuje $J \subseteq C \setminus D, |J| = c - 1, \forall i \in J : n_i \geq n_d$. Vezmu libovolnou takovou množinu a odbarvím všechny vrcholy v G obarvené barvami z J .

Pozorování: Když barvy z $J = \{j_1, \dots, j_{c-1}\}$ uspořádám tak, aby platilo $n_d = n_{j_c} \leq n_{j_{c-1}} \leq \dots \leq n_{j_1}$, pak komponenty souvislosti $G \setminus W$ s alespoň x neobarvenými vrcholy obsahují dohromady nejvýše $x \cdot n_{j_x} + \sum_{i=x+1}^c n_{j_i}$ neobarvených

vrcholů.

Pro $x = c$ to platí triviálně, protože každá komponenta $G \setminus W$ s právě c neobarvenými vrcholy musela obsahovat alespoň jeden neobarvený vrchol ještě před odebráním barev z J .

Pokud je komponent s alespoň x , $x < c$ neobarvenými vrcholy více než n_x , z indukce musely nadbytečné komponenty vzniknout na úkor počtu komponent s alespoň $x + 1$ neobarvenými vrcholy, a tedy máme dostatek volných barev k dobarvení. Když pozorování omezíme pouze na vrcholy původně obarvené barvami z J , pro ně to muselo platit, jinak by je nepřítel nemohl těmito barvami obarvit. Protože d nemá větší předepsaný počet vrcholů než žádná barva z J , nemůže přidání dalších n_d neobarvených vrcholů platnost pozorování porušit.

G je tedy možné dobarvit hladově po komponentách přidělováním přednostně barev s největším zbývajícím počtem předepsaných vrcholů \Rightarrow spor, máme řešení s menší $D \setminus C$. \square

6. Hamiltonovská cesta a kružnice

Hamiltonovská cesta a kružnice patří podobně jako klasické barvení grafu mezi problémy studované již od 19. století. Tyto problémy souvisejí s problémem obchodního cestujícího, což je vlastně problém hledání Hamiltonovské kružnice s nejmenší vahou, a problémem nejdelší cesty v grafu.

Mezi jejich aplikace patří například směřování spojení v telefonních a optických sítích nebo tzv. *zero-knowledge proof* metody kryptografické autentizace.

6.1 Definice a známé výsledky

Definice. *Hamiltonovská cesta*

Graf G má Hamiltonovskou cestu, pokud existuje permutace π vrcholů G , že pro každé $1 \leq i \leq |V(G)| - 1$ jsou vrcholy $v_{\pi(i)}$ a $v_{\pi(i+1)}$ spojené hranou.

Definice. *Hamiltonovská kružnice*

Graf G má Hamiltonovskou kružnici, pokud má Hamiltonovskou cestu, jejíž koncové vrcholy jsou spojené hranou.

O obou problémech je známo, že pro parametrizaci klikovou šířkou jsou $W[1]$ -těžké [11]. Naopak pro parametrizaci stromovou šířkou jsou oba v FPT [2].

6.2 Pokrytí s neomezenými klikami

Definice Hamiltonovské cesty a kružnice přes permutace jsou zvoleny záměrně, protože budeme hledat právě dvě prolínající se permutace vrcholů v pokrytí a úplných podgrafů.

Věta 11. *Nechť pro graf G platí $ucvc(G) \leq k$. Pak lze v G najít Hamiltonovskou cestu v čase $O(k!(k+1)! \binom{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil^2}{k+1} \binom{4k^2}{2k} n)$, pokud nějaká existuje.*

Důkaz. Označme W množinu vrcholů v pokrytí, $|W| \leq k$. Hamiltonovská cesta zjevně může existovat jen pokud $G \setminus W$ má nejvýše $|W| + 1$ komponent souvislosti. Každá komponenta souvislosti je úplný graf, takže potřebujeme určit pouze vstupní a výstupní vrcholy komponent, kde cesta přechází mezi komponentou a vrcholy v pokrytí.

Při hledání Hamiltonovské cesty budeme postupně generovat dvě navzájem proložené permutace vrcholů v pokrytí a komponent $G \setminus W$. Pokud nemáme přesně $|W| + 1$ komponent $G \setminus W$, stejná komponenta se na cestě může (a někdy musí) vyskytovat vícekrát a někdy naopak bude třeba použít přímou hranu mezi dvěma vrcholy pokrytí. Označme s počet komponent $G \setminus W$. Každou komponentu vezmeme ve $|W| - s + 2$ kopiích. Navíc přidáme ještě $|W| - s + 1$ prázdných komponent, které budou zastupovat hrany mezi dvěma vrcholy v pokrytí. Celkem tedy máme nejvýše $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil^2$ komponent, ze kterých budeme vybírat $k+1$ zástupců. Pro každou možnost výběru pak zkusíme všechny permutace. Dohromady máme $k!$ za všechny permutace vrcholů v pokrytí a $(k+1)! \binom{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil^2}{k+1}$ za všechny možné posloupnosti komponent $G \setminus W$.

Zbývá ještě ověřit, jestli existují vhodné hrany pro vytvoření Hamiltonovské cesty předepsané permutacemi. Nejprve si všimněme, že pokud vrchol u z pokrytí má na cestě sousedit s komponentou C a u má alespoň tolik sousedů v C , kolik hran máme pro C vybrat, lze pro něj vhodnou hranu vybrat vždy. Ponecháme si tedy pouze dvojice vrchol v pokrytí-komponenta, kde je počet hran menší. Celkem tedy máme nejvýše $4k^2$ hran a potřebujeme z nich vybrat nejvýše $2k$. Z vlastností kombinačních čísel lze tedy počet možností, které je třeba hrubou silou otestovat, shora odhadnout vzorcem $\binom{4k^2}{2k}$. V čase $O(n)$ nakonec ještě zkontrolujeme, že vybrané hrany umožňují každou komponentu projít (přerušovanou) Hamiltonovskou cestou. \square

Věta 12. *Nechť pro graf G platí $ucvc(G) \leq k$. Pak lze v G najít Hamiltonovskou kružnici v čase $O((k-1)!k! \binom{\lceil \frac{k}{2} \rceil^2}{k} \binom{4k^2}{2k} n)$, pokud nějaká existuje.*

Důkaz. Pro důkaz využijeme lehce upravený algoritmus pro Hamiltonovskou cestu. Z pokrytí odebereme jeden libovolný vrchol (začátek a zároveň konec kružnice roztržené na cestu). Na zbytek grafu pak spustíme algoritmus pro Hamiltonovskou cestu, který ale navíc bude v posledním kroku hledat i hrany incidentní s odebraným vrcholem. \square

7. Shrnutí

Zavedením dvou nových parametrizací grafových problémů založených na zobecnění vrcholového pokrytí se nám podařilo posunout řešitelnost některých úloh pomocí FPT algoritmů směrem ke klikové šířce. Ze zkoumaných problémů se pro parametrizaci pokrytím s neomezenými klikami ukázal jako W[1]-těžký pouze problém PRECOLORING EXTENSION. Pro zbývající problémy kromě problému NUMBER COLORING se podařilo najít FPT algoritmy. Pro parametrizaci s omezenými klikami jsou pak pomocí FPT algoritmu řešitelné všechny zde zkoumané problémy.

Problém	VC	BCVC	TC	UCVC	TW	CW
Precoloring extension	FPT ^[10]	FPT [*]	FPT ^[12]	W[1]-těžké [*]	W[1]-těžké ^[7]	W[1]-těžké ^{←[7]}
Number coloring	FPT ^{←*}	FPT [*]	?	?	W[1]-těžké ^{←[7]}	W[1]-těžké ^{←[7]}
Equitable coloring	FPT ^[10]	FPT [*]	FPT ^[12]	FPT [*]	W[1]-těžké ^[7]	W[1]-těžké ^{←[7]}
Barvení grafu	FPT ^{←[2]}	FPT ^{←[2]}	FPT ^{←[12]}	FPT [*]	FPT ^[2]	W[1]-těžké ^[11]
Hamiltonovská cesta	FPT ^{←[2]}	FPT ^{←[2]}	FPT ^{←*}	FPT [*]	FPT ^[2]	W[1]-těžké ^[11]
Hamiltonovská kružnice	FPT ^{←[2]}	FPT ^{←[2]}	FPT ^{←*}	FPT [*]	FPT ^[2]	W[1]-těžké ^[11]

Tabulka 7.1: Parametrizovaná složitost algoritmů zkoumaných v této práci pro parametrizaci vrcholovým pokrytím (VC), pokrytím s omezenými klikami (BCVC), Twin coverem (TC), pokrytím s neomezenými klikami (UCVC), stromovou šířkou (TW) a klikovou šířkou (CW). Již známé výsledky jsou označeny citací, hvězdička označuje výsledky dokázané v této práci. Šipka označuje výsledky, které v dané práci sice nejsou přímo dokázané, ale z dokázaných výsledků vyplývají.

Dále tak zbývají následující otevřené problémy:

1. Jaká je parametrizovaná složitost hledání pokrytí s neomezenými klikami?
2. Jaká je parametrizovaná složitost problému NUMBER COLORING parametrizovaného pokrytím s neomezenými klikami a Twin coverem?

Pro druhý otevřený problém se alespoň nabízí hypotéza, že problém NUMBER COLORING bude pro obě parametrizace stejně obtížný. Pokud by se podařilo najít nějaký FPT algoritmus parametrizovaný Twin coverem založený na omezeném prohledávání možných obarvení vrcholů v pokrytí, kde pro omezení počtu obarvení pokrytí není nutná uniformita okolí všech vrcholů ve stejné klice, aplikací Lemmatu 8 z něj automaticky vznikne FPT algoritmus i pro parametrizaci pokrytím s neomezenými klikami. Takový algoritmus se ale zatím nepodařilo najít.

Literatura

- [1] Arnborg S., Corneil D. G., Proskurowski A.: *Complexity of Finding Embeddings in a k -Tree*. SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods 8, pp. 277-284.
- [2] Arnborg, S., Proskurowski, A.: *Linear time algorithms for NP-hard problems restricted to partial k -trees*. Discrete Applied Mathematics 23,1 (1989) pp. 11–24.
- [3] Berend D., Tassa T.: *Improved bounds on bell numbers and on moments of sums of random variables*. Probability and Mathematical Statistics, 30:185–205, 2010.
- [4] Bodlaender H. L.: *A Linear-Time Algorithm for Finding Tree-Decompositions of Small Treewidth*. SIAM J. Comput. 25, pp. 1305-1317
- [5] Chen J., Kanj I. A., Xia G.: *Improved Parameterized Upper Bounds for Vertex Cover*. Theor. Comput. Sci. 411, 40-42 (September 2010), 3736-3756. DOI=10.1016/j.tcs.2010.06.026 <http://dx.doi.org/10.1016/j.tcs.2010.06.026>
- [6] Downey R. G., Fellows M. R.: *Parameterized complexity*. Monographs in Computer Science. Springer, 1999.
- [7] Fellows M. R., Fomin F. V., Lokshtanov D., Rosamond F., Saurabh S., Szeider S., Thomassen C.: *On the complexity of some colorful problems parameterized by treewidth*. Information and Computation 209 (2011) 143-153.
- [8] Fellows M. R., Lokshtanov D., Misra N., Rosamond F. A., Saurabh S.: *Graph Layout problems Parameterized by Vertex Cover*. Algorithms and Computation, 19th International Symposium on Algorithms and Computations, Proceedings ISAAC 2008, Lecture Notes in Computer Science 5369, Springer, 2008, pp. 294–305
- [9] Fellows M. R., Rosamond F. A., Rotics U., Szeider S.: *Clique-width is NP-complete*. SIAM J. Discr. Math. 23,2 (2009) pp. 909–939
- [10] Fiala J., Golovach P. A., Kratochvíl J.: *Parameterized Complexity of Coloring Problems: Treewidth versus Vertex Cover (Extended Abstract)*. Theory and Applications of Models of Computation, 6th Annual Conference, Proceedings TAMC 2009, Lecture Notes in Computer Science 5532, Springer 2009, pp. 221–230
- [11] Fomin F. V., Golovach P. A., Lokshtanov D., Saurabh S.: *Clique-width: On the Price of Generality*. Proceedings of the twentieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '09). Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 825-834.
- [12] Ganian R.: *Twin-Cover: Beyond Vertex Cover in Parameterized Algorithms*. Vyjde v Proceedings of IPEC 2011, Lecture Notes in Computer Science 7112, Springer 2012

- [13] Karp R. M.: *Reducibility Among Combinatorial Problems*. Complexity of Computer Computations: Proc. of a Symp. on the Complexity of Computer Computations, R. E. Miller and J. W. Thatcher, Eds., The IBM Research Symposia Series, New York, NY: Plenum Press, 1972, pp. 85–103.