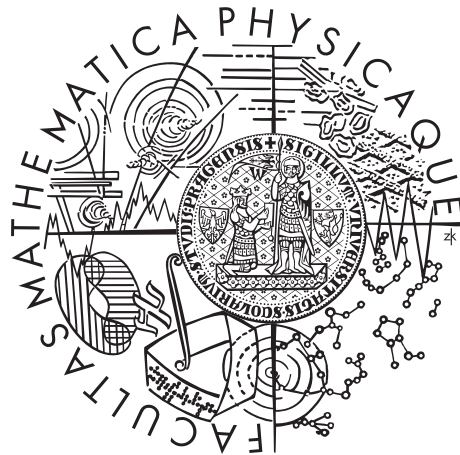


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jaroslav Dufek

Pokročilejší techniky agregace rizik

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Ing. Iva Justová Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2012

Na tomto místě bych chtěl poděkovat RNDr. Ing. Ivě Justové, Ph.D. za pomoc při psaní diplomové práce a za propůjčení literatury. Sledně Marii Dufkové za upozornění na stylistické nedostatky a svým rodičům za finanční a morální podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne

Podpis autora

Název práce: Pokročilejší techniky agregace rizik

Autor: Jaroslav Dufek

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, MFF UK

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Ing. Iva Justová Ph.D.

Abstrakt: V posledních několika letech je velmi oblíbená a často používaná riziková míra hodnota v riziku (VaR). VaR jako rizikovou míru používá většina finančních institucí. VaR je populární díky své snadné interpretaci a snadnému výpočtu. Určení hodnoty VaR může být problém, pokud uvažujeme několik závislých rizik. V praxi se proto VaR odhaduje. V naší práci se zabýváme teorií stochastického omezování. Na základě této teorie počítáme meze pro hodnotu VaR součtu několika závislých rizik. V další části této práce ukazujeme, jak získané meze zobecnit pomocí teorie kopul. Dále ukazujeme možný numerický algoritmus pro výpočet mezí, který můžeme použít v případě, kdy nelze provést přesný analytický výpočet. V závěrečné části této práce ukazujeme výpočty a porovnáváme výsledky na praktických příkladech.

Klíčová slova: agregace rizika, stochastické meze, hodnota v riziku, kopula

Title: Advanced Techniques of Risk Aggregation

Author: Jaroslav Dufek

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics, MFF UK

Supervisor: RNDr. Ing. Iva Justová Ph.D.

Abstract: In last few years Value-at-Risk (Var) is a very popular and frequently used risk measure. Risk measure VaR is used in most of the financial institutions. VaR is popular thanks to its simple interpretation and simple valuation. Valuation of VaR is a problem if we assume a few dependent risks. So VaR is estimated in a practice. In presented thesis we study theory of stochastic bounding. Using this theory we obtain bounds for VaR of sum a few dependent risks. In next part of presented thesis we show how we can generalize obtained bounds by theory of copulae. Then we show numerical algorithm, which we can use to evaluate bounds, when exact analytical evaluate isn't possible. In a final part of presented thesis we show our results on practical examples.

Keywords: risk aggregation, stochastic bounds, value at risk, copula

Obsah

Úvod	2
1 Základní pojmy	3
2 Stochastické meze závislých rizik	6
2.1 Agregace součtem	6
2.2 Agregace neklesající spojitou funkcí	10
2.3 Agregace pomocí kopul	13
3 Numerický výpočet mezí	19
3.1 Duální úloha	19
3.2 Numerická aproximace kvantilů	19
3.3 Výpočet pomocí archimédovských kopul	20
4 Příklad	23
4.1 Aplikace Exponenciálního rozdělení	23
4.2 Aplikace Paretova a Weibullova rozdělení	30
4.3 Součet tří závislých rizik	41
Závěr	45
Literatura	46
Přílohy	47

Úvod

V několika posledních letech je velmi oblíbená a často používaná riziková míra hodnota v riziku (VaR). VaR jako míru rizika používají banky, pojišťovny, zajišťovny, orgány finančního dohledu a další finanční instituce. VaR je populární míra rizika hlavně díky snadné interpretaci a snadnému výpočtu.

Určení hodnoty VaR může být problém, pokud uvažujeme portfolio několika různých a navzájem závislých rizik. Např. různé typy rizik v rámci neživotního pojištění.

Budeme předpokládat, že portfolio obsahuje závislá rizika X_1, X_2, \dots, X_n . Pro určení hodnoty $\text{VaR}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ potřebujeme znát sdružené rozdělení celého uvažovaného portfolia. To je ovšem v praxi téměř nemožné zjistit. Jednou z možností jak se vyhnout tomuto problému je agregace rizik pomocí známé korelační matice. Další možností je určit hodnotu $\text{VaR}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ na základě hodnot $\text{VaR}(X_i)$ pro dílčí rizika.

V naší práci se zabýváme možností uplatnění teorie stochastických mezí, což není nic jiného než počítání mezí distribuční funkce $F_\Psi(s)$, kde $\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ je agregační funkce uvažovaných rizik X_1, X_2, \dots, X_n .

Ve druhé kapitole odvozujeme vzorce pro meze distribuční funkce $F_S(s)$. Nejprve pro součet dvou závislých náhodných veličin. Následně meze zobecňujeme pro součet n závislých náhodných veličin. Poté uvažujeme libovolnou neklesající spojitou agregační funkci. Na závěr ukazujeme jak vylepšit meze, pokud máme k dispozici dodatečnou informaci o závislostní struktuře.

Ve třetí kapitole představujeme numerický algoritmus, který je možné použít k výpočtu mezí pro hodnotu VaR.

V závěrečné části práce uvádíme praktické využití získaných výsledků. První příklad je ilustrativní ukázkou principu výpočtu. Další příklady jsou již více z praxe. Na těchto příkladech je vidět velká náročnost, případně nemožnost přesného analytického výpočtu. V závěrečném příkladu je možno vidět, jak bychom postupovali pro tři závislá rizika.

1. Základní pojmy

V této kapitole uvedeme základní pojmy a tvrzení, které budeme používat v dalších kapitolách.

Definice 1.1 (Zobecněná inverzní funkce). Nechť $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající funkce. Její zobecněné zleva a zprava spojitě inverze jsou funkce $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ a $\varphi^{\wedge} : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definované

$$\varphi^{-1}(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{\varphi(x) \geq y\} \quad \text{a} \quad \varphi^{\wedge}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{\varphi(x) \leq y\},$$

Lemma 1.2. *Nechť φ^{-1} a φ^{\wedge} jsou definovány výše. Potom*

- i) φ^{-1} a φ^{\wedge} jsou rostoucí funkce.*
- ii) φ^{-1} resp. φ^{\wedge} je zleva, resp. zprava spojitá na \mathbb{R} .*
- iii) Pokud φ je zprava spojitá a $\varphi^{-1}(y) > -\infty$, potom $\varphi(x) \geq y \Leftrightarrow x \geq \varphi^{-1}(y)$.*
- iv) Pokud φ je zleva spojitá a $\varphi^{\wedge}(y) > -\infty$, potom $\varphi(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \varphi^{\wedge}(y)$.*

Definice 1.3 (Value-at-Risk (VaR)). Nechť X je náhodná veličina a $\alpha \in (0, 1)$ je pravděpodobnostní hladina. Potom hodnotu v riziku náhodné veličiny X na hladině α (značíme $VaR_{\alpha}(X)$) definujeme

$$VaR_{\alpha}(X) = F_X^{-1}(\alpha),$$

kde F_X je distribuční funkce náhodné veličiny X .

Definice 1.4 (Stochastické uspořádání). Nechť X, Y jsou náhodné veličiny. Říkáme, že X je stochasticky před Y (ozn. $X \preceq_{ST} Y$), pokud

$$VaR_p(X) \leq VaR_p(Y), \quad \forall p \in (0, 1).$$

Poznámka

Pokud náhodné veličiny X, Y představují ztráty, potom vztah $X \preceq_{ST} Y$ znamená, že riziko X je preferováno před rizikem Y .

Ekvivalentní vyjádření vztahu $X \preceq_{ST} Y$ pomocí distribučních funkcí je

$$\overline{F_X}(x) \leq \overline{F_Y}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

nebo-li $F_X(x) \geq F_Y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, kde F_X, F_Y jsou distribuční funkce náhodných veličin X, Y a $\overline{F_X}(x) = 1 - F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Definice 1.5 (Kopula). Kopula C je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru (U_1, U_2, \dots, U_n) , kde $U_i, i = 1, 2, \dots, n$ mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$,

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = P[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_n \leq u_n], \quad u_1, \dots, u_n \in [0, 1].$$

Věta 1.6 (Sklarova). *Nechť F je sdružená distribuční funkce se spojitými marginálními distribučními funkcemi F_1, F_2, \dots, F_n . Potom existuje jediná kopula C taková, že*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)), \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Základní kopuly

Nyní uvedeme tři základní kopuly, které budeme používat nejčastěji.

- **Nezávislá kopula C_I**
 $C_I(u_1, u_2) = u_1 u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$
- **Dolní Fréchetova mez C_L**
 $C_L(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}, \quad \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$
- **Horní Fréchetova mez C_U**
 $C_U(u_1, u_2) = \min\{u_1, u_2\}, \quad \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$

Pro dvourozměrný případ platí

$$C_L(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq C_U(u_1, u_2) \quad \forall C \quad \forall u_1, u_2 \in [0, 1].$$

Obecně bohužel tato nerovnost neplatí, protože dolní Fréchetova mez není kopula pro $n > 2$ (n je dimenze kopuly). Obecně ovšem platí $\forall C \quad \forall u_1, u_2, \dots, u_n \in [0, 1]$ následující nerovnost

$$\max\{u_1 + u_2 + \dots + u_n - (n - 1), 0\} \leq C(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq \min\{u_1, u_2, \dots, u_n\}.$$

Pro libovolné $(u_1, u_2, \dots, u_n), u_1, u_2, \dots, u_n \in [0, 1]$ existuje kopula C taková, že $C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \max\{u_1 + u_2 + \dots + u_n - (n - 1), 0\}$.

Definice 1.7 (Survival a duální kopula). *Nechť C je kopula. Potom \bar{C} je survival kopula, pokud platí*

$$\bar{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1, \quad u_1, u_2 \in [0, 1].$$

Řekneme, že C^d je duální kopula ke kopule C , pokud platí

$$C^d(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - C(u_1, u_2), \quad u_1, u_2 \in [0, 1].$$

Pozorování

Snadno se můžeme přesvědčit, že $\overline{C_L} = C_L$, $\overline{C_U} = C_U$ a $\overline{C_I} = C_I$. Z Definice 1.7 plyne, že $\bar{C}(1 - u_1, 1 - u_2) = P[(U_1 > u_1) \wedge (U_2 > u_2)]$ a $C^d(u_1, u_2) = P[(U_1 \leq u_1) \vee (U_2 \leq u_2)]$, kde U_1, U_2 jsou náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, 1]$ a $u_1, u_2 \in [0, 1]$. Odtud zřejmá plyne

$$C^d(u_1, u_2) = 1 - \bar{C}(1 - u_1, 1 - u_2), \quad u_1, u_2 \in [0, 1].$$

Definice 1.8 (Archimédovská kopula). Nechť $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ je spojitá, klesající a konvexní funkce taková, že $\varphi(1) = 0$. Nechť

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \infty \\ 0 & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}.$$

Potom funkce $C(u_1, u_2) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2))$, $u_1, u_2 \in [0, 1]$ se nazývá Archimédovská kopula.

Příklady archimédovských kopul

Název	$C_\alpha(u_1, u_2)$	$\varphi_\alpha(t)$	$\alpha \in$
C_I	$u_1 u_2$	$-\log(t)$	—
C_L	$\max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$	$1 - t$	—
Clayton	$\max\{[u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1]^{-1/\alpha}, 0\}$	$\frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$	$[-1, \infty] \setminus 0$
Gumbel	$\text{Exp}\left\{-[(-\log(u_1))^\alpha + (-\log(u_2))^\alpha]^{1/\alpha}\right\}$	$(-\log(t))^\alpha$	$[1, \infty]$
Frank	$-\frac{1}{\alpha} \log\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{e^{-\alpha} - 1}\right)$	$-\log\left(\frac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}\right)$	$(-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$

Tabulka 1.1: Archimédovské kopuly a jejich generátory.

Definice 1.9 (Pozitivní závislost (PQD)). Řekneme, že náhodný vektor (X_1, X_2) je pozitivně závislý (PQD), právě když

$$P[(X_1 > x_1) \wedge (X_2 > x_2)] \geq P[X_1 > x_1] \cdot P[X_2 > x_2] \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Poznámka

- Náhodný vektor (X_1, X_2) je PQD $\Leftrightarrow P[(X_1 \leq x_1) \wedge (X_2 \leq x_2)] \geq P[X_1 \leq x_1] \cdot P[X_2 \leq x_2] \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
- Náhodný vektor (X_1, X_2) s kopulou C je PQD $\Leftrightarrow C(u_1, u_2) \geq C_I(u_1, u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$.

Definice 1.10 (Pozitivní závislost (POD)). Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je pozitivně závislý (POD), pokud

$$\left(P[\mathbf{X} \geq \mathbf{x}] \geq \prod_{i=1}^n P[X_i \geq x_i]\right) \wedge \left(P[\mathbf{X} \leq \mathbf{x}] \geq \prod_{i=1}^n P[X_i \leq x_i]\right) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Poznámka

Náhodný vektor (X_1, X_2, \dots, X_n) s kopulou C je POD, právě když

$$[C(\mathbf{u}) \geq C_I(\mathbf{u})] \wedge [\overline{C}(\mathbf{u}) \geq \overline{C}_I(\mathbf{u})] \quad \forall \mathbf{u} \in [0, 1]^n.$$

Definice 1.11 (Komonotónnost). Řekneme, že náhodný vektor (X_1, X_2, \dots, X_n) je komonotónní, pokud pro jeho kopulu C platí

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = C_U(u_1, u_2, \dots, u_n) = \min\{u_1, u_2, \dots, u_n\},$$

pro $u_1, u_2, \dots, u_n \in [0, 1]$.

2. Stochastické meze závislých rizik

V této kapitole budeme hledat stochastické meze pro náhodnou veličinu S , kde S bude představovat agregaci závislých náhodných veličin. Stochastické meze nám dávají omezení pro distribuční funkci náhodné veličiny S . Z těchto mezí můžeme určit omezení pro hodnotu v riziku $\text{VaR}_\alpha S$, $\alpha \in [0, 1]$. V prvních dvou podkapitolách budeme vycházet především z [1], ve třetí potom z [2].

2.1 Agregace součtem

Uvažujme nejprve součet $S = X_1 + X_2$ dvou závislých rizik X_1, X_2 se známými distribučními funkcemi F_1, F_2 . Naším cílem je najít stochastické meze pro náhodnou veličinu S , tj. najít náhodné veličiny S_{min} a S_{max} tak, že

$$S_{max} \preceq_{ST} S \preceq_{ST} S_{min} \quad (2.1)$$

tedy jinak:

$$P[S_{min} \leq s] \leq P[S \leq s] \leq P[S_{max} \leq s] \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Definujme nyní funkce $F_{min}(s)$ a $F_{max}(s)$:

$$F_{min}(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \max\{F_1^-(x) + F_2^-(s-x) - 1, 0\} \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

$$F_{max}(s) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \min\{F_1(x) + F_2(s-x), 1\} \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

kde $F_i^-(s)$ je limita zleva v bodě s .

Lemma 2.1. *Funkce $F_{min}(s)$ a $F_{max}(s)$ definované výše jsou distribuční funkce.*

Důkaz

Funkce $F_{min}(s)$ a $F_{max}(s)$ jsou zřejmě neklesající. Funkce $F_{min}(s)$ je zleva spojitá, $F_{max}(s)$ je zprava spojitá podle [3].

Nyní nám stačí zjistit, zda-li mají obě funkce limitu 0 resp. 1 v bodě $-\infty$, resp. $+\infty$. Dokazovat budeme pouze pro funkci $F_{max}(s)$, důkaz pro funkci $F_{min}(s)$ je analogický.

- 1) Ukážeme, že $\lim_{s \rightarrow -\infty} F_{max}(s) = 0$:

Mějme pevné $\varepsilon > 0$ zvolme u_0 tak, že $F_1(u_0) < \frac{\varepsilon}{2}$, potom zvolme s_0 tak, že $F_2(s_0 - u_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom $F_{max}(s_0) < \varepsilon$, a protože funkce $F_{max}(s)$ je neklesající, dostáváme, že $F_{max}(s) < \varepsilon \quad \forall s \leq s_0$.

- 2) Ukážeme, že $\lim_{s \rightarrow \infty} F_{max}(s) = 1$:

Mějme pevné $\varepsilon > 0$ zvolme u_1 tak, že $F_1(u_1) > 1 - \varepsilon$, potom zvolme s_1 tak, že $F_2(s_1 - u_1) > 1 - \varepsilon$. Potom dostáváme, že:

$$\inf_{u \leq u_1} \min\{F_1(u) + F_2(s_1 - u), 1\} \geq F_2(s_1 - u) > 1 - \varepsilon$$

a

$$\inf_{u \geq u_1} \min\{F_1(u) + F_2(s_1 - u), 1\} \geq F_1(u_1) > 1 - \varepsilon.$$

Tedy $F_{max}(s) > 1 - \varepsilon$, a protože $F_{max}(s)$ je neklesající dostáváme, že $\lim_{s \rightarrow \infty} F_{max}(s) = 1$.

□

Existence náhodných veličin S_{min} a S_{max} je zajištěna předchozím tvrzením. Nyní ukážeme, že náhodné veličiny S_{min} a S_{max} jsou stochastické meze pro náhodnou veličinu S .

Věta 2.2. *Nechť $S = X_1 + X_2$ a F_{min}, F_{max} jsou definovány v (2.3), (2.4). Potom*

$$F_{min}(s) \leq F_S(s) \leq F_{max}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

kde $F_S(s)$ je distribuční funkce náhodné veličiny S .

Důkaz

Pro libovolné $x, s \in \mathbb{R}$ platí, že $(X_1 > x) \wedge (X_2 > s - x)$ implikuje $S > s$, tedy $F_S(s) = P[X_1 + X_2 \leq s] \leq P[(X_1 \leq x) \vee (X_2 \leq s - x)] \leq P[X_1 \leq x] + P[X_2 \leq s - x] = F_1(x) + F_2(s - x)$.

Protože $F_S(s)$ je distribuční funkce platí také, že $F_S(s) \leq 1$. Tedy celkem $F_S(s) \leq \min\{F_1(x) + F_2(s - x), 1\}$. Odtud plyne, že $F_S(s) \leq F_{max}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

Druhá nerovnost plyne z následujícího tvrzení:

$$P[X_1 < x] + P[X_2 < s - x] - P[X_1 < x, X_2 < s - x] \leq 1,$$

odtud dostaneme

$$P[X_1 < x] + P[X_2 < s - x] - 1 \leq P[X_1 < x, X_2 < s - x] \leq P[X_1 + X_2 < s] = F_S(s).$$

Protože $F_S(s)$ je distribuční funkce, platí, že $F_S(s) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$. Tedy celkem $\max\{F_1(x) + F_2(s - x) - 1, 0\} \leq F_S(s)$. Odtud plyne, že $F_S(s) \geq F_{min}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

□

Vylepšení mezí

Mějme dvě náhodné veličiny X_1, X_2 . Předpokládejme, že X_1 a X_2 jsou pozitivně závislé, tj. máme dodatečnou informaci o závislostní struktuře. V následující větě ukážeme, jak se změní stochastické meze.

Věta 2.3. *Nechť náhodné veličiny X_1, X_2 s distribučními funkcemi F_1, F_2 jsou pozitivně závislé. Nechť $S = X_1 + X_2$. Potom*

$$F_{min}^*(s) \leq F_S(s) \leq F_{max}^*(s) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

kde

$$F_{min}^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{F_1(x)F_2(s - x)\} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

a

$$F_{max}^*(s) = 1 - \sup_{x \in \mathbb{R}} \{\overline{F_1}(x)\overline{F_2}(s - x)\} \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Důkaz

Podle Definice 1.9: (X_1, X_2) PQD $\Leftrightarrow F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) \geq F_1(x_1)F_2(x_2)$, tedy

$$F_1(x)F_2(s-x) \leq P[X_1 \leq x, X_2 \leq s-x] \quad \forall x, s \in \mathbb{R},$$

odtud

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{F_1(x)F_2(s-x)\} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \{P[X_1 \leq x, X_2 \leq s-x]\} \leq F_S(s) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

tedy

$$F_{min}^*(s) \leq F_S(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Nyní ukážeme druhou nerovnost, necht' $x, s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_S(s) &= P[X_1 + X_2 \leq s] \leq P[(X_1 \leq x) \vee (X_2 \leq s-x)] = \\ &= P[X_1 \leq x] + P[X_2 \leq s-x] - P[X_1 \leq x, X_2 \leq s-x] \leq \\ &\leq F_1(x) + F_2(s-x) - F_1(x) \cdot F_2(s-x) = \\ &= F_1(x) + F_2(s-x) - (1 - \overline{F_1}(x))(1 - \overline{F_2}(s-x)) = \\ &= F_1(x) + F_2(s-x) - 1 + \overline{F_2}(s-x) + \overline{F_1}(x) - \overline{F_1}(x) \cdot \overline{F_2}(s-x) = \\ &= 2 - 1 - \overline{F_1}(x) \cdot \overline{F_2}(s-x) = 1 - \overline{F_1}(x) \cdot \overline{F_2}(s-x). \end{aligned}$$

Odkud dostáváme, že $F_S(s) \leq F_{max}^*(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

□

Poznámka

Obecně pro $x, s \in \mathbb{R}$ platí, že

$$\max\{F_1(x) + F_2(s-x) - 1, 0\} \leq F_1(x)F_2(s-x)$$

a

$$F_1(x) + F_2(x) - F_1(x)F_2(s-x) \leq \min\{F_1(x) + F_2(s-x), 1\}.$$

Proto dostáváme, že

$$F_{min}(s) \leq F_{min}^*(s) \leq F_S(s) \leq F_{max}^*(s) \leq F_{max}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Pokud tedy máme k dispozici dodatečnou informaci o závislostní struktuře (pozitivní závislost), dostáváme ostřejší stochastické meze pro náhodnou veličinu S .

Stochastické meze pro součet n náhodných veličin

Předpokládejme nyní, že máme n náhodných veličin X_1, X_2, \dots, X_n s distribučními funkcemi F_1, F_2, \dots, F_n . Uvažujme náhodnou veličinu

$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ a označme $\Sigma(s) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; x_1 + x_2 + \dots + x_n = s\}$.

Dále definujme

$$F_{min}(s) = \sup_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \max \left\{ \sum_{i=1}^n F_i^-(x_i) - (n-1), 0 \right\} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

a

$$F_{max}(s) = \inf_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \min \left\{ \sum_{i=1}^n F_i(x_i), 1 \right\} \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Obdobně jako v Lemma 2.1 lze ukázat, že funkce definované v (2.8) a (2.9) jsou distribuční funkce.

Následující věta zobecňuje Větu 2.2

Věta 2.4. *Nechť X_1, X_2, \dots, X_n jsou náhodné veličiny s distribučními funkcemi F_1, F_2, \dots, F_n . Nechť $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Uvažujme funkce F_{min} a F_{max} definované v (2.8) a (2.9). Potom platí*

$$F_{min}(s) \leq F_S(s) \leq F_{max}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Důkaz

Nechť $s \in \mathbb{R}$, potom $\forall \mathbf{x} \in \Sigma(s)$ $F_S(s) = P[X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq s] \leq P[(X_1 \leq x_1) \vee (X_2 \leq x_2) \vee \dots \vee (X_n \leq x_n)] \leq P[X_1 \leq x_1] + P[X_2 \leq x_2] + \dots + P[X_n \leq x_n] = \sum_{i=1}^n F_i(x_i)$.

Protože $F_S(s)$ je distribuční funkce, platí že $F_S(s) \leq 1$, máme celkem

$$F_S(s) \leq \min \left\{ \sum_{i=1}^n F_i(x_i), 1 \right\}.$$

Odtud již plyne $F_S(s) \leq F_{max}(s)$ pro $\forall s \in \mathbb{R}$.

Nyní ukážeme druhou nerovnost. Pro $\mathbf{x} \in \Sigma(s)$, $s \in \mathbb{R}$:

$$P[X_1 \leq x_1] + \dots + P[X_n \leq x_n] - P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n] \leq n - 1,$$

potom

$$P[X_1 \leq x_1] + \dots + P[X_n \leq x_n] - (n - 1) \leq P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n] \leq P[X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq s] = F_S(s).$$

Protože $F_S(s)$ je distribuční funkce, odtud plyne

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n F_i(x_i) - (n - 1), 0 \right\} \leq F_S(s).$$

Tedy $\sup_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \left\{ \sum_{i=1}^n F_i(x_i) - (n - 1), 0 \right\} \leq F_S(s)$, tj. $F_{min}(s) \leq F_S(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

□

Poznámka (Iterativní algoritmus výpočtu) Pokud hledáme stochastické meze pro tři závislá rizika X_1, X_2, X_3 s distribučními funkcemi F_1, F_2, F_3 , můžeme je spočítat iteračně:

$$F_{max(3)}(s) = \inf_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \min \{ F_1(x_1) + F_2(x_2) + F_3(x_3), 1 \} =$$

$$= \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}} \min\{F_1(x_1) + F_{\max(2)}(s - x_1), 1\} \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

kde

$$F_{\max(2)}(s - x_1) = \inf_{x_2 + x_3 = s - x_1} \{F_2(x_2) + F_3(x_3), 1\} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Analogicky lze postupovat pro počítání F_{\min} .

Vylepšení mezí

Mějme n náhodných veličin X_1, X_2, \dots, X_n . Předpokládejme, že vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je pozitivně závislý (POD), tj. máme k dispozici dodatečnou informaci o závislostní struktuře. V následující větě ukážeme, jak se změní stochastické meze.

Věta 2.5. *Nechť X_1, X_2, \dots, X_n jsou náhodné veličiny s distribučními funkcemi F_1, F_2, \dots, F_n . Nechť $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Předpokládejme, že vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je pozitivně závislý. Potom platí*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \left\{ \prod_{i=1}^n F_i(x_i) \right\} \leq F_S(s) \leq 1 - \sup_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \left\{ \prod_{i=1}^n \bar{F}_i(x_i) \right\} \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Důkaz

Z předpokladu máme, že $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je POD, což podle definice znamená

$$\left(P[\mathbf{X} \leq \mathbf{x}] \geq \prod_{i=1}^n P[X_i \leq x_i] \right) \wedge \left(P[\mathbf{X} > \mathbf{x}] \geq \prod_{i=1}^n P[X_i > x_i] \right) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Potom dostaneme

$$\begin{aligned} F_S(s) &= P[X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq s] \geq \sup_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \underbrace{P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n]}_{\geq \prod_{i=1}^n P[X_i \leq x_i]} \geq \\ &\geq \sup_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \prod_{i=1}^n F_i(x_i), \text{ tedy } F_S(s) \geq F_{\min}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nyní ukážeme druhou nerovnost:

$$\begin{aligned} F_S(s) &= P[X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq s] = 1 - P[X_1 + \dots + X_n > s] \leq \\ &\leq \inf_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \left\{ 1 - \underbrace{P(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \dots, X_n > x_n)}_{\geq \prod_{i=1}^n P[X_i > x_i]} \right\} \leq \inf_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \left\{ 1 - \prod_{i=1}^n \bar{F}_i(x_i) \right\} = \\ &\geq \inf_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \left\{ \prod_{i=1}^n \bar{F}_i(x_i) \right\}, \text{ tedy } F_S(s) \leq F_{\max}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$1 - \sup_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \left\{ \prod_{i=1}^n \bar{F}_i(x_i) \right\}, \text{ tedy } F_S(s) \leq F_{\max}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

□

2.2 Agregace neklesajících spojitou funkcí

Až doposud jsme předpokládali agregaci součtem, tj. $S = X_1 + X_2$. V této části se budeme zabývat agregací pomocí zleva spojitě neklesajících funkce Ψ , tedy budeme uvažovat $S = \Psi(X_1, X_2)$, kde X_1, X_2 jsou náhodné veličiny s distribučními

funkcemi F_1, F_2 .

Poznámka (Příklady agregační funkce Ψ) Možné varianty:

- $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n \dots$ agregace součtem
- $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \max\{x_i - k, 0\}$, kde $k > 0 \dots$ XL-plnění s vrstvou k
- $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\{\sum_{i=1}^n x_i - k, 0\}$, kde $k > 0 \dots$ SL-plnění s vrstvou k

Nyní zavedeme značení, které budeme dále často používat v souvislosti s agregační funkcí. Pro funkci $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$ označme $\Psi_{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}}$ jako funkci, která vznikne tak, že fixujeme funkci n proměnných Ψ v i_1, i_2, \dots, i_k -té proměnné a za tyto proměnné bereme pevné hodnoty x_1, x_2, \dots, x_k .

Věta 2.6. *Nechť $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající a zleva spojitá funkce. Nechť X_1, X_2 jsou náhodné veličiny s distribučními funkcemi F_1, F_2 . Nechť F_S^Ψ je distribuční funkce náhodné veličiny $S = \Psi(X_1, X_2)$. Potom platí*

$$F_{min}^\Psi(s) \leq F_S^\Psi(s) \leq F_{max}^\Psi(s) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

kde

$$F_{min}^\Psi(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \max\{F_1(x) + F_2(\Psi_{x_1}^\wedge(s)) - 1, 0\} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

a

$$F_{max}^\Psi(s) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \min\{F_1(x) + F_2(\Psi_{x_1}^\wedge(s)), 1\} \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Důkaz

Nechť $x, s \in \mathbb{R}$ vidíme, že $(X_1 > x) \wedge (X_2 > \Psi_x^\wedge(s))$ dohromady implikuje, že $\Psi(X_1, X_2) > s$. Odtud tedy pro $s \in \mathbb{R}$ dostaneme

$$\begin{aligned} F_S^\Psi(s) &= P[\Psi(X_1, X_2) \leq s] \leq P[(X_1 \leq x) \vee (X_2 \leq \Psi_x^\wedge(s))] \leq \\ &\leq P[X_1 \leq x] + P[X_2 \leq \Psi_x^\wedge(s)] = F_1(x) + F_2(\Psi_x^\wedge(s)). \end{aligned}$$

Protože $F_S^\Psi(s) \leq 1$ (F_S^Ψ je distribuční funkce) dostáváme, že $F_S^\Psi(s) \leq \min\{F_1(x) + F_2(\Psi_x^\wedge(s)), 1\}$. Odtud již plyne, že $F_S^\Psi \leq F_{max}^\Psi(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

Nyní ukážeme druhou nerovnost. Vyjdeme ze vztahu

$$P[X_1 \leq x] + P[X_2 \leq \Psi_x^\wedge(s)] - P[(X_1 \leq x) \wedge (X_2 \leq \Psi_x^\wedge(s))] \leq 1,$$

odtud

$$P[X_1 \leq x] + P[X_2 \leq \Psi_x^\wedge(s)] - 1 \leq P[(X_1 \leq x) \wedge (X_2 \leq \Psi_x^\wedge(s))] \leq P[\Psi(X_1, X_2) \leq s] = F_S^\Psi(s), \text{ tedy}$$

$$F_S^\Psi(s) \geq F_1(x) + F_2(\Psi_x^\wedge(s)) - 1.$$

Protože $F_S^\Psi(s) = P[\Psi(X_1, X_2) \leq s] \geq 0$ dostáváme, že $F_S^\Psi(s) \geq \max\{F_1(x) + F_2(\Psi_x^\wedge(s)) - 1, 0\}$.

Odtud již plyne, že $F_S^\Psi(s) \geq F_{min}^\Psi(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

□

Vylepšení mezí

Podobně jako v předchozí podkapitole můžeme získat lepší meze, když máme k dispozici dodatečnou informaci o závislostní struktuře. Zde budeme předpokládat, že náhodné veličiny X_1, X_2 jsou pozitivně závislé (PQD).

Věta 2.7. *Nechť náhodný vektor (X_1, X_2) s marginálními distribučními funkcemi F_1, F_2 je pozitivně závislý (PQD). Nechť $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je zleva spojitá neklesající funkce. Potom platí:*

$$F_{min}^{\Psi^*}(s) \leq P[\Psi(X_1, X_2) \leq s] \leq F_{max}^{\Psi^*}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

kde

$$F_{min}^{\Psi^*}(s) = \sup_{x_1 \in \mathbb{R}} \{F_1(x_1) \cdot F_2(\Psi_{x_1}^\wedge(s))\} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

a

$$F_{max}^{\Psi^*}(s) = 1 - \sup_{x_1 \in \mathbb{R}} \{\overline{F_1}(x_1) \cdot \overline{F_2}(\Psi_{x_1}^\wedge(s))\} \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Důkaz

Podobně jako u Věty 2.3.

□

Stochastické meze pro n náhodných veličin

Nyní budeme předpokládat, máme n náhodných veličin X_1, X_2, \dots, X_n s distribučními funkcemi F_1, F_2, \dots, F_n . Uvažujme náhodnou veličinu $S = \Psi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ s distribuční funkcí F_S . Dále definujeme:

$$F_{min}^{\Psi}(s) = \sup_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}} \max \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x_i) + F_n(\Psi_{x_1, \dots, x_{n-1}}^\wedge(s)) - (n-1), 0 \right\} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

a

$$F_{max}^{\Psi}(s) = \inf_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}} \min \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x_i) + F_n(\Psi_{x_1, \dots, x_{n-1}}^\wedge(s)), 1 \right\} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (2.16)$$

Následující věta je vícerozměrná verze Věty 2.6.

Věta 2.8. *Nechť (X_1, X_2, \dots, X_n) je náhodný vektor s marginálními distribučními funkcemi F_1, F_2, \dots, F_n . Nechť $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající spojitá funkce. Potom pro funkce F_{min}^{Ψ} a F_{max}^{Ψ} definované v (2.15) a (2.16) platí*

$$F_{min}^{\Psi}(s) \leq P[\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq s] \leq F_{max}^{\Psi}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Důkaz

Podobně jako u Věty 2.4.

□

Vylepšení mezí

V tomto odstavci ukážeme, jak se změní meze, pokud budeme mít k dispozici do-datečnou informaci o závislostní struktuře náhodného vektoru (X_1, X_2, \dots, X_n) . Následující Věta je vícerozměrná verze Věty 2.7.

Věta 2.9. *Nechť náhodný vektor (X_1, X_2, \dots, X_n) s marginálními distribučními funkcemi F_1, F_2, \dots, F_n je pozitivně závislý (POD). Nechť $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající zleva spojitá funkce. Potom platí*

$$F_{min}^{\Psi*}(s) \leq P[\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq s] \leq F_{max}^{\Psi*}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

kde

$$F_{min}^{\Psi*}(s) = \sup_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} F_i(x_i) \cdot F_n(\Psi_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}}^\wedge(s)) \right\} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (2.17)$$

a

$$F_{max}^{\Psi*}(s) = 1 - \sup_{x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \overline{F}_i(x_i) \cdot \overline{F}_n(\Psi_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}}^\wedge(s)) \right\} \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Důkaz

Podobně jako u Věty 2.5.

□

2.3 Agregace pomocí kopul

Předpokládejme nyní, že máme n náhodných veličin X_1, X_2, \dots, X_n s distribučními funkcemi F_1, F_2, \dots, F_n . Uvažujeme náhodnou veličinu $S = \Psi(X_1, X_2, \dots, X_n)$, kde Ψ je neklesající zleva spojitá funkce. Naším cílem nyní bude najít omezení pro $\text{VaR}_\alpha(\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n))$, $\alpha \in (0, 1)$.

Pro kopulu C , distribuční funkce F_1, F_2, \dots, F_n a neklesající spojitou funkci $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme funkce $F_{min}^{C, \Psi}$, $F^{C, \Psi}$ a $F_{max}^{C, \Psi}$

$$F_{min}^{C, \Psi}(s) = \sup_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}} \{C(F_1(x_1), \dots, F_{n-1}(x_{n-1}), F_n(\Psi_{x_1, \dots, x_{n-1}}^\wedge(s)))\} \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (2.19)$$

$$F^{C, \Psi}(s) = \int_{\{\Psi \leq s\}} dC(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (2.20)$$

$$F_{max}^{C, \Psi}(s) = \inf_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}} \{C^d(F_1(x_1), \dots, F_{n-1}(x_{n-1}), F_n(\Psi_{x_1, \dots, x_{n-1}}^\wedge(s)))\} \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Poznámka

Pokud náhodný vektor (X_1, X_2, \dots, X_n) má kopulu C a marginální distribuční funkce F_1, F_2, \dots, F_n , potom funkce $F^{C, \Psi}(s) = F_{\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n)}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$, tedy distribuční funkce náhodné veličiny S . Na funkce $F_{min}^{C, \Psi}$ a $F_{max}^{C, \Psi}$ můžeme nahlížet jako na operace zobrazující Δ^n do Δ , kde Δ je množina jednorozměrných distribučních funkcí.

Následující věta nám říká, že funkce $F_{min}^{C,\Psi}$ a $F_{max}^{C,\Psi}$ jsou meze pro distribuční funkci $F_{\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n)}$, když náhodný vektor (X_1, X_2, \dots, X_n) má neznámou kopulu C a marginální distribuční funkce F_1, F_2, \dots, F_n .

Věta 2.10. *Nechť (X_1, X_2, \dots, X_n) je náhodný vektor s marginálními distribučními funkcemi F_1, F_2, \dots, F_n a nechť $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající a zleva spojitá funkce. Pokud kopula C náhodného vektoru (X_1, X_2, \dots, X_n) pro dané kopuly C_0 a C_1 splňuje, že $(C(\mathbf{u}) \geq C_0(\mathbf{u}) \forall \mathbf{u} \in [0, 1]^n) \wedge (C^d(\mathbf{u}) \leq C_1^d(\mathbf{u}) \forall \mathbf{u} \in [0, 1]^n)$, potom pro funkce $F_{min}^{C,\Psi}$ a $F_{max}^{C,\Psi}$ definované v (2.19) a (2.21) platí*

$$F_{min}^{C_0,\Psi}(s) \leq F^{C,\Psi}(s) \leq F_{max}^{C_1,\Psi}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Poznámka

Tvrzení předchozí věty lze zapsat ve smyslu omezení VaR

$$F_{max}^{C_0,\Psi}{}^{-1}(\alpha) \leq \text{VaR}_\alpha(\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n)) \leq F_{min}^{C_0,\Psi}{}^{-1}(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Důkaz

Nechť $s \in \mathbb{R}$ je pevné, $t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$ a $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Pokud $\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s)$ je konečné, potom vidíme, že $(X_i > t_i) \wedge (X_n > \Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s))$ dohromady implikuje, že

$$\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq \Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}(X_n) > s.$$

Potom máme

$$\begin{aligned} P[\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq s] &\leq P\left[\bigcup_{i=1}^{n-1} \{X_i \leq t_i\} \cup \{X_n \leq \Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s)\}\right] = \\ &= C^d(F_1(t_1), F_2(t_2), \dots, F_{n-1}(t_{n-1}), F_n(\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s))) \leq \\ &\leq C_1^d(F_1(t_1), \dots, F_{n-1}(t_{n-1}), F_n(\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s))) \end{aligned}$$

poslední nerovnost plyne z předpokladu, že $C^d(\mathbf{u}) \leq C_1^d(\mathbf{u}) \quad \mathbf{u} \in [0, 1]^n$.

- Pokud $\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s) = +\infty$, potom máme, že

$$C_1^d(F_1(t_1), \dots, F_{n-1}(t_{n-1}), \underbrace{F_n(\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s))}_{=1}) = 1.$$

Rovnost plyne přímo z definice duální kopuly a platí tedy, že

$$P[\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq s] \leq C_1^d(F_1(t_1), \dots, F_{n-1}(t_{n-1}), F_n(\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s))).$$

- Pokud $\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s) = -\infty$, potom $\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}(t_n) > s \quad \forall t_n \in \mathbb{R}$ a odtud plyne

$$\begin{aligned} P[\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq s] &= P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \{X_i \leq t_i\}\right) \cap \{\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq s\}\right] + \\ &+ P\left[\bigcap_{i=1}^{n-1} \{X_i > t_i\} \cap \{\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq s\}\right] \leq P\left[\bigcup_{i=1}^{n-1} \{X_i \leq t_i\}\right] + 0 = \\ &= C^d(F_1(t_1), \dots, F_{n-1}(t_{n-1}), 0) \leq C_1^d(F_1(t_1), \dots, F_{n-1}(t_{n-1}), F_n(\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s))). \end{aligned}$$

Poslední nerovnost plyne z předpokladu $C^d(\mathbf{u}) \leq C_1^d(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in [0, 1]^n$.

Když vezmeme infimum přes všechna $t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$ dostaneme $F_{\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n)}(s) \leq F_{max}^{C_1, \Psi}(s) \forall s \in \mathbb{R}$.

Nyní ukážeme druhou nerovnost.

- Pokud $\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s)$ je konečné, potom víme, že $(X_i \leq t_i) \wedge (X_n \leq \Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s))$ dohromady implikuje, že

$$\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}(X_n) \leq s.$$

Potom máme

$$\begin{aligned} P[\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq s] &= 1 - P[\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) > s] = \\ &= 1 - P \left[\{\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) > s\} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \{X_i > t_i\} \cup \{X_n > \Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s)\} \right) \right] = \\ &= 1 - P \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} \{X_i > t_i\} \cup \{X_n > \Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s)\} \right] = \\ &= P \left[\bigcap_{i=1}^{n-1} \{X_i \leq t_i\} \cap \{X_n \leq \Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s)\} \right] = \\ &= C(F_1(t_1), \dots, F_{n-1}(t_{n-1}), F_n(\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s))) \geq \\ &\geq C_0(F_1(t_1), \dots, F_{n-1}(t_{n-1}), F_n(\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s))) \end{aligned}$$

Poslední nerovnost plyne z předpokladu $C(\mathbf{u}) \geq C_0(\mathbf{u})$.

- Pokud $\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s) = +\infty$, potom $\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}(t_n) \leq s \forall t_n \in \mathbb{R}$ a $P[\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq s] \geq C_0(F_1(t_1), \dots, F_{n-1}(t_{n-1}), F_n(\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s)))$.

Podobně jako třetí případ pro $F_{max}^{C, \Psi}$.

- Pokud $\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s) = -\infty$, potom máme, že

$$C_0(F_1(t_1), \dots, F_{n-1}(t_{n-1}), \underbrace{F_n(\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s))}_{=0}) = 0,$$

rovnost plyne přímo z definice kopuly a platí tedy, že

$$C_0(F_1(t_1), \dots, F_{n-1}(t_{n-1}), F_n(\Psi_{t_1, \dots, t_{n-1}}^\wedge(s))) \leq P[\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq s].$$

Když vezmeme suremum přes všechna $t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$, dostaneme $F_{min}^{C_0, \Psi}(s) \leq F_{\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n)}(s) \forall s \in \mathbb{R}$.

□

Poznámka

Meze uvedené ve Větě 2.10 jsou nejlepší možné. (Existují závislostní struktury pro náhodný vektor (X_1, X_2, \dots, X_n) takové, že distribuční funkce $F_{\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n)}$ dosáhne mezí alespoň v jednom bodě).

Podmínky $C \geq C_0$ a $C^d \leq C_1^d$

Obecně neznáme kopulu C . Podmínky na kopulu C v předchozí větě vlastně umožňují zohlednit dodatečnou informaci o závislostní struktuře náhodného vektoru (X_1, X_2, \dots, X_n) .

Volby C_0, C_1^d

- $C_0(u_1, u_2) = C_1(u_1, u_2) = C_L(u_1, u_2) \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$, kde C_L je dolní Fréchetova mez. Potom víme, že pro každou kopulu C platí, že $C(u_1, u_2) \geq C_L(u_1, u_2) \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$ a $C(u_1, u_2) \leq C_1^d(u_1, u_2) = C_L^d(u_1, u_2) = \min\{u_1 + u_2, 1\} \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$. Druhá nerovnost plyne z faktu, že $C(u_1, u_2) \geq C_0(u_1, u_2) \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$ je ekvivalentní s $C^d(u_1, u_2) \leq C_0^d(u_1, u_2) \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$. Pokud tedy zvolíme možnost $C_0(u_1, u_2) = C_1(u_1, u_2) = C_L(u_1, u_2) \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$, říkáme, že nemáme žádnou dodatečnou informaci o závislostní struktuře vektoru (X_1, X_2) .
- volba $C_0(u_1, u_2) = C_1(u_1, u_2) = C_I(u_1, u_2) \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$ znamená, že vektor (X_1, X_2, \dots, X_n) je pozitivně závislý (POD).

Z definice $F_{min}^{C_0, \Psi}$ a $F_{max}^{C_1, \Psi}$ je zřejmé, že čím silnější podmínky $C \geq C_0$ a $C^d \leq C_1^d$ máme, tím ostřejší meze $F_{min}^{C_0, \Psi}$ a $F_{max}^{C_1, \Psi}$ dostaneme. Toto odpovídá přirozené intuici, že čím lepší je naše znalost závislostní struktury vektoru (X_1, X_2, \dots, X_n) , tím kratší je interval, ve kterém může ležet VaR.

Pozorování

Uvědomme si, že meze které jsme dostali v této podkapitole, jsou zobecněním mezí, které uvádíme v předchozích dvou podkapitolách.

- Pokud zvolíme funkci $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ a za kopulu C vezmeme kopulu C_L , dostaneme pro $s \in \mathbb{R}$, že

$$F_{max}^{C_L, \Psi}(s) = \inf_{x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}} \min\{F_1(x_1) + \dots + F_{n-1}(x_{n-1}) + F_n(\Psi_{x_1, \dots, x_{n-1}}^\wedge(s)), 1\}$$

a

$$F_{min}^{C_L, \Psi}(s) = \sup_{x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}} \max\{F_1(x_1) + \dots + F_{n-1}(x_{n-1}) + F_n(\Psi_{x_1, \dots, x_{n-1}}^\wedge(s)) - n + 1, 0\}.$$

Když použijeme označení $\Sigma(s) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; x_1 + x_2 + \dots + x_n = s\}$, $s \in \mathbb{R}$ dostaneme tvar

$$F_{max}^{C_L, \Psi}(s) = \inf_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \min\{F_1(x_1) + F_2(x_2) + \dots + F_{n-1}(x_{n-1}) + F_n(x_n), 1\}$$

a

$$F_{min}^{C_L, \Psi}(s) = \sup_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \max\{F_1(x_1) + F_2(x_2) + \dots + F_{n-1}(x_{n-1}) + F_n(x_n) - (n-1), 0\}.$$

Vidíme tedy, že meze $F_{max}^{C_L, \Psi}$ a $F_{min}^{C_L, \Psi}$ jsou shodné s mezemi F_{max} a F_{min} z Věty 2.4.

- Pokud zvolíme funkci $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ a kopulu C vezmeme kopulu C_I ($C_I^d = 1 - \overline{C}_I = 1 - C_I$), dostaneme:

$$F_{max}^{C_I, \Psi}(s) = \inf_{x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}} \{1 - \overline{F}_1(x_1) \cdot \dots \cdot \overline{F}_{n-1}(x_{n-1}) \cdot \overline{F}_n(\Psi^{\wedge}_{x_1, \dots, x_{n-1}}(s))\}$$

$$= 1 - \sup_{x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \overline{F}_i(x_i) \cdot \overline{F}_n(\Psi^{\wedge}_{x_1, \dots, x_{n-1}}(s)) \right\}$$

a

$$F_{min}^{C_I, \Psi}(s) = \sup_{x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} F_i(x_i) \cdot F_n(\Psi^{\wedge}_{x_1, \dots, x_{n-1}}(s)) \right\}.$$

Po přeznačení dostaneme

$$F_{max}^{C_I, \Psi}(s) = 1 - \sup_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \left\{ \prod_{i=1}^n \overline{F}_i(x_i) \right\}$$

a

$$F_{min}^{C_I, \Psi}(s) = \sup_{\mathbf{x} \in \Sigma(s)} \left\{ \prod_{i=1}^n F_i(x_i) \right\}.$$

Vidíme tedy, že meze $F_{max}^{C_I, \Psi}(s)$ a $F_{min}^{C_I, \Psi}(s)$ jsou shodné s mezemi $F_{max}(s)$ a $F_{min}(s)$ z Věty 2.5.

Analogicky bychom ukázali shodnost mezí pro obecnou funkci Ψ .

Speciální případ - komonotonie

Následující část se zabývá případem, kdy náhodný vektor (X_1, X_2, \dots, X_n) je komonotónní. V tomto speciálním případě můžeme vcelku snadno a přesně stanovit hodnotu v riziku VaR.

Věta 2.11. *Nechť $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající zleva spojitá funkce. Nechť vektor (X_1, X_2, \dots, X_n) je komonotónní a nechť $\alpha \in (0, 1)$. Potom platí*

$$VaR_\alpha(\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \Psi(VaR_\alpha(X_1), VaR_\alpha(X_2), \dots, VaR_\alpha(X_n)). \quad (2.22)$$

Důkaz

Zvolme náhodnou veličinu Z , nechť φ je neklesající a zleva spojitá funkce. Předpokládejme, že $VaR_\alpha(Z)$ je konečné. Potom máme, že distribuční funkce $\varphi(Z)$ je dána vztahem

$$F_{\varphi(Z)}(t) = P[\varphi(Z) \leq t] = P[Z \leq \varphi^\wedge(t)] = F_Z(\varphi^\wedge(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Odtud dostaneme

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(\varphi(Z)) &= \inf_{t \in \mathbb{R}} \{F_{\varphi(Z)}(t) \geq \alpha\} = \inf_{t \in \mathbb{R}} \{F_Z(\varphi^\wedge(t)) \geq \alpha\} = \inf_{t \in \mathbb{R}} \{\varphi^\wedge(t) \geq F_Z^{-1}(\alpha)\} = \\ &= \inf_{t \in \mathbb{R}} \{t \geq \varphi(F_Z^{-1}(\alpha))\} = \varphi(F_Z^{-1}(\alpha)) = \varphi(VaR_\alpha(Z)). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Označme F_1, F_2, \dots, F_n marginální distribuční funkce komonotónních náhodných veličin a uvažujme neklesající zleva spojitou funkci

$\varphi(\alpha) = \Psi(F_1^{-1}(\alpha), F_2^{-1}(\alpha), \dots, F_n^{-1}(\alpha))$. Uvažujme náhodnou veličinu U s rovnoměrným rozdělením na $[0, 1]$, potom dostáváme

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(\Psi(X_1, X_2, \dots, X_n)) &= VaR_\alpha[\Psi(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U), \dots, F_n^{-1}(U))] = \\ &= VaR_\alpha(\varphi(U)) \stackrel{(2.23)}{=} \varphi(VaR_\alpha(U)) = \varphi(\alpha) = \Psi(F_1^{-1}(\alpha), F_2^{-1}(\alpha), \dots, F_n^{-1}(\alpha)) = \\ &= \Psi(VaR_\alpha(X_1), VaR_\alpha(X_2), \dots, VaR_\alpha(X_n)). \end{aligned}$$

□

3. Numerický výpočet mezí

V této kapitole popíšeme numerický algoritmus, který budeme používat k výpočtu stochastických mezí v následující kapitole. V této kapitole vycházíme z [2].

3.1 Duální úloha

Největší slabinou definice mezí $F_{min}^{C_0, \Psi}$ a $F_{max}^{C_1, \Psi}$ je fakt, že jsou definovány jako supremum, resp. infimum přes neomezenou množinu \mathbb{R}^{n-1} . Abychom předešli hledání suprema, resp. infima přes neomezenou množinu, přecházíme k duální úloze.

Věta 3.1 (Duální úloha). *Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a nechť $\Psi : [a, b]^n \rightarrow [a, b]$ je spojitá rostoucí funkce s oborem hodnot $[a, b]$. Potom pro kopulu C_0 , marginální distribuční funkce $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ a pro $\alpha \in [0, 1]$ platí*

$$F_{min}^{C_0, \Psi}^{-1}(\alpha) = \inf_{C_0(u_1, u_2, \dots, u_n) = \alpha} \{\Psi(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n))\} \quad (3.1)$$

a

$$F_{max}^{C_1, \Psi}^{-1}(\alpha) = \sup_{C_1^d(u_1, \dots, u_n) = \alpha} \{\Psi(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n))\} \quad (3.2)$$

Důkaz

Aplikací principu duality podle [4] dostaneme duální úlohu (3.1) a (3.2) z úlohy

$$\sup_{\Psi(t_1, \dots, t_n) = s} \{C_0(F_1(t_1), F_2(t_2), \dots, F_n(t_n))\} \quad (3.3)$$

a

$$\inf_{\Psi(t_1, \dots, t_n) = s} \{C_1^d(F_1(t_1), F_2(t_2), \dots, F_n(t_n))\} \quad (3.4)$$

□

Výraz (3.3) resp. (3.4) je zleva spojitá verze funkce $F_{min}^{C_0, \Psi}$ resp. $F_{max}^{C_1, \Psi}$, a proto nám určuje stejné kvantily.

Potom tedy můžeme použít (3.1) a (3.2) k výpočtu kvantilových funkcí $F_{min}^{C_0, \Psi}^{-1}$ a $F_{max}^{C_1, \Psi}^{-1}$. Kvantilové funkce $F_{min}^{C_0, \Psi}^{-1}$ resp. $F_{max}^{C_1, \Psi}^{-1}$ budeme dále značit jako q_{min} resp. q_{max} .

Pozorování

Řešením duální úlohy dostaneme rovnou omezení pro kvantilovou funkci.

3.2 Numerická aproximace kvantilů

Jak již bylo dříve zmíněno, největší výhodou (3.1) a (3.2) je, že infimum a supremum je bráno přes kompaktní množinu $\{\mathbf{u} \in [0, 1]^n; C_0(\mathbf{u}) = \alpha\}$ resp. $\{\mathbf{u} \in [0, 1]^n; C_1^d(\mathbf{u}) = \alpha\}$. V následující části ukážeme, jak numericky stanovit meze pro kvantily.

Dále budeme používat označení $(C)_{1,2,\dots,n-1}(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) = P[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_{n-1} \leq u_{n-1}]$, kde náhodné veličiny $U_i \forall i \in 1, 2, \dots, n-1$ mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$ a kopulu C , $u_i \in [0, 1] \forall i \in 1, 2, \dots, n-1$.

Mějme $\alpha = \frac{r}{N}$, kde N je pevné přirozené číslo a $r \in \{1, 2, \dots, N-1\}$. Uvažujme přirozená čísla $l_1, l_2, \dots, l_{n-1} \in \{0, 1, \dots, N\}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom hledáme řešení $\nu_{r,l_1,l_2,\dots,l_{n-1}}$, které splňuje následující rovnici

$$C_0 \left(\frac{l_1}{N}, \frac{l_2}{N}, \dots, \frac{l_{n-1}}{N}, \nu_{r,l_1,l_2,\dots,l_{n-1}} \right) = \frac{r}{N}. \quad (3.5)$$

Pokud je $C_0(\frac{l_1}{N}, \frac{l_2}{N}, \dots, \frac{l_{n-1}}{N}, \cdot)$ spojitá funkce zobrazující interval $[0, 1]$ na $[0, (C_0)_{1,2,\dots,n-1}(\frac{l_1}{N}, \frac{l_2}{N}, \dots, \frac{l_{n-1}}{N})]$, řešení $\nu_{r,l_1,l_2,\dots,l_{n-1}}$ existuje vždy když platí

$$(C_0)_{1,2,\dots,n-1} \left(\frac{l_1}{N}, \frac{l_2}{N}, \dots, \frac{l_{n-1}}{N} \right) \geq \frac{r}{N}.$$

Ze vztahu (3.1) plyne

$$q_{min} \left(\frac{r}{N} \right) = \min_{A_{r,l_1,\dots,l_{n-1}}} \left\{ \Psi \left(F_1^{-1} \left(\frac{l_1}{N} \right), \dots, F_{n-1}^{-1} \left(\frac{l_{n-1}}{N} \right), F_n^{-1}(\nu_{r,l_1,\dots,l_{n-1}}) \right) \right\}, \quad (3.6)$$

kde $A_{r,l_1,l_2,\dots,l_{n-1}} = \{l_1, l_2, \dots, l_{n-1}; (C_0)_{1,2,\dots,n-1}(\frac{l_1}{N}, \frac{l_2}{N}, \dots, \frac{l_{n-1}}{N}) \geq \frac{r}{N}\}$.

Podobně ze vztahu (3.2) máme

$$q_{max} \left(\frac{r}{N} \right) = \max_{B_{r,l_1,\dots,l_{n-1}}} \left\{ \Psi \left(F_1^{-1} \left(\frac{l_1}{N} \right), \dots, F_{n-1}^{-1} \left(\frac{l_{n-1}}{N} \right), F_n^{-1}(\nu_{r,l_1,\dots,l_{n-1}}^*) \right) \right\}, \quad (3.7)$$

kde $B_{r,l_1,l_2,\dots,l_{n-1}} = \{l_1, l_2, \dots, l_{n-1}; (C_0)_{1,2,\dots,n-1}(\frac{l_1}{N}, \frac{l_2}{N}, \dots, \frac{l_{n-1}}{N}) \leq \frac{r}{N}\}$ a $\nu_{r,l_1,l_2,\dots,l_{n-1}}^*$ je řešením rovnice

$$C_1^d \left(\frac{l_1}{N}, \frac{l_2}{N}, \dots, \frac{l_{n-1}}{N}, \nu_{r,l_1,l_2,\dots,l_{n-1}}^* \right) = \frac{r}{N}. \quad (3.8)$$

3.3 Výpočet pomocí archimédovských kopul

Řešení $\nu_{r,l_1,l_2,\dots,l_{n-1}}$ můžeme v mnoha případech vyjádřit explicitně. Např. pokud kopula C_0 je archimédovská, tj. tvaru

$$C_0(u_1, u_2, \dots, u_n) = \phi_0^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \phi_0(u_i) \right) \quad u_i \in [0, 1] \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.9)$$

kde $\phi_0 : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ je klesající spojitá funkce pro kterou platí, že $\phi_0(0) = +\infty$, $\phi_0(1) = 0$ a navíc inverzní funkce ϕ_0^{-1} je monotónní. Potom ze vztahu (3.5) a (3.9) máme

$$\frac{r}{N} = C_0 \left(\frac{l_1}{N}, \frac{l_2}{N}, \dots, \frac{l_{n-1}}{N}, \nu_{r,l_1,\dots,l_{n-1}} \right) = \phi_0^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \phi_0 \left(\frac{l_i}{N} \right) + \phi_0(\nu_{r,l_1,\dots,l_{n-1}}) \right),$$

$$\Rightarrow \phi_0\left(\frac{r}{N}\right) = \phi_0(\nu_{r,l_1,\dots,l_{n-1}}) + \sum_{i=1}^{n-1} \phi_0\left(\frac{l_i}{N}\right).$$

Tedy dostáváme

$$\nu_{r,l_1,\dots,l_{n-1}} = \phi_0^{-1}\left(\phi_0\left(\frac{r}{N}\right) - \sum_{i=1}^{n-1} \phi_0\left(\frac{l_i}{N}\right)\right), \quad (3.10)$$

pro l_1, l_2, \dots, l_{n-1} takové, že $\phi_0\left(\frac{r}{N}\right) - \sum_{i=1}^{n-1} \phi_0\left(\frac{l_i}{N}\right) \geq 0$.

Vyjádření $\nu_{r,l_1,\dots,l_{n-1}}^*$ není tak snadné. Například pro dvou dimenzionální archimédovskou kopulu C_1 s generátorem ϕ_1 dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{r}{N} &= C_1^d\left(\frac{l}{N}, \nu^*\right) = \frac{l}{N} + \nu^* - C\left(\frac{l}{N}, \nu^*\right) = \frac{l}{N} + \nu^* - \phi_1^{-1}\left(\phi_1\left(\frac{l_1}{N}\right) + \phi_1(\nu^*)\right), \\ &\Rightarrow \phi_1\left(\frac{l-n}{N} + \nu^*\right) - \phi_1(\nu^*) + \phi_1\left(\frac{l}{N}\right) = 0. \end{aligned}$$

Ovšem tato rovnice nemá explicitní řešení.

Abychom se vyhnuli tomuto nepříjemnému problému, postačí nám předpokládat dodatečný předpoklad, že survival kopula \overline{C}_1 je archimédovská. Tento předpoklad je splněn např. pro kopuly C_L a C_I . Pokud bychom chtěli modelovat závislost pomocí jiné kopuly, můžeme ji modelovat pomocí archimédovské survival kopuly, protože podmínka $C^d \leq \overline{C}_1^d$ je podle Definice 1.7 ekvivalentní s podmínkou $\overline{C} \geq \overline{C}_1$. Potom podle (3.8) a definice archimédovská kopuly postupně dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{r}{N} &= C_1^d\left(\frac{l_1}{N}, \dots, \frac{l_{n-1}}{N}, \nu_{r,l_1,\dots,l_{n-1}}^*\right) = 1 - \overline{C}_1\left(1 - \frac{l_1}{N}, \dots, 1 - \frac{l_{n-1}}{N}, \nu_{r,l_1,\dots,l_{n-1}}^*\right) = \\ &= 1 - \phi_1^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \phi_1\left(1 - \frac{l_i}{N}\right) + \phi_1(\nu_{r,l_1,\dots,l_{n-1}}^*)\right), \\ &\Rightarrow \frac{N-r}{N} = \phi_1^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \phi_1\left(1 - \frac{l_i}{N}\right) + \phi_1(\nu_{r,l_1,\dots,l_{n-1}}^*)\right), \\ &\Rightarrow \phi_1\left(\frac{N-r}{N}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \phi_1\left(1 - \frac{l_i}{N}\right) + \phi_1(\nu_{r,l_1,\dots,l_{n-1}}^*). \end{aligned}$$

První rovnost plyne z Definice 1.7. Tedy

$$\nu_{r,l_1,\dots,l_{n-1}}^* = \phi_1^{-1}\left(\phi_1\left(\frac{N-r}{N}\right) - \sum_{i=1}^{n-1} \phi_1\left(1 - \frac{l_i}{N}\right)\right). \quad (3.11)$$

Poznámka

V kapitole 1 v části věnované archimédovským kopulám je uveden základní přehled archimédovských kopul a jejich generátorů.

V další části budeme hojně využívat speciální tvar tohoto algoritmu. Proto nyní

ukážeme, jak se tvar algoritmu změní budeme-li předpokládat $n = 2$, agregační funkci součtu tj. $\Psi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ a závislostní strukturu popsanou neznámou kopulou C , tj. $C_0(u_1, u_2) = C_1(u_1, u_2) = C_L(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$, potom $\phi_0(t) = 1 - t$ a

$$q_{min}(r/N) = \min_{A_{r,l}} \left\{ F_1^{-1} \left(\frac{l}{N} \right) + F_2^{-1}(\nu_{r,l}) \right\},$$

kde $A_{r,l} = \{l; C_L(\frac{l}{N}) \geq \frac{r}{N}\}$,

$$q_{max}(r/N) = \max_{B_{r,l}} \left\{ F_1^{-1} \left(\frac{l}{N} \right) + F_2^{-1}(\nu_{r,l}^*) \right\},$$

kde $B_{r,l} = \{l; C_L^d(\frac{l}{N}) \leq \frac{r}{N}\}$.

Snadno vidíme, že $A_{r,l} = \{l; r \leq l \leq N\}$ a $B_{r,l} = \{l; 0 \leq l \leq r\}$. Dále upravíme $\nu_{r,l}$ a $\nu_{r,l}^*$:

$$\nu_{r,l} = \phi_0^{-1} \left(\phi_0 \left(\frac{r}{N} \right) - \phi_0 \left(\frac{l}{N} \right) \right) = \phi_0^{-1} \left(\frac{l-r}{N} \right) = \frac{N-l+r}{N},$$

$$\nu_{r,l}^* = 1 - \phi_0^{-1} \left(\phi_0 \left(1 - \frac{r}{N} \right) - \phi_0 \left(1 - \frac{l}{N} \right) \right) = 1 - \phi_0^{-1} \left(\frac{r-l}{N} \right) = \frac{r-l}{N}.$$

Odtud tedy dostáváme výsledné vztahy:

$$q_{min}(r/N) = \min_{r \leq l \leq N} \left\{ F_1^{-1} \left(\frac{l}{N} \right) + F_2^{-1} \left(\frac{N-l+r}{N} \right) \right\}, \quad (3.12)$$

$$q_{max}(r/N) = \max_{0 \leq l \leq r} \left\{ F_1^{-1} \left(\frac{l}{N} \right) + F_2^{-1} \left(\frac{r-l}{N} \right) \right\}. \quad (3.13)$$

Zcela analogicky bychom postupovali, pokud bychom chtěli určit stochastické meze pro součet dvou pozitivně závislých rizik s tím rozdílem, že $C_0(u_1, u_2) = C_1(u_1, u_2) = C_I(u_1, u_2) = u_1 u_2$ a generátor kopuly by byl $\phi_0(t) = -\log(t)$.

V Příloze 1 je implementace tohoto algoritmu v programu *Mathematica 8*. Tato implementace je pro $n = 2$ a agregační funkci součtu. Distribuční funkce F_1 , F_2 a generátor archimédovské kopuly jsou proměnné, které zadáváme jako *pure functions*. Proměnné r, n odpovídají číslům r, N z numerického algoritmu. Je nutné si uvědomit, že pokud chceme počítat horní mez (q_{min}) pro kvantilovou funkci na hladině 99%, musíme zadat $r = 990$ a $n = 1000$. Pokud bychom zadali pouze $r = 99$ a $n = 100$, výsledek bude $+\infty$. Zdůvodnění plyne přímo z (3.12), protože uvažujeme minimum přes množinu $l \in \{N-1, N\}$.

V archivu .zip na CD jsou přiloženy implementace mezí pro příklady z následující kapitoly. S výhodou jsme použili distribuční funkce zabudované přímo v softwaru, čímž jsme dosáhli výsledků podstatně rychleji, než kdybychom distribuční funkce zadávali explicitně sami. Implementaci v Příloze 1 lze použít, pokud bychom chtěli modelovat rizika X_1, X_2 jinými rozděleními.

4. Příklad

V této kapitole se zaměříme na praktickou ukázkou analytických výpočtů, prezentaci výsledků dosažených numerickým algoritmem a jejich konfrontaci s přesnými analytickými výsledky.

V příkladech uvažujeme dvě náhodné veličiny. V posledním příkladu uvažujeme tři náhodné veličiny. Tyto náhodné veličiny mohou reprezentovat ztrátu ze škodní události, která generuje velkou škodu, ale nastává s velmi malou pravděpodobností. Uvažované náhodné veličiny mohou také představovat ztráty z různých druhů pojištění.

Volbou agregační funkce Ψ můžeme rozšířit možnosti uplatnění zkoumané teorie. Asi nejlépe použitelná agregační funkce je součet, tedy $S = \Psi(X_1, X_2) = X_1 + X_2$, což z pohledu pojišťovny znamená „součet“ dvou extrémních rizik. Pomocí získaných stochastických mezí učíme interval, ve kterém leží hodnota VaR, když portfolio rizik pojišťovny obsahuje rizika X_1 a X_2 . Tomuto typu agregace se v této práci věnujeme především, proto všechny příklady s výjimkou předposledního předpokládají agregační funkci součet.

V předposledním příkladu ukazujeme, jak by se zkoumaná teorie dala použít v zajišťovně, když uvažujeme kombinaci dvou XL-zajištění.

4.1 Aplikace Exponenciálního rozdělení

Následující příklad je spíše ilustrativní ukázkou analytického výpočtu. Předpoklad exponenciálního rozdělení v praxi není téměř nikdy splněn, na druhou stranu se na něm dobře demonstruje princip a postup výpočtu, je technicky spočitatelný i pro obecné parametry a navíc výsledné meze mají „pěkný“ tvar (posunutě exponenciální rozdělení).

Uvažujme náhodný vektor závislých rizik (X_1, X_2) . Předpokládejme, že X_1 má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{\lambda_1}$, a X_2 má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{\lambda_2}$. Cílem je nalézt horní a dolní mez distribuční a kvantilové funkce náhodné veličiny $S = X_1 + X_2$.

Označme F_1 distribuční funkci náhodné veličiny X_1 a F_2 distribuční funkci náhodné veličiny X_2 :

$$F_1(x) = (1 - e^{-\lambda_1 x})\mathbb{I}_{[x>0]}, \quad F_2(x) = (1 - e^{-\lambda_2 x})\mathbb{I}_{[x>0]}$$

Nejprve spočítáme funkci $F_{max}(s)$:

$$F_{max}(s) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \min\{F_1(x) + F_2(s - x), 1\},$$

dosadíme a definujeme pomocnou funkci $g(x, s)$:

$$F_{max}(s) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \min \left\{ \underbrace{(1 - e^{-\lambda_1 x}) \mathbb{I}_{[x > 0]} + (1 - e^{-\lambda_2(s-x)}) \mathbb{I}_{[s-x > 0]}}_{g(x, s)}, 1 \right\}.$$

Nejdříve ukážeme, že $F_{max}(s) = 0 \forall s \leq 0$. Pokud $s \leq 0$ uvažujeme dva případy I. $x \geq 0$, II. $x < s$.

- I. $(x \geq 0) \wedge (s \leq 0)$:

$$g(x, s) = 1 - e^{-\lambda_1 x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} > 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je rostoucí funkce, tedy infimum je v bodě 0, tj. $g(0, s) = 0$.

- II. $(x < s) \wedge (s \leq 0)$:

$$g(x, s) = 1 - e^{-\lambda_2(s-x)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\lambda_2 e^{-\lambda_2(s-x)} < 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je klesající funkce, tedy infimum je v bodě s , tj. $g(s, s) = 0$.

Pokud $s > 0$ uvažujeme tři případy I. $x < 0$, II. $x > s$, III. $0 \leq x \leq s$.

- I. $(x < 0) \wedge (s > 0)$:

$$g(x, s) = 1 - e^{-\lambda_2(s-x)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\lambda_2 e^{-\lambda_2 s} e^{\lambda_2 x} < 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je klesající funkce, tedy infimum je v bodě 0, tedy $g(0, s) = 1 - e^{-\lambda_2 s}$

- II. $(x > s) \wedge (s > 0)$:

$$g(x, s) = 1 - e^{-\lambda_1 x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} > 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je rostoucí funkce, tedy infimum je v bodě s , tedy $g(s, s) = 1 - e^{-\lambda_1 s}$

- III. $(0 \leq x \leq s) \wedge (s > 0)$:

$$g(x, s) = 1 - e^{-\lambda_1 x} + 1 - e^{-\lambda_2(s-x)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 s} \lambda_2 e^{\lambda_2 x}$$

Derivace nabývá jak kladných, tak záporných hodnot. Budeme tedy hledat podezřelé body.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 s} \lambda_2 e^{\lambda_2 x} = 0$$

po zlogaritmování rovnice dostaneme

$$\log \lambda_1 - \lambda_1 x = \log \lambda_2 - \lambda_2 s + \lambda_2 x$$

$$x^* = \frac{\log \lambda_1 - \log \lambda_2 + \lambda_2 s}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Nyní rozebereme zvlášť dva případy, a to když x^* leží v intervalu $(0, s)$ a když x^* neleží v intervalu $(0, s)$. Předpokládejme, že $\lambda_1 > \lambda_2$, potom snadno vidíme, že $x^* > 0$.

Pokud $x^* > s$, tedy $s < \frac{\log \lambda_1 - \log \lambda_2}{\lambda_1}$, potom $\frac{\partial g}{\partial x}(0, s) > 0$, tedy funkce g je rostoucí a infimum je v bodě 0, tj. $g(0, s) = 1 - e^{-\lambda_2 s}$.

Pokud $x^* \in (0, s)$, tedy $s > \frac{\log \lambda_1 - \log \lambda_2}{\lambda_1}$, potom

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, s) > 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(s, s) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} - \lambda_2 < \lambda_1 e^{-\log \lambda_1 + \log \lambda_2} - \lambda_2 = 0.$$

Tedy v funkce g nabývá v bodě x^* maxima.

Pokud předpokládáme $\lambda_1 < \lambda_2$, potom $x^* < s$. Analogicky ukážeme, že pro $x^* < 0$ má funkce g infimum v bodě s . Pokud $x^* \in (0, s)$, potom funkce g v bodě x^* nabývá maxima.

Tedy infimum funkce $g(x, s)$ je buď v bodě 0, nebo v bodě s .

$$\min\{g(0, s), g(s, s)\} = 1 - e^{-\min\{\lambda_1, \lambda_2\}s}$$

Tedy celkem dostáváme funkci F_{max} ve tvaru:

$$F_{max}(s) = (1 - e^{-\min\{\lambda_1, \lambda_2\}s}) \mathbb{I}_{[s>0]}.$$

Vidíme, že funkce F_{max} je distribuční funkce exponenciálního rozdělení s parametrem $\min\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Nyní spočítáme funkci $F_{min}(s)$:

$$F_{min}(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \max\{F_1(x) + F_2(s-x) - 1, 0\},$$

dosadíme a definujeme pomocnou funkci $g(x, s)$:

$$F_{min}(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \underbrace{\max\{(1 - e^{-\lambda_1 x}) \mathbb{I}_{[x>0]} + (1 - e^{-\lambda_2(s-x)}) \mathbb{I}_{[s-x>0]} - 1, 0\}}_{g(x,s)}.$$

Dále uvažujeme 3 případy I. $x < 0$, II. $x > s$, III. $0 \leq x \leq s$.

- I. $x < 0$:

$$g(x, s) = -e^{-\lambda_2(s-x)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\lambda_2 e^{-\lambda_2 s} e^{\lambda_2 x} < 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je klesající funkce, tedy supremum je v bodě $-\infty$, tedy $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x, s) = 0$.

- II. $x > s$:

$$g(x, s) = -e^{-\lambda_1 x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} > 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je rostoucí funkce, tedy supremum je v bodě $+\infty$, tedy $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, s) = 0$.

- III. $0 \leq x \leq s$:

$$g(x, s) = -e^{-\lambda_1 x} + 1 - e^{-\lambda_2(s-x)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 s} \lambda_2 e^{\lambda_2 x}$$

Derivace nabývá jak kladných, tak záporných hodnot. Budeme tedy hledat podezřelé body.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 s} \lambda_2 e^{\lambda_2 x} = 0$$

kořenem rovnice je x^*

$$x^* = \frac{\log \lambda_1 - \log \lambda_2 + \lambda_2 s}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Nyní rozebereme zvlášť dva případy, a to když x^* leží v intervalu $(0, s)$ a když x^* neleží v intervalu $(0, s)$. Předpokládejme, že $\lambda_1 > \lambda_2$, potom snadno vidíme, že $x^* > 0$.

Z předchozí úvahy víme, že pokud $x^* \in (0, s)$, potom funkce $g(x, s)$ nabývá v bodě x^* svého maxima, tedy hodnota maxima je

$$g(x^*, s) = 1 - e^{-\lambda_1 \frac{\log \lambda_1 - \log \lambda_2 + \lambda_2 s}{\lambda_1 + \lambda_2}} - e^{\lambda_2 \frac{\log \lambda_1 - \log \lambda_2 + \lambda_2 s}{\lambda_1 + \lambda_2} - \lambda_2 s} =$$

$$= 1 - e^{-\frac{\lambda_1 \log \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\frac{\lambda_1 \log \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}} e^{-\frac{\lambda_1 \lambda_2 s}{\lambda_1 + \lambda_2}}} - e^{-\frac{\lambda_1 \lambda_2 s}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\frac{\lambda_2 \log \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}} e^{-\frac{\lambda_2 \log \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}} =$$

$$= 1 - e^{-\frac{\lambda_1 \lambda_2 s}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\frac{\lambda_1 \log \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}} e^{-\frac{\lambda_2 \log \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}} \left(e^{\frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \log \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}} + e^{\frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \log \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}} \right) =$$

$$= 1 - e^{-\frac{-\lambda_1 \lambda_2 s - \lambda_1 \log \lambda_1 - \lambda_2 \log \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}} e^{\log(\lambda_1 + \lambda_2)} =$$

$$= 1 - \text{Exp} \left\{ -\frac{\lambda_1 \lambda_2 s + \lambda_1 \log \lambda_1 + \lambda_2 \log \lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \log(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \right\}.$$

Pokud $x^* > s$, potom funkce g má supremum v bodě s , tj. $g(s, s) = -e^{-\lambda_1 s}$, a tedy funkce $F_{min}(s) = 0$, pokud $x^* > s$.

Pokud předpokládáme $\lambda_1 < \lambda_2$, potom $x^* < s$. Analogicky ukážeme, že pokud $x^* < 0$, potom má funkce g supremum v bodě 0, tj. $g(0, s) = -e^{-\lambda_2 s}$, a tedy funkce $F_{min}(s) = 0$ pro $x^* < 0$. Když $x^* \in (0, s)$, potom funkce g má v bodě x^* maximum.

Tedy celkem dostáváme funkci F_{min} tvaru:

$$F_{min}(s) = 1 - \text{Exp}\left\{-\frac{[\lambda_1 \lambda_2 s + \lambda_1 \log \lambda_1 + \lambda_2 \log \lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \log(\lambda_1 + \lambda_2)]^+}{\lambda_1 + \lambda_2}\right\}.$$

Většinou nás ale zajímají kvantilové funkce, které získáme zinvertováním distribučních funkcí F_{min} a F_{max} :

$$q_{max}(\alpha) = \frac{1}{\min\{\lambda_1, \lambda_2\}} \log\left(\frac{1}{1 - \alpha}\right), \quad (4.1)$$

$$q_{min}(\alpha) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \log\left(\frac{1}{1 - \alpha}\right) - \frac{\lambda_1 \log(\lambda_1) + \lambda_2 \log(\lambda_2) - (\lambda_1 + \lambda_2) \log(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (4.2)$$

Dále budeme předpokládat konkrétní hodnoty $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 5$.

Potom dostáváme funkce tvaru:

$$F_{max}(s) = (1 - e^{-2s})\mathbb{I}_{[s>0]},$$

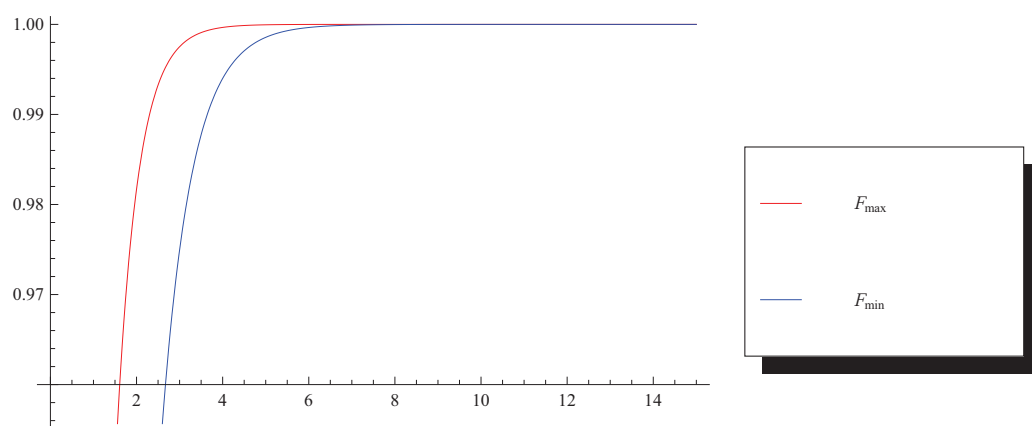
$$F_{min}(s) = (1 - \text{Exp}\left\{-\frac{10s+2*\log(2)+5*\log(5)-7*\log(7)}{7}\right\})\mathbb{I}_{[10s+2*\log(2)+5*\log(5)-7*\log(7)>0]}.$$

Grafické znázornění distribučních funkcí F_{min} a F_{max} viz Obrázek 4.1. Po zinvertování funkcí F_{min} , F_{max} dostáváme kvantilové funkce q_{min} a q_{max} viz Obrázek 4.2. Aplikací numerického algoritmu dostáváme rovnou meze pro kvantilovou funkci q_S viz Obrázek 4.3. Porovnání výsledků analytického výpočtu s výsledkem, který jsme získali pomocí numerického algoritmu viz Obrázek 4.4. Z Obrázku 4.4 je patrné, že numerický algoritmus dává prakticky totožný výsledek jako přesný analytický výpočet.

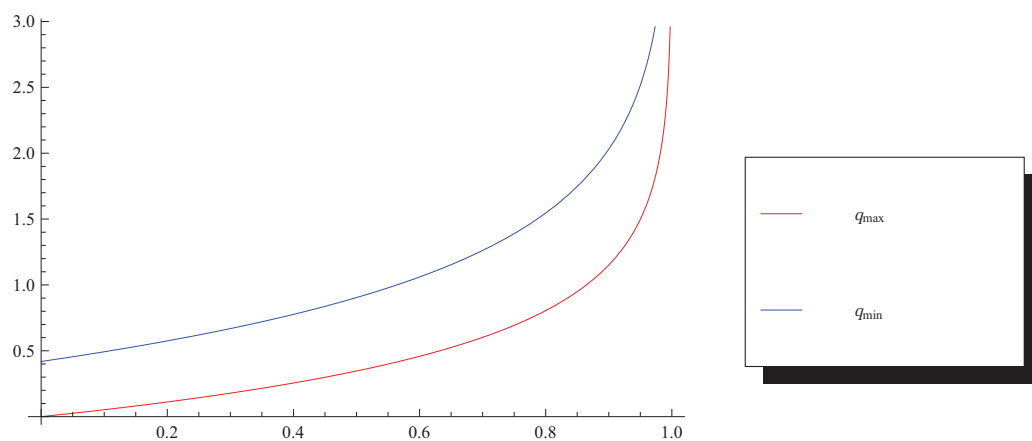
Dále můžeme předpokládat, že máme k dispozici dodatečnou informaci o závislostní struktuře náhodného vektoru (X_1, X_2) . Na Obrázku 4.5 jsou znázorněny původní meze (tj. bez předpokladu o závislostní struktuře), meze pro pozitivní závislost vektoru (X_1, X_2) ($q_{min}(PQD)$, $q_{max}(PQD)$). Na Obrázku 4.5 je také znázorněna kvantilová funkce pro komonotónní vektor (X_1, X_2) . V Tabulce 4.1 jsou hodnoty kvantilové funkce pro konkrétní hladinu α a pro vybrané typy závislostí.

První sloupeček tabulky říká jakou máme znalost o závislostní struktuře náhodného vektoru. Možnost „neznámá“ znamená, že nemáme žádné dodatečné informace o závislostní struktuře uvažovaného náhodného vektoru, možnost „PQD“ znamená, že uvažovaný náhodný vektor je pozitivně závislý, možnost „komonotonie“ znamená, že uvažovaný náhodný vektor je komonotónní a možnost „ C_I “ znamená, že uvažovaný vektor má známou kopulu $C = C_I$, tj. že náhodný vektor je nezávislý. Další sloupečky tabulky říkají na jaké hladině hledáme hodnotu v riziku (95%, 99,5%, 99,9%). Sloupeček „přesně“ označuje hodnoty spočítané

Grafické znázornění výsledků:

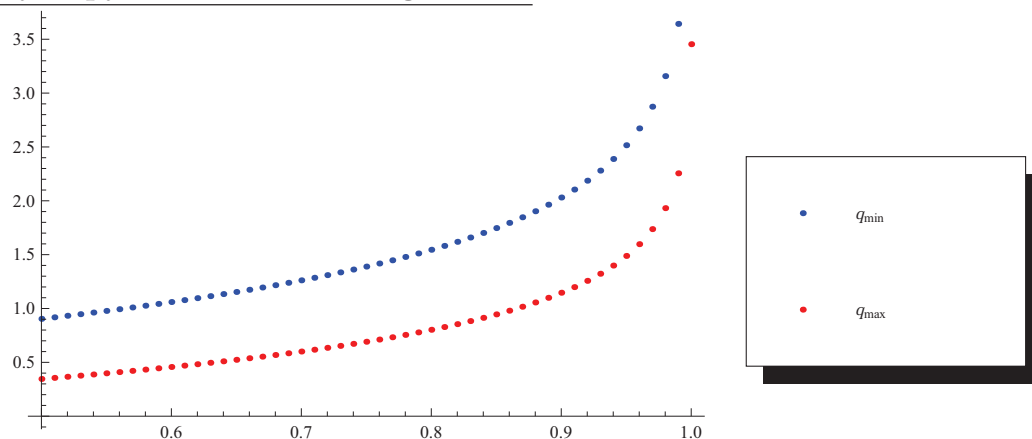


Obrázek 4.1: Meze pro distribuční funkci F_S pro rizika s exponenciálním rozdělením - anal. výpočet

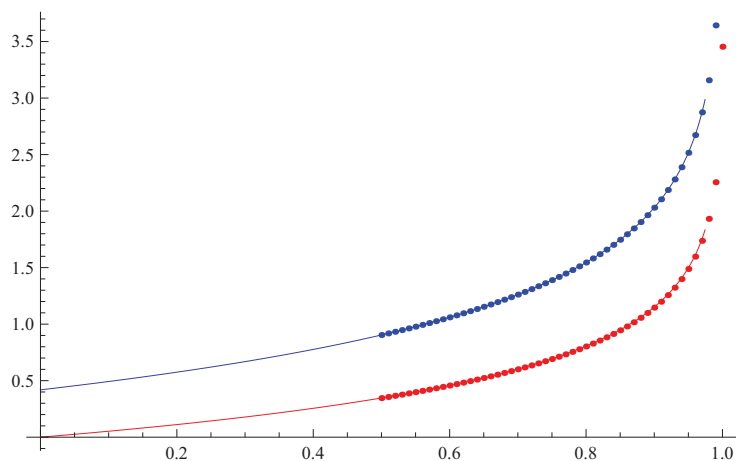


Obrázek 4.2: Meze pro kvantilovou funkci q_S pro rizika s exponenciálním rozdělením - anal. výpočet

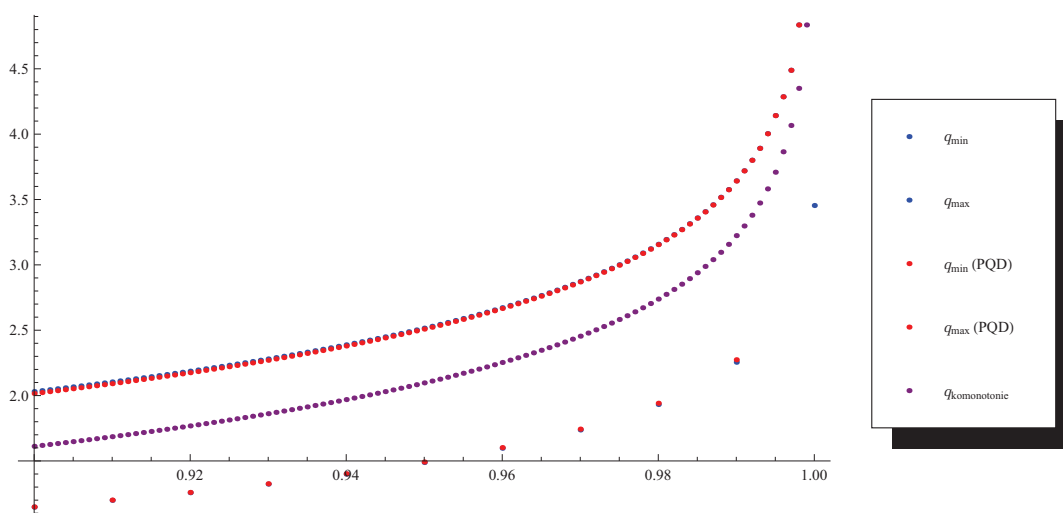
Výstupy z numerického algoritmu:



Obrázek 4.3: Meze pro kvantilovou funkci q_S pro rizika s exponenciálním rozdělením - num. algoritmus



Obrázek 4.4: Porovnání numericky a analyticky určených mezí kvantilové funkce pro rizika s exponenciálním rozdělením



Obrázek 4.5: Porovnání mezí kvantilové funkce pro rizika s exponenciálním rozdělením pro různé typy závislosti

závislost	$\alpha = 0,95$			$\alpha = 0,995$			$\alpha = 0,999$		
	přesně	dolní	horní	přesně	dolní	horní	přesně	dolní	horní
neznámá	—	1,49	2,52	—	2,56	4,14	—	3,41	5,25
PQD	—	1,49	2,51	—	2,59	4,14	—	3,43	5,25
komonotonie	2,10	—	—	3,71	—	—	4,84	—	—
C_I	1,75	—	—	2,91	—	—	3,71	—	—

Tabulka 4.1: Hodnoty kvantilových funkcí pro rizika s exponenciálním rozdělením

přesně analyticky. Sloupeček „dolní“ označuje hodnotu dolní meze hodnotu v riziku na příslušné pravděpodobnostní hladině. Sloupeček „horní“ označuje hodnotu horní meze hodnotu v riziku na příslušné pravděpodobnostní hladině.

Z Tabulky 4.1 a obrázků vidíme, že pokud předpokládáme nezávislost, dostáváme v tomto případě menší hodnotu VaR, než když předpokládáme komonotonii. Dále vidíme, že hodnota VaR za předpokladu komonotónnosti je menší než horní mez VaR, a že dodatečný předpoklad o pozitivní závislosti nám téměř nezměnil meze pro hodnotu VaR.

△

4.2 Aplikace Paretova a Weibullova rozdělení

Další dva příklady jsou již o mnoho realističtější, jejich předpoklady Paretova a Weibullova rozdělení bývají splněny. Pomocí těchto rozdělení se v praxi modelují ztráty z vysokých škod. V příkladech postupně předpokládáme dvě náhodné veličiny s Paretovým rozdělením a jednu náhodnou veličinu s paretovým rozdělením a druhou s Weibullovým rozdělením.

Dvě Paretova rozdělení

Uvažujme náhodný vektor závislých rizik (X_1, X_2) . Předpokládejme, že X_1 má Paretovo rozdělení s parametry $(2,1)$, X_2 má Paretovo rozdělení s parametry $(2,2)$. Naším cílem je nalezení horní a dolní meze distribuční funkce náhodné veličiny $S = X_1 + X_2$.

Označme F_1 distribuční funkci náhodné veličiny X_1 a F_2 distribuční funkci náhodné veličiny X_2 :

$$F_1(x) = \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)\mathbb{I}_{[x>2]}, \quad F_2(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)\mathbb{I}_{[x>2]}$$

Nejprve spočítáme funkci $F_{max}(s)$:

$$F_{max}(s) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \min\{F_1(x) + F_2(s-x), 1\},$$

dosadíme a definujeme pomocnou funkci $g(x, s)$:

$$F_{max}(s) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \underbrace{\min\left\{\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)\mathbb{I}_{[x>2]} + \left(1 - \frac{2}{s-x}\right)\mathbb{I}_{[s-x>2]}, 1\right\}}_{g(x,s)}.$$

Nejdříve ukážeme, že $F_{max}(s) = 0 \forall s \leq 4$. Pokud $s \leq 4$ dále uvažujeme dva případy I. $x \geq 2$ II. $x < s - 2$.

- I. $(x \geq 2) \wedge (s \leq 4)$:

$$g(x, s) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{8}{x^3} > 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je rostoucí funkce, tedy infimum je v bodě 2, tj. $g(2, s) = 0$.

- II. $(x < s - 2) \wedge (s \leq 4)$:

$$g(x, s) = 1 - \frac{2}{s - x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-2}{(s - x)^2} < 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je klesající funkce, tedy infimum je v bodě $s - 2$, tj. $g(s - 2, s) = 0$.

Pokud $s > 4$, potom uvažujeme tři případy: I. $x < 2$, II. $x > s - 2$, III. $2 \leq x \leq s - 2$.

- I. $(x < 2) \wedge (s > 4)$:

$$g(x, s) = 1 - \frac{2}{s - x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-2}{(s - x)^2} < 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je klesající funkce, tedy infimum je v bodě 2, tj. $g(2, s) = 1 - \frac{2}{s - 2}$.

- II. $(x > s - 2) \wedge (s > 4)$:

$$g(x, s) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{8}{x^3} > 0 \text{ pro } s - 2 > 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je rostoucí funkce, tedy infimum je v $s - 2$, tj. $g(s - 2, s) = 1 - \frac{4}{(s - 2)^2}$.

- III. $(2 \leq x \leq s - 2) \wedge (s > 4)$:

$$g(x, s) = 1 - \frac{4}{x^2} + 1 - \frac{2}{s - x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{8}{x^3} - \frac{2}{(s - x)^2}$$

Derivace nabývá jak kladných, tak záporných hodnot. Budeme tedy hledat podezřelé body.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$-2x^3 + 8x^2 - 16xs + 8s^2 = 0$$

Řešením této kubické rovnice s parametrem s jsou dva komplexně sdružené kořeny a jeden reálný kořen. Pro naše účely je relevantní pouze reálný kořen.

$$x^* = \frac{24s - 16}{3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{-27s^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{27s^4 - 16s^3 + 72s - 32}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{-27s^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{27s^4 - 16s^3 + 72s - 32}} + \frac{4}{3}}$$

Pomocí softwaru Mathematica 8 jsme zjistili, že funkce $g(x, s)$ nabývá v bodě x^* svého maxima. Proto tedy infimum funkce $g(x, s)$ je buď v bodě 2, nebo v bodě $s - 2$

$$\left. \begin{array}{l} g(2, s) = 1 - \frac{2}{s - 2} \\ g(s - 2, s) = 1 - \frac{4}{(s - 2)^2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\min} 1 - \frac{2}{s - 2}$$

Tedy celkem dostáváme tvar funkce F_{max} :

$$F_{max}(s) = \left(1 - \frac{2}{s-2}\right) \mathbb{I}_{[s>4]}.$$

Nyní spočítáme funkci $F_{min}(s)$:

$$F_{min}(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \max\{F_1(x) + F_2(s-x) - 1, 0\},$$

dosadíme a definujeme pomocnou funkci $g(x, s)$:

$$F_{min}(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \max\left\{\underbrace{\left(1 - \frac{4}{x^2}\right) \mathbb{I}_{[x>2]} + \left(1 - \frac{2}{s-x}\right) \mathbb{I}_{[s-x>2]}}_{g(x,s)} - 1, 0\right\}.$$

Nejdříve ukážeme, že $F_{min}(s) = 0 \forall s \leq 4$. Pokud $s \leq 4$ dále uvažujeme dva případy I. $x \geq 2$ II. $x < s - 2$.

- I. $(x \geq 2) \wedge (s \leq 4)$:

$$g(x, s) = 1 - \frac{4}{x^2} - 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{8}{x^3} > 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je rostoucí funkce, tedy supremum je v bodě $+\infty$, tj. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, s) = 0$.

- II. $(x < s - 2) \wedge (s \leq 4)$:

$$g(x, s) = 1 - \frac{2}{s-x} - 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-2}{(s-x)^2} < 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je klesající funkce, tedy supremum je v bodě $-\infty$, tj. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x, s) = 0$.

Pokud $s > 4$ uvažujeme tři případy: I. $x < 2$, II. $x > s - 2$, III. $2 \leq x \leq s - 2$.

- I. $(x < 2) \wedge (s > 4)$:

$$g(x, s) = 1 - \frac{2}{s-x} - 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-2}{(s-x)^2} < 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je klesající funkce, tedy supremum se nabývá v $-\infty$, tj. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x, s) = 0$.

- II. $(x > s - 2) \wedge (s > 4)$:

$$g(x, s) = 1 - \frac{4}{x^2} - 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{8}{x^3} > 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je rostoucí funkce, tedy supremum se nabývá v $+\infty$, tj. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, s) = 0$.

- III. $(2 \leq x \leq s - 2) \wedge (s > 4)$:

$$g(x, s) = 1 - \frac{4}{x^2} - \frac{2}{s - x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{8}{x^3} - \frac{2}{(s - x)^2}$$

Derivace nabývá jak kladných, tak záporných hodnot. Budeme tedy hledat podezřelé body.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0,$$

dostáváme stejné řešení jako v předchozím případě, tj.

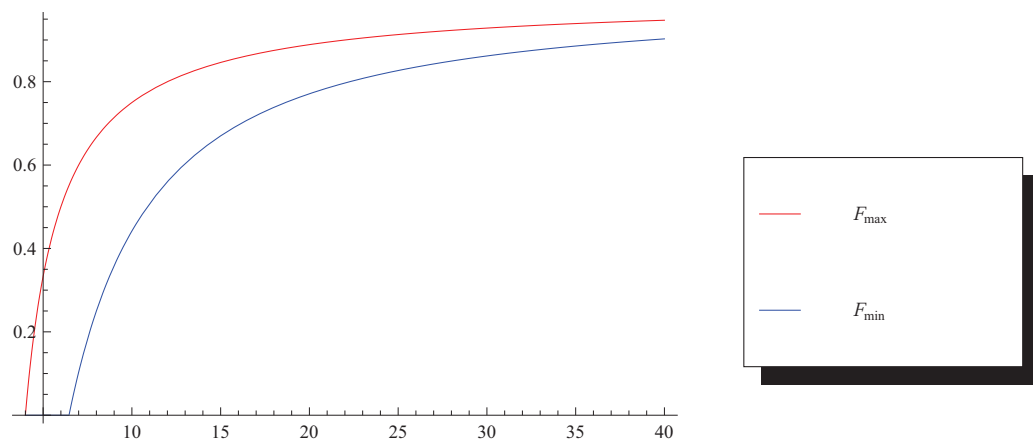
$$x^* = \frac{24s - 16}{3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{-27s^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{27s^4 - 16s^3 + 72s - 32}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{-27s^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{27s^4 - 16s^3 + 72s - 32}} + \frac{4}{3}}.$$

V bodě x^* funkce g nabývá svého maxima, potom funkce $F_{min}(s) = \min\{g(x^*, s), 1\} \mathbb{I}_{[s > 4]}$.

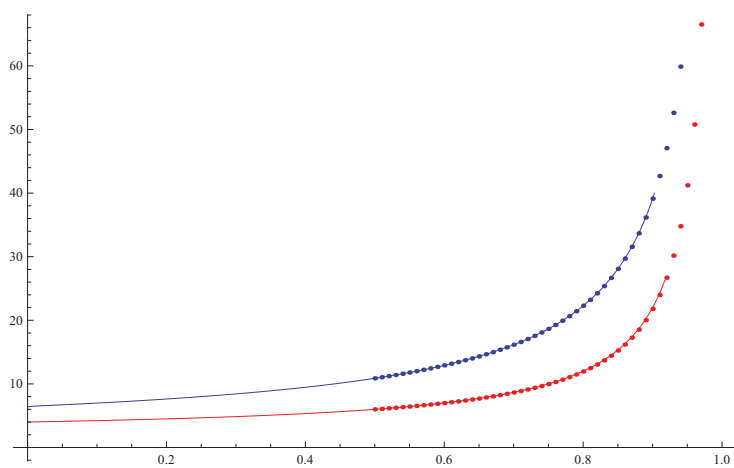
Na Obrázku 4.6 jsou znázorněny funkce F_{min} a F_{max} . Na Obrázku 4.7 je porovnání výsledků dosažených analytickým výpočtem (plná nepřerušovaná čára) a výsledků dosažených numerickým algoritmem (bodový graf). Z obrázku je patrné, že dosažené výsledky jsou totožné. Na Obrázku 4.8 jsou znázorněny meze pro kvantilovou funkci q_S , za předpokladu že neznáme závislostní strukturu náhodného vektoru (X_1, X_2) (modrá), za předpokladu že náhodný vektor (X_1, X_2) je pozitivně závislý (červená) a kvantilová funkce q_S , pokud je náhodný vektor (X_1, X_2) komonotónní. V Tabulce 4.2 jsou hodnoty kvantilové funkce pro konkrétní hladinu α a vybrané typy závislosti.

Z Tabulky 4.2 a obrázků vidíme, že pokud předpokládáme nezávislost, dostáváme v tomto případě menší hodnotu VaR, než když předpokládáme komonotonii. Dále vidíme, že za předpokladu komonotónní závislostní struktury nedostaneme horní omezení hodnoty VaR, a že dodatečný předpoklad o pozitivní závislosti nám prakticky nezměnil meze pro hodnotu VaR.

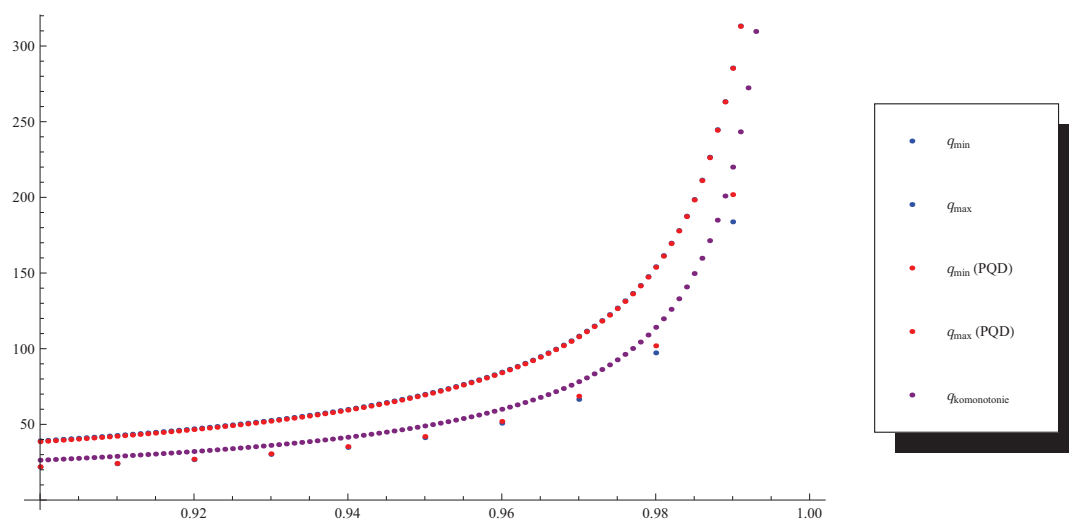
△



Obrázek 4.6: Meze pro distribuční funkci F_S pro rizika s Paretovým rozdělením - anal.



Obrázek 4.7: Porovnání numerických a analytických mezí kvantilových funkcí q_S pro rizika s Paretovým rozdělením



Obrázek 4.8: Porovnání mezí kvantilové funkce pro rizika s Paretovým rozdělením pro různé typy závislostí

závislost	$\alpha = 0,95$			$\alpha = 0,995$			$\alpha = 0,999$		
	přesně	dolní	horní	přesně	dolní	horní	přesně	dolní	horní
neznámá	—	41,22	69,86	—	335,33	563,25	—	1820	2422
PQD	—	41,96	69,42	—	401,61	562,75	—	2001	2422
komonot.	48,94	—	—	428,28	—	—	2063	—	—
C_I	46,00	—	—	406,1	—	—	2043	—	—

Tabulka 4.2: Hodnoty kvantilových funkcí pro rizika s Paretoovým rozdělením

Paretovo a Weibullovo rozdělení

Uvažujme náhodný vektor závislých rizik (X_1, X_2) . Předpokládejme, že X_1 má Paretovo rozdělení s parametry $(1,2)$, X_2 má Weibullovo rozdělení s parametry $(3,2)$. Naším cílem je určit horní a dolní mez distribuční a kvantilové funkce náhodné veličiny $S = X_1 + X_2$.

Označme F_1 distribuční funkci náhodné veličiny X_1 a F_2 distribuční funkci náhodné veličiny X_2 :

$$F_1(x) = (1 - \frac{1}{x^2})\mathbb{I}_{[x>1]}, \quad F_2(s) = (1 - e^{-2s^3})\mathbb{I}_{[s>0]}$$

Nejprve spočítáme funkci $F_{max}(s)$:

$$F_{max}(s) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \min\{F_1(x) + F_2(s-x), 1\},$$

dosadíme a definujeme pomocnou funkci $g(x, s)$:

$$F_{max}(s) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \min\{\underbrace{(1 - \frac{1}{x^2})\mathbb{I}_{[x>1]} + (1 - e^{-2(s-x)^3})\mathbb{I}_{[s-x>0]}}_{g(x,s)}, 1\}.$$

Nejdříve ukážeme, že $F_{max}(s) = 0 \forall s \leq 1$. Pokud $s \leq 1$, potom dále uvažujeme dva případy I. $x \geq 1$ II. $x < s$.

- I. $(x \geq 1) \wedge (s \leq 1)$:

$$g(x, s) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2}{x^3} > 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je rostoucí funkce, tedy infimum je v bodě 1, tj. $g(1, s) = 0$.

- II: $(x < s) \wedge (s \leq 1)$:

$$g(x, s) = 1 - e^{-2(s-x)^3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -6(s-x)^3 e^{-2(s-x)^3} < 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je klesající funkce, tedy infimum je v bodě s , tj. $g(s, s) = 0$.

Pokud $s > 1$, potom dále uvažujeme tři případy: I. $x < 1$, II. $x > s$, III. $1 \leq x \leq s$.

- I. $(x < 1) \wedge (s > 1)$:

$$g(x, s) = 1 - e^{-2(s-x)^3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -6(s-x)^2 e^{-2(s-x)^3} < 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je klesající funkce, tedy infimum je v bodě 1, tj. $g(1, s) = 1 - e^{-2(s-1)^3}$.

- II. $(x > s) \wedge (s > 1)$:

$$g(x, s) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2}{x^3} > 0$$

$\Rightarrow g(x, s)$ je rostoucí funkce, tedy infimum je v bodě s , tj. $g(s, s) = 1 - \frac{1}{s^2}$.

- III. $(1 \leq x \leq s) \wedge (s > 1)$:

$$g(x, s) = 1 - \frac{1}{x^2} + 1 - e^{-2(s-x)^3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -6(s-x)^2 e^{-2(s-x)^3} + \frac{2}{x^3}$$

Derivace nabývá jak kladných, tak záporných hodnot. Budeme tedy hledat podezřelé body.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{2}{x^3} - 6(s-x)^2 e^{-2(s-x)^3} = 0$$

Tato rovnice je analyticky neřešitelná. Nicméně když budeme tuto rovnici řešit graficky (v softwaru Mathematica 8), kde s bereme jako parametr, zjistíme, že tato rovnice má v závislosti na parametru s až 3 řešení - pro s z okolí bodu 2. Pro s větší nebo menší, funkce g nabývá svého minima v jednom z krajních bodů, tj. buď v 1, nebo s . Situace pro maximum je podobná. Proto nejsme schopni explicitně vyjádřit funkci F_{min} , ani funkce F_{max} .

Nepovedlo se nám analyticky vyjádřit meze F_{min} a F_{max} distribuční funkce F_S , ale můžeme tyto funkce spočítat numericky jako minimalizaci, resp. maximalizaci:

$$F_{max}(s) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \min\left\{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\mathbb{I}_{[x>1]} + (1 - e^{-2(s-x)^3})\mathbb{I}_{[s-x>0]}, 1\right\}$$

$$F_{min}(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \max\left\{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\mathbb{I}_{[x>1]} + (1 - e^{-2(s-x)^3})\mathbb{I}_{[s-x>0]} - 1, 0\right\}.$$

Tyto výsledky budeme srovnávat s výsledky, které jsme dostali pomocí numerického algoritmu, který jsme popsali ve třetí kapitole.

Na Obrázku 4.9 jsou znázorněny funkce F_{min} a F_{max} , které byly určeny numerickým výpočtem - maximalizací (F_{min}) a minimalizací (F_{max}). Na Obrázku 4.10 je porovnání výsledků dosažených numerickým výpočtem - maximalizací (F_{min}) a minimalizací (F_{max}), obojí je znázorněno plnou nepřerušovanou čarou, a výsledků dosažených numerickým algoritmem (bodový graf). Z obrázku je patrné, že dosažené výsledky jsou totožné. Na Obrázku 4.11 jsou znázorněny meze pro kvantilovou funkci q_S , za předpokladu že neznáme závislostní strukturu náhodného vektoru (X_1, X_2) (modrá), za předpokladu že náhodný vektor (X_1, X_2) je pozitivně závislý (červená) a kvantilová funkce q_S , pokud je náhodný vektor (X_1, X_2) komonotónní (fialová). V Tabulce 4.3 jsou hodnoty pro konkrétní hladinu α a vybrané typy závislostí.

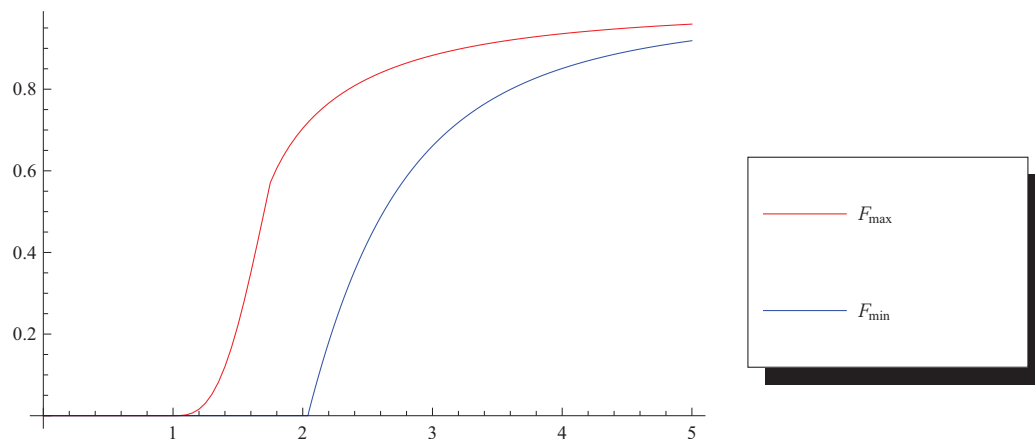
Z Tabulky 4.3 a obrázků vidíme, že pokud předpokládáme nezávislost, dostáváme v tomto případě menší hodnotu VaR, než když předpokládáme komonotonii. Dále vidíme, že pokud předpokládáme komonotónní závislostní strukturu nedostáváme horní omezení hodnoty VaR, a že dodatečný předpoklad o pozitivní závislosti nám prakticky nezměnil horní mez pro hodnotu VaR, a mírně nám vylepšil dolní mez pro hodnotu VaR.

Na Obrázku 4.9 si můžeme všimnout nehladkosti v průběhu funkce F_{max} . Tento „zub“ je důsledkem toho, že funkce F_{max} vzniká napojením dvou distribučních funkcí.

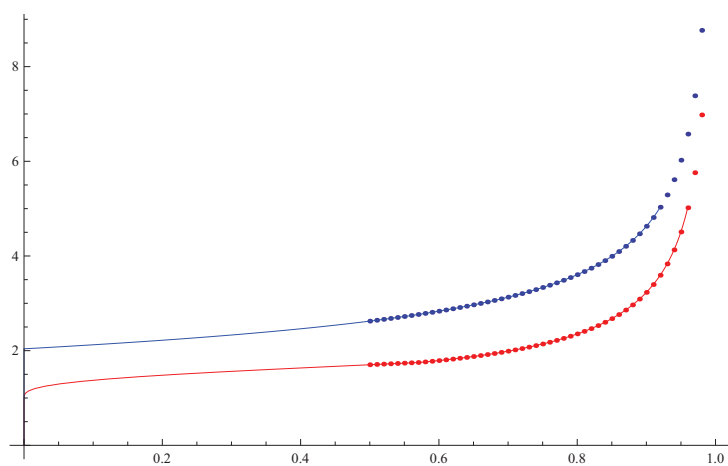
	$\alpha = 0,95$			$\alpha = 0,995$			$\alpha = 0,999$		
	přesně	dolní	horní	přesně	dolní	horní	přesně	dolní	horní
závislost	—	4,51	6,02	—	12,99	17,32	—	30,19	35,00
neznámá	—	4,51	6,02	—	12,99	17,32	—	30,19	35,00
PQD	—	4,65	6,02	—	13,39	17,32	—	30,51	35,00
komonotonie	5,62	—	—	15,53	—	—	33,13	—	—
C_I	5,20	—	—	14,86	—	—	32,58	—	—

Tabulka 4.3: Hodnoty kvantilových funkcí pro riziko s Paretovým a Weibullovým rozdělením

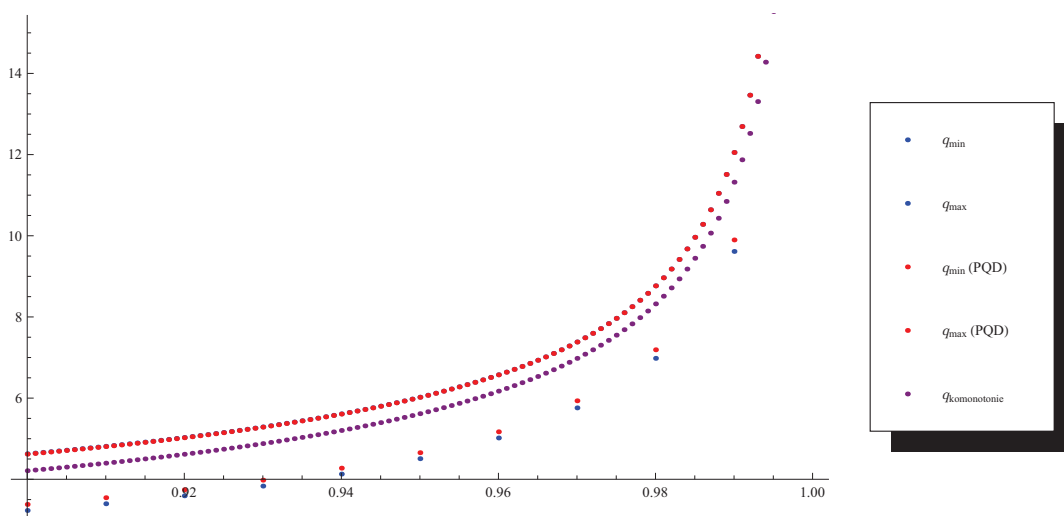
△



Obrázek 4.9: Meze pro distribuční funkci F_S pro riziko s Paretovým a riziko s Weibullovým rozdělením



Obrázek 4.10: Porovnání mezí kvantilových funkcí q_S pro riziko s Paretovým a riziko s Weibullovým rozdělením



Obrázek 4.11: Meze pro kvantilovou funkci q_S pro riziko s Paretovým a riziko s Weibullovým rozdělením

Kombinace dvou XL-zajištění

Doposud jsme se zabývali možnými aplikacemi v pojišťovně. V následujícím příkladu ukážeme možnou aplikaci pro zajišťovnu. Vhodnou volbou agregační funkce $\Psi(x_1, x_2, k) = \max\{x_1 - k, 0\} + \max\{x_2 - k, 0\}$ docílíme kombinaci dvou XL-zajištění s vlastním vrubem pojišťovny k . Následující příklad je tedy kombinace dvou XL-zajištění, kde vlastní vrub pojišťovny je $k = 0.5$, a rizika X_1 a X_2 , na které je zajištění sjednáno, mají exponenciální rozdělení.

Uvažujme náhodný vektor závislých rizik (X_1, X_2) . Předpokládejme, že X_1 má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{2}$ a X_2 má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{5}$. Naším cílem je najít horní a dolní mez kvantilové funkce náhodné veličiny $S = \Psi(X_1, X_2, 0.5)$, kde $\Psi(x_1, x_2, k) = \max\{x_1 - k, 0\} + \max\{x_2 - k, 0\}$.

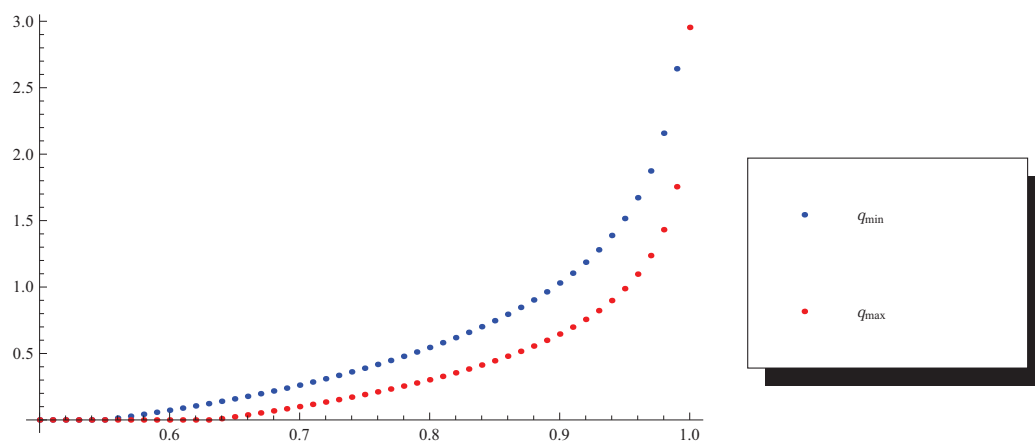
V tomto případě by bylo analytické řešení již poměrně složité, proto uvádíme pouze řešení, kterého bylo dosaženo numerickým algoritmem. Na Obrázku 4.12 jsou znázorněny kvantilové funkce q_{min} a q_{max} . Na Obrázku 4.13 jsou znázorněny meze pro kvantilovou funkci q_S , za předpokladu že neznáme závislostní strukturu náhodného vektoru (X_1, X_2) (modrá), za předpokladu že náhodný vektor (X_1, X_2) je pozitivně závislý (červená) a kvantilová funkce q_S , pokud je náhodný vektor (X_1, X_2) komonotónní (fialová). V Tabulce 4.4 jsou hodnoty pro konkrétní hladinu α a vybrané typy závislostí.

závislost	$\alpha = 0,95$			$\alpha = 0,995$			$\alpha = 0,999$		
	přesně	dolní	horní	přesně	dolní	horní	přesně	dolní	horní
neznámá	—	0,99	1,52	—	2,06	3,14	—	2,91	4,25
PQD	—	0,99	1,51	—	2,06	3,14	—	2,91	4,25
komonotonie	1,10	—	—	2,71	—	—	3,84	—	—
C_I	1,03	—	—	2,18	—	—	2,98	—	—

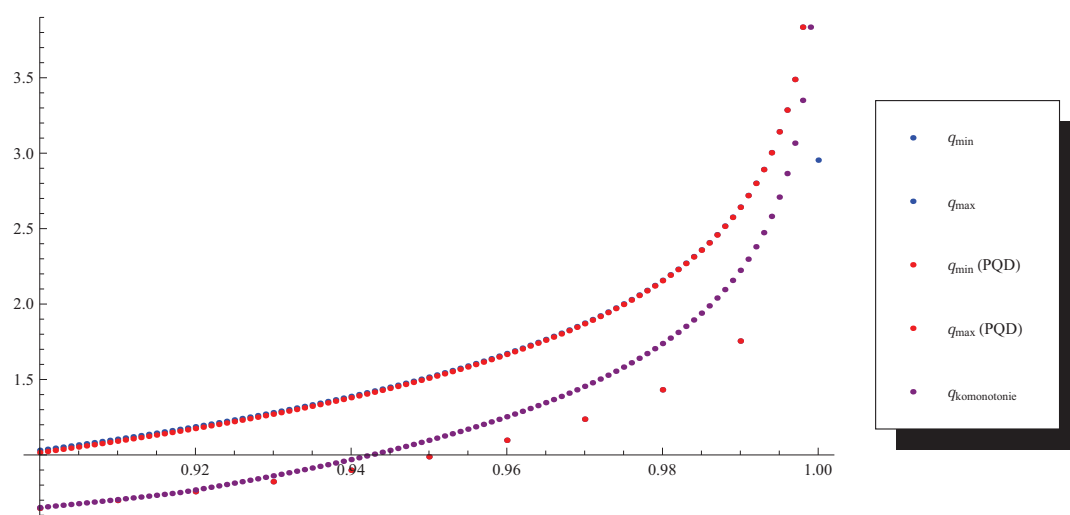
Tabulka 4.4: Hodnoty kvantilových funkcí pro agregační funkci XL-zajištění

Z Tabulky 4.4 a obrázků vidíme, že za předpokladu nezávislosti v tomto případě dostáváme menší hodnotu VaR, než když předpokládáme komonotonii. Dále vidíme, že za předpokladu komonotónní závislostní struktury je hodnota VaR menší než hodnota horní meze VaR, a že dodatečný předpoklad o pozitivní závislosti nám drobně pozměnil horní ani dolní mez pro hodnotu VaR.

△



Obrázek 4.12: Meze pro kvantilovou funkci q_S pro agregační funkci XL-zajištění



Obrázek 4.13: Meze pro kvantilovou funkci q_S pro agregační funkci XL-zajištění

4.3 Součet tří závislých rizik

V následujícím příkladu budeme předpokládat tři závislá rizika. První s Weibullovým rozdělením, druhé s Paretovým rozdělením a třetí s exponenciálním rozdělením.

Uvažujme náhodný vektor závislých rizik (X_1, X_2, X_3) . Předpokládejme, že X_1 má Weibullovo rozdělení s parametry $(3, 3)$, X_2 má Paretovo rozdělení s parametry $(2, 2)$ a X_3 má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{5}$. Naším cílem je nalezení horní a dolní meze kvantilové funkce náhodné veličiny $S = X_1 + X_2 + X_3$.

V tomto případě je přesný analytický výpočet prakticky nemožný, proto se musíme spoléhat pouze na výpočet pomocí numerického algoritmu. Druhou možností je použít itertivní algoritmus, který je zmíněný v Kapitole 2.1 a pomocí softwaru určit řešení. Řešení pomocí iterativního výpočtu a numerického algoritmu z Kapitoly 3 se téměř shodují. Porovnání grafů je na Obrázku 4.17

Úprava algoritmu: Nyní ukážeme, jak se změní algoritmus z Kapitoly 3, když budeme předpokládat, že $n = 3$, $\Psi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$, $\phi_0(s) = 1 - s$ a $C_0(u_1, u_2, u_3) = C_1(u_1, u_2, u_3) = \min\{u_1 + u_2 + u_3 - 2, 0\}$. Dostáváme tedy:

$$q_{min}(r/N) = \min_{A_{r,l_1,l_2}} \{F_1^{-1}(l_1/N) + F_2^{-1}(l_2/N) + F_3^{-1}(\nu_{r,l_1,l_2})\},$$

kde $A_{r,l_1,l_2} = \{l_1, l_2; (C_1)_{1,2}(\frac{l_1}{N}, \frac{l_2}{N}) \geq \frac{r}{N}\}$ a $l_1, l_2 \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$. Analogicky pro q_{max} :

$$q_{max}(r/N) = \max_{B_{r,l_1,l_2}} \{F_1^{-1}(l_1/N) + F_2^{-1}(l_2/N) + F_3^{-1}(\nu_{r,l_1,l_2}^*)\},$$

kde $B_{r,l_1,l_2} = \{l_1, l_2; (C_1)_{1,2}^d(\frac{l_1}{N}, \frac{l_2}{N}) \leq \frac{r}{N}\}$ a $l_1, l_2 \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$. V dalším kroku upravíme A_{r,l_1,l_2} a ν_{r,l_1,l_2} :

$$A_{r,l_1,l_2} = \{l_1, l_2; (\frac{l_1+l_2}{N} - 1)^+ \geq \frac{r}{N}\} = \{l_1, l_2; r + N \leq l_1 + l_2 \leq 2N\},$$

$$\nu_{r,l_1,l_2} = \phi_0^{-1}(\phi_0(\frac{r}{N}) - \phi_0(\frac{l_1}{N}) - \phi_0(\frac{l_2}{N})) = \phi_0^{-1}(\frac{l_1+l_2-r}{N} - 1) = \frac{2N+r-l_1-l_2}{N}.$$

Tedy výsledný tvar pro q_{min} :

$$q_{min}(r/N) = \min_{r+N \leq l_1+l_2 \leq 2N} \left\{ F_1^{-1}(l_1/N) + F_2^{-1}(l_2/N) + F_3^{-1}\left(\frac{2N+r-l_1-l_2}{N}\right) \right\}. \quad (4.3)$$

V následujícím kroku upravíme B_{r,l_1,l_2} a ν_{r,l_1,l_2}^* :

$$B_{r,l_1,l_2} = \{l_1, l_2; \min\{\frac{l_1+l_2}{N}, 1\} \leq \frac{r}{N}\} = \{l_1, l_2; 0 \leq l_1 + l_2 \leq r\},$$

$$\nu_{r,l_1,l_2}^* = 1 - \phi_0^{-1}(\phi_0(1 - \frac{r}{N}) - \phi_0(1 - \frac{l_1}{N}) - \phi_0(1 - \frac{l_2}{N})) = 1 - \phi_0^{-1}(\frac{r-l_1-l_2}{N}) = \frac{r-l_1-l_2}{N}.$$

Tedy výsledný tvar pro q_{max} :

$$q_{max}(r/N) = \max_{0 \leq l_1+l_2 \leq r} \left\{ F_1^{-1}(l_1/N) + F_2^{-1}(l_2/N) + F_3^{-1}\left(\frac{r-l_1-l_2}{N}\right) \right\}. \quad (4.4)$$

Pro úplnost ještě uvedeme, jaký tvar mají meze q_{min} a q_{max} pokud předpokládáme, že rizika jsou pozitivně závislá. Odvození je zcela analogické jako v předchozím případě s tím rozdílem, že $C_0 = C_1 = C_I$ a tedy $\phi_0(t) = -\log(t)$.

$$q_{min}^{PQD}(r/N) = \min_{rN \leq l_1 l_2 \leq N^2} \{F_1^{-1}(l_1/N) + F_2^{-1}(l_2/N) + F_3^{-1}\left(\frac{rN}{l_1 l_2}\right)\}, \quad (4.5)$$

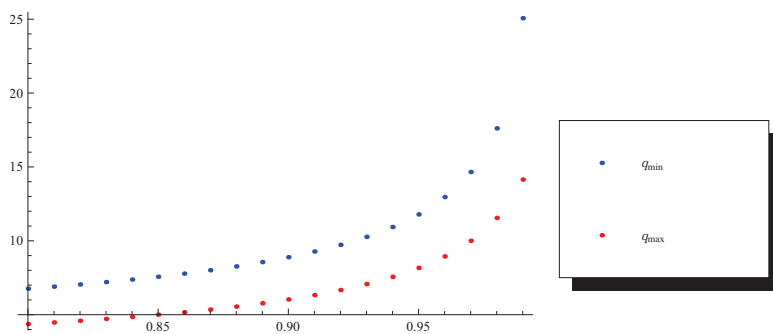
$$q_{max}^{PQD}(r/N) = \max_{0 \leq l_1 N + l_2 N - l_1 l_2 \leq rN} \{F_1^{-1}(l_1/N) + F_2^{-1}(l_2/N) + F_3^{-1}\left(\frac{rN + l_1 l_2 - l_1 N - l_2 N}{(N - l_1)(N - l_2)}\right)\}. \quad (4.6)$$

Na Obrázku 4.14 jsou znázorněny meze pro kvantilovou funkci q_S Na Obrázku 4.15 jsou znázorněny meze pro kvantilovou funkci q_S a kvantilové funkce q_S za předpokladu komonotonie. Na Obrázku 4.16 jsou znázorněny meze pro kvantilovou funkci q_S , za předpokladu že neznáme závislostní strukturu náhodného vektoru (X_1, X_2, X_3) (modrá), za předpokladu že náhodný vektor (X_1, X_2, X_3) je pozitivně závislý (červená) a kvantilová funkce q_S , pokud je náhodný vektor (X_1, X_2, X_3) komonotónní (fialová). V Tabulce 4.5 jsou hodnoty pro konkrétní hladinu α a vybrané typy závislostí. V Tabulce 4.5 není uvedena hodnota dolní meze kvantilové funkce, protože ji není možné spočítat s autorovi dostupnou výpočetní technikou. Ale je možné tuto mez odhadnout jako zhruba 80% z hodnoty kvantilové funkce, za předpokladu komonotie (s přihlédnutím k předchozím hodnotám). Ze stejného důvodu není uvedena hodnota pro dolní mez kvantilové funkce za předpokladu pozitivní závislosti. Tuto hodnotu je možné odhadnout jako zhruba 90% z hodnoty kvantilové funkce za předpokladu komonotonie (s přihlédnutím k předchozím hodnotám).

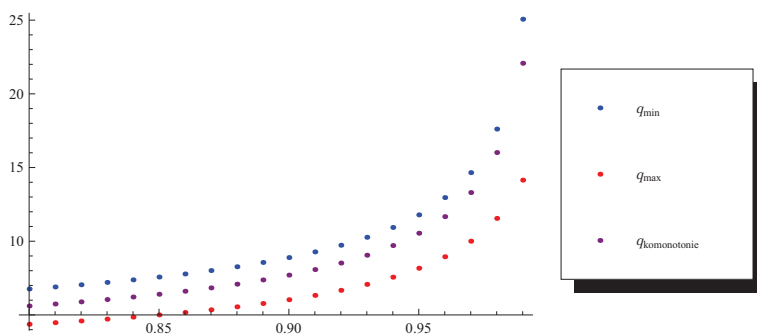
Hodnoty v řádku C_I Tabulky 4.5 byly získány na základě součtu náhodných výběrů z daných marginálních rozdělání, protože přesný výpočet nebylo možné v softwaru Mathematica 8 provést. Nejedná se tedy o přesné hodnoty, nýbrž o empirický odhad. Rozsah výběru byl 10^6 pozorování.

Částečně z Tabulky 4.5 a obrázků vidíme, že hodnota VaR za předpokladu nezávislosti je nižší než hodnota VaR za předpokladu komonotonie. Dále vidíme, že hodnota VaR za předpokladu komonotónní závislostní struktury je nižší než hodnota horní meze VaR, a že dodatečný předpoklad o pozitivní závislosti nám příliš nezměnil horní mez pro hodnotu VaR, a mírně nám vylepšil dolní mez pro hodnotu VaR.

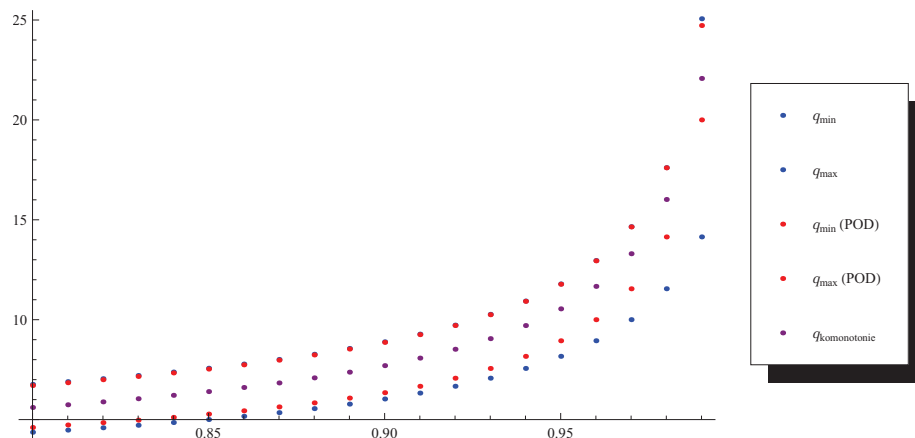
△



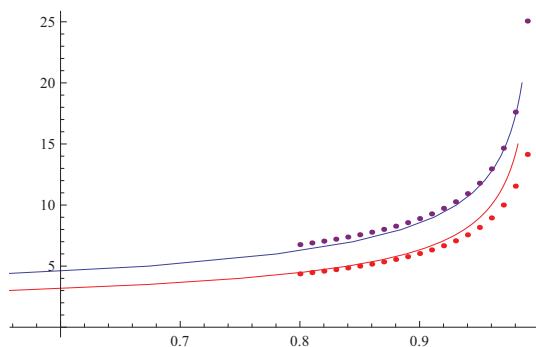
Obrázek 4.14: Meze pro kvantilovou funkci q_S pro rizika s Paretovým, Weibullovým a exponenciálním rozdělením



Obrázek 4.15: Meze pro kvantilovou funkci q_S pro rizika s Paretovým, Weibullovým a exponenciálním rozdělením



Obrázek 4.16: Meze pro kvantilovou funkci q_S pro rizika s Paretovým, Weibullovým a exponenciálním rozdělením



Obrázek 4.17: Porovnání mezi získaných iterativním výpočtem a num. algoritmem

	$\alpha = 0,95$			$\alpha = 0,995$			$\alpha = 0,999$		
	přesně	dolní	horní	přesně	dolní	horní	přesně	dolní	horní
závislost	—	8,94	11,79	—	25,82	39,22	—	?	74,00
neznámá	—	8,94	11,79	—	25,82	39,22	—	?	74,00
PQD	—	9,04	11,77	—	28,28	32,16	—	?	71,36
komonotonie	10,54	—	—	30,55	—	—	65,95	—	—
C_I	9,77	—	—	28,69	—	—	64,27	—	—

Tabulka 4.5: Hodnoty kvantilových funkcí pro riziko s Paretovým, Weibullovým a exponenciálním rozdělením

Závěr

Na základě stochastického omezování jsme odvodili vzorce pro omezení distribuční funkce součtu závislých rizik. Dále jsme pomocí kopol uvedli jak se meze změni pokud máme k dispozici dodatečnou informaci o závislostní struktuře.

V práci jsme uvedli možné použití těchto výsledků zejména v pojišťovně - volbou agregační funkce součtu a vhodnou volbou marginálních distribučních funkcí (Paretovo, Weibullovo rozdělení). Použití je vhodné pro agregaci vysokých škod (velké škody, které nastávají s malou pravděpodobností) v neživotním pojištění, nebo pro agregaci různých typů pojištění.

Předvedli jsme také možné použití v zajišťovně - volbou agregační funkce $\Psi(X_1, X_2) = \max\{X_1 - k, 0\} + \max\{X_2 - k, 0\}$.

V softwaru *Mathematica 8* jsme implementovali numerický algoritmus pro výpočet mezí $\text{VaR}(X_1 + X_2)$ jak pro obecné distribuční funkce $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x)$, tak pro konkrétní rodiny distribučních funkcí (Par, Wei, Exp), kde jsme s výhodou použili zabudovaných funkcí softwaru *Mathematica 8*.

Na příkladech je vidět, že určení přesného analytického výpočtu je možné pouze ve speciálních případech. Většinou ovšem není možné. U příkladů, kde bylo možné porovnat přesný a numerický výpočet, byla vidět pěkná shoda.

Literatura

- [1] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R.: *Actuarial Theory for Dependent Risks*, John Wiley & Sons Inc, 2005.
- [2] Embrechts, P., Höing, A., Juri, A.: *Using Copulae to bound the Value-at-Risk for functions of depended risks*. Dostupné na <http://www.math.ethz.ch/~baltes/ftp/EHJ.pdf>.
- [3] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*, 2nd edn. McGraw-Hill, 1974.
- [4] Frank, M.J. and Schweizer, B.: *On the duality of generalized infimal and supremal convolutions*. Rend. Mat. Serie VI 12, 1-23 (1979)

Přílohy

Příloha 1

```
kvantilMin[r_,n_,Dfce1_,Dfce2_,gen_] :=  
Module[{F1inv,F2inv, $\psi$ ,generator,reseni, fce1,fce2,vysl},  
F1inv[y_]=Reduce[Dfce1[x]==y,x,Reals][[2,2,2]];  
F2inv[y_]=Reduce[Dfce2[x]==y,x,Reals][[2,2,2]];  
 $\psi$ [x_,y_]:=x+y;  
generator[t_]:=gen[t];  
reseni[j_,l_]:=Solve[generator[t]==generator[j/n]-generator[l/n],  
t,InverseFunctions→True];  
fce2[l_]=t/.reseni[r,l];  
fce1[l_]=1/n;  
vysl=Map[F1inv[fce1[#]/N]+F2inv[fce2[#]/N]&,  
Range[r+1,n-1,1]]//Flatten//Min//N]  
  
kvantilMax[r_,n_,Dfce1_,Dfce2_,gen_] :=  
Module[{F1inv,F2inv, $\psi$ ,generator,reseni,fce1,fce2},  
F1inv[y_]=Reduce[Dfce1[x]==y,x,Reals][[2,2,2]];  
F2inv[y_]=Reduce[Dfce2[x]==y,x,Reals][[2,2,2]];  
 $\psi$ [x_,y_]:=x+y;  
generator[t_]:=gen[t];  
reseni[j_,l_]:=Solve[generator[t]==generator[1-j/n]-generator[1-l/n],t,  
InverseFunctions→True];  
fce2[l_]:=1-t/.reseni[r,l];  
fce1[l_]:=1/n;  
Map[ $\psi$ [F1inv[fce1[#]],F2inv[fce2[#]]]&,  
Range[1,r-1,1]]//Flatten//Max//N]
```