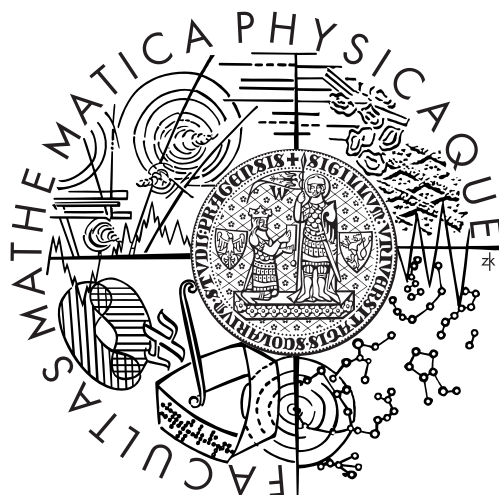


UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA



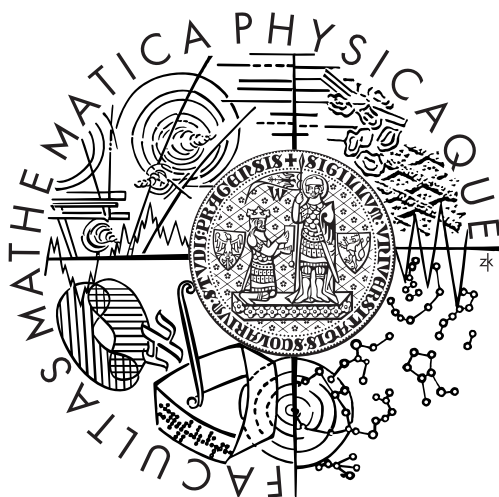
DIPLOMOVÁ PRÁCE

2012

Libor Nouzák

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Libor Nouzák

Interakce prachu s UV zářením

Katedra fyziky povrchů a plazmatu

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jiří Pavlů, Ph.D.

Studijní program: Fyzika povrchů a ionizovaných prostředí

Studijní obor: Fyzika

Rád bych poděkoval svým rodičům, kteří mě vytrvale podporují při studiích. Dále bych chtěl poděkovat všem svým kolegům a zaměstnancům KFPP, především Marku Vyšinkovi a Ivaně Richterové. Také bych rád poděkoval vedoucímu práce RNDr. J.Pavlů, který mě svými radami a nesčetnými konzultacemi dovedl až k dokončení této práce. Mé poděkování patří též panu profesoru Němečkovi a paní profesorce Šafránkové za kritické přečtení rukopisu a věcné připomínky k odborné stránce textu.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze 3. srpna 2012

Libor Nouzák

Název práce: *Interakce prachu s UV zářením*

Autor: *Libor Nouzák*

Katedra: *Katedra fyziky povrchů a plazmatu*

Vedoucí diplomové práce: *RNDr. Jiří Pavlů, Ph.D.*

E-mail vedoucího: *jiri.pavlu@mff.cuni.cz*

Abstrakt: Objekty mikrometrových rozměrů (prach) jsou nedílnou součástí vesmíru. Jako každý předmět v plazmatu, nabíjí se i tento prach na potenciál blízký potenciálu plazmatu (v tomto případě tedy meziplanetárního plazmatu). Ve vesmíru však hraje v nabíjecích procesech dominantní roli fotoemise vlivem dopadu UV, popř. tvrdšího záření. Obecně je výsledný náboj prachového zrna dán bilancí mnoha procesů, jejichž teorie nebyly ve většině případů dosud plně popsány. V naší laboratoři simulujeme podmínky v kosmickém prostoru a měříme výsledný náboj jednotlivých prachových zrn a jeho změny. Práce je zčásti zaměřena na uvedení do provozu UV zdroje spolu s jeho detekční částí pro nově budovanou experimentální aparaturu. Dále jsou provedena testovací měření a modelové výpočty, které hodnotí vliv pozadí, povrchů a geometrie elektrod pasti na náboj zachyceného prachového zrna. Práce je zakončena prvním měřením nabíjení skleněných prachových zrn pod dopadem elektronů různých energií s náhradní detekční optikou. Získané výsledky jsou srovnány s dříve naměřenými daty a toto srovnání naznačuje, že po dobudování optického detekčního systému splní aparatura očekávání.

Klíčová slova: *prach, prachové plazma, nabíjení prachu, fotoemise*

Title: *Dust - UV interaction*

Author: *Libor Nouzak*

Department: *Department of Surface and Plasma Science*

Supervisor: *RNDr. Jiri Pavlu, Ph.D.*

Supervisor's e-mail address: *jiri.pavlu@mff.cuni.cz*

Abstract: *Micrometer objects (dust grains) are an integral part of the universe. As other objects in the plasma, these dust grains charge to potential close to the potential of the plasmas (in this case, interplanetary plasma). In the universe, the photoelectric charging dust grain dominates all other charging processes. In general, the resulting charge of dust grain is given by a balance of all processes, which haven't been mostly yet theoretically described. In our laboratory, we are simulating space conditions and measure resulting charge and its changes on a single separated dust grain. This work is partly focused to UV source application and to finishing its electronics, and partly on test measurements and model calculations, connected with newly built experiment (e.g., to estimate effects of background currents, surfaces, and the geometry of the dust trap electrodes). The work is finished by the first measurements of glass grain charge under electron bombardment with provisional detection optics. Obtained results are compared with previous measurements on the same type of dust grains.*

Key words: *dust, dusty plasma, dust charging, photoemission*

OBSAH

1	Úvod	5
2	Nabíjecí procesy	10
2.1	Nabíjení elektrony	11
2.1.1	Elektronový záchyt (EC)	11
2.1.2	Sekundární elektron-elektronová emise (SEE)	11
2.1.3	Elektronová polní emise (FEE)	12
2.2	Nabíjení ionty	12
2.2.1	Iontový záchyt (IC)	12
2.2.2	Iontová polní emise (FIE)	12
2.3	Fotoemisní nabíjení	13
3	Teorie fotoemise	15
3.1	Fotoemise z prachového zrna	16
3.1.1	Povrchový potenciál	16
3.1.2	Výstupní práce	17
3.1.3	Fotoelektronové výtěžky	19
4	Teorie rozptylu	23
4.1	Mieův rozptyl	23
4.1.1	Maxwellovy rovnice ve sférických souřadnicích	23
4.1.2	Hertz-Debyeovy potenciály	24
4.1.3	Řešení skalární vlnové rovnice	26
4.1.4	Přiblížení dalekého pole	29
4.1.5	Účinné průřezy	31
4.2	Rayleighův rozptyl	32
5	Cíle práce	34
6	Experimentální uspořádání	35
6.1	Experimentální aparatura	35
6.2	Princip lineární elektrodynamické pasti	37
6.3	Zdroj UV	39
6.4	Měřicí techniky	39
6.4.1	Metoda elementárního náboje	39
6.4.2	Metoda V-A charakteristiky	40

7	Řešení práce	42
7.1	Vliv tvaru elektrod a zbytkového plynu na náboj zrna	42
7.1.1	Past s hyperbolickými elektrodami	45
7.1.2	Past s tyčovými elektrodami (Obr.7.4)	46
7.1.3	Výsledky modelu	49
7.2	Vliv fotoemise z elektrod na náboj prachového zrna	50
7.2.1	Rozbíhavost svazku, fotonový tok	51
7.2.2	Určení parametrů svazku metodou clon	53
7.3	Mieův rozptyl UV a červeného laseru	54
7.4	Sestavení detekční elektroniky UV svazku	56
7.4.1	Oživení detektoru svazku částic	56
7.4.2	Napájecí zdroj detektoru	58
7.4.3	Komunikace s převodníky na desce detektoru	59
7.5	Kalibrace detektoru – měření energetického spektra fotonů	59
7.6	Měření prachových zrn SiO_2	62
7.6.1	Zachycení zrna, ověření funkce pasti	62
7.6.2	Měření vlastních kmitů zrna pomocí modulace intenzity světla	63
8	Závěr	67
A	Dodatky	72
A.1	Sommerfeldův model - frekvence nárazů na povrchovou bariéru	72
A.2	Řešení Helmholtzovy rovnice ve sfér. souřadnicích	74
A.3	Sférické Besselovy a Hankelovy funkce	75
A.4	Přidružené Legendreovy funkce	76
A.5	Sférické harmonické funkce	77
A.6	Řešení Mathieuovy diferenciální rovnice	77
A.7	Dielektrická koule v poli bodového náboje	78
A.8	Operátory ve sférických souřadnicích	80

SEZNAM OBRÁZKŮ

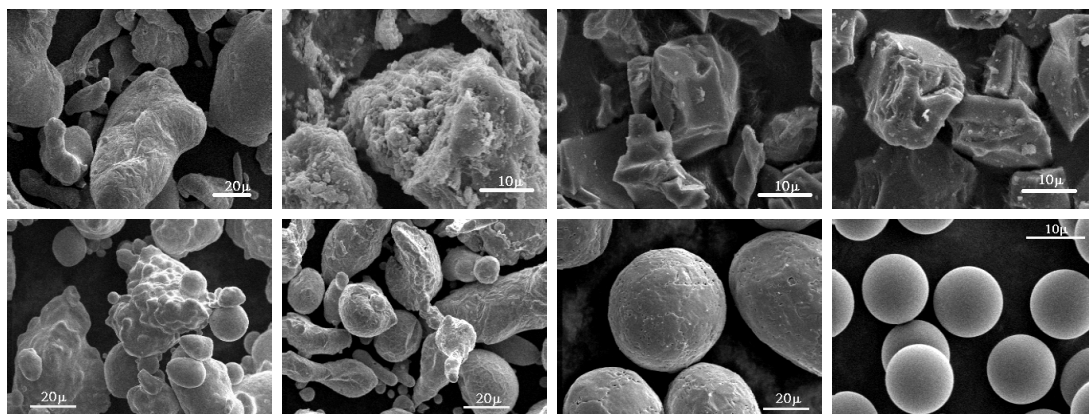
1.1	Ukázka modelových vzorků používaných pro měření zleva Zn ($d=10\text{--}50\ \mu\text{m}$), mars simulant ($d=5\text{--}50\ \mu\text{m}$), Al_2O_3 ($d < 16\ \mu\text{m}$), SiC ($d < 16\ \mu\text{m}$), Ni/Fe ($d=10\text{--}40\ \mu\text{m}$), bronz ($d=5\text{--}50\ \mu\text{m}$), Cu ($d=40\text{--}60\ \mu\text{m}$), MF 53/96 ($d=13.91 \pm 0.15\ \mu\text{m}$).	5
1.2	Zleva hvězda Eta Carinae – při její explozivní erupci vznikly prachové laloky, spirální galaxie Messier 51 – jsou vidět patrné dlouhé provazce hvězd a plynu ověšeného prachem, vznik nové hvězdy – jádro obklopeno prachovým diskem.	6
1.3	Družice Cassini a Stardust.	6
1.4	Saturnovy prstence, prach na Měsíci.	7
1.5	Náčrtky „horizontálních toků“ a „streamů“ pozorovaných při východu Slunce z oběžné dráhy Měsíce astronautem E.A. Cernanem, během mise Apollo 17 [McCoy and Criswell, 1974].	8
2.1	Ilustrace k nabíjecím procesům (EC – electron capture, SEE – secondary electron emission, FEE – field electron emission, IC – ion capture, FIE – field ion emission).	10
3.1	Dielektrická koule ve vakuu	17
3.2	Fotoemise z valenčního pásu (převzato z [Weingartner and Draine, 2001]).	22
4.1	Geometrie rozptylu	27
6.1	Experimentální aparatura pro studium fotoemisního nabíjení prachových zrn.	36
6.2	Geometrie pasti, amplituda a fáze potenciálů na elektrodách (převzato z [Beránek <i>et al.</i> , 2010]).	37
7.1	Koncentrace terčíkových center.	42
7.2	Parametrizace pohybu elektronu v době mezi srážkami, orientace souřadnicových os.	44
7.3	Geometrie pasti s hyperbolickými elektrodami.	44
7.4	Geometrie pasti s tyčovými elektrodami.	46
7.5	K rovnici posunutého válce.	46
7.6	K popisu kolize elektronu s kruhovým detektorem.	47
7.7	Závislost počtu elektronů dapadlých na jednotlivé elektrody pasti v závislosti na jejich energii (horní část – past s hyperbolickými elektrodami, dolní část – lineární past).	49
7.8	Měření velikosti fotoproudu z elektrod pasti.	50

7.9	Závislost fotoproudu na velikosti přiloženého napětí na elektrody pasti.	51
7.10	Znázornění rozbíhavosti svazku UV	52
7.11	Závilost velikosti rozptýlené intenzity monochromatického světla ($\lambda = 660 \text{ nm}$) na rozptylovém úhlu θ	55
7.12	Závilost velikosti rozptýlené intenzity monochromatického světla ($\lambda = 58.4 \text{ nm}$) na rozptylovém úhlu θ	57
7.13	Závilost velikosti rozptýlené intenzity monochromatického světla ($\lambda = 30.4 \text{ nm}$) na rozptylovém úhlu θ	57
7.14	Geometrie bezmřížkového Faradayova válce.	59
7.15	Energetická „kumulativní rozdělovací funkce“ vyletujících fotoelektronů z elektrody K (FV).	61
7.16	Energetická „rozdělovací funkce“ vyletujících fotoelektronů z elektrody K (FV).	61
7.17	Srovnání Maxwell-Boltzmannova rozdělení ($k_B \cdot T = 3.5 \text{ eV}$) ze SIMIONU s naměřenými daty.	62
7.18	Prachová zrna SiO_2 s 3–8 μm v průměru.	62
7.19	Pohled CCD kamerou na kmitající zachycené prachové zrno.	64
7.20	Frekvenční spektrum signálu detekovaného pomocí PIN diody.	65
7.21	Závislost měrného náboje prachového zrna SiO_2 (3–8 μm) na kinetické energii dopadajících elektronů.	66
A.1	Dielektrická koule v poli bodového náboje	79

1 ÚVOD

Jedním z hlavních problémů současné fyziky je objasnění procesů probíhajících v kosmickém plazmatu. Jedná se především o procesy nabíjení prachových zrn obsažených v komplexním plazmatu nabitými částicemi a UV zářením [Barkan *et al.*, 1994]. Studium mezihvězdného prachu a nabíjecích procesů s ním spojenými mohou pomoci objasnit vznik naší sluneční soustavy, případně i vznik celého vesmíru.

Prachovým zrnem rozumíme částice různých tvarů z různých materiálů o velikosti řádově nanometrů až stovek mikrometrů. Fyzikální studium kosmického



Obr. 1.1: Ukázka modelových vzorků používaných pro měření zleva **Zn** ($d=10-50 \mu\text{m}$), **mars simulant** ($d=5-50 \mu\text{m}$), **Al_2O_3** ($d < 16 \mu\text{m}$), **SiC** ($d < 16 \mu\text{m}$), **Ni/Fe** ($d=10-40 \mu\text{m}$), **bronz** ($d=5-50 \mu\text{m}$), **Cu** ($d=40-60 \mu\text{m}$), **MF 53/96** ($d=13.91 \pm 0.15 \mu\text{m}$).

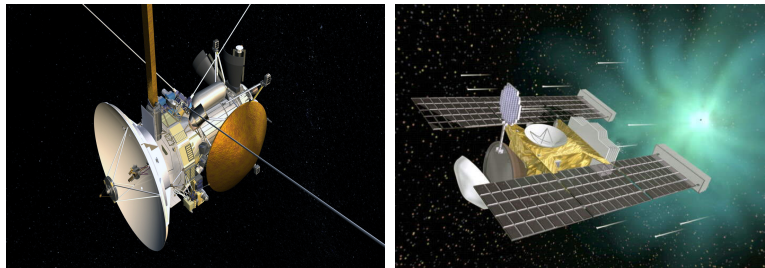
prachu má dlouholetou tradici. Na počátku prvních letů do vesmíru se usuzovalo, že kolem Země existuje jakási prachová obálka [Bohn and Nadig, 1950], proto se výzkumu prachových zrn věnovala značná pozornost především v souvislosti s nebezpečím pro družice. Po poměrně dlouhé době se ukázalo, že uvažovaná prachová obálka je způsobena jen chybnou interpretací dat [Fechtig, 2001]. Poté začal zájem o výzkum kosmického prachu opadat. Později se však ukázalo že, studium mezihvězdného prachu má z několika hledisek svůj význam. Kosmický prach nese informace o vzdálených systémech a o původu naší galaxie, nabíjecí procesy související s prachovými zrny mohou objasnit formování větších kosmických útvarů.

Není divu, že byla vypuštěna řada družic, jež měly hned několik úkolů. Příkla-



Obr. 1.2: Zleva hvězda Eta Carinae – při její explozivní erupci vznikly prachové laloky, spirální galaxie Messier 51 – jsou vidět patrné dlouhé provazce hvězd a plynu ověčeného prachem, vznik nové hvězdy – jádro obklopeno prachovým diskem.

dem je družice Cassini ¹, která mimo jiné měří složení a hmotnostní rozdělení prachových zrn v prstencích Saturnu. Družicí, která byla zaměřena na sběr mezihvězdného prachu, je družice Stardust ². Ta v lednu 2006 poslala sebrané vzorky komety Wild 2 zakomponované v aerogelu v návratové kapsli na Zemi, kde byly podrobeny analýze [Rotundi and Rietmeijer, 2007]. V aerogelu byla nalezena prachová zrna nanometrových rozměrů, příležitostně zrna větší než 1 mikrometr. Prachová zrna byla tvořena feromagnetickými křemičitany, Fe-Ni sulfidy, kovy Fe-Ni a jejich příslušejícími fázemi. Mimo anorganických materiálů byly ve vzorcích nalezeny organické sloučeniny skupin C-O, C-H, C-N. Kromě těchto sloučenin byl přítomen i čistý uhlík v amorfní formě.

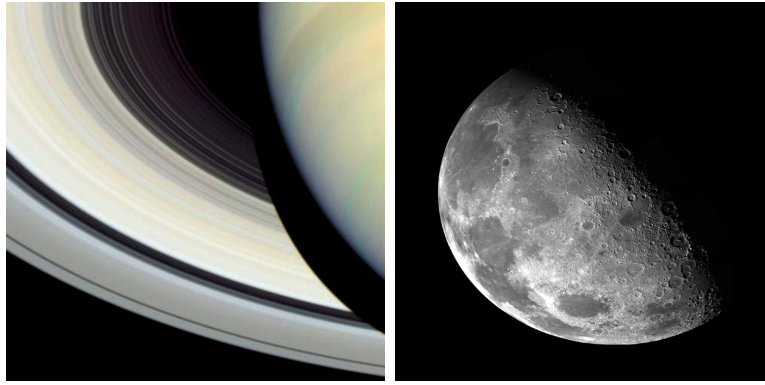


Obr. 1.3: Družice Cassini a Stardust.

Výhodou těchto projektů je, že poskytují informaci s jakými tvary a rozměry prachových zrn se můžeme v kosmickém prostoru setkat. Jejich nevýhodou (nebudeme-li brát v úvahu jejich finanční náročnost) je, že v případě nabíjecích procesů prachových zrn měří jejich celkovou bilanci. Proto se od 80. let začal provádět výzkum

¹ <http://saturn.jpl.nasa.gov>

² <http://stardust.jpl.nasa.gov>



Obr. 1.4: Saturnovy prstence, prach na Měsíci.

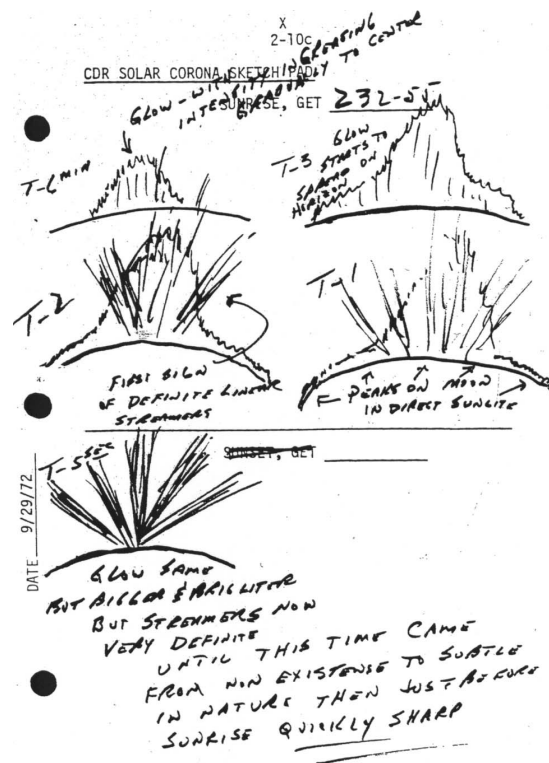
prachových i v laboratorních podmínkách [Arnold and Hessel, 1985]. V laboratorních podmínkách je možné studovat nabíjecí procesy odděleně.

Pro procesy související s nabíjením jednotlivých prachových zrn elektrony a ionty byla v roce 1993 v Max-Planck Institut für Kernphysik sestavena měřicí aparatura [Čermák, 1994], která je v současné době dále rozvíjena na KFPP MFF. Měření na této aparatuře bylo dosaženo přínosných výsledků týkajících se povrchového potenciálu nabitých částic Čermák *et al.* [1995]. Aparatura také umožnila studovat nabíjecí procesy v závislosti na použitém materiálu prachového zrna (především skla, zlata a uhlíku) [Pavlů *et al.*, 2008]. V souvislosti s tím byl zkoumán proces sekundární elektronové emise [Němeček *et al.*, 2002], která závisí na materiálu použitého prachového zrna, jeho velikosti a kinetické energii primárních elektronů, které ionizují prachové zrno a produkují tak sekundární elektrony. Přehledně byly výsledky dosažené měřeními různých typů materiálů (kovových i dielektrických) představeny v přehledových pracích [Pavlů *et al.*, 2008].

O fotoelektronové emisi z prachových zrn je známo, že je dominantním procesem pro ohřev mezihvězdných mračen neutrálního plynu a také se věří, že hraje důležitou roli v dynamické evoluci mezihvězdné hmoty [Draine, 1978]. Proces fotoelektronové emise se také ukazuje být dominantním nabíjecím procesem na osvětlené straně povrchu Měsíce. Důsledkem rozdílné bilance nabíjení prachových zrn na osvětlené straně (fotoemisí) a neosvětlené straně Měsíce (elektrony v důsledku interakce s lokálním plazmatem) je levitace a pohyb prachu po měsíčním povrchu, viz mise Apollo [Pelizzari and Criswell, 1978]. Pro vysvětlení tohoto jevu vznikla řada teoretických modelů, z nichž pouze některé z nich vysvětlují levitaci prachových zrn do několika set kilometrových výšek [Stubbs *et al.*, 2006].

Pro zhodnocení náboje a rovnovážného povrchového potenciálu prachových zrn různých astrofyzikálních objektů vzniklých v důsledku fotoelektronové emise

je důležité znát fotoelektronový výtěžek, který je definovaný jako počet emitovaných fotoelektronů připadajících na jeden absorbovaný foton. Ukazuje se, že správné teoretické modely pro výpočet tohoto výtěžku pro jednotlivá prachová zrna nejsou zatím příliš dostupné, proto jsou požadované informace získávány pomocí laboratorních experimentů. V práci [Abbas *et al.*, 2006] jsou uvedeny teoretické výpočty pro určení fotoelektronového výtěžku. Práce je doplněna o experimentální výsledky týkající se měření fotoelektronového výtěžku prachových zrn skla, olivínu a grafitu o poloměrech 0.09–5 μm s různým povrchovým potenciálem, která jsou vystavena působení UV záření v rozsahu vlnových délek 120–160 nm. Z provedených měření je patrná závislost velikosti fotoelektronového výtěžku na velikosti prachového zrna pro všechny tři typy měřených zrn. Výsledky měření dokazují, že hodnoty fotoelektronových výtěžků prachových zrn jsou ve srovnání s měřením objemových materiálů značně větší.



Obr. 1.5: Náčrtky „horizontálních toků“ a „streamů“ pozorovaných při východu Slunce z oběžné dráhy Měsíce astronautem E.A. Cernanem, během mise Apollo 17 [McCoy and Criswell, 1974].

Práce Sodha and Dixit [2009] se zaměřuje na odvození vztahů pro výpočet koncentrace elektronů vznikajících při polní emisi, fotoelektronové emisi a fotoelektronové polní emisi prachových zrn v plazmatu. Výsledkem je grafické srovnání různých kombinací zmíněných procesů z hlediska závislosti náboje zrna na koncentraci fotoelektronů.

V mezihvězdných mlhovinách a prostředí kvazarů je často kromě UV záření také přítomno rentgenové záření. Proto Weingartner *et al.* [2006] poskytli nový odhad fotoelektronového výtěžku neutrálních a nabitých uhlíkových a křemíkových zrn pro excitační energie fotonu převyšující 20 eV.

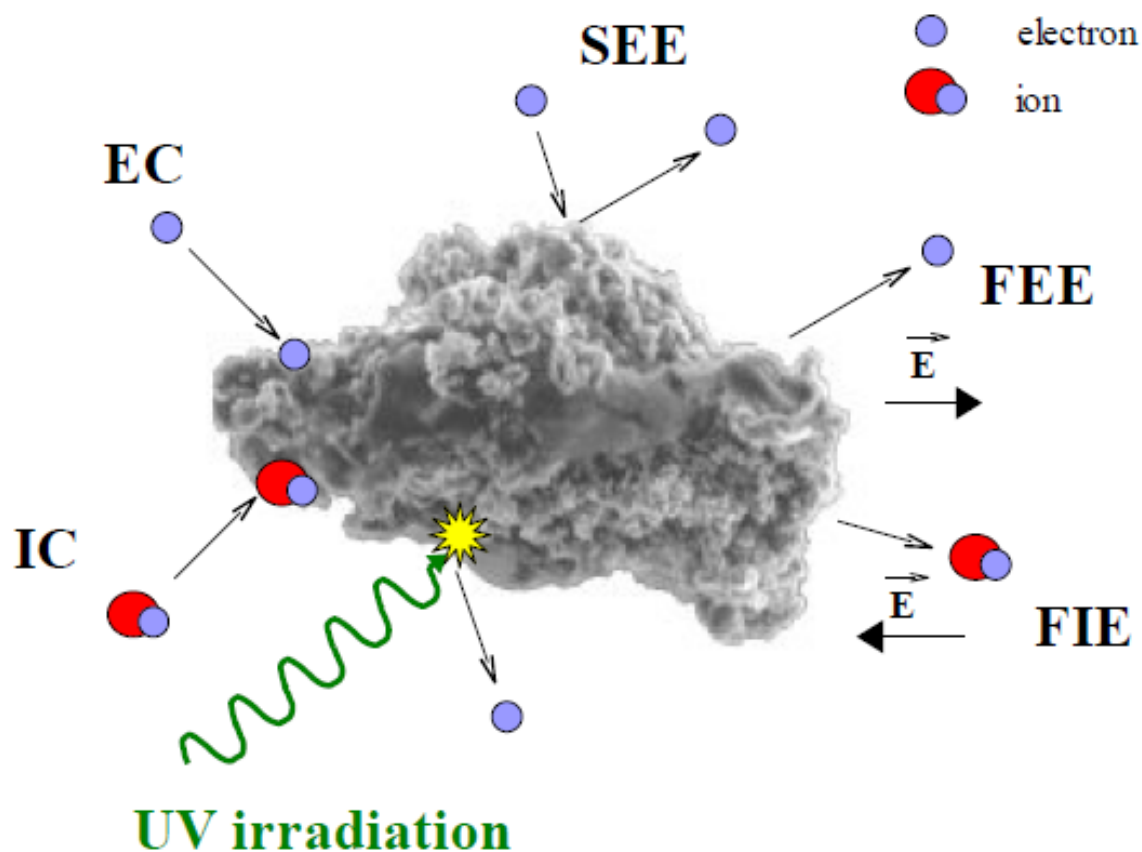
Na pracovišti KFPP MFF je v současnosti budována nová měřicí aparatura. Tato aparatura umožní i studium fotoemisního nabíjení, a tím pozorování nabíjecích procesů všech kategorií. To u původní aparatury nebylo možné v důsledku malé světlosti hyperbolické kvadrupólové pasti.

Pro účely studia fotoemisního nabíjení prachového zrna je důležité kromě znalosti velikosti fotonového toku, jehož zdrojem je na našem pracovišti diferenciálně čerpaná UV lampa, také stanovit typ a zastoupení spektrálních čar přítomných ve spektru generovaném UV lampou.

2 NABÍJECÍ PROCESY

Jedná se o procesy vedoucí ke změně náboje prachového zrna. Vlivem toku dopadajících částic na prachové zrno dochází k jeho nabíjení. Podle typu těchto částic lze nabíjecí procesy rozdělit do tří skupin:

- A) **nabíjení elektrony** – elektronový záchyt, sekundární elektron-elektronová emise, elektronová polní emise
- B) **nabíjení ionty** – iontový záchyt, iontová polní emise
- C) **fotoemisní nabíjení**



Obr. 2.1: Ilustrace k nabíjecím procesům (EC – electron capture, SEE – secondary electron emission, FEE – field electron emission, IC – ion capture, FIE – field ion emission).

2.1 Nabíjení elektrony

2.1.1 Elektronový záchyt (EC)

Má-li dopadající elektron na povrch prachového zrna malou energii (koeficient sekundární emise je menší než jedna) dochází k jeho záchytu. Typickým představitelem tohoto procesu je nízkoteplotní plazma, kde prachová zrna zachytávají nízkoenergetické elektrony a tím se nabíjí na plovoucí potenciál [Draine and Salpeter, 1979]. Pro určení tohoto potenciálu je možné použít teoretických modelů, které byly vypracovány pro diagnostiku plazmatu *Langmuirovou sondou*.

2.1.2 Sekundární elektron-elektronová emise (SEE)

Jevem sekundární elektronové emise nazýváme takový jev, při kterém jsou emitovány elektrony z pevné látky, která je bombardována primárními elektrony. Primární elektrony dopadají na prachové zrno a mohou ztratit energii i při interakci s atomy pevné látky, ze kterých je prachové zrno složeno. Při interakci s látkou může dojít k několika jevům:

a) *elastický (pružný) rozptyl*

– dopadající elektrony jsou elasticky rozptýleny a vystupují z látky bez ztráty energie

b) *neelastický (nepružný) rozptyl*

– elektrony jsou neelasticky rozptýleny a se sníženou energií vystupují z látky

c) *záchyt elektronu* – elektrony ztratí v látce tolik energie, že zůstanou pod povrchem látky

Nebo může docházet ke vzniku *pravých sekundárních elektronů*. Energie dopadajících elektronů předaná látce může být dodána vázaným elektronům v pevné látce. Tyto elektrony mají tolik energie, aby překonaly potenciálovou bariéru na povrchu a mohly opustit pevnou látku. Takovýmto způsobem uvolněným elektronům se říká *pravé sekundární elektrony*.

Proces sekundární elektronové emise je možné charakterizovat výtěžkem (koeficientem) SEE σ .

$$\sigma = \delta + \eta \quad (2.1)$$

δ – *koeficient pravé sekundární emise* η – *koeficient rozptýlených elektronů*

σ – *koeficient celkové sekundární emise*

Koeficienty (δ, η, σ) jsou postupně definovány jako poměr proudu pravých sekundárních elektronů, rozptýlených elektronů (pružně i nepružně) a všech elektronů

odcházejících ze vzorku ku proudu primárních elektronů.

2.1.3 Elektronová polní emise (FEE)

Elektronová polní emise byla poprvé experimentálně pozorována již v roce 1897. V roce 1923 poskytl Schottky jednoduché, avšak z pohledu dnešní doby nesprávné vysvětlení tohoto jevu. Jeho teorie byla založená na snížení povrchové potenciální bariéry silami zrcadlení. Tato teorie však předpovídala polní emisi pro pole mnohonásobně větší než byla ve skutečnosti pozorována. Teprve kvantově-mechanickým výpočtem bylo možné provést konzistentní popis tohoto jevu pro kovy. Na rozdíl od fotoemise či termoemise, kdy dochází k uvolnění elektronů z materiálu dodáním potřebné energie na překonání povrchové potenciální bariéry, je v případě polní emise, kdy je prachové zrno vystaveno silným elektrickým polím (řádově 10^8 V/m), je emise elektronů způsobena přechodem (tunelováním) elektronů přes potenciálovou bariéru, která je výrazně deformována vnějším silným el. polem. Proto je tento proces považován za čistě kvantový jev, který nemá klasickou analogii. Povrchová potenciálová bariéra kovu je snížena vlivem vnějšího el. pole velikosti $|\mathbf{E}(x)|$ o člen $-e|\mathbf{E}(x)|x$ v místě x od povrchu kovu. Tvar potenciálové bariéry je ovlivněn silami zrcadlení $-e^2/4x$. Celkový vztah pro potenciálovou bariéru u povrchu kovu má tvar:

$$V(x) = -\frac{e^2}{4x} - e|\mathbf{E}(x)|x \quad (2.2)$$

$V(x)$ – potenciálová bariéra

x – vzdálenost od povrchu kovu

e – elementární náboj

$|\mathbf{E}(x)|$ – vel. intenz. el. pole v x

2.2 Nabíjení ionty

2.2.1 Iontový záchyt (IC)

Iontový záchyt je analogickým procesem k záchytu elektronů. K záchytu iontů může dojít přímo na povrchu, nebo v objemu materiálu, mluvíme pak o *iontové implantaci*. O tom, zda dojde k záchytu iontů na povrchu nebo jejich implantaci pod povrch rozhoduje především energie dopadajících iontů a potenciál povrchu.

2.2.2 Iontová polní emise (FIE)

Pojmem iontové polní emise se rozumí hned několik procesů, které jsou však fyzikálně odlišné:

- a) *polní ionizace (field ionization)*
- b) *polní desorpce (field desorption)*
- c) *polní vypařování (field evaporation)*

K polní ionizaci dochází v důsledku silného elektrického pole, které způsobí polarizaci molekul zbytkové atmosféry. Elektron protuneluje z polarizované molekuly na kladně nabitý povrch zrna a vzniklý kladný iont (vzniklý z polarizované molekuly) je elektrickým polem zrna odpuzován pryč a odnáší tak kladný náboj zrna. Tento jev závisí na mnoha faktorech – kromě intenzity pole také na tlaku, složení zbytkové atmosféry a hlavně na materiálu zrna.

Polní desorpce je založena na principu polní ionizace desorbujícího atomu (molekuly) z povrchu prachového zrna, kdy vzdálenost ionizované molekuly překročí kritickou vzdálenost od povrchu vzorku.

V případě polního vypařování se jedná o odstraňování materiálu vzorku v podobě iontů opouštějících vzorek. Jev polního vypařování se zdá na první pohled, jako málo pravděpodobný, ale může hrát významnou roli při odprašování prachových částic intenzivními svazky iontů, kdy se oba jevy, jak polní desorpce, tak odprašování ionty, spojí.

2.3 Fotoemisní nabíjení

Jedná se o dominantní proces nabíjení prachových zrn ve vesmíru. Proces je založen na principu vnějšího fotoefektu, který byl poprvé experimentálně zkoumán v roce 1886 Heinrichem Hertzem a vysvětlen teoreticky Albertem Einsteinem v roce 1905. Kvantum záření o energii $h\nu$ může z materiálu, ze kterého je prachové zrno složeno, vyrazit elektron (fotoelektron), jestliže energie dopadajícího záření je větší než výstupní práce ϕ materiálu prachového zrna. Fotoelektrony mohou pocházet z:

- a) *povrchu materiálu (povrchový jev)*
- b) *objemu materiálu (objemový jev)*
- c) *cizích atomů adsorbovaných na povrchu*

Vlastnosti povrchu se mohou výrazně lišit od objemových – výstupní práce pro povrchové stavy a adsorbované atomy může být výrazně nižší. Maximální kinetickou energii, kterou může fotoelektron uvolněný z povrchu získat je dána

Einsteinovým vztahem:

$$E_k^{max} = h\nu - W \quad (2.3)$$

ν – frekvence dopadajícího záření W – výstupní práce materiálu zrna

V případě, že je fotoelektron emitován z objemu materiálu, je kinetická energie fotoelektronu snížena v důsledku jeho rozptylu v periodickém potenciálu krystalové mřížky během cesty k povrchu. Emisní proud tvořený fotoelektrony závisí pouze na intenzitě dopadajícího záření nikoliv na jeho frekvenci.

Je-li emitující povrch na potenciálu E_k^{max}/e či vyššímu, pak k emisi fotoelektronu z povrchu materiálu nedochází, neboť dojde ke zvýšení hladiny energie vakua a tedy i potenciálové bariéry, kterou musí emitovaný fotoelektron překonat. Pro případ prachových zrn je vnější pole vytvořeno vlastním nábojem prachového zrna. Izolované prachové zrno ovlivňované fotoemisí se tedy může nabít maximálně na povrchový potenciál:

$$\phi = \frac{E_k^{max}}{e} = \frac{h\nu - W}{e} = \frac{1}{e} \left(\frac{hc}{\lambda} - W \right) \quad (2.4)$$

ν – frekvence použitého světla

ϕ – povrchový potenciál zrna

λ – vlnová délka světla

h – Planckova konstanta

e – elementární náboj

W – výstupní práce zrna

3 TEORIE FOTOEMISE

Fotoemisi fotoelektronů z látky je možné popsat na základě *Fowler-Dubridgeovy teorie* [Fowler, 1931]. Tato teorie se zabývá emisí elektronů kolem prahu fotoemise. Model lze rozdělit do tří částí (je tříступňový):

- a) **interakce foton-elektron** – závislost účinných průřezů interakce foton-elektron
- b) **transport elektronu na povrch**
- c) **přechod povrchové bariéry**

Pro hustotu fotoemisního proudu platí

$$i_f = e \int_{E_a}^{\infty} N'(E) P(E) dE , \quad (3.1)$$

kde $P(E)$ udává pravděpodobnost překonání povrchové bariéry a $N'(E)$ je hustota stavů elektronů při dopadu záření. Teorie fotoemise zavádí několik výchozích předpokladů:

- a) do příchodu fotonu platí klasická Sommerfeldova teorie
- b) interakce foton-elektron není funkcí energie
- c) koeficient $\alpha \in (0, 1)$ – udává kolikrát je hustota stavů vzbuzeného elektronového plynu menší než hustota stavů danou Sommerfeldovou teorií
- d) propustnost povrchové bariéry je blízka jedné: $P(E) \approx 1$

Využitím těchto předpokladů můžeme vztah pro hustotu emisního proudu přepsat

$$i_f = e\alpha \int_{E_a - h\nu}^{\infty} N(E) dE , \quad (3.2)$$

v němž $N(E)$ je nyní hustota energiových stavů daná Sommerfeldovou teorií. Dosazením výrazu pro hustotu energiových stavů $N(E)$ ze Sommerfeldovy teorie (A.1) můžeme proudovou hustotu dále upravit

$$\begin{aligned} i_f &= e\alpha \frac{4\pi m k_B T}{h^3} \int_{E_a - h\nu}^{\infty} \ln \left(1 + \exp \frac{E_F - E}{k_B T} \right) dE \\ &= -e\alpha \frac{4\pi m k_B^2 T^2}{h^3} \int_{\frac{h(\nu - \nu_0)}{k_B T}}^{-\infty} \ln (1 + e^t) dt = e\alpha \frac{4\pi m k_B^2 T^2}{h^3} \int_{-\infty}^x \ln (1 + e^t) dt , \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde jsme použili substituci $t = \frac{E_F - E}{k_B T}$ a označení $X = \text{ozn. } \frac{h(\nu - \nu_0)}{k_B T}$. Zavedením Sommerfeldovy konstanty $A_0 = \frac{4\pi m k_B^2 T^2 e}{h^3}$ můžeme výraz pro hustotu fotoemisního proudu přepsat do kompaktnějšího tvaru

$$\boxed{i_f = A_0 \alpha T^2 f(X)}, \quad (3.4)$$

kde f-čce $f(X)$ má tvar (rozvoj logaritmu do řady a integrace člen po členu)

$$f(X) = e^X - \frac{e^{2X}}{2^2} + \frac{e^{3X}}{3^2} - \dots ; X \leq 0, \nu \leq \nu_0 \quad (3.5)$$

$$f(X) = \frac{X^2}{2} + \frac{\pi^2}{6} - e^{-X} + \frac{e^{-2X}}{2^2} - \frac{e^{-3X}}{3^2} + \dots ; X > 0, \nu > \nu_0 \quad (3.6)$$

Tento výraz platí poměrně dobře pro kovy.

3.1 Fotoemise z prachového zrna

3.1.1 Povrchový potenciál

Uvažujme pro jednoduchost izolované sférické prachové zrno o poloměru a umístěné ve vakuu osvětlené monochromatickým světlem λ . Takovéto prachové zrno může získat vlivem nabíjení v důsledku fotoelektrického jevu maximální povrchový potenciál (2.4).

Z elektrostatiky víme, že existuje úměra mezi potenciálem a nábojem objektu

$$Q = C\phi . \quad (3.7)$$

Touto úměrou je kapacita C daného objektu. V našem případě je tímto objektem koule. Pro kapacitu koule platí

$$C = 4\pi\epsilon_0 a , \quad (3.8)$$

kde a je zmíněný poloměr prachového zrna.

Dosazením (3.8) a (2.4) do vztahu (3.7) je možné získat výraz pro maximální náboj prachového zrna

$$\boxed{Q = \frac{4\pi\epsilon_0 a}{e} \left(\frac{hc}{\lambda} - W \right)} . \quad (3.9)$$

Z tohoto vztahu je patrné, že velikost náboje je přímo úměrná velikosti prachového zrna a a nepřímo úměrná vlnové délce dopadajícího záření. Také je vidět, že prachové zrno se bude nabíjet kladně (fotoemise nastane, pokud energie záření

bude větší než výstupní práce zrna – znaménko náboje je kladné). Podělením výrazu (3.9) hmotností zrna m a zavedením měrné kapacity C_m

$$C_m = \frac{C}{m}, \quad (3.10)$$

můžeme získat praktičtější výraz

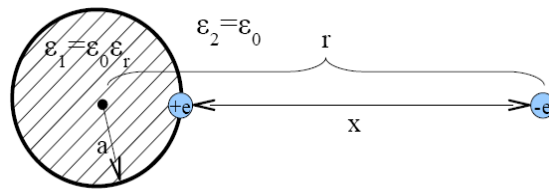
$$\boxed{\frac{Q}{m} = \frac{C_m}{e} (E - W)}, \quad (3.11)$$

kde E je energie dopadajícího záření. Zdálo by se, že vztah (3.9) případně (3.11) poskytuje maximální možnou informaci o tom, jak bude fotoemisní nabíjení probíhat. Vztah však neříká nic o tom, za jakou dobu zrno takovýto maximální náboj získá. Dále z tohoto vztahu není možné určit, jaké bude energetické rozdělení elektronů vyletujících z prachového zrna. Z (3.9) není jasné, jestli výstupní práce W nezávisí na rozměru zrna. Později si ukážeme na jednoduchých modelech, že výstupní práce skutečně na rozměru zrna závisí. Za tímto účelem je nutné zavést další parametry charakterizující fotoemisní nabíjení prachových zrn – *fotoelektronové výtěžky*. Také je nutné se zabývat modely popisující závislost výstupní práce prachových zrn na jejich rozměru.

3.1.2 Výstupní práce

Elektrostatický model výstupní práce dielektrické koule

Uvažujme stejně jako Gallo and Lama [1976] dielektrickou kouli o poloměru a a relativní permitivitě ϵ_r umístěnou ve vakuu (Obr.3.1.2). Budeme vyšetřovat,



Obr. 3.1: Dielektrická koule ve vakuu

jakou energii potřebujeme na vytržení elektronu z povrchu této koule a jeho odnesení do ∞ . Tuto energii určíme ze síly, která bude na takovýto elektron působit. Síla bude složena za tři komponent (označme je F_1 , F_2 a F_3)

$$F = F_1 + F_2 + F_3. \quad (3.12)$$

Síla F_1 bude dána Coulombickou interakcí mezi vytrženým elektronem a kladnou dírou, která po tomto elektronu vznikne. Pro tuto sílu platí

$$F_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(r_0 - a)^2}, \quad (3.13)$$

kde r_0 je počáteční vzdálenost od středu sféry. Síla F_2 představuje silové působení na vytržený elektron v důsledku polarizace dielektrické sféry od kladné díry. Síla F_3 pak silové působení v důsledku polarizace sféry od vytrženého elektronu. Tyto síly určíme na základě potenciálu vně dielektrické sféry, v jejíž přítomnosti je náboj q viz.(A.7) (zajímá nás jen potenciál odpovídající polarizaci dielektrické koule, potenciál od vnějšího náboje je již zahrnut v síle F_1)

$$\varphi = \frac{q}{4\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n\epsilon_1 + (n+1)\epsilon_2} \frac{a^{2n+1}}{\xi^{n+1}} \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} \quad (3.14)$$

Pro radiální intenzitu el. pole v bodě r platí

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{n\epsilon_1 + (n+1)\epsilon_2} \frac{a^{2n+1}}{\xi^{n+1}} \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+2}} \quad (3.15)$$

Energie

$$E = \int_{r_0}^{\infty} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left(\frac{e^2}{r_0 - a} \right) - e^2(\epsilon_r - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1 + n(\epsilon_r + 1)} \frac{a^n}{r_0^{n+1}} + \frac{1}{2} e^2(\epsilon_r - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1 + n(\epsilon_r + 1)} \frac{a^{2n+1}}{r_0^{2n+2}} \right\} \quad (3.16)$$

Budeme-li uvažovat dokonale polarizovatelnou dielektrickou kouli, tj. kouli jejíž relativní permitivita $\epsilon_r \gg 1$, bude zřejmě $n(\epsilon_r + 1) \gg 1$. Za tohoto předpokladu je možné řady v (3.16) zjednodušit

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nZ^n}{1 + n(\epsilon_r + 1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nZ^n}{1 + n(\epsilon_r + 1)} \approx \\ &\approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nZ^n}{n(\epsilon_r + 1)} = \frac{1}{\epsilon_r + 1} \sum_{n=1}^{\infty} Z^n = \frac{1}{\epsilon_r + 1} \left(\frac{Z}{1 - Z} \right), \end{aligned}$$

kde Z značí členy $\frac{a^n}{r_0^n}$ nebo $\frac{a^{2n}}{r_0^{2n}}$. Využitím této aproximace je možné výraz (3.16) pro výstupní práci dielektrické koule relativní permitivity ϵ_r přepsat do tvaru

$$E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 x_0} \left\{ 1 - \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right) \left(\frac{a}{a + x_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right) \left[\frac{a^3}{(2a + x_0)(a + x_0)^2} \right] \right\}. \quad (3.17)$$

Uděláme-li limitu (3.17) pro $a \rightarrow \infty$ dostaneme výstupní práci pro objemový materiál

$$W = \lim_{a \rightarrow \infty} E(a) = \left(\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x_0} \right) \left(\frac{\epsilon_r + 7}{\epsilon_r + 1} \right). \quad (3.18)$$

3.1.3 Fotoelektronové výtěžky

Jak už bylo zmíněno vztah (3.9) nic neříká o tom, za jakou dobu povrchový potenciál prachové zrno získá. Proto vznikla řada teoretických modelů, které se snaží za pomoci fotoelektronových výtěžků fotoemisní nabíjení lépe charakterizovat. Dva z nich si v přehledu popíšeme.

Watsonův model [Watson, 1973]

Tento model vychází z představ o fotoemisi pro objemový materiál. Pravděpodobnost, že bude elektron emitován z povrchu po absorpci fotonu ve vzdálenosti x pod povrchem je $C \exp(-x/l_e)$. C je normovací konstanta a l_e úniková délka elektronu. Model je velmi idealizovaný neboť ignoruje zakřivení povrchu. Předpokládá se, že pravděpodobnost absorpce světla v rovinné desce materiálu o indexu lomu m ve vzdálenosti x klesá jako $\exp(-x/l_a)/l_a$, kde l_a je útlumová délka fotonu (3.26). Laboratorním měřením výtěžku y a l_e může být určena konstanta $C = y(l_e + l_a)/l_e$. Fotoelektronový výtěžek pro jiné geometrie povrchu y' je možné určit integrací přes objem absorbujícího materiálu V

$$y' = \frac{\int C \exp(-\frac{x}{l_e})(\nabla \cdot \mathbf{S}) dV}{\int (\nabla \cdot \mathbf{S}) dV}, \quad (3.19)$$

kde \mathbf{S} je Poyntingův vektor a jeho divergence $(-\nabla \cdot \mathbf{S})$ představuje absorbované světlo v jednotkovém objemu materiálu. V případě, že nebudeme uvažovat magnetické opticky anizotropní prostředí přejde fototelektronový výtěžek (3.19) (využitím Poyntingova teorému) do tvaru

$$y' = \frac{\int C \exp(-\frac{x}{l_e})(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}) dV}{\int (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}) dV}. \quad (3.20)$$

Elektrické pole \mathbf{E} uvnitř sféry pro dopadající rovinnou elektromagnetickou vlnu je možné určit z Miovy teorie rozptylu. Výsledky modelu vypočtené pro tři hodnoty indexu lomu m (silně absorbující materiály $m = 2.5 - 1.0i$, $m = 1.4 - 0.8i$ a slabě absorbující materiály $m = 0.710 - 0.018i$) jsou uvedeny v tabulce (3.1.3).

		$m = 1.4 - 0.81i$		$2.5 - 1.0i$		$0.710 - 0.018i$	
$a(\text{\AA})$	$\lambda(\text{\AA})$	$l_e(\text{\AA}) = 10$	100	10	100	10	100
Photoemission enhancement factor (y'/y)							
100	500	1.61	1.21	1.23	1.11	57.9	18.5
	1000	2.70	1.58	2.14	1.42	111	35.9
	1250	3.31	1.78	2.64	1.58	137	44.6
	2000	5.14	2.37	4.14	2.05		
	3000	7.59	3.15	6.10	2.68		
250	500	1.23	1.09	1.07	1.03	28.9	14.3
	1000	1.51	1.27	1.17	1.12	54.5	27.7
	1250	1.68	1.38	1.24	1.18	66.2	34.7
	2000	2.35	1.78	1.78	1.51		
	3000	3.42	2.36	2.69	1.99		
500	500	1.15	1.06	1.05	1.02	17.2	10.5
	1000	1.25	1.14	1.08	1.04	30.6	19.1
	1250	1.31	1.19	1.09	1.06	37.7	24.8
	2000	1.53	1.37	1.18	1.15		
	3000	1.90	1.67	1.37	1.34		

Tab. 3.1: Fotoemisní výtěžky malé sféry o poloměru a vztažené k velké rovinné desce pro vlnové délky λ .

Weingartner-Dreinův model [Weingartner and Draine, 2001]

Tento model bývá též zkráceně označován jako **WD01b** model. Jednou z několika věcí, kterými se tento model zabývá je fotoelektronová emise z valenčního pásu vyvolaná dopadem nízkenergetických fotonů. Podle tohoto modelu je rate fotoelektronové emise závislý na fotoelektronovém výtažku Y a na absorpčním účinném průřezu prachové částice $Q_{abs}\pi a^2$, kde a je poloměr prachové částice a Q_{abs} je koeficient absorpce, který lze stanovit na základě Mieovy teorie rozptylu. Minimální energie fotonu $h\nu_{pet}$ potřebná pro fotoemisi z valenčního pásu je dána

$$h\nu_{pet}(Z, a) = \begin{cases} IP_v(Z, a) & ; Z \geq -1 \\ IP_v(Z, a) + E_{min}(Z, a) & ; Z < -1, \end{cases} \quad (3.21)$$

kde IP_v je *ionizační potenciál*, pro který dle [Weingartner and Draine, 2001] platí poloempirický vztah

$$IP_v(Z, a) = W + \left(Z + \frac{1}{2}\right) \frac{e^2}{a} + (Z + 2) \frac{e^2}{a} \frac{0.3\text{\AA}}{a}. \quad (3.22)$$

První dva členy odvodil už Brus [1983]. Pro případ nevodivých materiálů je potřeba do druhého členu dle [Makov *et al.*, 1988] zavést korekční člen $\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}$, kde ϵ_r je relativní permitivita nevodivého materiálu. Poslední člen (empirický) představuje kvantový posuv energetických hladin pro velmi malá prachová zrna. Model se mimo jiné zabývá stanovením fotoelektronového výtěžku $Y(h\nu, Z, a)$ zrna s nábojem Ze

$$Y(h\nu, Z, a) = y_2(h\nu, Z, a) \min[y_0(\theta)y_1(a, h\nu), 1], \quad (3.23)$$

kde funkce θ má tvar

$$\theta = \begin{cases} h\nu - h\nu_{pet} + \frac{(Z+1)e^2}{a} & ; Z \geq 0 \\ h\nu - h\nu_{pet} & ; Z < 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Funkce

$$y_1(a, h\nu) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 2 - 2\exp(-\alpha)}{\beta^2 - 2\beta + 2 - 2\exp(-\beta)} \quad (3.25)$$

má význam geometrického výtěžku. Odhad této funkce našel Draine roku 1978, reprodukcí výsledků Watson [1973], které jsou založeny na Mieově teorii rozptylu. Parametry vystupující ve vztahu (3.25) mají následující význam

$$\alpha = \frac{a}{l_a} + \frac{a}{l_e} \\ \beta = \frac{a}{l_a},$$

kde l_e je úniková délka (electron escape length) a l_a útlumová délka fotonu (photon attenuation length). Útlumová délka fotonu může být vypočtena na základě

$$l_a = \frac{\lambda}{4\pi \text{Im}(m)}, \quad (3.26)$$

kde λ je vlnová délka světla ve vakuu a m je komplexní index lomu.

Funkce $y_2(a, h\nu, Z)$ vyskytující se v (3.23) souvisí s pravděpodobností, že elektron překoná povrchovou bariéru

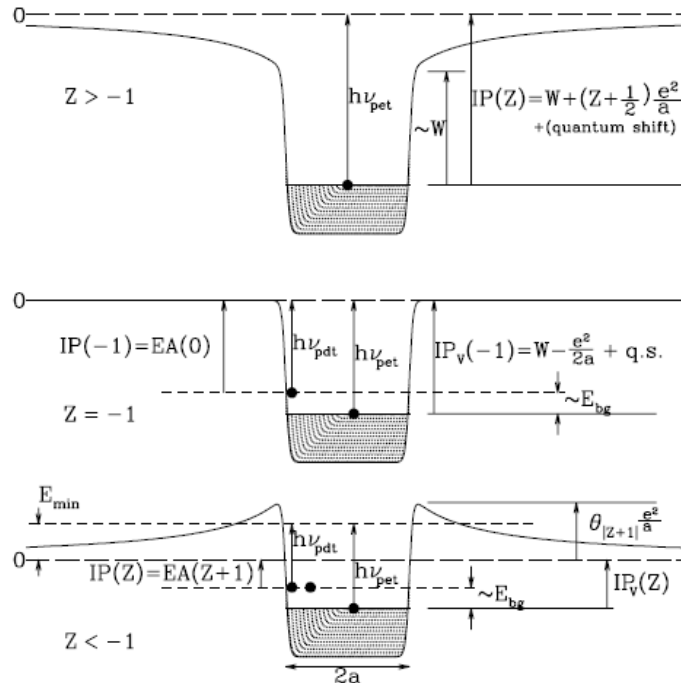
$$y_2(h\nu, Z, a) = \begin{cases} \int_0^{E_{high}} f_E^0(E) dE = \frac{E_{high}^2(E_{high}-3E_{low})}{(E_{high}-E_{low})^3} & ; Z \geq 0 \\ 1 & ; Z < 0, \end{cases} \quad (3.27)$$

kde se za energetické rozdělení elektronů bere parabolické energetické rozdělení

$$f_E^0(E) = \frac{6(E - E_{low})(E_{high} - E)}{(E_{high} - E_{low})^3} ; E_{low} \leq E \leq E_{high}. \quad (3.28)$$

s energiemi E_{low} a E_{high} ve tvaru

$$Z \geq 0 \begin{cases} E_{low} = -(Z+1)\frac{e^2}{a} \\ E_{high} = h\nu - h\nu_{pet} \end{cases}, \quad Z < 0 \begin{cases} E_{low} = E_{min} \\ E_{high} = E_{min} + h\nu - h\nu_{pet} \end{cases}.$$



Obr. 3.2: Fotoemise z valenčního pásu (převzato z [Weingartner and Draine, 2001]).

4 TEORIE ROZPTYLU

4.1 Mieův rozptyl

Mieovým rozptylem je nazýváno teoretické řešení rozptylu elektromagnetického záření na částicích ideálního sférického tvaru, které vypracoval počátkem 20. století německý fyzik G.Mie. Celý proces rozptylu elektromagnetického vlnění na uvažované rozptylující částici sférického tvaru si lze představit tak, že tato částice se pod dopadem elektromagnetického vlnění rozkmitá a sama se stane zdrojem elektromagnetického záření, které lze (jak uvidíme dále) vyjádřit pomocí superpozice vyzařování elektrického a magnetického dipólu ($n = 1$), kvadrupólu ($n = 2$) a vyšších multipólů ($n > 2$) v souladu s větou o multipólovém rozvoji.

4.1.1 Maxwellovy rovnice ve sférických souřadnicích

Maxwellovy rovnice

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (4.4)$$

Uvažujme harmonicky měnící se pole reprezentované komplexní zápisem

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \widetilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \\ \mathbf{B} &= \widetilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

kde $\widetilde{\mathbf{E}}_0, \widetilde{\mathbf{B}}_0$ jsou *komplexní amplitudy* polí a \mathbf{k} je vlnový vektor. Využitím materiálových vztahů

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

je možné „rotační Maxwellovy rovnice“ (4.1) a (4.2) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} + i\varepsilon\omega \mathbf{E} = (\sigma + i\varepsilon\omega) \mathbf{E} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -i\omega\mu \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Jelikož se budeme zabývat rozptylem na částicích sférického tvaru přepíšeme vzhledem ke kulové symetrii problému Maxwellovy rovnice do sférických souřadnic. Využitím znalosti tvaru operátoru rotace ve sférických souřadnicích (A.66) z

předchozích rovnic dostaneme

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (H_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi} \right) = E_r (\sigma + i\varepsilon\omega) \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) \right) = E_\theta (\sigma + i\varepsilon\omega) \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) = E_\varphi (\sigma + i\varepsilon\omega) \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (E_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial E_\theta}{\varphi} \right) = -i\omega\mu H_r \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right) = -i\omega\mu H_\theta \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) = -i\omega\mu H_\varphi \quad (4.13)$$

4.1.2 Hertz-Debyeovy potenciály

Existuje několik možností [Mie, 1908; Debye, 1909; Bednář, 1980], jak od těchto rovnic dospět k rovnicím pro Hertz-Debyeovy potenciály, které pole obsažené v rovnicích svazují dohromady. My se vydáme nejkratší cestou a budeme postupovat dle práce Debye [1909]. Debye si dal jako „Ansatz“, že úhlové složky el. pole (ve sférických souřadnicích) lze vyjádřit jako gradient (A.64) skalární funkce U

$$\begin{aligned} E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Později uvidíme, že tento předpoklad má své opodstatnění. Tuto funkci můžeme přepsat do tvaru

$$U = \frac{\partial (r \Pi_e)}{\partial r} , \quad (4.15)$$

kde funkce Π_e je *Hertz-Debyeův skalární potenciál* pro elektrické pole. Dosazením tohoto „Ansatzu“ do rovnice (4.11) pro magnetické pole dostaneme

$$\boxed{H_r = 0} . \quad (4.16)$$

Vidíme, že radiální složka intenzity mag. pole je nulová. Výše uvedený předpoklad má tedy význam kalibrační podmínky pro *transverzálně magnetickou vlnu* (TM). Dosazením úhlových komponent el. pole do zbývajících rovnic pro magnetické pole (4.12) a (4.13) můžeme integrací vzniklých výrazů dle r dospět k rovnicím pro

úhlové složky intenzity mag. pole

$$\begin{aligned} H_\varphi &= -\frac{\partial \Pi_e}{\partial \theta} (\sigma + i\varepsilon\omega) \\ H_\theta &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \varphi} (\sigma + i\varepsilon\omega) . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Na základě těchto rovnic z (4.8) získáme tvar radiální komponenty el. pole transverzálně magnetické vlny

$$E_r = -\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Pi_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial \varphi^2} \right) . \quad (4.18)$$

Dosazením příslušných vyjádření komponent polí do rovnice (4.12) lze postupnými úpravami obdržet

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \Pi_e)}{\partial \varphi \partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Pi_e}{\partial \theta} \right) = i\omega\mu \frac{\partial \Pi_e}{\partial \varphi} (\sigma + i\varepsilon\omega) . \quad (4.19)$$

Integrací dle φ a využitím tvaru Laplaceova operátoru ve sférických souřadnicích (A.67) můžeme rovnici přepsat

$$\Delta \Pi_e + (\omega^2 \mu \varepsilon - i\sigma \mu \omega) \Pi_e = 0. \quad (4.20)$$

Zavedením komplexního vlnového čísla k

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - i\sigma \mu \omega \quad (4.21)$$

je možné rovnici pro skalární Hertz-Debyeův potenciál el. pole (4.20) přepsat do tvaru *Helmholtzovy rovnice*

$$\boxed{\Delta \Pi_e + k^2 \Pi_e = 0} . \quad (4.22)$$

Řešení rovnice je možné najít separací proměnných (A.2). Celý výše provedený postup lze udělat i pro *transverzálně elektrickou vlnu* (TE). Pro úhlové části intenzity magnetického pole můžeme psát

$$\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 (r \Pi_m)}{\partial \varphi \partial r} \\ H_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \Pi_m)}{\partial \theta \partial r} , \end{aligned} \quad (4.23)$$

kde Π_m je Hertz-Debyeův skalární potenciál pro magnetické pole. Dosazením těchto rovnic do (4.8) ihned vidíme, že

$$\boxed{E_r = 0} , \quad (4.24)$$

tj. jedná se skutečně o transverzálně elektrickou vlnu. S využitím (4.12) a (4.13) dostaneme tvar úhlové složky el. pole

$$\begin{aligned} E_\varphi &= i\mu\omega \frac{\partial \Pi_m}{\partial \theta} \\ E_\theta &= -i\mu\omega \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Pi_m}{\partial \varphi} . \end{aligned} \quad (4.25)$$

Na základě těchto složek můžeme dle (4.11) určit radiální komponentu intenzity mag. pole

$$H_r = -\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Pi_m}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial \varphi^2} \right) . \quad (4.26)$$

Dosazením vyjádřených polí do rovnice (4.10) a integrací této rovnice dle θ je možné získat *Helmholtzovu rovnici* pro Hertz-Debyeův skalární potenciál magnetického pole

$$\boxed{\Delta \Pi_m + k^2 \Pi_m = 0} . \quad (4.27)$$

Získané tvary polí pro transverzálně magnetickou vlnu (TM) a transverzálně elektrickou vlnu (TE) superponujeme a získáme tak pole

$$E_r = -\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Pi_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial \varphi^2} \right) \quad (4.28)$$

$$E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \Pi_e)}{\partial \varphi \partial r} - i\mu\omega \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Pi_m}{\partial \varphi} \quad (4.29)$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 (r \Pi_e)}{\partial \varphi \partial r} + i\mu\omega \frac{\partial \Pi_m}{\partial \theta} \quad (4.30)$$

$$H_r = -\frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Pi_m}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial \varphi^2} \right) \quad (4.31)$$

$$H_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \varphi} i k m^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \Pi_m)}{\partial \theta \partial r} \quad (4.32)$$

$$H_\varphi = -i k m^2 \frac{\partial \Pi_e}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 (r \Pi_m)}{\partial \varphi \partial r} , \quad (4.33)$$

kde jsme zavedli *komplexní index lomu prostředí* m

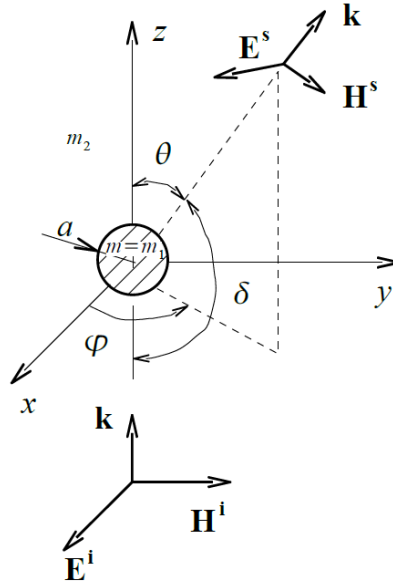
$$m^2 = \frac{(\varepsilon\omega - i\sigma)}{k} . \quad (4.34)$$

4.1.3 Řešení skalární vlnové rovnice

Obecné řešení skalární vlnové rovnice (4.22) a (4.27) ve sférických souřadnicích může být získáno jako lineární kombinace všech dílčích řešení (A.2)

$$\begin{aligned} r\Pi &= r \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \Pi_n^{(m)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [c_n j_n(kr) + d_n y_n(kr)] P_n^{(m)}(\cos \theta) [a_m \cos(m\phi) + b_m \sin(m\phi)] , \end{aligned} \quad (4.35)$$

kde a_m, b_m, c_n a d_n jsou koeficienty rozvoje, $P_n^{(m)}(\cos \theta)$ přidružené Legendrovy funkce (A.4) a $j_n(kr), y_n(kr)$ sférická Besselova a Neumannova funkce (A.3). Předpokládejme izotropní homogenní kouli s indexem lomu m o poloměru a umístěnou ve vakuu. Střed této koule ztotožníme se středem souřadnic (Obr.4.1.3) Na tuto kouli dopadá rovinná vlna, která se šíří v kladném směru osy z , vektor elektrické intenzity o amplitudě E^0 kmitá rovnoběžně s osou x . Pro velikost intenzity



Obr. 4.1: Geometrie rozptylu

tohoto pole platí

$$|\mathbf{E}^i| = |\tilde{\mathbf{E}}^0 \exp(-ikz)| = E^0 . \quad (4.36)$$

Rozvinutím (4.36) do tvaru [Stratton, 1941] získáme tvar Hertz-Debyeových potenciálů pro *incidentní vlnu*

$$\begin{aligned} r\Pi_e^i &= \frac{1}{k_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} j_n(k_2 r) P_n^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi \\ r\Pi_m^i &= \frac{i}{k_2 \kappa_2^{(2)}} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} j_n(k_2 r) P_n^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi , \end{aligned} \quad (4.37)$$

kde $P_n^1(\cos \theta)$ je přidružená Legendrova funkce prvního druhu. Funkce $y_n(k_2 r)$ byla z výrazu vynechána neboť v počátku diverguje a získané řešení by bylo nefyzikální. Potenciály vlny *uvnitř kulové částice* musí mít až na koeficienty podobný tvar jako incidentní vlna (opět ve výrazu může vystupovat jen funkce $j_n(k_2 r)$)

neboť $y_n(k_2 r)$ v počátku diverguje)

$$\begin{aligned} r\Pi_e^r &= \frac{1}{k_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} c_n j_n(k_1 r) P_n^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi \\ r\Pi_m^r &= \frac{i}{k_1 \kappa_2^{(2)}} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} d_n j_n(k_1 r) P_n^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi . \end{aligned} \quad (4.38)$$

Na druhou stranu, *rozptýlená vlna* musí být v nekonečnu konvergentní, což velmi dobře zaručí Hankelovy funkce $h_n(k_2 r)$

$$\begin{aligned} r\Pi_e^s &= -\frac{1}{k_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n h_n(k_2 r) P_n^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi \\ r\Pi_m^s &= -\frac{i}{k_2 \kappa_2^{(2)}} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n h_n(k_2 r) P_n^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi . \end{aligned} \quad (4.39)$$

Ze základních vlastností elektromagnetického pole vyplývá spojitost tečných složek intenzit. Na dané sférické ploše o poloměru a představující povrch uvažované částice v každém okamžiku musí platit

$$\begin{aligned} E_\theta^i + E_\theta^s &= E_\theta^r , \\ E_\varphi^i + E_\varphi^s &= E_\varphi^r , \\ H_\theta^i + H_\theta^s &= H_\theta^r , \\ H_\varphi^i + H_\varphi^s &= H_\varphi^r , \end{aligned} \quad (4.40)$$

kde $E_\theta, E_\varphi, H_\theta, H_\varphi$ jsou složky intenzit elektrického a magnetického pole tečné k povrchu rozptylující částice. Intenzity E^i, H^i jsou složky dopadající vlny (i-initial), E^r, H^r jsou složky vlny generované částicí a E^s, H^s jsou složky rozptýlené vlny (s-scattered). Z rovnic (4.28) až (4.33) jednoznačně vyplývá, že abychom splnili okrajové podmínky (4.40), musí být vzhledem k r spojitě následující čtyři funkce

$$m_2^2 r\Pi_e ; \quad \frac{\partial}{\partial r}(r\Pi_e) ; \quad r\Pi_m ; \quad \frac{\partial}{\partial r}(r\Pi_m) , \quad (4.41)$$

což po rozepsání dává

$$\begin{aligned} m_2^2 \{r(\Pi_e^i + \Pi_e^s)\}_{r=a} &= m_1^2 \{r\Pi_e^r\}_{r=a} , \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [r(\Pi_e^i + \Pi_e^s)] \right\}_{r=a} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r\Pi_e^r) \right\}_{r=a} , \\ \{r(\Pi_m^i + \Pi_m^s)\}_{r=a} &= \{r\Pi_m^r\}_{r=a} , \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [r(\Pi_m^i + \Pi_m^s)] \right\}_{r=a} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r\Pi_m^r) \right\}_{r=a} . \end{aligned} \quad (4.42)$$

Dosadíme-li do těchto podmínek (4.42) rozvoje potenciálu (4.37) až (4.39) získáme soustavu čtyř lineárních rovnic pro koeficienty a_n , b_n , c_n a d_n .

$$\begin{aligned} m \left[j'_n(k_2 a) - a_n h'_n(k_2 a) \right] &= c_n j'_n(k_1 a) \\ \left[j'_n(k_2 a) - b_n h'_n(k_2 a) \right] &= d_n j'_n(k_1 a) \\ j_n(k_2 a) - a_n h_n(k_2 a) &= c_n j_n(k_1 a) \\ m \left[j_n(k_2 a) - b_n h_n(k_2 a) \right] &= d_n j_n(k_1 a) . \end{aligned} \quad (4.43)$$

Nás však pouze zajímá vyjádření koeficientů a_n a b_n , neboť ty se vyskytují v rozvoji potenciálu pro rozptýlenou vlnu (4.39), kterou se budeme dále zabývat. Řešením soustavy bychom dospěli

$$a_n = \frac{j_n(\gamma) j'_n(\gamma m) - m j_n(\gamma m) j'_n(m)}{h_n(\gamma) j'_n(\gamma m) - m j_n(\gamma m) h'_n(\gamma)} \quad (4.44)$$

$$b_n = \frac{m j_n(\gamma) j'_n(\gamma m) - j_n(\gamma m) j'_n(m)}{m h_n(\gamma) j'_n(\gamma m) - j_n(\gamma m) h'_n(\gamma)} , \quad (4.45)$$

přičemž

$$\boxed{\gamma = k_2 a = \frac{2\pi a}{\lambda_2} = \frac{2\pi m_2 a}{\lambda} = \frac{2\pi a}{\lambda}} , \quad (4.46)$$

kde λ značí vlnovou délku rozptylovaného záření. V poslední rovnosti jsme uvažovali $m_2 = 1$ (rozptylující částice je ve vakuu) a tím jsme dospěli ke stejnému výrazu jako Bednář [1980]. Získali jsme formální řešení problému, neboť Hertz-Debyeovy potenciály pro rozptýlenou vlnu Π_e^s a Π_m^s jsou nyní zcela určeny. S využitím těchto potenciálů můžeme na základě (4.28) až (4.33) stanovit vektorová pole rozptýlené vlny.

4.1.4 Přiblížení dalekého pole

Předpokládejme nyní jako Kerker [1969], že se zabýváme rozptýlenou vlnou dostatečně daleko od rozptylující částice, tedy že $k_2 r \gg n$, kde n je řád *sférické Besselovy funkce* $j_n(k_2 r)$. V případě přiblížení dalekého pole se Hankelovy funkce v (4.39) dle Mie [1908] společně s jejich derivací (označena čárkou) zjednoduší na

$$h_n(k_2 r) = i^{(n+1)} \exp(-ik_2 r) \quad (4.47)$$

$$h'_n(k_2 r) = i^n \exp(-ik_2 r) . \quad (4.48)$$

Po dosazení Hertz-Debyeových potenciálů (4.39) do (4.28) až (4.33) je patrné, že radiální komponenty E_r a H_r klesají jako $(\lambda/r)^2$ a lze je ve velkých vzdálenostech

zanedbat, kdežto E_θ , E_φ , H_θ a H_φ klesají jako λ/r . Pro komponenty el. pole rozptýlené vlny potřebné pro určení intezity světla této vlny dostaneme

$$E_\varphi = \frac{H_\theta}{m_2} = -\frac{i \exp(-ik_2 r) E^0}{k_2 r} \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ a_n \frac{P_n^{(1)}(\cos \theta)}{\sin \theta} + b_n \frac{dP_n^{(1)}(\cos \theta)}{d\theta} \right\} (-1)^{n+1}$$

$$E_\theta = -\frac{H_\varphi}{m_2} = \frac{i \exp(-ik_2 r) E^0}{k_2 r} \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ a_n \frac{dP_n^{(1)}(\cos \theta)}{d\theta} + b_n \frac{P_n^{(1)}(\cos \theta)}{\sin \theta} \right\} (-1)^{n+1} .$$

Pokud zavedeme *amplitudové funkce*

$$S_1 = E^0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos \theta) + b_n \tau_n(\cos \theta)] (-1)^{n+1}$$

$$S_2 = E^0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \tau_n(\cos \theta) + b_n \pi_n(\cos \theta)] (-1)^{n+1} ,$$
(4.49)

ve kterých vystupují *úhlové funkce*

$$\pi_n(\cos \theta) = \frac{P_n^{(1)}(\cos \theta)}{\sin \theta}$$

$$\tau_n(\cos \theta) = \frac{d}{d\theta} P_n^{(1)}(\cos \theta)$$
(4.50)

můžeme pro intenzitu rozptýleného světla psát

$$I_\varphi = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} |S_1|^2 \sin^2 \varphi = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} i_1 \sin^2 \varphi$$
(4.51)

$$I_\theta = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} |S_2|^2 \cos^2 \varphi = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} i_2 \cos^2 \varphi ,$$
(4.52)

přičemž funkce $i_1 = |S_1|^2$ a $i_2 = |S_2|^2$ jsou nazývány *intenzitními funkcemi*. V případě, že bychom zavedli tzv. *Mieovy amplitudy*

$$A_n = i^{2n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} a_n$$
(4.53)

$$B_n = -i^{2n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} b_n ,$$
(4.54)

můžeme komponenty el. pole rozptýlené vlny napsat v kompaktnějším tvaru

$$E_\varphi = \frac{-E^0 \sin \varphi e^{-ik_2 r}}{k_2 r} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \tau_n + B_n \pi_n) ,$$

$$E_\theta = \frac{E^0 \cos \varphi e^{-ik_2 r}}{k_2 r} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \pi_n + B_n \tau_n) ,$$
(4.55)

což je v souladu s tím, co uvádí Bednář [1980]. Mieovy amplitudy vyskytující se na pravých stranách vztahů (4.54) představují fyzikálně amplitudy jednotlivých parciálních vln vytvářejících pole rozptýleného elektromagnetického záření. Vyjádření Mieových amplitud A_n a B_n jsou poměrně složitá a jejich vyčíslení pro větší hodnoty indexu n je náročné. Proto, jak uvádí Bednář [1980], je pro případ, kdy $\gamma < 1$ a pro součin γm platí

$$|\gamma m| < 1 , \quad (4.56)$$

výhodné s dostatečným stupněm přesnosti položit

$$\begin{aligned} A_n &= (-1)^{n+1} \frac{\gamma^{2n+1}}{n^2[(2n-1)!!]^2} \frac{m^2 - 1}{m^2 + \frac{n+1}{n}} \\ B_n &= (-1)^n \frac{\gamma^{2n+3}(m^2 - 1)}{(n+1)(2n+1)(2n+3)[(2n-1)!!]} , \end{aligned} \quad (4.57)$$

kde $(2n-1)!! = 1.3.5\dots(2n-1)$.

4.1.5 Účinné průřezy

Účinné průřezy se zavádějí na základě ztráty energie dopadající vlny. Jelikož index lomu rozptylující částice je obecně komplexní, může docházet ke ztrátám energie nejen v důsledku rozptylu dopadající vlny, ale též v důsledku její absorpce částicí. Obecně se zavádí *účinný průřez extinkce* (zeslabení) C_{ext} jako součet *účinného průřezu rozptylu* C_{sca} a *účinného průřezu absorpce* C_{abs}

$$C_{ext} = C_{sca} + C_{abs} . \quad (4.58)$$

Vypočítat tyto účinné průřezy je možné integrací reálné části Poyntingova vektoru přes sféru o poloměru mnohem větší v porovnání s poloměrem rozptylující částice

$$\mathbf{S} = (\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s) \times (\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s) , \quad (4.59)$$

kde pole tvoří součet incidentních a rozptýlených polí. Integraci provedl Mie [1908] a dospěl k výrazům pro účinné průřezy

$$C_{sca} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) [|a_n|^2 + |b_n|^2] \quad (4.60)$$

$$C_{ext} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \mathbf{Re} \{ a_n + b_n \} . \quad (4.61)$$

Podělíme-li účinné průřezy geometrickým účinným průřezem rozptylující částice πa^2 , můžeme s využitím (4.46) získat *koefficient rozptylu* Q_{sca} a *extinkce* Q_{ext}

$$Q_{sca} = \frac{C_{sca}}{\pi a^2} = \frac{2}{\gamma^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) [|a_n|^2 + |b_n|^2] \quad (4.62)$$

$$Q_{ext} = \frac{C_{ext}}{\pi a^2} = \frac{2}{\gamma^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \mathbf{Re} \{a_n + b_n\} . \quad (4.63)$$

Koeficient absorpce Q_{abs} můžeme určit na základě (4.58)

$$Q_{abs} = \frac{C_{abs}}{\pi a^2} = \frac{C_{ext}}{\pi a^2} - \frac{C_{sca}}{\pi a^2} = Q_{ext} - Q_{sca} . \quad (4.64)$$

4.2 Rayleighův rozptyl

Rayleighův rozptyl je nejjednodušším typem rozptylu elektromagnetického záření. Tento typ rozptylu lze popsat v rámci Mieovy teorie. Přičemž se předpokládá splnění následujících dvou podmínek:

1. $\gamma \equiv \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1$

Poloměr rozptylující sférické částice poloměru a musí být ve srovnání s vlnovou délkou rozptylovaného záření λ alespoň o řád menší než jedna.

2. $|m|\gamma < 1$

Komplexní index lomu m rozptylujících částic nedosahuje v absolutní hodnotě velikostí typických pro látky se značnou elektrickou vodivostí.

Vzhledem k výše uvedeným předpokladům se pro Rayleighův rozptyl stačí omezit na $n = 1$. A pro vyjádření Mieových amplitud A_n a B_n lze využít jednoduchých vztahů (4.57) ze kterých obdržíme

$$A_1 = \gamma^3 \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \quad (4.65)$$

$$B_1 = -\gamma^5 \frac{m^2 - 1}{30} . \quad (4.66)$$

Vzhledem k tomu, že hodnota γ má být alespoň o řád menší než jedna, je velikost koeficientu A_1 řádově menší ve srovnání s B_1 (amplitudu A_1 lze bez újmy na přesnosti zanedbat). Po dosazení (4.65) do (4.55) dostáváme

$$\begin{aligned} E_{\theta}^a &= \frac{\cos \varphi \cos \theta E^0 e^{-ikr}}{r} k^2 a^3 \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \\ E_{\varphi}^a &= \frac{-\sin \varphi E^0 e^{-ikr}}{r} k^2 a^3 \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} , \end{aligned} \quad (4.67)$$

kde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.68)$$

je vlnové číslo.

Z optiky [Malý, 2008] víme, že světelné účinky elektromagnetického záření souvisejí s intenzitou elektrického pole \mathbf{E} . Pro intenzitu světla I platí

$$I = \text{konst} |\tilde{\mathbf{E}}|^2 , \quad (4.69)$$

kde konstanta úměrnosti závisí na volbě jednotek a $\tilde{\mathbf{E}}$ představuje komplexní amplitudu intenzity elektrického pole. Pro intenzitu světla s komplexní amplitudou $\tilde{\mathbf{E}}^0$ dopadajícího na částici platí

$$I^0 = konst |\tilde{\mathbf{E}}^0|^2, \quad (4.70)$$

zatímco pro rozptýlené světlo platí

$$I = konst (|E_\theta^a|^2 + |E_\varphi^a|^2). \quad (4.71)$$

Dosadíme-li za elektrické intenzity E_θ^a a E_φ^a (4.67) do (4.71) a uvážíme-li (4.70) dostaneme

$$I(r, \theta, \varphi) = I^0 \frac{|e^{ikr}|^2}{r^2} k^4 a^6 \left| \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right|^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos^2 \theta). \quad (4.72)$$

Jelikož $|e^{ikr}| = 1$ a (4.68) lze předchozí výraz upravit do tvaru

$$I(r, \theta, \varphi) = I^0 \frac{16\pi^4 a^6}{\lambda^4 r^2} \left| \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right|^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos^2 \theta). \quad (4.73)$$

Nahrazením úhlu θ doplňkovým úhlem δ (Obr.4.1.3), který udává odklon rozptýleného svazku od směru původního dopadajícího svazku, a využitím „trigonometrické jedničky“ $\sin^2 \delta + \cos^2 \delta = 1$ lze psát

$$\boxed{I(r, \delta, \varphi) = I^0 \frac{16\pi^4 a^6}{\lambda^4 r^2} \left| \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right|^2 (1 - \sin^2 \delta \cos^2 \varphi)}. \quad (4.74)$$

Tento výraz však platí jen pro *lineárně polarizované* světlo, jehož paprsky dopadají ze směru záporně vzaté osy z a vektor intenzity tohoto pole kmitá rovnoběžně se souřadnicovou osou x .

5 CÍLE PRÁCE

Jak jsme v předchozích kapitolách naznačili, existuje řada nabíjecích procesů, které mohou ovlivňovat náboj prachového zrna. Tyto procesy hrají významnou roli při studiu tzv. komplexního plazmatu, tj. plazmatu, ve kterém jsou přítomny malé, pevné objekty – prachová zrna. Laboratorní podmínky nám umožňují tyto nabíjecí procesy odděleně simulovat a studovat a omezit přitom vliv okolního prostředí nebo definovat jeho parametry. Za tímto účelem je na KFPP unikátní experimentální zařízení umožňující zkoumat nabíjení prachových zrn různých materiálů (vodivých i dielektrických) svazkem nabitých částic (elektronů a iontů). Jelikož však mezi klíčové interakce v kosmickém prostoru patří interakce s UV zářením, je na katedře budován nový experiment s odlišnou geometrií pasti (do původního experimentu nelze zdroj UV záření rozumně umístit), který umožní porovnat vliv nabíjení prachových zrn elektrony a UV zářením, což je významné pro kosmické aplikace (např. nabíjení prachu na měsíčním povrchu).

Cílem práce je podat jak teoretický pohled na fotoemisi z prachových zrn (např. formou různých modelů), tak i pohled z experimentální stránky. Z hlediska experimentálního je třeba poznat vlastnosti UV detektoru, provést jeho kalibraci a určit vliv jeho práce na podmínky v aparatuře. Tento cíl směřuje k řadě testovacích a simulačních měření, které mají za úkol stanovit vliv pozadí na výsledky a přesnost měření. Kromě toho je potřebné provést kalibrace UV svazku (např. měřením fotoelektronového spektra He) tak, abychom měli kvantitavní informaci o množství fotonů a zastoupení jejich energií ve svazku dopadajících na zachycené prachové zrno.

Konkrétně lze cíle práce formulovat asi takto:

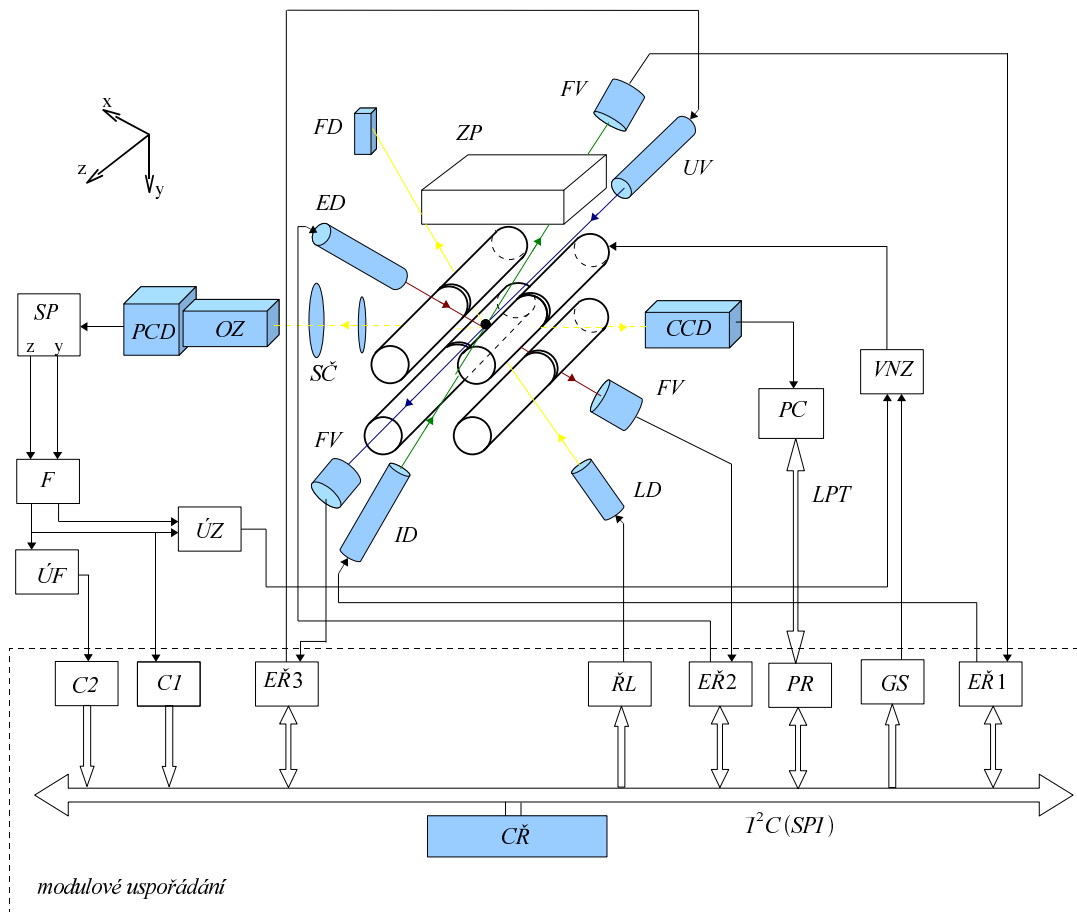
1. Podrobněji se seznámit s experimentem, pochopit práci lineárního kvadrupólu, nastudovat literaturu k tématu fotoemise.
2. Sestavit detekční elektroniku pro experiment s UV zdrojem, doplnit elektronické obvody a připravit měřicí software.
3. Ověřit činnost pasti a stanovit vliv okolí (zejména povrchů elektrod) na výsledky měření.
4. Provést ověřovací měření zdrojem částic na definovaných prachových zrnech.

6 EXPERIMENTÁLNÍ USPOŘÁDÁNÍ

6.1 Experimentální aparatura

Základem měřicí aparatury (Obr.6.1) pro studium nabíjecích procesů prachových zrn je lineární elektrodynamická past, v jejímž efektivním potenciálu může být zachyceno nabité prachové zrno. Prachové zrno lze uvolnit formou drobných otřesů ze zásobníku prachu (ZP). Efektivní potenciál je vytvořen třemi RF poli [Beránek, 2010], které jsou generovány potenciály přivedenými na elektrody lineární pasti (Obr.6.2). Přivedení potenciálů potřebných amplitud a frekvence v potřebném rozsahu zajišťují vysokonapěťové zesilovače (VNZ). Harmonický signál s časovým oknem pro generování svazků nabitých částic (svazky mohou procházet pastí pouze když nejsou na ni přivedena napětí) je získán z programovatelného generátoru signálu (GS). Zachycené prachové zrno je vystaveno působení svazků částic z elektronového děla (ED), iontového děla (ID) či diferenciallyně čerpané UV lampy (UV). Abychom měli informaci o velikosti toků částic dopadajících na prachové zrno jsou k dispozici bezmřížkové Faradayovy válce (FV) [Vysínka, 2008] s detekční elektronikou. Informace o velikosti těchto proudů je po sběrnici I^2C přenášena do řídicích jednotek (EŘ1, EŘ2 a EŘ3), kde je porovnávána s nastavenou hodnotou a na základě algoritmu zpětnovazebního řízení jsou pak velikosti těchto proudů řízeny. Jak uvidíme dále z frekvence kmitů prachového zrna v efektivním potenciálu je možné usuzovat na velikost jeho měrného náboje. Pro měření frekvence těchto kmitů je k dispozici optická detekce založená na měření rozptýleného laserového svazku prachovým zrnem. Laserový svazek z laserové diody (LD), napájené z jednotky řízení laseru (ŘL), dopadá na zachycené prachové zrno a dochází k jeho rozptylu. Část rozptýleného svazku je přiváděna přes soustavu čoček (SČ) do obrazového zesilovače (OZ) HAMAMATSU. Zesílený signál z obrazového zesilovače je přiveden na pozičně citlivý detektor (PCD) (plošnou PIN diodu), který umožňuje zjistit polohu svazku a převést obrazový signál na signál elektrický. U získaného elektrického signálu může být buď přímo měřena jeho frekvence pomocí čítače (C1) a nebo je signál dál elektronicky zpracováván např. dále filtrován pomocí úzkopásmového filtru (abychom se zaměřili pouze na frekvenci která nás zajímá) a následně je jeho frekvence měřena pomocí čítače (C2). Samozřejmě celý experiment je umístěn v podmínkách UHV, aby bylo možné dosáhnout potřebné střední volné dráhy produkovaných částic, kterým je prachové zrno vystaveno. Podmínky UHV jsou potřebné i z hlediska udržení čistoty povrchu prachového zrna. Jinak by docházelo k adsorbci nečistot z okolní atmosféry

a mohlo by docházet k ovlivňování měření např. v důsledku změn jeho náboje vlivem ionizace molekul adsorbovaných na povrchu nebo molekul okolní atmosféry. Elektrovakuové schéma měřicí aparatury je na obrázku v dodatku (A.8).



Obr. 6.1: Experimentální aparatura pro studium fotoemisního nabíjení prachových zrn.

LEGENDA:

FV – Faradayův válec, ED – elektronové dělo, ID – iontové dělo, UV – zdroj UV, LD – laserová dioda, ZP – zásobník prachu, CCD – CCD kamera, PC – osobní počítač, PR – převodník rozhraní, SČ – soustava čoček, OZ – optický zesilovač, PCD – pozičně citlivý detektor, F – filtr, ÚF – úzkopásmový filtr, ÚZ – úzkopásmový zesilovač, C1, C2 – čítače, EŘ1, EŘ2, EŘ3 – elektronické řídicí jednotky, GS – generátor signálu, CŘ – centrální řízení PC – osobní počítač, ZP – zásobník prachu, VNZ – osmikánalový napěťový zesilovač, ŘL – řízení laseru, PR – převodník rozhraní, FD – fotodioda, SP – signálový procesor

6.2 Princip lineární elektrodynamické pasti

Pro potenciály ve středu pasti platí dle Beránek *et al.* [2010] tyto vztahy

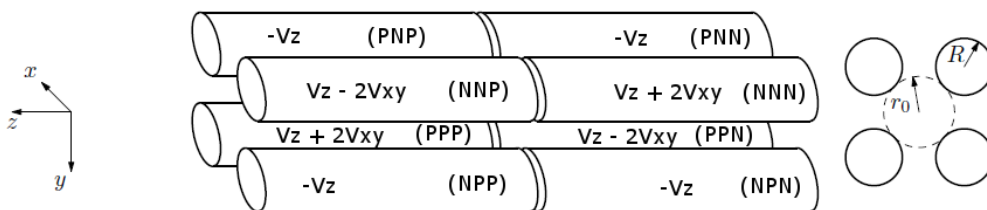
$$\varphi_z = \lambda_z V_z \frac{xy}{r_0^2} \cos \omega t \quad (6.1)$$

$$\varphi_x = \lambda_{xy} V_{xy} \frac{yz}{r_0^2} \cos \omega t \quad (6.2)$$

$$\varphi_y = \lambda_{xy} V_{xy} \frac{xz}{r_0^2} \cos \omega t, \quad (6.3)$$

kde λ_z a $\lambda_{xy} = \lambda_x = \lambda_y$ jsou geometrické faktory pasti a V_z, V_{xy} jsou amplitudy potenciálů. Můžeme si povšimnout, že potenciály φ_x a φ_y představují potenciály klasické kvadrupólové čočky. Potenciál φ_z představuje dodatečný potenciál, který brání úniku prachového zrna podél osy z (u kvadrupólové čočky není nabitá částice v tomto směru nikterak vázána). Pro celkový potenciál s využitím *principu superpozice* dostaneme

$$\varphi = \frac{\cos \omega t}{r_0^2} [(x + y)\lambda_{xy} V_{xy} z + \lambda_z V_z xy] \quad (6.4)$$



Obr. 6.2: Geometrie pasti, amplituda a fáze potenciálů na elektrodách (převzato z [Beránek *et al.*, 2010]).

Abychom mohli vyšetřovat silové působení na nabitě prachové zrno zavádí se tzv. *efektivní potenciál*. Efektivní potenciál je potenciál, který částice skutečně cítí. Má význam „jakéhosi“ gravitačního potenciálu. Vypočtením gradientu z efektivního potenciálu [Gerlich, 1992] můžeme napsat pohybovou rovnici pro nabitě prachové zrno

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla u_{eff} = -\frac{Q^2}{4m\omega^2} \nabla |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \quad (6.5)$$

Vyskytující se intenzita el. pole je dána gradientem el. potenciálu (6.4) s tvarem

$$\nabla \varphi = \frac{\lambda_z V_z \cos \omega t}{r_0^2} [Cz + y, Cz + x, C(x + y)], \quad (6.6)$$

kde C je koeficient poměru el. potenciálů

$$C = \frac{\lambda_{xy} V_{xy}}{\lambda_z V_z}. \quad (6.7)$$

Pohybová rovnice (6.5) tak postupnými úpravami získá tvar

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Q^2\lambda_z^2V_z^2}{4m\omega^2r_0^4}\nabla|[Cz+y, Cz+x, C(x+y)]|^2 \quad (6.8)$$

$$= -\frac{Q^2\lambda_z^2V_z^2}{2m\omega^2r_0^4}\left\{(Cz+x)+C^2(x+y), (Cz+y) \right. \quad (6.9)$$

$$\left. +C^2(x+y), (Cz+y)C+(Cz+x)C\right\} \\ = -\frac{Q^2\lambda_z^2V_z^2}{2m\omega^2r_0^4}\begin{pmatrix} C^2+1 & C^2 & C \\ C^2 & C^2+1 & C \\ C & C & 2C^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

kde v posledním řádku jsme využili rozepsání do maticového tvaru. Odsud je zřejmé, že jsme získali soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic, která je provázaná a jejichž řešení by bylo poměrně komplikované. Nabízí se provést diagonalizaci této matice, tedy provést přechod jiné souřadnicové soustavy $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$. V nových (čárkovaných) souřadnicích získá pohybová rovnice tvar

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = -\frac{Q^2\lambda_z^2V_z^2}{2m\omega^2r_0^4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4C^2+1-\sqrt{8C^2+1} & 0 \\ 0 & 0 & 4C^2+1+\sqrt{8C^2+1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Což lze poměrně snadno přepsat

$$\ddot{\mathbf{r}}' + \frac{Q^2\lambda_z^2V_z^2}{2m^2\omega^2r_0^4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4C^2+1-\sqrt{8C^2+1} & 0 \\ 0 & 0 & C^2+1+\sqrt{8C^2+1} \end{pmatrix}\cdot\mathbf{r}' = 0$$

Získali jsme tak soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic, která je neprovázaná a jejíž řešeními jsou v soustavě (x', y', z') vlastní kmity

$$\Omega_i = \frac{Q}{m}\frac{\lambda_zV_z}{2\omega r_0^2}\begin{cases} \sqrt{2} & ; i = x' \\ \sqrt{4C^2+1-\sqrt{8C^2+1}} & ; i = y' \\ \sqrt{4C^2+1+\sqrt{8C^2+1}} & ; i = z' \end{cases} \quad (6.12)$$

Připouštěním plynu do aparatury je možné kmity ve směrech y' a z' ztlumit a vyšetřovat tak pouze kmity ve směru osy x' . Zatlumení kmitů v ostatních směrech má význam především z hlediska zpracování signálu z optické detekce kmitů (signál se zpracovává pouze v okolí jedné vlastní frekvence). Ze vztahu pro vlastní kmity ve směru x' můžeme získat jednoznačný výraz, který dává do souvislosti měrný náboj prachového zrna a geometrií pasti r_0 s amplitudou a frekvencí potenciálů na jejích elektrodách

$$\boxed{\frac{Q}{m} \approx \frac{\sqrt{2}r_0^2\omega\Omega_{x'}}{\lambda_z V_z}} \quad (6.13)$$

Tento vztah je však pouze přibližný, neboť platí dle předpokladu jen v rámci adiabatické aproximace. Pro získání přesného výrazu bychom museli řešit Mathieovu diferenciální rovnici viz dodatek (A.6). Jejím řešením bychom dospěli k závěru, že vztah (6.13) je nutné opravit o korekční faktor

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(k \frac{\Omega_{x'}}{\omega}\right)^2}} ; k = 1.8 , \quad (6.14)$$

ve kterém vystupuje poměr frekvence kmitů prachového zrna $\Omega_{x'}$ vůči frekvenci napětí na elektrodách pastí ω .

6.3 Zdroj UV

Jako zdroje UV záření pro studium fotoemisního nabíjení je použito diferenciálně čerpané lampy od firmy SPECS (UVS 10/35). Lampa umožňuje pracovat s poměrně širokou škálou různých pracovních plynů (He, Ne, Ar, Kr, Xe, H, ...).

tlak ve výboji: 0.1–5 mbar

tlak v prvním stupni čerpání: $5 \cdot 10^{-3}$ – $5 \cdot 10^{-1}$ mbar

tlak v druhém stupni čerpání: $1 \cdot 10^{-6}$ – $1 \cdot 10^{-4}$ mbar

výbojový proud : 20–120 mA

zápalné napětí : 6, 5 kV

napětí výboje: 650–700 V pro HeI, 300–400 V pro NeI

výkon: 120W

výbojová kapilára: délka 50 mm, vnější průměr 5,0 mm, vnitřní průměr 1,3 mm

kolimáčnická kapilára svazku: délka 200 mm, vnější průměr 5 mm, vnitřní průměr 0,8–1,3 mm

6.4 Měřicí techniky

Jak jsme ukázali v minulé kapitole lze ze znalosti geometrie pastí a přivedených napětí na její elektrody určit měrný náboj prachového zrna. Existují jisté metody (měřicí techniky), pomocí kterých je možné určit ještě další dodatečné informace o prachovém zrnu (např. jeho hmotnost, povrchový potenciál, měrnou kapacitu a za jistých dodatečných předpokladů jeho hustotu a poloměr).

6.4.1 Metoda elementárního náboje

Jedná se v podstatě o analogii Millikanova experimentu, ale pro hmotnost prachového zrna [Žilavý *et al.*, 1999]. Necháme z podžhaveného el. děla dopadat na zrno

elektrony v krátkém časovém okně. Tím můžeme docílit toho, že dojde ke změně náboje o jeden (či několik málo) elektronů. Na základě vztahu (6.13) a s využitím předpokladu, že hmotnost elektronu je ve srovnání s hmotností prachového zrna zanedbatelná můžeme pro hmotnost zrna psát

$$m = \frac{e\Omega_{x'}}{\left(\frac{Q}{m}\right) \Delta\Omega_{x'}} . \quad (6.15)$$

Jelikož se však často nepovede skok o jeden elementární náboj, provádí se lineární extrapolace několika skoků, tak abychom zjistili požadovanou změnu frekvence $\Delta\Omega_{x'}$ odpovídající jednomu elementárnímu náboji. Velkou výhodou této metody je, že neklade žádné dodatečné předpoklady na částici (její velikost, tvar, materiál ...).

6.4.2 Metoda V-A charakteristiky

Jednou z metod používaných pro měření měrné kapacity prachových zrn je metoda V-A charakteristiky. Princip této metody je založen na nabití prachového zrna na vysoký kladný potenciál (iontovým bombardem) a poté snížíme energii těchto iontů. Jelikož je energie těchto iontů nižší než energie odpovídající kladnému povrchovému potenciálu prachového zrna, nemohou tyto ionty na prachové zrno dopadat. Dochází však k jejich rozptylu na kladném potenciálu zrna a takto rozptýlené ionty mohou dopadnout na elektrody pasti nebo stěny aparatury, kde mohou produkovat elektrony. Tyto elektrony jsou ihned odsáty vysoce kladně nabitým prachovým zrnem a dochází tak k jeho postupnému vybíjení proudu z pozadí. Po určité době dojde k tomu, že povrchový potenciál zrna se vyrovná s energií iontů ve svazku a ionty začnou na prachové zrno dopadat. Výsledkem je zpomalení vybíjení prachového zrna, což se projeví zlomem ve vybíjecí charakteristice [Čermák, 1994]. Právě z polohy tohoto zlomu a energie iontů (odpovídá povrchovému potenciálu) můžeme s využitím

$$\frac{Q}{m} = \frac{C}{\rho V} \phi = C_m \phi . \quad (6.16)$$

určit *měrnou kapacitu* C_m prachového zrna. Budeme-li předpokládat, že prachové zrno je *sférické tvaru*. Můžeme ze znalosti materiálu zrna (resp. jeho hustoty ρ) určit *poloměr prachové částice*

$$R = \sqrt{\frac{3\varepsilon_0}{\rho} \phi \left(\frac{Q}{m}\right)^{-1}} \quad (6.17)$$

nebo její *hmotnost*

$$m = \frac{4}{3} \pi \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left[3\varepsilon_0 \phi \left(\frac{Q}{m}\right)^{-1} \right]^{\frac{3}{2}} . \quad (6.18)$$

Nevýhodou této metody je její menší přesnost způsobená numerickou derivací vybíjecí charakteristiky. Dále pak její použití pouze pro větší prachová zrna (nedosahují při daném potenciálu vysokých hodnot $\frac{Q}{m}$).

7 ŘEŠENÍ PRÁCE

7.1 Vliv tvaru elektrod a zbytkového plynu na náboj zrna

Jelikož jedním z cílů práce je stanovit vliv povrchů na výsledky experimentu, rozhodl jsem se vytvořit *Monte Carlo* simulaci, která měla za úkol v závislosti na tlaku a druhu plynu uvnitř aparatury srovnat a kvantitativně určit vliv povrchů dvou typů pastí (hyperbolické a lineární). Řešení jsem rozdělil na několik dílčích kroků. Mezi tyto kroky patří: generování náhodné volné dráhy, detekce kolize elektronu s elektrodami pastí, detekce kolize elektronů s bezmřížkovým Faradayovým válcem. V modelu byla použita řada zjednodušujících předpokladů: elektron se mezi srážkami pohybuje po přímce, srážka je pružná, elektron vzniklý ionizací není dále ve výpočtu uvažován. Podívejme se na jednotlivé kroky podrobněji.

Doba mezi dvěma srážkami

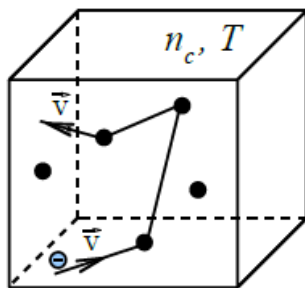
Pro náhodnou volnou dráhu platí vztah

$$\xi = -\lambda \ln(\chi) , \quad (7.1)$$

kde λ je střední volná dráha a χ je pseudonáhodné číslo rovnoměrně rozdělené na intervalu $(0; 1]$. Střední volnou dráhu můžeme určit na základě účinného průřezu σ

$$\lambda = \frac{1}{n_c \sigma(E)} , \quad (7.2)$$

kde n_c je koncentrace terčíkových center. Tuto koncentraci můžeme stanovit pro



Obr. 7.1: Koncentrace terčíkových center.

případ ideálního plynu ze stavové rovnice

$$n_c = \frac{p}{k_B T} . \quad (7.3)$$

Celkově lze pro náhodnou volnou dráhu ξ s využitím (7.2) a (7.3) psát

$$\xi = - \frac{k_B T \ln(\chi)}{p \sigma(E)} . \quad (7.4)$$

Pro dobu mezi dvěma po sobě jdoucími srážkami elektronu s rozptylovými centry platí

$$\tau = \frac{\xi}{v} , \quad (7.5)$$

kde v je rychlost elektronu. V případě, že elektron je nerelativistický, lze jeho rychlost určit ze vztahu

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} . \quad (7.6)$$

Dosazením této rychlosti do výrazu (7.5) pro dobu mezi dvěma srážkami dostáváme

$$\tau = \xi \sqrt{\frac{m}{2E}} . \quad (7.7)$$

Využitím (7.4) pro dobu mezi dvěma srážkami konečně dostaneme

$$\tau = - \frac{k_B T \ln(\chi)}{p \sigma(E)} \sqrt{\frac{m}{2E}} . \quad (7.8)$$

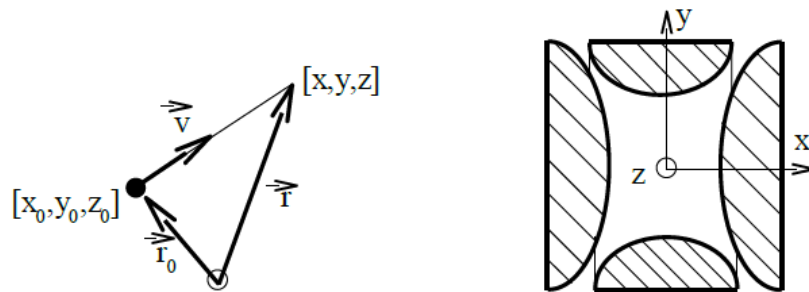
Doba do kolize s elektrodami

V době, kdy elektronový svazek z el. děla prochází pastí, není na elektrodách napětí. Vzhledem k této skutečnosti můžeme předpokládat, že na elektron, který se rozptyluje, nepůsobí el. pole. To znamená, že elektron se mezi dvěma srážkami pohybuje po přímce viz (Obr.7.2). Tuto přímku můžeme parametrizovat

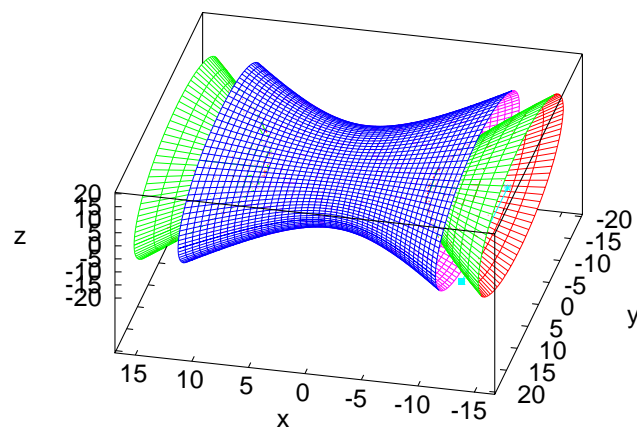
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t , \quad (7.9)$$

kde \mathbf{r}_0 udává souřadnice místa, ve kterém došlo k poslední srážce. V podstatě tak dostáváme soustavu tří rovnic, kde t je parametr pohybu (čas)

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_x t , \\ y &= y_0 + v_y t , \\ z &= z_0 + v_z t . \end{aligned} \quad (7.10)$$



Obr. 7.2: Parametrizace pohybu elektronu v době mezi srážkami, orientace souřadnicových os.



Obr. 7.3: Geometrie pasti s hyperbolickými elektrodami.

7.1.1 Past s hyperbolickými elektrodami

Nyní se zaměříme na určení geometrie pasti. Tato past je složena z jedné elektrody tvaru jednodílného hyperboloidu a dvou elektrod, které dohromady tvoří dvoudílný hyperboloid (Obr.7.3).

Rovnice jednodílného hyperboloidu orientovaného podél osy x má tvar

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1 . \quad (7.11)$$

Rovnice dvoudílného hyperboloidu orientovaného podél osy x má tvar

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = -1 . \quad (7.12)$$

Dosazením parametrizované rovnice přímky (7.10) do těchto rovnic dostáváme kvadratickou rovnici pro neznámý parametr t

$$t^2(v_z^2 b^2 c^2 + v_y^2 a^2 c^2 - v_x^2 a^2 b^2) + t(2z_0 v_z b^2 c^2 + 2y_0 v_y a^2 c^2 - 2x_0 v_x a^2 b^2) + b^2 c^2 z_0^2 + a^2 c^2 y_0^2 - a^2 b^2 x_0^2 \mp a^2 b^2 c^2 = 0 , \quad (7.13)$$

udávající čas do kolize elektronu s elektrodami pasti. Řešení kvadratické rovnice má tvar

$$t_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} , \quad (7.14)$$

kde pro konstanty A, B a C platí

$$\begin{aligned} A &= v_z^2 b^2 c^2 + v_y^2 a^2 c^2 - v_x^2 a^2 b^2 \\ B &= 2z_0 v_z b^2 c^2 + 2y_0 v_y a^2 c^2 - 2x_0 v_x a^2 b^2 \\ C &= b^2 c^2 z_0^2 + a^2 c^2 y_0^2 - a^2 b^2 x_0^2 \mp a^2 b^2 c^2 . \end{aligned}$$

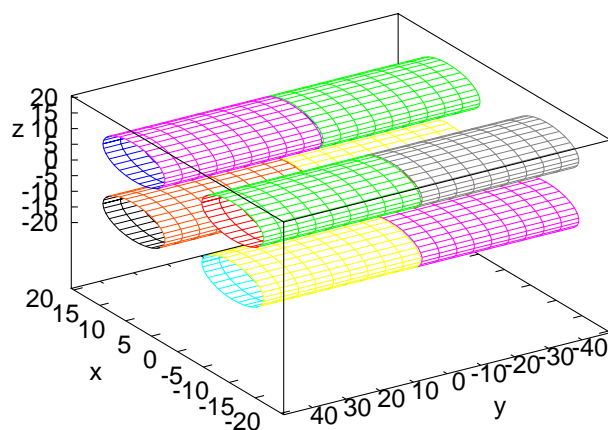
Znaménko $-$ v posledním členu koeficientu C odpovídá jednodílnému hyperboloidu a znaménko $+$ hyperboloidu dvoudílnému. Na základě porovnání takto vypočteného času (7.14) s dobou mezi dvěma srážkami (7.8) můžeme určit za jaké podmínky

$$\tau > t_1 \vee \tau > t_2 \quad (7.15)$$

ke kolizi s elektrodami *dojde* a za jaké podmínky

$$\tau < t_1 \vee \tau < t_2 \quad (7.16)$$

ke kolizi *nedojde*.



Obr. 7.4: Geometrie pasti s tyčovými elektrodami.

7.1.2 Past s tyčovými elektrodami (Obr.7.4)

Rovnice válce || s osou z umístěného v počátku má tvar

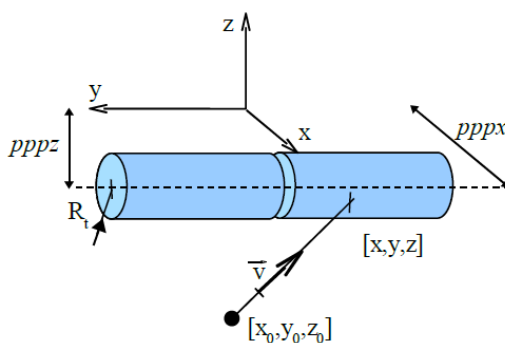
$$x^2 + y^2 = R_t^2, \quad (7.17)$$

kde R_t je poloměr válce.

Rovnice válce || s osou y a jehož osa prochází body $[pppx,y,pppz]$ (Obr.7.5) má tvar

$$(x - pppx)^2 + (z - pppz)^2 = R_t^2. \quad (7.18)$$

Dosazením parametrizované rovnice přímky (7.10) dostáváme kvadratickou rov-



Obr. 7.5: K rovnici posunutého válce.

nici pro neznámý parametr t (čas do kolize s válcem od poslední srážky)

$$t^2(v_x^2+v_z^2)+2t[v_x(x_0-pppx)-v_z(z_0-pppz)]+(x_0-pppx)^2+(z_0-pppz)^2-R_t^2=0. \quad (7.19)$$

Řešením této kvadratické rovnice získáme čas do kolize přímky s válcem

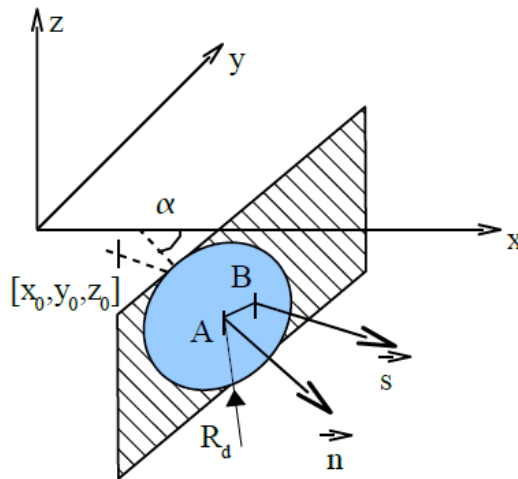
$$t_{12} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (7.20)$$

Porovnáním takto vypočteného času s dobou mezi dvěma srážkami τ (7.8) můžeme určit, zda dojde či nedojde ke kolizi

$$\begin{aligned} \tau &> t_1 \vee \tau > t_2, \\ \tau &< t_1 \vee \tau < t_2. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Kolize s detektorem (Faradayovým válcem)

Věnujme nyní pozornost detekci kolize elektronu s kruhovým detektorem (Obr.7.6). Za tímto účelem si zavedeme jednotkový normálový vektor k rovině, v níž leží



Obr. 7.6: K popisu kolize elektronu s kruhovým detektorem.

detektor

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha, -\sin \alpha, 0), \quad (7.22)$$

kde α je úhel, který normálový vektor svírá s osou x . Obecná rovnice roviny má tvar

$$ax + by + cz + d = 0. \quad (7.23)$$

Rovina rovnoběžná s osou z s normálovým vektorem (7.22) bude mít tvar

$$\cos \alpha x - \sin \alpha y + d = 0. \quad (7.24)$$

Označme střed kruhového detektoru ležícího v rovině bodem A se souřadnicemi

$$A = [ppx, ppy, ppz] . \quad (7.25)$$

Dosazením souřadnic tohoto bodu do rovnice (7.24) je možné určit zatím neznámý parametr d (posunutí roviny)

$$d = ppy \sin \alpha - ppx \cos \alpha . \quad (7.26)$$

S využitím zmíněného parametru získá rovina (7.24) tvar

$$\cos \alpha (x - ppx) - \sin \alpha (y - ppy) = 0 . \quad (7.27)$$

Nyní vyšetřujme kolizi přímky s touto rovinou. Dosazením parametrizované přímky (7.10) do rovnice roviny (7.27) najdeme neznámý parametr t (čas)

$$t = \frac{\sin \alpha (y_0 - ppy) - \cos \alpha (x_0 - ppx)}{v_x \cos \alpha - v_y \sin \alpha} . \quad (7.28)$$

Zpětným dosazením parametru do rovnice přímky získáme souřadnice průsečíku přímky s rovinou (souřadnice bodu B)

$$B = (x, y, z) = \begin{pmatrix} x_0 + v_x t \\ y_0 + v_y t \\ z_0 + v_z t \end{pmatrix}$$

Nyní spočteme vzdálenost bodů $|AB|$

$$|AB| = \sqrt{(ppx - x)^2 + (ppy - y)^2 + (ppz - z)^2} . \quad (7.29)$$

Je-li tato vzdálenost menší než poloměr detektoru R_d

$$|AB| < R_d , \quad (7.30)$$

došlo ke kolizi částice s detektorem. V opačném případě, pokud

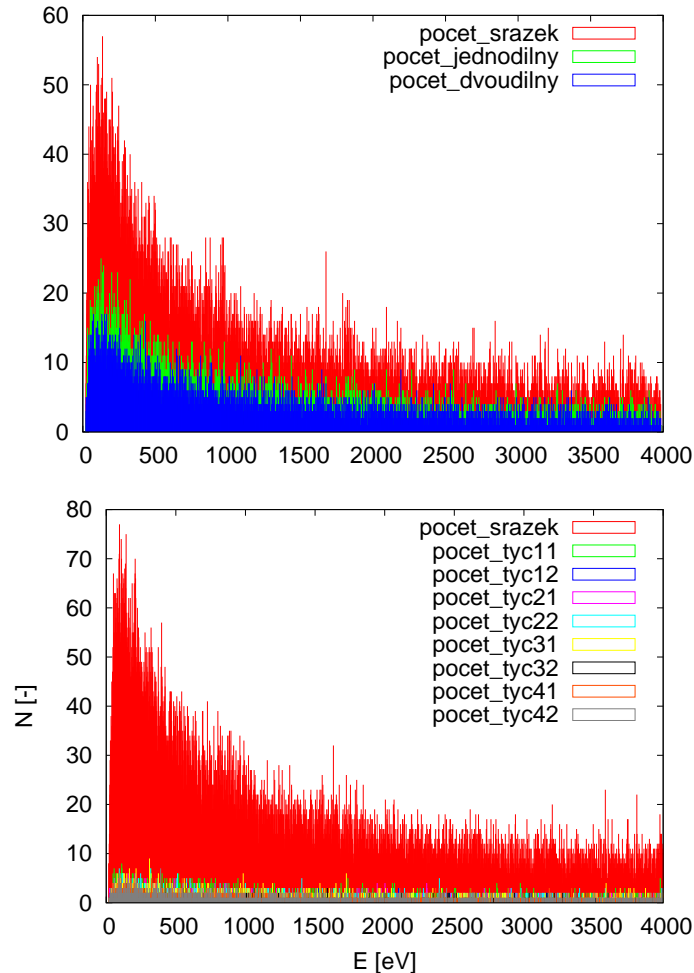
$$|AB| > R_d , \quad (7.31)$$

tak ke kolizi nedošlo.

7.1.3 Výsledky modelu

Vstupní parametry modelu:

$p = 1 \cdot 10^{-2}$ Pa, $T = 300$ K, typ plynu: N_2 , počet generovaných částic: 10 000

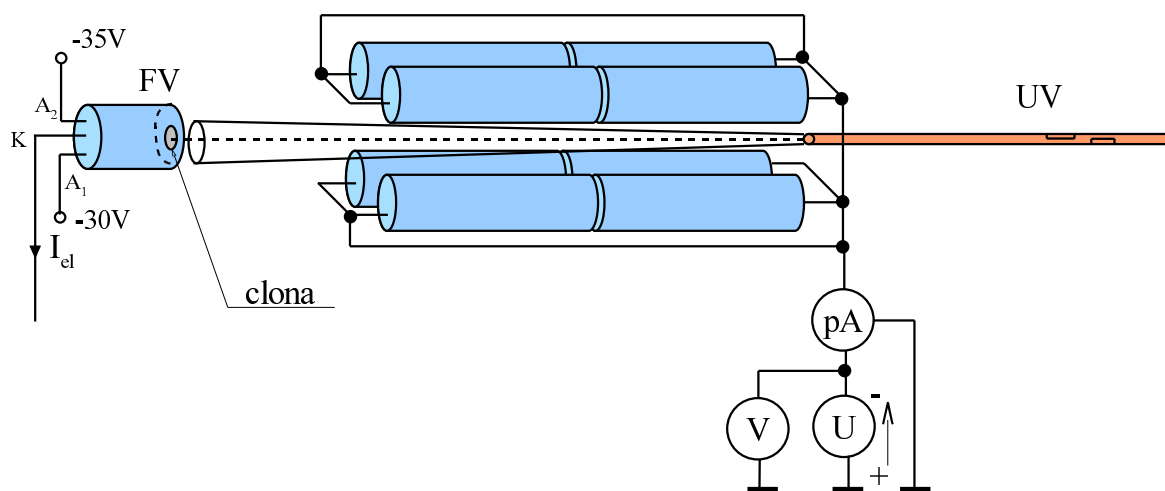


Obr. 7.7: Závislost počtu elektronů dopadlých na jednotlivé elektrody pasti v závislosti na jejich energii (horní část – past s hyperbolickými elektrodami, dolní část – lineární past).

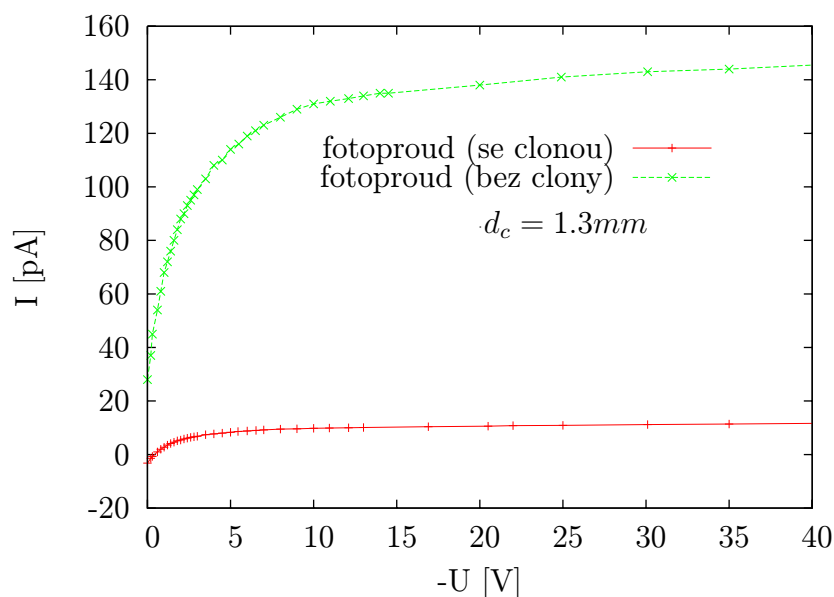
Z vypočtených závislostí (Obr.7.7) je patrné zvýšené množství elektronů dopadlých na elektrody hyperbolické pasti oproti pasti lineární, což je v souladu s naším očekáváním, neboť hyperbolická past mnohem menší světlost. Ze závislostí je též patrná modulace počtu dopadlých elektronů ionizačním srážkovým průřezem, který je funkcí energie ionizujících elektronů. Výsledky modelu byly získány pro ionizaci zbytkové atmosféry elektrony. Pro případ fotoionizace lze očekávat podobné závislosti, tedy až na tvar, který bude dán fotoionizačním účinným průřezem.

7.2 Vliv fotoemise z elektrod na náboj prachového zrna

Výhodou lineární elektrodynamické pasti oproti hyperbolické je její větší otevřenost, což umožňuje studovat procesy fotoemisního nabíjení prachových zrn. Nabízí se však otázka, zda je světlost pasti dostatečná a nedojde k tomu, že přeci jenom některé fotony z UV svazku (např. v důsledku jeho divergence nebo okrajových efektů) dopadnou na elektrody pasti. Tím by však docházelo k fotoemisi elektronů z elektrod a tyto elektrony by pak mohly nepříznivě ovlivňovat náboj zachyceného zrna. Proto jsem se rozhodl vytvořit testovací měření (Obr.7.8), které umožní velikost fotoproudu z elektrod kvantifikovat. Jak je patrné z naměřené závislosti fotoproudu z elektrod pasti na přiloženém napětí, není jev zcela zanedbatelný ($\approx 130\text{pA}$). Proto jsem se rozhodl do cesty svazku vložit clonu (kolimátor) (Obr.A.8), jejímž úkolem bylo vymežit profil UV svazku. Na clonu je možné přivést napětí tak, aby případně vzniklé fotoelektrony byly odsáty a neovlivňovaly náboj zrna. Při opakování měření s clonou klesla velikost saturovaného proudu asi desetkrát (Obr.7.9). Velikost vnitřního otvoru clony byla zvolena s ohledem na rozbíhavost svazku tak, aby nedocházelo k jeho ořezání, ale pouze k jeho vymezení. Z výsledků lze usoudit, že nárůst fotoelektronového proudu je pravděpodobně způsoben okrajovými efekty na konci skleněné kapiláry UV lampy a ne rozptylem svazku.



Obr. 7.8: Měření velikosti fotoproudu z elektrod pasti.



Obr. 7.9: Závislost fotoproudu na velikosti přiloženého napětí na elektrody pasti.

7.2.1 Rozbíhavost svazku, fotonový tok

Pro charakterizaci UV svazku vycházejícího z UV zdroje se zavádí *fotonový tok* ϕ [s^{-1}] vztahem

$$\phi = I_{ph}\Omega . \quad (7.32)$$

I_{ph} [$s^{-1} \cdot sr^{-1}$] udává *fotonovou hustotu*, tedy počet fotonů vyletujících za jednotku času do jednotky prostorového úhlu Ω [sr].

Fotonový tok ϕ můžeme také určit na základě *fotoelektronového proudu* I vznikajícího v důsledku fotoelektrického jevu, při osvětlení vzorku

$$\phi = \frac{I}{e\eta} , \quad (7.33)$$

kde η je *kvantový výtěžek* (počet fotoelektronů vzniklých z jednoho fotonu) a e je elementární náboj.

Uvažujme svazek vystupující z kapiláry UV lampy viz (Obr.7.10).

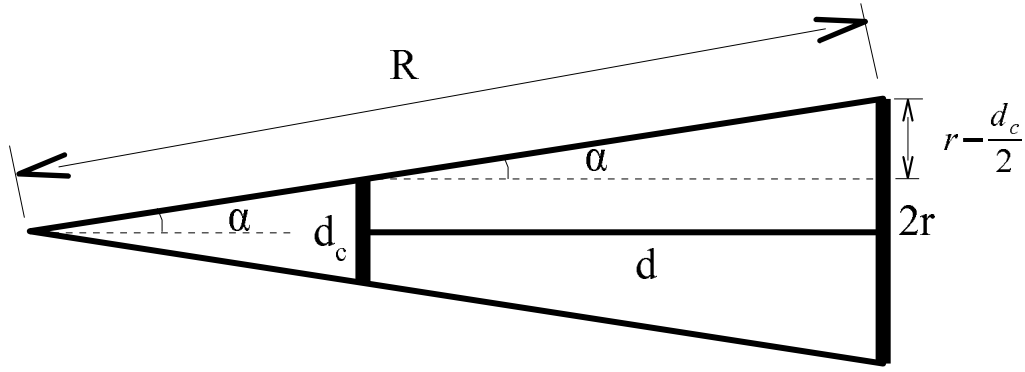
d_c - průměr kapiláry

r - je poloměr excitované oblasti vzorku

d - je vzdálenost mezi kapilárou a vzorkem

Z obrázku je patrné, že pro úhel α platí:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{r - \frac{d_c}{2}}{d} \\ \sin \alpha &= \frac{r}{R} \end{aligned} \quad (7.34)$$



Obr. 7.10: Znázornění rozbíhavosti svazku UV

V případě, že divergence svazku je malá, platí $\tan \alpha \approx \sin \alpha$ a můžeme psát

$$\frac{r}{R} \approx \frac{r - \frac{d_c}{2}}{d}. \quad (7.35)$$

Odtud pro R dostáváme

$$R \approx \frac{d}{1 - \frac{d_c}{2r}}. \quad (7.36)$$

Nyní se zabýváme výpočtem prostorového úhlu Ω , do kterého se svazek rozbíhá. Pro výpočet elementu prostorového úhlu obecně platí

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi. \quad (7.37)$$

Integrací přes vhodné integrační meze viz (Obr.7.10) lze určit prostorový úhel Ω

$$\begin{aligned} \Omega &= \int d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \int_0^\alpha \sin \theta d\theta = 2\pi [-\cos \theta]_0^\alpha = 2\pi (1 - \cos \alpha) \\ &= 4\pi \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.38)$$

Využijeme-li jednoho ze vztahů ve (7.34) a je-li úhel α malý, tj. ($\sin \alpha \approx \alpha$), můžeme pro prostorový úhel Ω přibližně psát

$$\Omega \approx \frac{\pi r^2}{R^2}. \quad (7.39)$$

Dáme-li do rovnosti fotonové toky dané vztahy (7.32) a (7.33), a dosadíme-li za R a Ω ze (7.36) a (7.39), můžeme obdržet přibližný vztah pro výpočet *fotonové hustoty* I_{ph}

$$I_{ph} = \frac{I d^2}{\pi r^2 e \eta \left(1 - \frac{d_c}{2r}\right)^2}. \quad (7.40)$$

Dosažením číselných hodnot ($d_c = 1.3$ mm, $\eta = 0.1$, $I \approx 7,6 \cdot 10^{-9}$ A, $d = 240$ mm, $r = 1,59$ mm) získáme velikost fotonového toku $I_{ph} = 5,8 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$. Výkon lampy určíme na základě fotonové hustoty a znalosti energie vyletujících fotonů. Budeme-li uvažovat jako pracovní plyn He, pak nejintenzivnější spektrální čarou je čára HeI (21,22eV [Cardona and Ley, 1978]). Pro výkon do jednotky prostorového úhlu lze psát

$$P = I_{ph}E = 5,8 \cdot 10^{15} \cdot 21,22 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \approx 0,02 \text{ W} , \quad (7.41)$$

kde E značí energii vyletujících fotonů.

7.2.2 Určení parametrů svazku metodou clon

Pro účely studia fotoemise z prachových zrn je výhodné mít informaci o radiálním rozdělení fotonů ve svazku UV. Protože zachycené prachové zrno kmitá kolem rovnovážné polohy s jistou amplitudou kmitů, je třeba, aby koncentrace fotonů byla v této oblasti maximální (pro maximální fotoelektronový výtěžek). Proto jsem se rozhodl realizovat měření, které by umožnilo alespoň přibližně určit radiální profil svazku a maximální koncentraci fotonů ve svazku. Nabízela se možnost použít sadu clon s různými vnitřními otvory. Tyto clony postupně vkládat na vstupní aperturu bezmřížkového Faradayova válce (FV) (Obr.7.8) a pro každou clonu měřit velikost fotoelektronového proudu. Výsledkem pro parametry výboje ($U_V = 504$ V, $I_V = 82.5$ mA, $p = 0.5$ mbar, $U_{A_1} = -30$ V, $U_{A_2} = -35$ V) jsou naměřená data

$$D = 0.8 \text{ mm}, I_{el} = 78 \text{ pA}, \frac{I_{el}}{D^2} = 122 \frac{\text{pA}}{\text{mm}^2}$$

$$D = 1 \text{ mm}, I_{el} = 127 \text{ pA}, \frac{I_{el}}{D^2} = 127 \frac{\text{pA}}{\text{mm}^2}$$

$$D = 1.3 \text{ mm}, I_{el} = 181 \text{ pA}, \frac{I_{el}}{D^2} = 107.1 \frac{\text{pA}}{\text{mm}^2}$$

$$D = 8 \text{ mm (vstupní apertura FV)}, I_{el} = 2,42 \text{ nA}, \frac{I_{el}}{D^2} = 38 \frac{\text{pA}}{\text{mm}^2} .$$

Z vypočtené poměru $\frac{I_{el}}{D^2}$ je ihned zřejmé, že profil svazku není Gaussovský má spíše tvar rovnoměrného rozdělení, což je v souladu s informacemi uváděnými výrobcem (sice v manuálu k jinému typu lampy UVS 300) [Specs, 2006] pro standardní typ kapiláry. Bohužel z naměřených dat nelze stanovit pološířku svazku. S určitostí lze pouze říct, že pološířka je menší než 4 mm. Uvažujme pro jednoduchost, že koncentrace fotonů ve svazku má rovnoměrné rozdělení s pološířkou γ . Pokud osu svazku ztotožníme s osou z souřadnicového systému, můžeme pro hustoty rozdělení podél zbylých os psát

$$n(x), n(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma} & x \in (-\gamma, \gamma) \\ 0 & x \notin (-\gamma, \gamma) \end{cases} \quad (7.42)$$

Pro hustotu rovnoměrného rozdělení v rovině x,y (koncentraci fotonů) můžeme zřejmě napsat

$$n(x, y) = n(x)n(y)n_{max} = \frac{1}{4\gamma^2}n_{max} . \quad (7.43)$$

Velikost fotoelektronového proudu měřeného pomocí bezmřížkového Faradayova válce (Obr.7.8) bude rovna počtu elektronů, které odtečou z elektrody K Faradayova válce. Počet elektronů je svázán přes kvantový výtěžek ($\eta \approx 0, 1$) s počtem fotonů dopadlých do FV. Tento počet můžeme určit integrací rovnoměrného rozdělení přes velikost a vstupní apertury. Na základě těchto úvah lze určit velikost fotoelektronového proudu dle vztahu

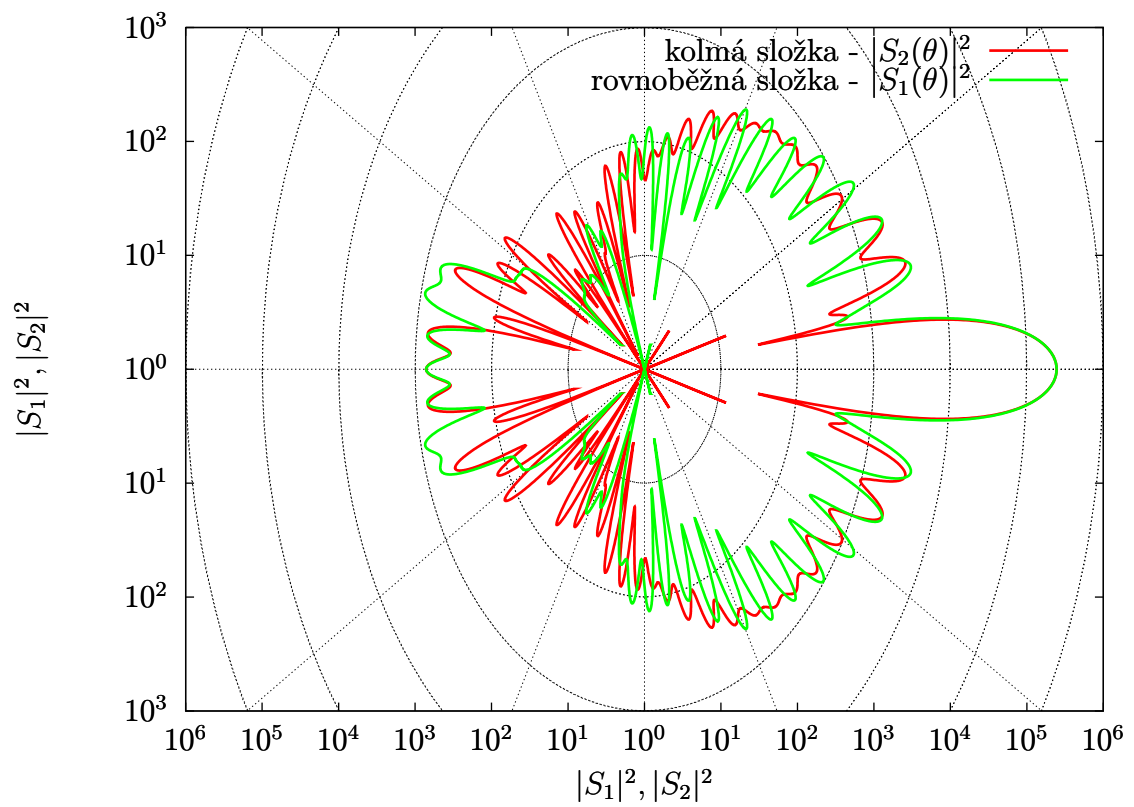
$$I_{el} = e\eta \int_{-a}^a \int_{-a}^a n(x, y) dx dy = \frac{e\eta n_{max} a^2}{\gamma^2} . \quad (7.44)$$

Ze vztahu (7.44) bohužel ani soustavou měření (měření fotoproudů pro různé vstupní apertury) nelze určit neznámé parametry rozdělení n_{max}, a . Velikost fotoproudu se škáluje s poloměrem vstupní apertury, poměr n_{max}/γ^2 zůstává za předpokladu neměnnosti parametrů výboje konstantní. Je zde možnost vytvořit jemnou soustavu clon, tyto clony postupně měnit, měřit velikost fotoelektronového proudu a sledovat poměr I_{el}/a^2 . Poloměr clony, pro který se začne tento poměr měnit, pak bude přibližně roven pološířce svazku. Na základě zjištěné pološířky svazku, měřeného fotoproudu a poloměru otvoru clony můžeme s využitím (7.44) stanovit maximální koncentraci fotonů ve svazku n_{max} , kterou výrobce UV lampy udává v „arbitrary units“ [Specs, 2006].

7.3 Mieův rozptyl UV a červeného laseru

V programu MiePlot¹ lze získat data pro vykreslení kvadrátu amplitudových funkcí odvozených v kapitole o Mieově rozptylu (4.1). Polární diagram pro rozptyl monochromatického červeného světla o vlnové délce $\lambda = 660$ nm na skleněném sférickém zrně o průměru $3 \mu\text{m}$ je znázorněn v (Obr.7.11). Rozptyl této vlnové délky světla je důležitý především z hlediska optické detekce rozptýleného světla nesoucího informaci o vlastních kmitech prachového zrna. Z obrázku vidíme, že nejintenzivnější je dopředný rozptyl, který ovšem není možno použít. Důležitým poznatkem ovšem je, že intenzita rozptýleného světla je přibližně konstantní v úhlu nejméně $\pm 60^\circ$ od osy. To nám udává poměrně velkou volnost při umístění optického systému.

¹<http://www.philiplaven.com/mieplot.htm>



Obr. 7.11: Závilost velikosti rozptýlené intenzity monochromatického světla ($\lambda = 660 \text{ nm}$) na rozptylovém úhlu θ .

Dále jsou vykresleny kvadráty amplitudových funkcí pro rozptyl monochromatických vlnových délky $\lambda = 58.4$ nm (odpovídající energii spektrální čáry HeI) (Obr.7.12) a $\lambda = 30.4$ nm (odpovídající energii spektrální čáry HeII) (Obr.7.13) na skleněném sférickém zrnu se stejným průměrem jako pro případ červeného světla. Rozptylové diagramy pro heliové čáry se tvarem od sebe příliš neliší a ukazují, že je možno očekávat téměř izotropní rozptyl s významným úzkým maximumem proti směru dopadu UV svazku. Konstrukce pasti nedává přílišnou volnost pro umístění zdroje UV záření, z konstrukčních důvodů musí být umístěn v ose kvadrupólu. Proto je úzké dopředné maximum výhodné, protože pouze minimum fotonů bude rozptylováno směrem k elektrodám.

7.4 Sestavení detekční elektroniky UV svazku

7.4.1 Oživení detektoru svazku částic

V rámci své bakalářské práce [Nouzák, 2010] jsem se věnoval návrhu detektoru svazku částic. Pro přenos detektoru (transimpedanci) jsem odvodil vztah (6.45)

$$\widehat{A}_u^{(1)}(\mathbf{p}) = \widehat{A}\widehat{B}\widehat{C} = \frac{A_{u0}^{(1)}}{\left(1 + 2\xi_{42}\frac{\mathbf{p}}{\omega_{42}} + \frac{\mathbf{p}^2}{\omega_{42}^2}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{p}}{\omega_{41}}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{p}}{\omega_{41}}\right)} \quad (7.45)$$

$$\omega_{42} \doteq 1.059 \omega_0 \quad \omega_{41} \doteq 0.944 \omega_0$$

$$\xi_{42} = 0.621$$

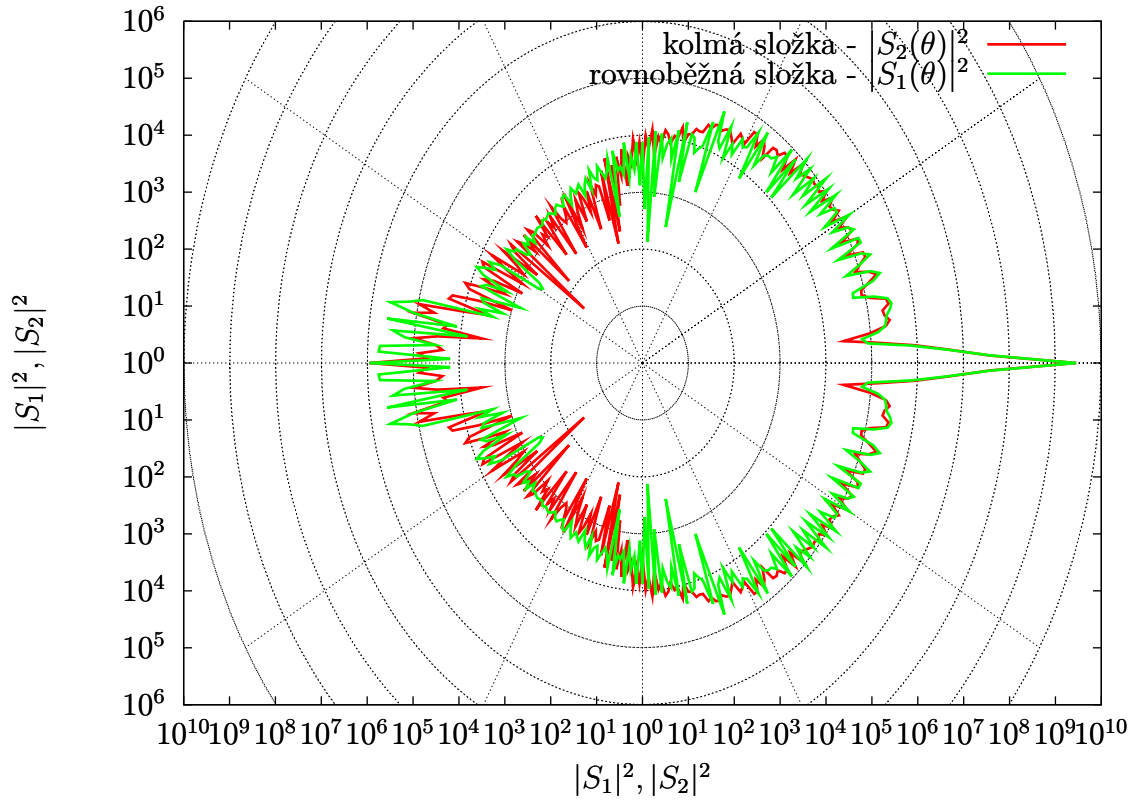
$$A_{u0}^{(1)} = A_0 B_0 = \frac{R_7 R_{24}}{R_6 + R_3} \quad ,$$

kde $A_{u0}^{(1)}$ udává *stejnoseměrnou transimpedanci* filtru. Číselným dosazením za hodnoty odporů ve stejnosměrné transimpedanci ($R_{24} \approx R_2(R_4 + R_5)/R_5$, $R_4 = 75$ k Ω , $R_5 = 1,13$ M Ω , $R_2 = 2$ G Ω , $R_7 = 18$ k Ω , $R_3 = 182$ k Ω , $R_6 = 20$ k Ω) dostaneme koeficient převodu detekovaného proudu částic na napětí

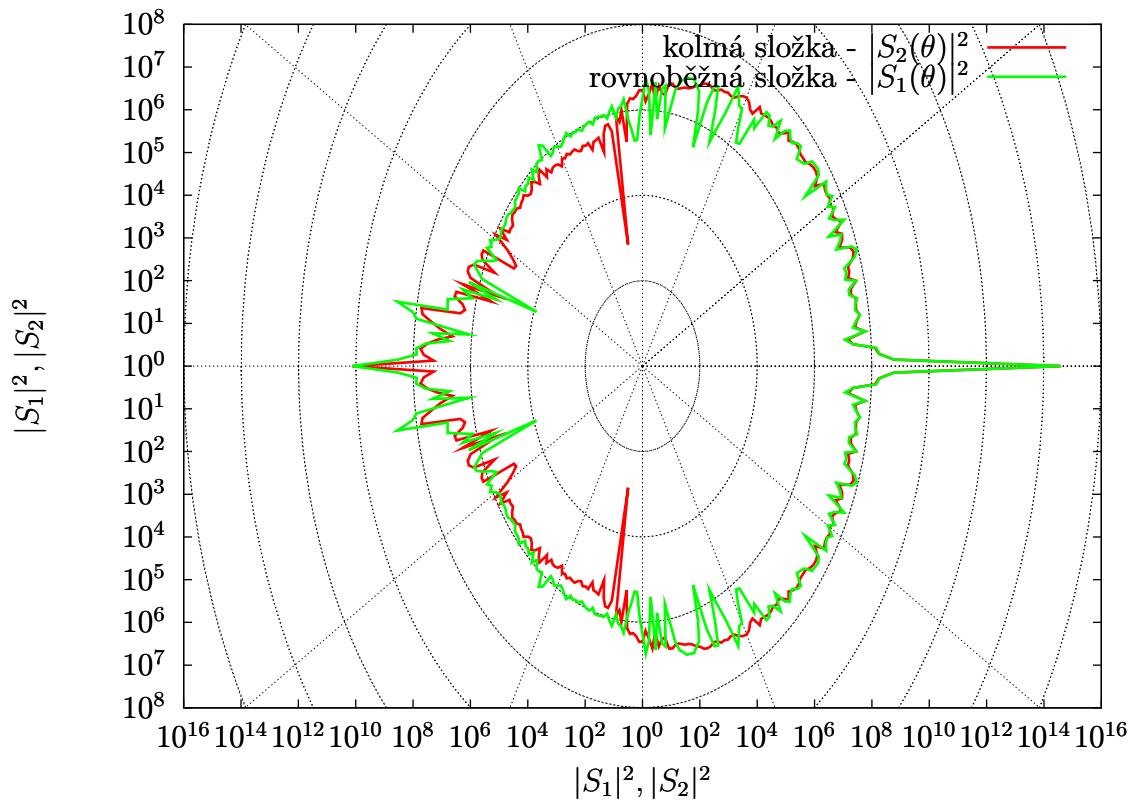
$$U = \frac{R_7 R_{24}}{R_6 + R_3} I \quad (7.46)$$

Toto napětí je dále zpracováno 16bitovým A/D převodníkem ADS1511² ($n = 16$). Na čipu převodníku je umístěn vstupní předzesilovač, který umožňuje nastavit maximální rozsah měřených vstupních napětí ($FS = \pm 2,048$ V - full scale).

²<http://www.ti.com>



Obr. 7.12: Závilost velikosti rozptýlené intenzity monochromatického světla ($\lambda = 58.4$ nm) na rozptylovém úhlu θ .



Obr. 7.13: Závilost velikosti rozptýlené intenzity monochromatického světla ($\lambda = 30.4$ nm) na rozptylovém úhlu θ .

Mezi velikostí měřeného napětí U a dig. číslem Y vypisovaným A/D převodníkem v dvojkovém doplňku platí vztah

$$U = \frac{FS}{2^{n-1}}Y; Y \in [0; 32767] \quad (7.47)$$

$$U = \frac{FS}{2^{n-1}}(Y - 65536); Y \in [32768; 65535] . \quad (7.48)$$

Z výrazů (7.46) a (7.48) a dosazením číselných hodnot je možné získat vztah, který dává do souvislosti měřený proud detektorem a digitální číslo z A/D převodníku

$$I = \frac{FS}{2^{n-1}} \frac{R_6 + R_3}{R_7 R_{24}} Y = \frac{2,048 (20 + 182) \cdot 10^3}{2^{15}} \frac{1,13 \cdot 10^6}{75 \cdot 10^3 + 1,13 \cdot 10^6} Y$$

$$\approx 3,29 \cdot 10^{-13} Y; Y \in [0; 32767] \quad (7.49)$$

$$I = \frac{FS}{2^{n-1}} \frac{R_6 + R_3}{R_7 R_{24}} (Y - 65536)$$

$$\approx 3,29 \cdot 10^{-13} (Y - 65536); Y \in [32768; 65535] . \quad (7.50)$$

Detektor UV svazku umožňuje kromě měření fotoelektronového proudu z elektrody K bezmřížkového Faradayova válce (Obr.7.14), též přivést na elektrody U_{A1}, U_{A2} [Nouzák, 2010] potřebné napětí (až ± 50 V). To je zajištěno pomocí 16 bitového D/A převodníku AD5667R³ ($m = 16$), jehož analogový výstup společně s jeho napěťovou referencí jsou připojeny k rozdílovému operačnímu zesilovači s OPA454. Pro napětí na elektrodě A_1 tak dostaneme

$$U_{A1} = \frac{R_8 + R_9}{R_{10}} (U_{ref} - U_{out}) , \quad (7.51)$$

kde odpory mají hodnoty $R_8 = 100$ k Ω , $R_9 = 100$ k Ω a $R_{10} = 10$ k Ω . Mezi výstupním napětím převodníku U_{out} a vstupním digitálním číslem X platí v případě, kdy je použita napěťová reference $U_{ref} = 2,5$ V na čipu, vztah

$$U_{out} = 2U_{ref} \frac{X}{2^m} . \quad (7.52)$$

Dosazením (7.52) do (7.51) a číselným dosazením můžeme získat vztah mezi napětím U_{A1} na elektrodě A_1 a vstupním digitálním číslem X

$$U_{A1} = \frac{R_8 + R_9}{R_{10}} U_{ref} \left(1 - 2 \frac{X}{2^m} \right) = 50 \cdot \left(1 - \frac{X}{2^{15}} \right); X \in [0; 65535] . \quad (7.53)$$

7.4.2 Napájecí zdroj detektoru

Aby bylo možné s detektory svazků částic měřit, navrhl jsem a vyrobil napájecí zdroj (schéma A.8). Zdroj v sobě obsahuje tři symetrická napětí ± 25 V/100 mA pro napájení elektroniky (detektoru iontů, elektronů a UV) a jedno symetrické napětí ± 50 V/50 mA pro měření fotoelektronového spektra He.

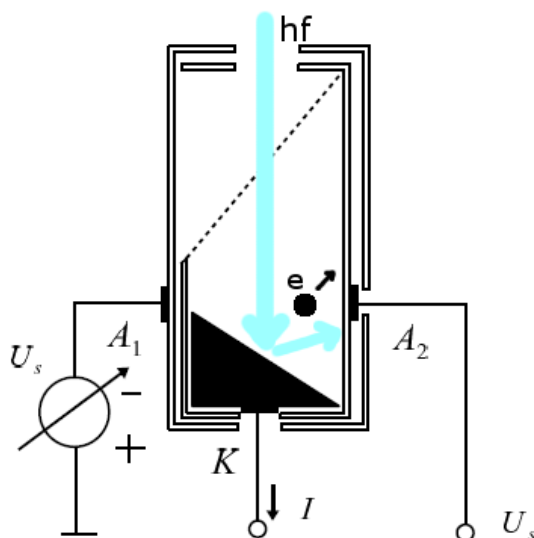
³<http://www.analog.com>

7.4.3 Komunikace s převodníky na desce detektoru

Převodníky umístěné na desce komunikují po sběrnici I^2C . Abych vyzkoušel jejich činnost, připojil jsem ke sběrnici převodník I^2C/USB^4 . Bohužel jsem však nenašel žádný vhodný ovládací software pod Windows. Proto bylo nutné napsat obslužný software, který bude přistupovat k API funkcím umístěným v knihovně libusb.h. Zároveň jsem napsal program pro měření fotoelektronového spektra He a odzkoušel tak správnou činnost detektoru.

7.5 Kalibrace detektoru – měření energetického spektra fotonů

Jako jednoduchý energetický analyzátor fotoelektronů byl použit bezmřížkový Faradayův válec (Obr.7.14).



Obr. 7.14: Geometrie bezmřížkového Faradayova válce.

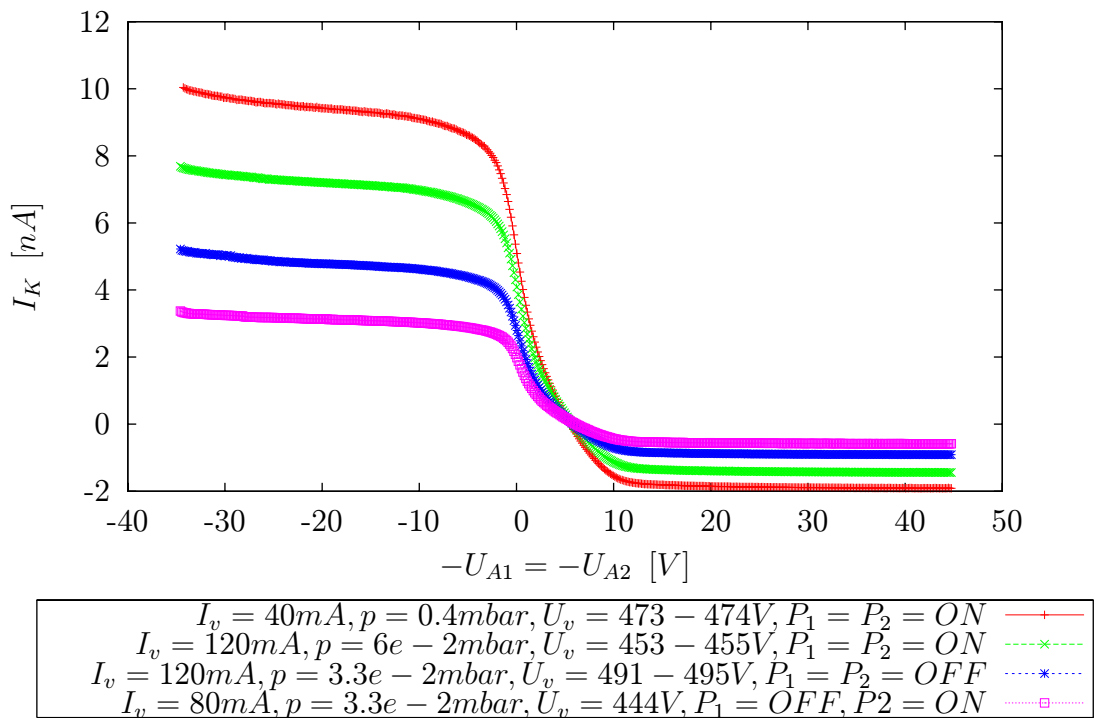
Pomocí přiloženého napětí na elektrody FV A_1 a A_2 lze brzdit vylétující fotoelektrony z K a tak proměřovat jejich energetické spektrum. Maximální kinetická energie vylétujících fotoelektronů je dána vztahem (2.3). Výsledky provedeného měření pro různé pracovní režimy výboje jsou na Obr.7.15. Jedná se v podstatě o energetickou kumulativní rozdělovací funkci avšak matematická kumulativní distribuční funkce začíná z nulové hodnoty. Nesoulad s naměřenou závislostí je způsoben tím, že se ve skutečnosti jedná o dvě kumulativní rozdělovací funkce,

⁴http://www.harbaum.org/till/i2c_tiny_usb/index.shtml

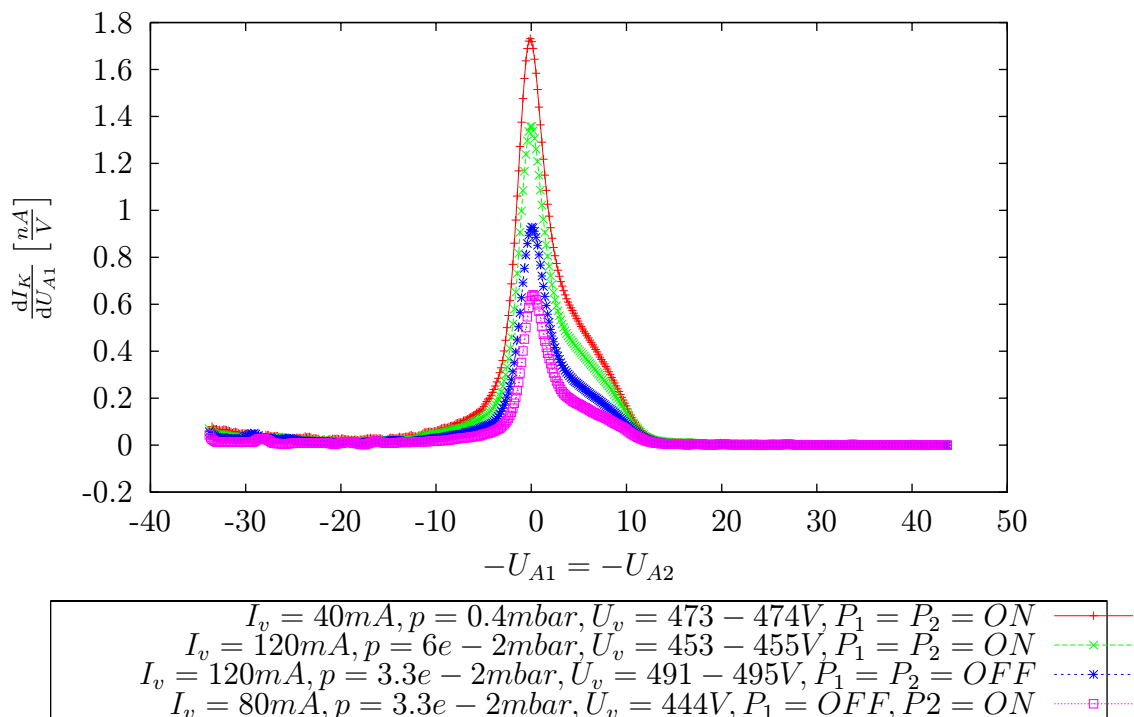
kteřé jsou sečtené. První z nich (s větší hodnotou saturovaného proudu pro kladná napětí) nese informaci o energetickém rozdělení elektronů vyletujících z elektrody K (FV). Druhá (s nižší hodnotou saturovaného proudu pro záporná napětí) poskytuje informaci o energetickém rozdělení fotoelektronů, které vznikají v důsledku odrazu UV svazku od elektrody K (FV) (Obr.7.14). Na základě poměrů těchto saturovaných proudů můžeme usuzovat, jaké množství fotonů z dopadajícího UV svazku se odrazí ($\approx 20\%$).

Numerickou derivací naměřené kumulativní rozdělovací funkce dostaneme energetickou rozdělovací funkci (Obr.7.16). Bohužel takto zjištěná energetická rozdělovací funkce obsahuje energetická rozdělení fotoelektronů obou UV svazků jak absorbovaného, tak odraženého. Pokusme se lépe charakterizovat energetické rozdělení fotoelektronů vyletujících z elektrody K. Za tímto účelem přibližně odečteme od kumulativního energetického rozdělení fotoelektronů z K „pozadí“ fotoelektronů od rozptýleného svazku. Přitom předpokládáme, že obě rozdělení jsou identická. Po odečtení získáme rozdělení na Obr.7.17. Samozřejmě je otázkou, zda nehomogenní el. pole uvnitř (FV) nemodifikuje energetické rozdělení. Za tímto účelem jsem v programu SIMION generoval částice s Maxwell-Boltzmannovým rozdělením energií ($k_B T = 3.5$ eV) a s kosinovým úhlovým rozdělením. Modelovaná rozdělovací funkce je na Obr.7.17 porovnána s naměřenými daty.

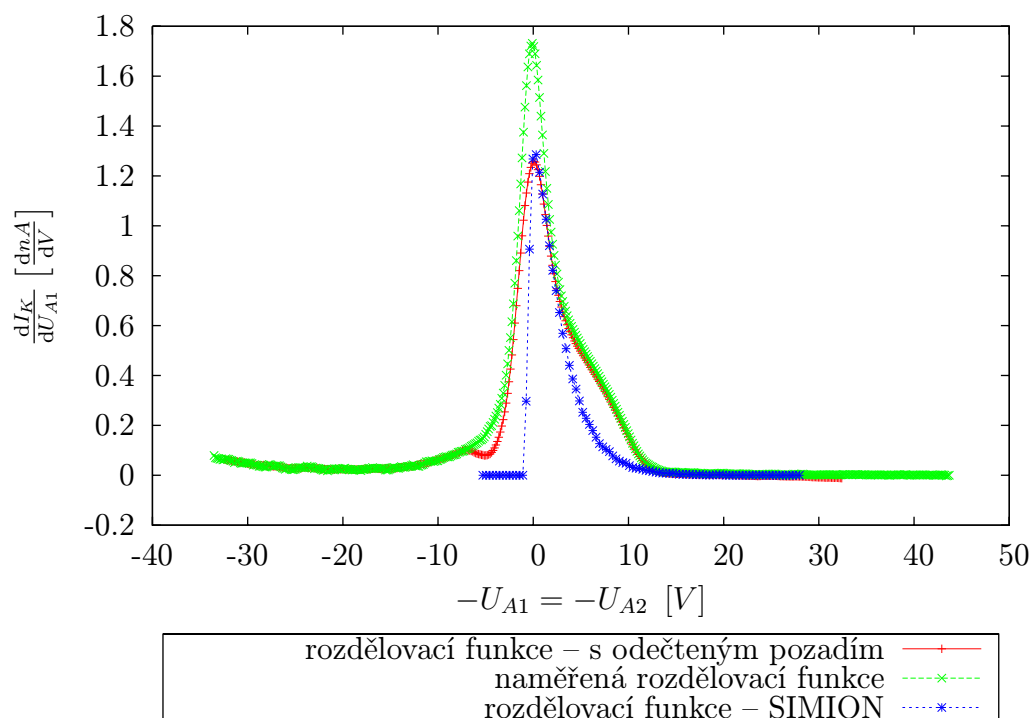
Ze srovnání naměřené energetické rozdělovací funkce a Maxwell-Boltzmannovské rozdělovací funkce získané simulací je patrné, že fotoelektrony vyletující z elektrody K (FV) nemají maxwellovské rozdělení, a že odchylka není způsobena nehomogenním elektrickým polem detektoru. Nicméně můžeme konstatovat, že naprostá většina fotoelektronů má energie menší než 15 eV. Určení mezní energie fotoelektronů, která je očekávána přibližně u 17 eV pro čáru HeI a 35 eV pro čáru HeII, je bohužel mimo možnosti použité metody.



Obr. 7.15: Energetická „kumulativní rozdělovací funkce“ vyletujících fotoelektronů z elektrody K (FV).



Obr. 7.16: Energetická „rozdělovací funkce“ vyletujících fotoelektronů z elektrody K (FV).

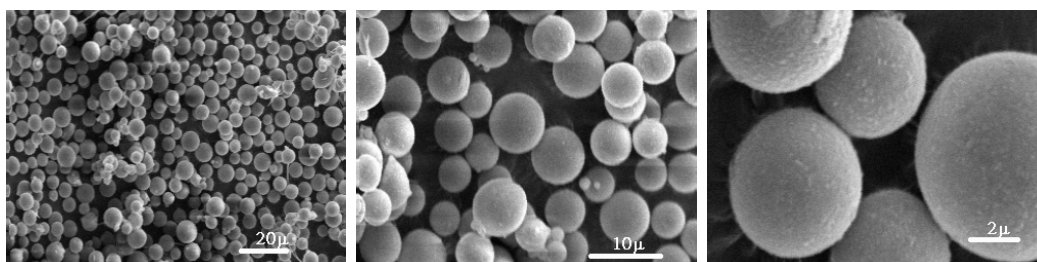


Obr. 7.17: Srovnání Maxwell-Boltzmannova rozdělení ($k_B \cdot T = 3.5 \text{ eV}$) ze SIMIONU s naměřenými daty.

7.6 Měření prachových zrn SiO_2

7.6.1 Zachycení zrna, ověření funkce pasti

Jako měřené vzorky byla použita prachová zrna SiO_2 s průměry v rozsahu 3–8 μm .



Obr. 7.18: Prachová zrna SiO_2 s 3–8 μm v průměru.

Jelikož prachová zrna skla mají poměrně dobře definovaný sférický tvar (Obr.7.18), můžeme pro výpočet jejich kapacity využít vztahu pro kapacitu koule

$$C = 4\pi\epsilon_0 R, \quad (7.54)$$

kde R je poloměr zrna. S využitím vztahu (3.10) a číselným dosazením ($\rho = 2400$

kg/m³ – hustota skla, $R = 3 \mu\text{m}$ – přibližný střední poloměr) můžeme vypočítat měrnou kapacitu prachového zrna

$$C_m = \frac{3\varepsilon_0}{\rho R^2} = \frac{3 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}{(3 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 2400} \doteq 1,2 \frac{\text{mF}}{\text{kg}} . \quad (7.55)$$

Ze zjištěné měrné kapacity a rovnovážného potenciálu, který zrna získá nabíjením elektrony ($\phi \approx 7 \text{ V}$ [Pavlů *et al.*, 2008]), můžeme dle (6.16) stanovit jeho měrný náboj

$$\frac{Q}{m} = C_m \phi = 7 \cdot 1,23 \cdot 10^{-3} \doteq 8,6 \frac{\text{mC}}{\text{kg}} . \quad (7.56)$$

V případě, že bychom nabíjeli UV zářením generovaným He výbojem (převládá čára HeI $E=21,22 \text{ eV}$), můžeme ze znalosti výstupní práce ($W \approx 5 \text{ eV}$) dle (2.4) určit rovnovážný povrchový potenciál

$$\phi = \frac{1}{e} (E - W) = \frac{1}{e} (21,22 - 5) e \doteq 16,2 \text{ V} . \quad (7.57)$$

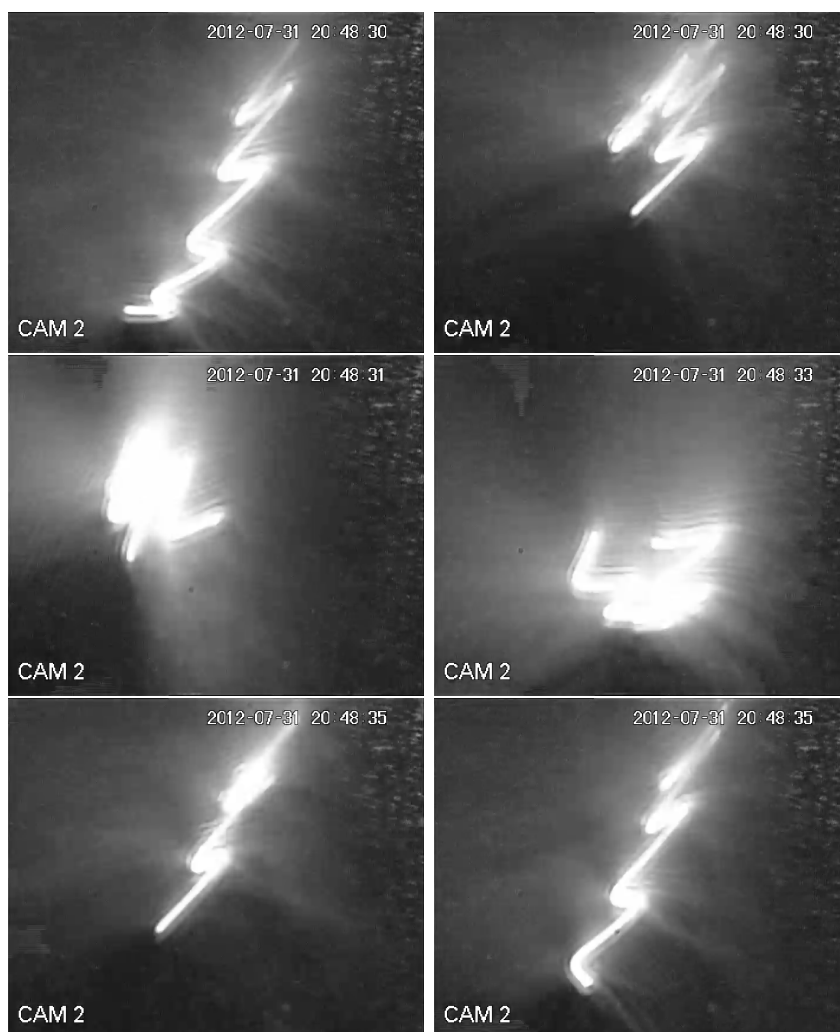
Ze znalosti tohoto potenciálu a měrné kapacity, pro měrný náboj zrna dostaneme

$$\frac{Q}{m} = C_m \phi = 16,2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} \doteq 19,4 \frac{\text{mC}}{\text{kg}} . \quad (7.58)$$

Na základě odhadů měrného náboje zrna, je možné stanovit parametry pasti nutné pro jeho zachycení a udržení. Uvažujme frekvenci zachycené kmitající prachové částice $f_{zrna} = 20 \text{ Hz}$ (frekvence by neměla být příliš nízká, aby frekvence mechanických vibrací nebyla v rezonanci s kmity prachové částice, neboť pak by mohlo snadno dojít k jejímu uvolnění). Aby zachycená částice v pasti spolehlivě držela, je třeba alespoň desetinásobné frekvence budícího napětí pasti $f_{AC} = 200 \text{ Hz}$. Na základě těchto hodnot můžeme s využitím rovnice (6.13) ($\lambda_z = 1.95$, $r_0 = 7.5 \text{ mm}$) vypočítat potřebnou amplitudu potenciálů na elektrodách pasti $V_z = 730 \text{ V}$. Pro experimentálně zjištěné hodnoty $f_{AC} = 222 \text{ Hz}$, $f_{zrna} = 22 \text{ Hz}$ a $V_z = 700 \text{ V}$ zachycená částice, jak je patrné z Obr.7.19, v pasti spolehlivě drží.

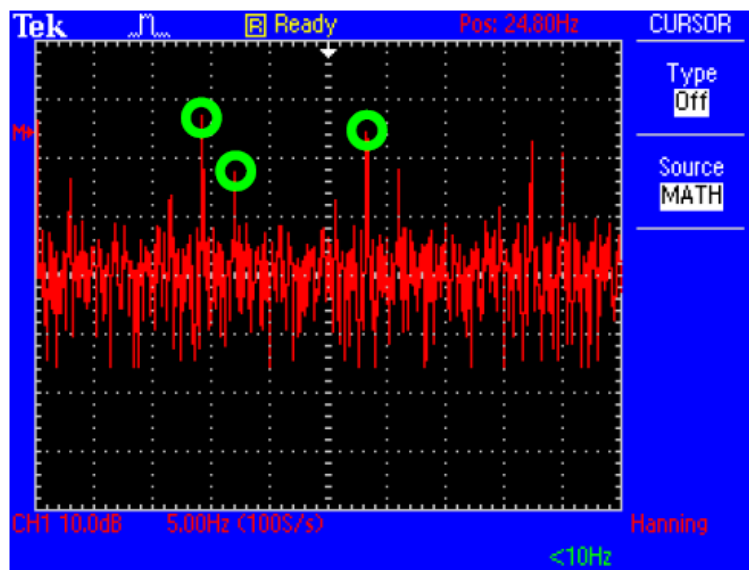
7.6.2 Měření vlastních kmitů zrna pomocí modulace intenzity světla

Jak bylo ukázáno v kapitole (6.2), ze znalosti frekvence vlastních kmitů lze určit měrný náboj prachového zrna. Jelikož však optická detekce s elektronickým tlumením kmitů nebyla externí firmou včas dodána, nezbývala jiná možnost, než zkusit z prostředků, které byly k dispozici, jednoduchou optickou detekci vytvořit. Tato jednoduchá optická detekce spočívala v osvětlení kmitajícího prachového zrna laserovým svazkem a následné detekci rozptýlené intenzity světla obvodem s PIN



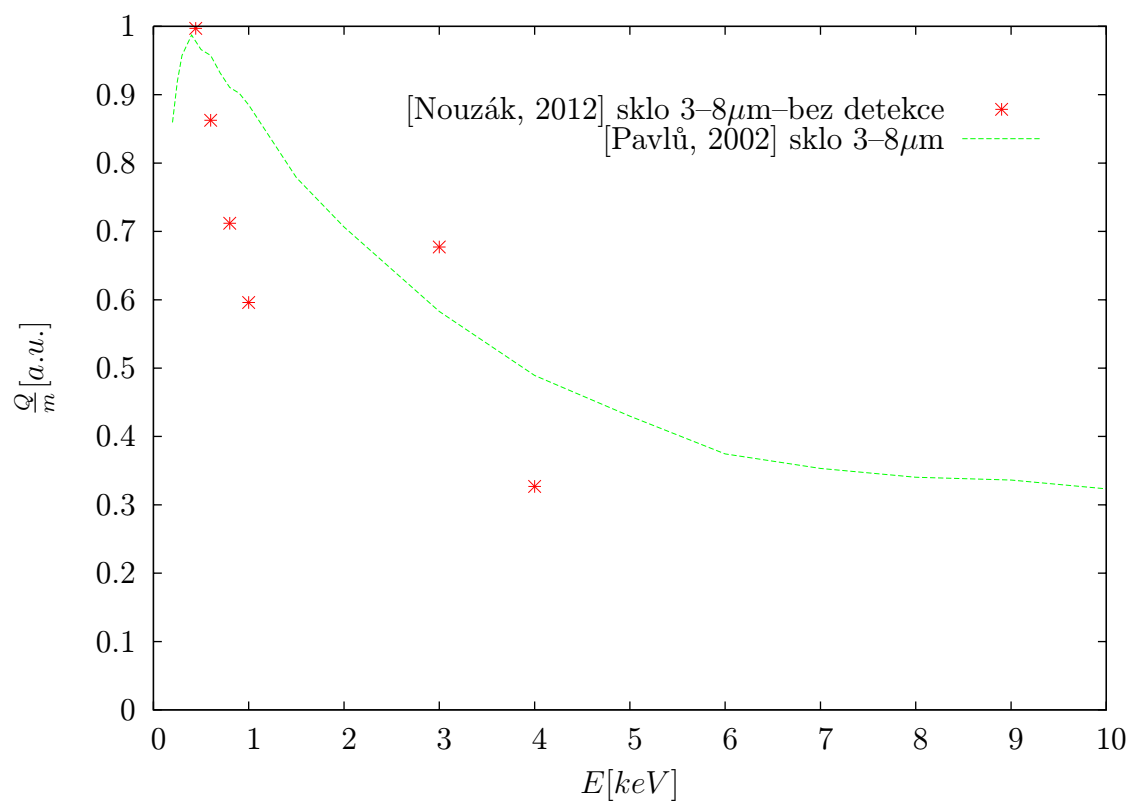
Obr. 7.19: Pohled CCD kamerou na kmitající zachycené prachové zrno.

diodou a operačním zesilovačem. Pomocí připojeného osciloskopu TEKTRONIX 2014 a výpočtem FFT (Fast Fourier Transform) bylo možné pozorovat frekvenční spektrum měřeného signálu. Příklad takového frekvenčního spektra je na Obr. 7.20. V měřeném spektru jsou přítomny spektrální čáry (14 Hz, 17 Hz, 28 Hz), jejichž poměr odpovídá poměru vlastních frekvencí určených vztahem (6.12). Jsou, zde však i spektrální čáry s frekvencemi odpovídajícími součtu a rozdílu vlastních frekvencí, navíc se zde mohou vyskytovat dvojnásobné frekvence související s přechodem obrazu mimo aktivní oblast PIN diody. Analýza takového frekvenčního spektra je pak poměrně náročná. Přesto jsem se pokusil o měření nabíjení pra-



Obr. 7.20: Frekvenční spektrum signálu detekovaného pomocí PIN diody.

chového zrna vlivem SEE pro různé energie dopadajících elektronů. Po dosažení rovnovážného potenciálu jsem měnil energii těchto elektronů a z posuvu frekvencí vlastních kmitů zrna jsem určil odpovídající změnu jeho měrného náboje. Naměřené hodnoty pro několik energií jsou vyneseny v grafu na Obr.(7.21). Ve srovnání s dříve změřenými daty na aparatuře s hyperbolickým tvarem pasti [Pavlů, 2002] je patrná značná nepřesnost použité měřicí metody (až desítky %). Proto je pro další účely studia nabíjecích procesu (včetně fotoeminiho nabíjení) nezbytné mít optickou detekci popisovanou v (6.1) s možností elektrického tlumení. Tím je možné zatlumit nežádoucí vlastní frekvence v ostatních směrech, a tím značně zvýšit intenzitu jedné vlastní frekvence, která nás skutečně zajímá, pomocí úzkopásmového filtru tuto frekvenci vybrat z frekvenčního spektra a pomocí čítače ji změřit s požadovanou přesností.



Obr. 7.21: Zavislost měrného náboje prachového zrna SiO_2 (3–8 μ m) na kinetické energii dopadajících elektronů.

8 ZÁVĚR

Prvořadým úkolem diplomové práce bylo přispět k poznání vlastností nové experimentální aparatury s lineárním kvadrupólem, která se právě vyvíjí na katedře. Hlavní pozornost byla věnována interakci prachových zrn s UV zářením, což je nabíjecí proces, který jsme zatím v naší laboratoři nestudovali. Z těchto důvodů je v práci představeno několik dílčích studií směřujících k lepšímu pochopení jak práce aparatury, tak vlivu práce UV zdroje:

- (1) Monte Carlo numerická simulace potvrdila, že v naší konfiguraci lineárního kvadrupólu dopadá ma elektrody podstatně menší množství rozptýlených elektronů než v hyperbolické variantě a potvrdila tak očekávání.
- (2) Při studiu profilu UV svazku byly nalezeny boční laloky, které pravděpodobně vznikají ohybem na okraji výstupní kapiláry. Jejich vliv byl potlačen geometrickým vystíněním pomocnou clonou. Následné měření ukázalo přibližně rovnoměrný profil vystíněného svazku v oblasti ± 1 mm od středu pasti, což je odhadovaný rozsah kmitů prachových zrn.
- (3) Numerický výpočet rozptylu červeného světla na prachovém zrnu umožnil stanovit optimální geometrii detekční optiky. Obdobný výpočet pro rozptyl UV záření bude sloužit ke stanovení efektu fotoemise z elektrod pasti na měření náboje prachových zrn.
- (4) Byla realizována elektronická část detektoru UV záření, která byla ideově navržena v bakalářské práci.
- (5) Bylo provedeno předběžné měření energetického spektra fotoelektronů, generovaných na kolektoru K Faradayova válce. Měření ukázalo, že přibližně 20% UV fotonů se od kolektoru odráží a generuje fotoproud z dalších elektrod Faradayova válce. Použitá metoda není dostatečně citlivá pro určení dlouhovlnné meze fotoefektu, ale přesto se podařilo změřit základní rozdělení generovaných fotoelektronů a porovnáním s numerickou simulací i jeho teplotu.
- (6) Nejvýznamnější výsledek práce je první měření nabíjení prachového zrna zdrojem elektronů. Přestože nebyla doposud dodána (externí firmou) optická detekce polohy zrna v kvadrupólu, pokusili jsme se alespoň předběžně toto pozorování provést v provizorních podmínkách. Pro určení poměru $\frac{Q}{m}$ zachycené SiO_2 prachové částice (o velikosti 3-8 μm) jsme použili analýzu frekvenčního spektra ze světla rozptýleného na zrnu. Takto získaná závislost

měrného náboje na energii primárních elektronů ukázaná na Obr.7.21 dokazuje, přes velký rozptyl experimentálních bodů, že budoucí měření budou úspěšná. V obrázku je i porovnání s dřívějšími měřeními na aparatuře s hyperbolickým kvadrupólem, které naznačuje, že trend závislosti je správný.

Závěrem můžem konstatovat, že veškeré úkoly práce byly splněny.

LITERATURA

- M. M. Abbas, D. Tankosic, P. D. Craven, J. F. Spann, A. LeClair, E.A. West, J. C. Weingartner, A. G. G. M. Tielens, J. A. Nuth, R.P. Camata, and P. A. Gerakines. Photoelectric emission measurements on the analogs of individual cosmic dust grains. *Astrophys. J.*, 645:324–336, March 2006.
- S. Arnold and N. Hessel. Photoemission from single electrodynamically levitated micro-particles. *Rev. Sci. Instrum.*, 56:2066–2069, 1985.
- A. Barkan, N. D'Angelo, and R. L. Merlino. Charging of dust grains in a plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 73(23):3093–3096, December 1994.
- J. Bednář. *Pozoruhodné jevy v atmosféře*. Academia, Praha, 1980.
- M. Beránek, I. Čermák, Z. Němeček, and J. Šafránková. Trapping charged micro-particles in the linear quadrupole trap. In *Proceedings of contributed papers WDS -- part II*, pages 112–120. Matfyzpress (Praha), 2010.
- J. L. Bohn and F. H. Nadig. Acoustical studies with v-2 rockets. *Research Institute of Temple University*, Report 8, 1950.
- L. E. Brus. A simple model for the ionization potential, electron affinity, and aqueous redox potentials of small semiconductor crystallites. *J. Chem. Phys.*, 79(11):5566–5571, 1983.
- M. Cardona and L. Ley. *Photoemission in Solids I*. Springer Berlin, New York, 1978.
- P. Debye. Der lichtdruck auf kugeln von beliebigem material. *Ann. Phys.-Berlin*, 335(11):57–136, Mai 1909.
- B. T. Draine and E. E. Salpeter. On the physics of dust grains in hot gas. *Astrophys. J.*, 231(1):77–94, 1979.
- B. T. Draine. Photoelectric heating of interstellar gas. *Ap.J.Suppl.*, 36(4):595–619, 1978.
- I. Čermák, E. Grün, and J. Švestka. New results in studies of electric charging of dust particles. *Adv. Space Res.*, 15(10):(10)59–(10)64, 1995.
- I. Čermák. Laboruntersuchung elektrischer aufladung kleiner staubteilchen. Dissertation, MPI-K Heidelberg, 1994.

- H. Fechtig. *Historical perspectives - Rise and Fall of the Earth's Dust Belt in Interplanetary Dust*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2001.
- R. H. Fowler. The analysis of photoelectric sensitivity curves for clean metals at various temperatures. *Phys. Rev.*, 38:45–56, July 1931.
- C. F. Gallo and W. L. Lama. Classical electrostatic description of the work function and ionization energy of insulators. *IEEE Trans. Ind. Appl.*, IA-12(1):7–11, January/February 1976.
- D. Gerlich. Inhomogeneous rf fields: A versatile tool for the study of processes with slow ions. *Adv. Chem. Phys.*, 82(1), 1992.
- P. Žilavý, Němeček Z., and Šafránková J. Size and density determination of a spherical particle in the dust charging experiment. In *Proceedings of contributed papers WDS -- part II*, page 252–257. Matfyzpress (Praha), 1999.
- M. Kerker. *The scattering of light*. Academic press, New York, 1969.
- G. Makov, A. Nitzan, and L. E. Brus. On the ionization-potential of small metal and dielectric particles. *J. Chem. Phys.*, 88(8):5076–5085, April 1988.
- P. Malý. *Optika*. Number ISBN 978-80-246-1342-0. Karlova Univerzita v Praze, Karolinum, Praha, 2008. První vydání.
- J. E. McCoy and D. R. Criswell. Evidence for a high altitude distribution of lunar dust. *Proc. Lunar Sci. Conf. 5th*, 3:2991—3005, March 1974.
- G. Mie. Beiträge zur optike trüber medien. *Ann. Phys.-Berlin*, 25(3):377–445, Januar 1908.
- Z. Němeček, J. Pavlů, Šafránková, I. J. Richterová, and I. Čermák. Secondary emission from small spherical grains. *AIP Conf. Proc.*, 649:378–381, December 2002.
- L. Nouzák. Systém stabilizace proudu zdrojů částic. Bakalářská práce, MFF UK Praha, 2010.
- J. Pavlů, I. Richterová, Z. Němeček, J. Šafránková, and I. Čermák. Interaction between single dust grains and ions or electrons: laboratory measurements and their consequences for the dust dynamics. *Faraday Discuss.*, 137:139—155, March 2007 2008.

- M. A. Pelizzari and D. R. Criswell. Differential photoelectric charging of nonconducting surfaces in space. *J. Geophys. Res.*, 83(A11):5233–5244, 1978.
- A. Rotundi and F. J. M. Rietmeijer. *Carbon in Meteoroids: Wild 2 Dust Analyses, IDPs and Cometary Dust Analogues*. Springer, New York, 2007.
- M. S. Sodha and A. Dixit. Photoelectrical charging of dust particle: Effect of spontaneous and light induced field emission of electrons. *Appl. Phys. Lett.*, 95(10):101502–1–101502–3, August 2009.
- Specs. Small spot uv source. Technical report, SPECS, 2006.
- J. A. Stratton. *Electromagnetic theory*. McGraw-Hill Book Company, New York and London, 1941.
- T. J. Stubbs, R. R. Vondrak, and W. M. Farrell. A dynamic fountain model for lunar dust. *Adv. Space Res.*, 37:59–66, April 2006.
- W. D. Watson. Photoelectron emission from small spherical particles. *J. Opt. Soc. Am.*, 63(2):164–165, February 1973.
- J. C. Weingartner and B. T. Draine. Photoelectric emission from interstellar dust: grain charging and gas heating. *Astrophys. J. Suppl. S.*, 134(4):263–281, June 2001.
- J. C. Weingartner, B. T. Draine, and D. K. Barr. Photoelectric emission from dust grains exposed to extreme ultraviolet and x-ray radiation. *Astrophys. J.*, 645(2):1188–1197, July 2006.

A DODATKY

A.1 Sommerfeldův model - frekvence nárazů na povrchovou bariéru

Počet stavů $N(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ ve fázovém prostoru je dán Fermi-Diracovým rozdělením

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{p})d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p} = \frac{2}{h^3} \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{k_B T}}} d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p} . \quad (\text{A.1})$$

Pro počet stavů s hybností $d^3\mathbf{p}$ tedy platí

$$N(\mathbf{p})d^3\mathbf{p} = \frac{2V}{h^3} \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{k_B T}}} d^3\mathbf{p} , \quad (\text{A.2})$$

kde V je objem systému s daným počtem stavů. Vztáhneme-li počet stavů systému $N(\mathbf{p})$ s hybností \mathbf{p} na jeho objem V můžeme určit *hustotu stavů*

$$n(\mathbf{p})d^3\mathbf{p} = \frac{N(\mathbf{p})}{V}d^3\mathbf{p} = \frac{2}{h^3 \left(1 + e^{\frac{E-E_F}{k_B T}}\right)} d^3\mathbf{p} . \quad (\text{A.3})$$

Rozepsáním diferenciálů lze výraz přepsat do tvaru

$$n(p_x, p_y, p_z)dp_x dp_y dp_z = \frac{2dp_x dp_y dp_z}{h^3 \left(1 + e^{\frac{E-E_F}{k_B T}}\right)} . \quad (\text{A.4})$$

Integrací přes impulzy dp_y a dp_z můžeme získat hustotu stavů s impulzem dp_x , tj. hustotu stavů s impulzem kolmým k povrchu.

Proveďme tuto integraci

$$\begin{aligned} n(p_x)dp_x &= \frac{2}{h^3} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{k_B T}}} \\ &= \frac{2}{h^3} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - E_F}} dp_y dp_z \end{aligned}$$

Přejděme do polárních souřadnic

$$\begin{aligned} p_x &= p_x \\ p_y &= p_\rho \cos \varphi \\ p_z &= p_\rho \sin \varphi \end{aligned}$$

kde $p_\rho \in (0; \infty)$ a $\varphi \in (0; 2\pi)$.

Jakobián transformace souřadnic má tvar

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_y}{\partial p_\rho} & \frac{\partial p_y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial p_z}{\partial p_\rho} & \frac{\partial p_z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi p_\rho \\ \sin \varphi & \cos \varphi p_\rho \end{pmatrix}$$

Determinant Jakobiánu je

$$\det \mathbf{J} = p_\rho \cos^2 \varphi + p_\rho \sin^2 \varphi = p_\rho . \quad (\text{A.5})$$

Pokračujme v integraci

$$\begin{aligned} n(p_x)dp_x &= \frac{2}{h^3} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - E_F}{2m k_B T}}} dp_y dp_z \\ &= \frac{2}{h^3} dp_x \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{p_\rho}{1 + \exp\left(\frac{\frac{p_x^2 + p_\rho^2}{2m} - E_F}{k_B T}\right)} d\varphi dp_\rho \\ &= \frac{2}{h^3} dp_x 2\pi \int_0^{\infty} \frac{p_\rho}{1 + \exp\left(\frac{\frac{p_x^2 + p_\rho^2}{2m} - E_F}{k_B T}\right)} dp_\rho \end{aligned}$$

Zavedním substitute

$$u = \frac{\frac{p_x^2 + p_\rho^2}{2m} - E_F}{k_B T} \quad (\text{A.6})$$

je možné integrál převést na tvar

$$n(p_x)dp_x = \frac{4\pi m k_B T}{h^3} \int \frac{1}{1 + e^u} du dp_x . \quad (\text{A.7})$$

Nyní vypočteme tento integrál

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + e^u} du &= \int \frac{1}{e^{-u}e^u + e^u} = \int \frac{e^{-u}}{1 + e^{-u}} du \\ &= - \int \frac{1}{v} dv = - \ln v = \ln \frac{1}{v} = - \ln(1 + e^{-u}) , \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

kde jsme použili substitute $v = 1 + e^{-u}$. Využitím tohoto integrálu je možné pro hustotu stavů $n(p_x)$ s impulzem p_x psát

$$\begin{aligned} n(p_x)dp_x &= \frac{4\pi m k_B T}{h^3} \left[- \ln \left(1 + \exp \frac{E_F - \frac{p_x^2 + p_\rho^2}{2m}}{k_B T} \right) \right]_0^\infty dp_x \\ &= \frac{4\pi m k_B T}{h^3} \ln \left(1 + \exp \frac{E_F - \frac{p_x^2}{2m}}{k_B T} \right) dp_x \end{aligned}$$

Nyní spočteme frekvenci „nárazů“ elektronu na povrchovou bariéru (počet nárazů za jednu s na jednotkovou plochu) jako

$$d\nu_x = n(p_x)v_x dp_x \quad (\text{A.9})$$

Dosazením za hustotu stavů, vyjádřením x -ové složky hybnosti pomocí energie a rychlosti elektronu

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{p_x^2}{2m} \\ \frac{dE_x}{dp_x} &= \frac{p_x}{m} \\ v_x &= \frac{p_x}{m} , \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

dostaneme pro *frekvenci nárazů* výraz

$$\boxed{d\nu_x = \frac{4\pi m k_B T}{h^3} \ln \left[1 + \exp \left(\frac{E_F - E_x}{k_B T} \right) \right] dE_x} . \quad (\text{A.11})$$

A.2 Řešení Helmholtzovy rovnice ve sfér. souřadnicích

Helmholtzova rovnice pro skalární funkci Π má v kartézských souřadnicích tvar

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0 . \quad (\text{A.12})$$

Přejdeme do sférických souřadnic $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$. Využitím znalosti tvaru Laplaceova operátoru ve sférických souřadnicích získá rovnice (A.12) tvar

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} + k^2 \Pi = 0 . \quad (\text{A.13})$$

Skalární funkci $\Pi(r, \theta, \varphi)$ budeme uvažovat v separabilním tvaru

$$\Pi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) = R(r)\phi(\varphi)\Theta(\theta) . \quad (\text{A.14})$$

S využitím tohoto předpokladu je možné rovnici (A.13) přepsat na

$$Y \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} R \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + k^2 R Y r^2 = 0 . \quad (\text{A.15})$$

Podělíme-li tuto rovnici RY a uvážíme-li, že obě vzniklé separované rovnice se musí rovnat téže konstantě (označme ji $n(n+1)$), dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + r^2 k^2 = n(n+1) \quad (\text{A.16})$$

$$-\frac{1}{Y \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right] = n(n+1) , \quad (\text{A.17})$$

kde první rovnice popisuje chování radiální části funkce Π , druhá část úhlovou. Zaměřme se nyní na řešení radiální části. Rovnici (A.16) prepíšeme do tvaru

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} r^2 + 2r \frac{\partial R}{\partial r} + R [r^2 k^2 - n(n+1)] . \quad (\text{A.18})$$

Tato diferenciální rovnice se nazývá *Besselovou rovnicí* a jejím řešením jsou *sférické Besselovy funkce* j_n a y_n viz. (A.3) Nyní věnujme pozornost řešení úhlové části. Úhlovou závislost můžeme rozseparovat

$$Y(\theta, \varphi) = \phi(\varphi)\Theta(\theta) \quad (\text{A.19})$$

a rovnici (A.17) tak přepsat do tvaru

$$\phi \frac{1}{\sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \Theta \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \phi \Theta [n(n+1)] = 0 . \quad (\text{A.20})$$

Vynásobením této rovnice $\sin^2 \theta$ a jejím podělením $\Theta \phi$ je možné rovnice upravit do separabilního tvaru

$$\sin^2 \theta \left[\frac{1}{\Theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + n(n+1) \right] = m^2 \quad (\text{A.21})$$

$$-\frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = m^2 , \quad (\text{A.22})$$

kde m^2 je separační konstanta. Tímto jsem získali soustavu neprovázaných diferenciálních rovnic

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \phi m^2 = 0 \quad (\text{A.24})$$

A.3 Sférické Besselovy a Hankelovy funkce

Při řešení Helmholtzovy rovnice ve sférických souřadnicích separací proměných získáme pro radiální část *Besselovu rovnici*

$$\boxed{x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + [x^2 - n(n+1)] y = 0} . \quad (\text{A.25})$$

Za dvě lineárně nezávislá řešení (A.25) lze zvolit *sférickou Besselovu funkci*

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad (\text{A.26})$$

a *sférickou Neumannovu funkci*

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-\frac{1}{2}}(x) , \quad (\text{A.27})$$

kde J_n jsou *Besselovy funkce* (Besselovy funkce prvního druhu) a Y_n jsou *Neumannovy funkce* (Besselovy funkce druhého druhu). Besselova funkce řádu n je definována vztahem

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}} , \quad (\text{A.28})$$

kde $\Gamma(z)$ je *gamma funkce*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt . \quad (\text{A.29})$$

Neumannova funkce je pro $n = l$ ($l \in \mathbb{Z}$) definována vztahem

$$N_l(x) = \lim_{n \rightarrow l} \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} . \quad (\text{A.30})$$

Pro případ n různého od celého čísla je pak Neumannova funkce definována jako

$$N_n(x) = \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} . \quad (\text{A.31})$$

Jinou možností dvojice nezávislých řešení rovnice (A.25) jsou *sférické Hankelovy funkce* definované vztahy

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x) \quad (\text{A.32})$$

$$h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - iy_n(x) . \quad (\text{A.33})$$

A.4 Přidružené Legendreovy funkce

Přidružená Legendrova funkce m -tého řádu, l -tého stupně je definována jako

$$P_l^m(x) \equiv \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l , \quad (\text{A.34})$$

kde l je celé nezáporné číslo a m je celé číslo v intervalu $|m| \leq l$. Je možné si všimnout, že $P_l^m(\cos \theta)$ představuje polynom v $\cos \theta$ a $\sin \theta$. Pro případ $m = 0$ definuje pravá strana formule *Legendrovy polynomy*

$$P_l^0(x) = P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l . \quad (\text{A.35})$$

Je zřejmé, že pro případ $m > 0$ platí

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) . \quad (\text{A.36})$$

Kromě toho ještě dále platí

$$\begin{aligned} P_l^{-m}(x) &= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \\ P_l^m(-x) &= (-1)^{l+m} P_l^m(x) \\ P_l^m(1) &= \delta_{m0} . \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Sousední tři stupně přidružených Legendreových funkcí jsou mezi sebou svázány vztahem

$$x P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1} [(l+1-m) P_{l+1}^m(x) + (l+m) P_{l-1}^m(x)] . \quad (\text{A.38})$$

Dá se ukázat, že přidružené Legendreovy funkce jsou ortogonální, tj. platí relace ortogonalit

$$\int_{-1}^1 P_k^m(x) P_l^m(x) dx = 2 \frac{(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{kl} . \quad (\text{A.39})$$

A.5 Sférické harmonické funkce

Sférické harmonické funkce Y s parametry l, m lze psát jako

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta), \quad (\text{A.40})$$

kde P_l^m jsou *přidružené Legendrovy funkce*. Pro sférické harmoniky platí následující:

- *ortonormalita*

$$\int_0^{4\pi} Y_l^m Y_l^{m*} d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_l^m Y_l^{m*} \sin\theta d\varphi d\theta = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{A.41})$$

- *relace úplnosti*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta', \varphi') = \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\varphi - \varphi'), \quad (\text{A.42})$$

kde $\delta(x)$ je *Diracova delta funkce*.

- *komplexní sdružení (konjugace)*

$$Y_l^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_l^{m*}(\theta, \varphi). \quad (\text{A.43})$$

- *parita*

Přechod $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ odpovídá ve sférických souřadnicích zaměně $(\theta, \varphi) \rightarrow (\pi - \theta, \pi + \varphi)$.

$$Y_l^m(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{A.44})$$

Alternativní sadu sférických harmonik bez imaginární části lze napsat ve tvaru

$$Y_l^m = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} [(-1)^m Y_l^m + Y_l^{-m}] \\ Y_l^0 \\ \frac{1}{i\sqrt{2}} [(-1)^m Y_l^m - Y_l^{-m}] \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

A.6 Řešení Mathieuovy diferenciální rovnice

Mathieuova diferenciální rovnice má tvar

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} + [a - 2q \cos(2x)] y = 0} . \quad (\text{A.46})$$

Substitucí $t = \cos(x)$ je možné převést Mathieuovu rovnici do algebraického tvaru

$$(1 - t^2) \frac{dy^2}{dt^2} - t \frac{dy}{dt} + (a + 2q(1 - 2t^2))y = 0 . \quad (\text{A.47})$$

Řešení rovnice (A.46) lze hledat několika postupy. Řešení založené na základě *Floquetova teoremu* (či Blochova teoremu) si zde ukážeme. Podle tohoto teoremu je možné řešení rovnice (A.46) hledat ve tvaru součinu rovinné vlny a periodické funkce

$$y(a, q, x) = e^{ikx} P(a, q, x) \quad (\text{A.48})$$

nebo

$$y(a, q, x) = e^{-ikx} P(a, q, x) , \quad (\text{A.49})$$

kde $P(a, q, x)$ je periodická funkce. Obecné řešení lze hledat ve tvaru lineární kombinace (A.48) a (A.49)

$$y(a, q, x) = Ae^{ikx} P(a, b, x) + Be^{-ikx} P(a, b, -x) . \quad (\text{A.50})$$

Jelikož funkce $P(a, b, x)$ je periodická lze ji rozepsat do *Fourierovy řady*

$$P(a, b, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(a, b) e^{2inx} \quad (\text{A.51})$$

s Fourierovými koeficienty $C_n(a, b)$ a bází e^{2inx} příslušného L^2 prostoru. V souladu s výrazem (A.50) lze obecné řešení hledat ve tvaru řady

$$y(a, b, x) = Ae^{ikx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{1n}(a, b) e^{2inx} + Be^{-ikx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}(a, b) e^{-2inx} . \quad (\text{A.52})$$

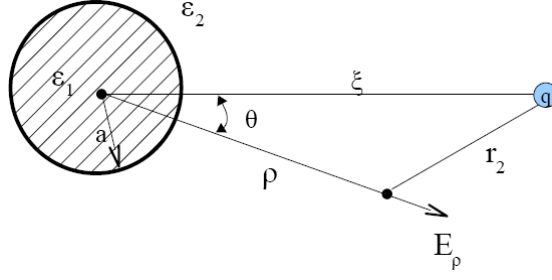
A.7 Dielektrická koule v poli bodového náboje

Předpokládejme kouli o nulové vodivosti o poloměru a , jejíž střed je umístěn ve středu souřadnicového systému. Sféra s permitivitou ε_1 je vložena do homogenního izotropního dielektrika o permitivitě ε_2 . Na ose z ve vzdálenosti ($z = \xi > a$) je umístěn bodový náboj q (A.7). Chtěli bychom nalézt potenciál vně a uvnitř sféry. Označme potenciál ϕ_0 jako potenciál bodového náboje q umístěného na ose z . ϕ_1 označíme potenciál indukovaného náboje na sféře v důsledku polarizace dielektrika sféry. Pro výsledný potenciál vně sféry zřejmě platí

$$\phi^{OUT} = \phi_0 + \phi_1 \quad (\text{A.53})$$

Potenciál určíme řešením Laplaceovy rovnice ve sférických souřadnicích. Obecně lze pro potenciál ϕ_1 psát

$$\phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(a_{nm} r^n + \frac{b_{nm}}{r^{n+1}} \right) P_n^m(\cos \theta) e^{im\theta} , \quad (\text{A.54})$$



Obr. A.1: Dielektrická koule v poli bodového náboje

kde a_{nm} a b_{nm} jsou libovolné konstanty. Jelikož však potenciál musí být pro velká r konečný, musí být koeficienty $a_{nm} = 0$. Mimo to je potenciál ϕ_0 symetrický kolem osy z , proto je v tomto případě $m = 0$. Potenciál indukovaného náboje ϕ_1 může být reprezentován řadou

$$\phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) . \quad (\text{A.55})$$

Jak už bylo řečeno je potenciál ϕ_0 dán bodovým nábojem q umístěným na ose z . Je možné ho zapsat ve sférických souřadnicích formou řady pomocí Legendrových polynomů

$$\phi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\xi}\right)^n P_n(\cos \theta) . \quad (\text{A.56})$$

Pro potenciál vně dielektrické koule dle (A.53) dostaneme

$$\phi^{OUT} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q}{\xi} \left(\frac{r}{\xi}\right)^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos \theta) . \quad (\text{A.57})$$

Z tvaru potenciálu je patrné, že pro velmi malé vzdálenosti r (blízko středu sféry) potenciál diverguje. Proto tvar (A.57) nepopisuje potenciál uvnitř sféry. Proto se uchýlíme k alternativnímu řešení Laplaceovy rovnice, tak že koeficienty b_{nm} položíme v (A.54) rovny nule. V libovolném bodě uvnitř sféry je potenciál

$$\phi^{IN} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) . \quad (\text{A.58})$$

Ze spojitosti potenciálu

$$\phi^{OUT}(a) = \phi^{IN}(a) \quad (\text{A.59})$$

a normálových složek $\mathbf{D}_i = \epsilon_i \mathbf{E}_i$ ($\nu = 0$)

$$\epsilon_2 \frac{\partial \phi^{OUT}}{\partial r}(a) = \epsilon_1 \frac{\partial \phi^{IN}}{\partial r}(a) \quad (\text{A.60})$$

na hranici ($r = a$) můžeme určit zatím neznámé koeficienty a_n a b_n

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{q}{4\pi\xi^{n+1}} \frac{2n+1}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2} \\ b_n &= \frac{qa^{2n+1}}{4\pi\xi^{n+1}} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{n}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2} . \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Pro potenciál v libovolném bodě nad sférou dostáváme

$$\phi^{OUT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \frac{q}{r_2} + \frac{q}{4\pi} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2} \frac{a^{2n+1}}{\xi^{n+1}} \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} , \quad (\text{A.62})$$

zatím co pro potenciál uvnitř sféry platí

$$\phi^{IN} = \frac{q}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2} \frac{r^n}{\xi^{n+1}} P_n(\cos\theta) . \quad (\text{A.63})$$

A.8 Operátory ve sférických souřadnicích

Ve sférických souřadnicích r, θ, φ je

$$\nabla_r = \frac{\partial}{\partial r}, \nabla_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \nabla_\varphi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} . \quad (\text{A.64})$$

Pro divergenci vektoru \mathbf{A} dostaneme

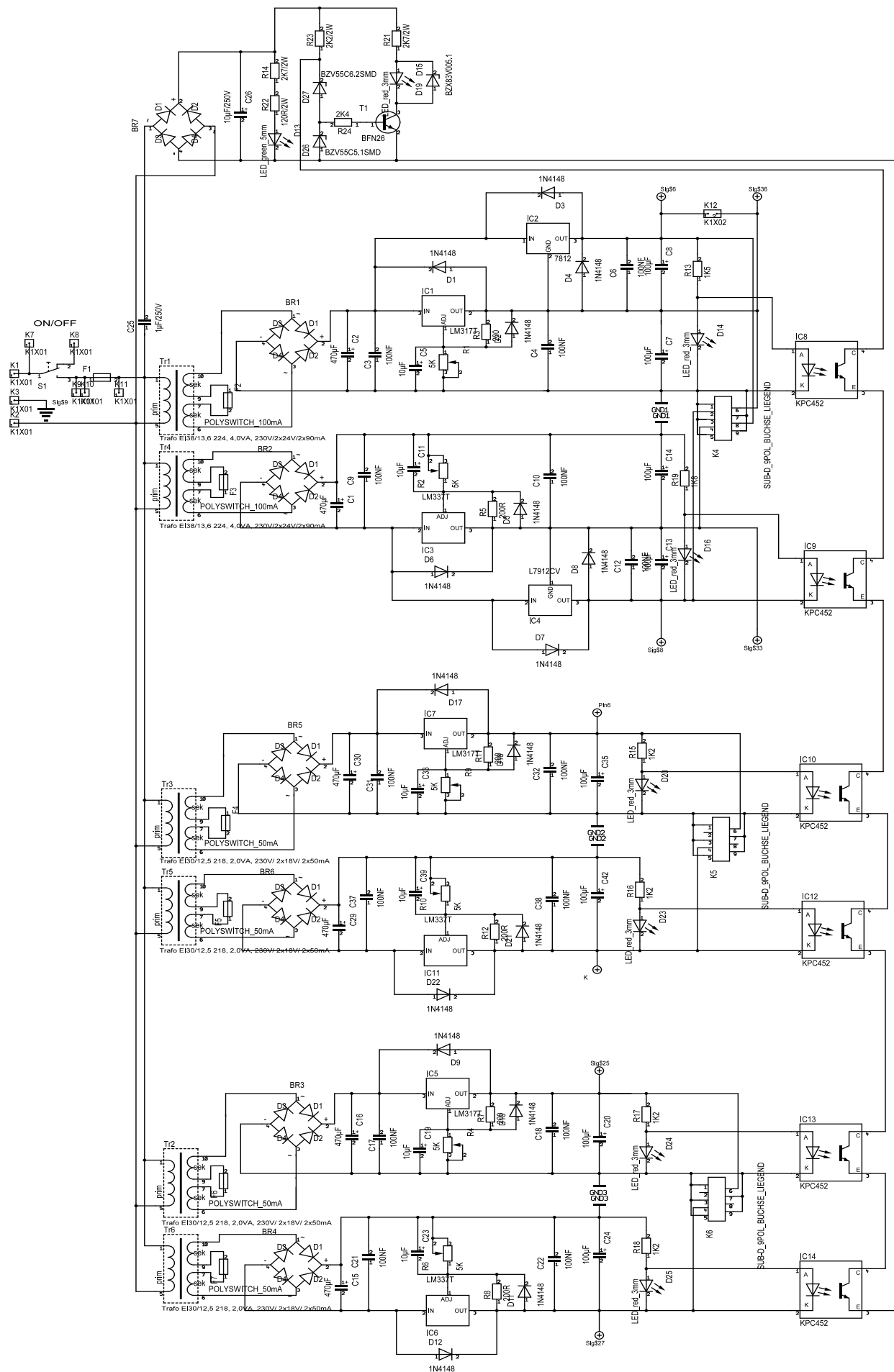
$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} . \quad (\text{A.65})$$

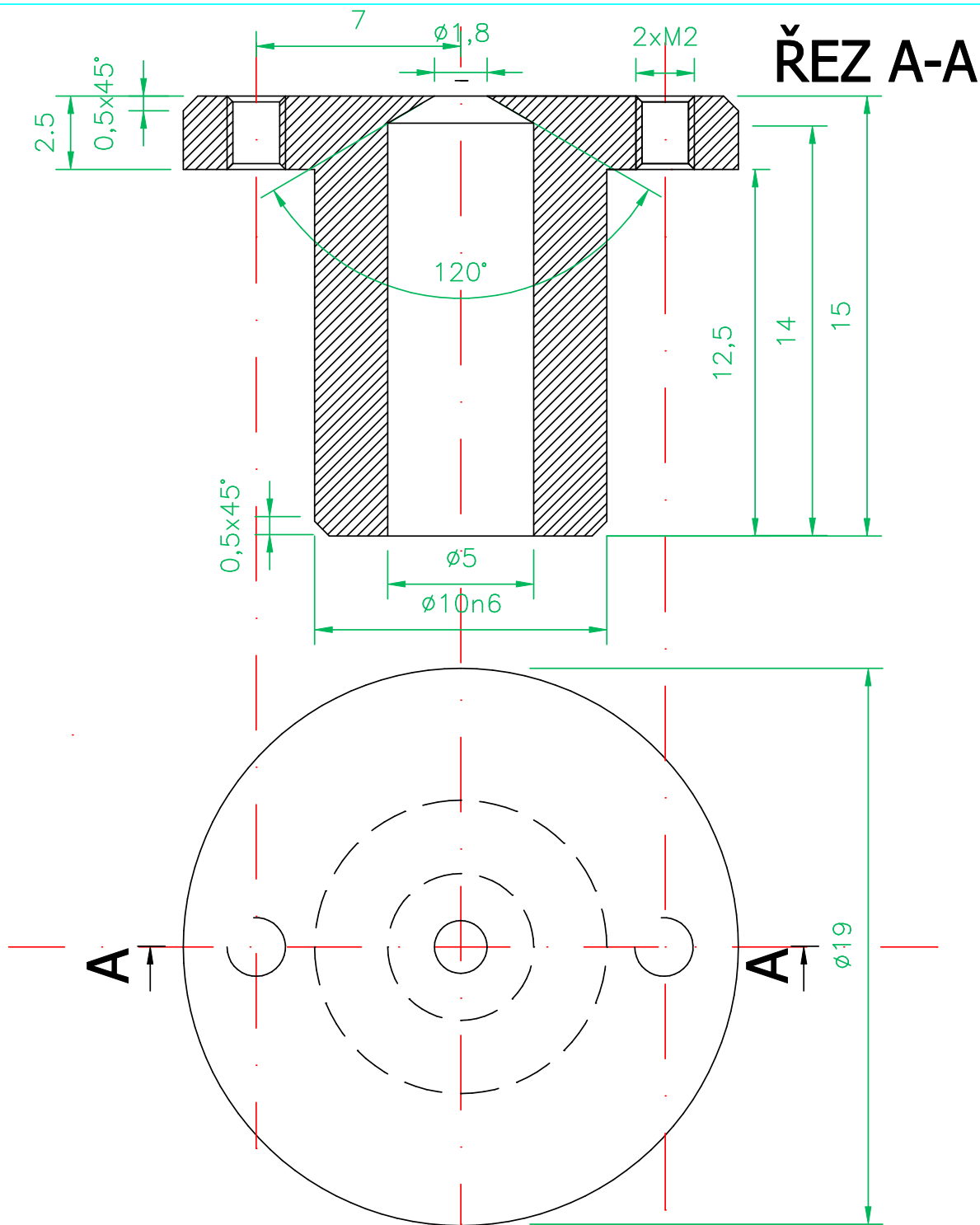
Pro složky rotace vektoru \mathbf{A} dostaneme

$$\begin{aligned} (\text{rot } A)_r &= \frac{1}{\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] , \\ (\text{rot } A)_\theta &= \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} , \\ (\text{rot } A)_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} . \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

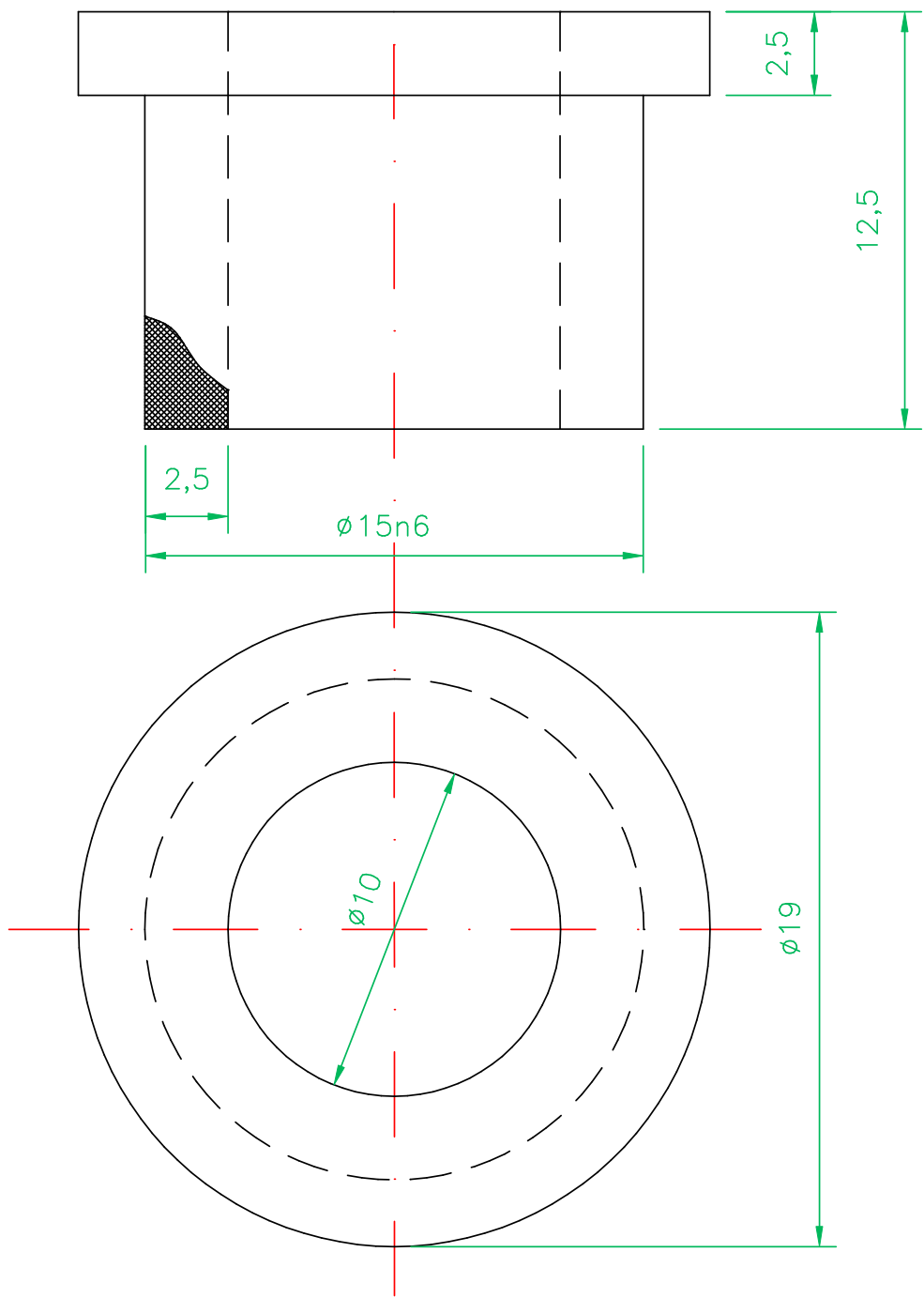
S uvážením $\Delta = \nabla^2 = \text{div grad}$ pro operátor Laplace obdržíme

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} . \quad (\text{A.67})$$

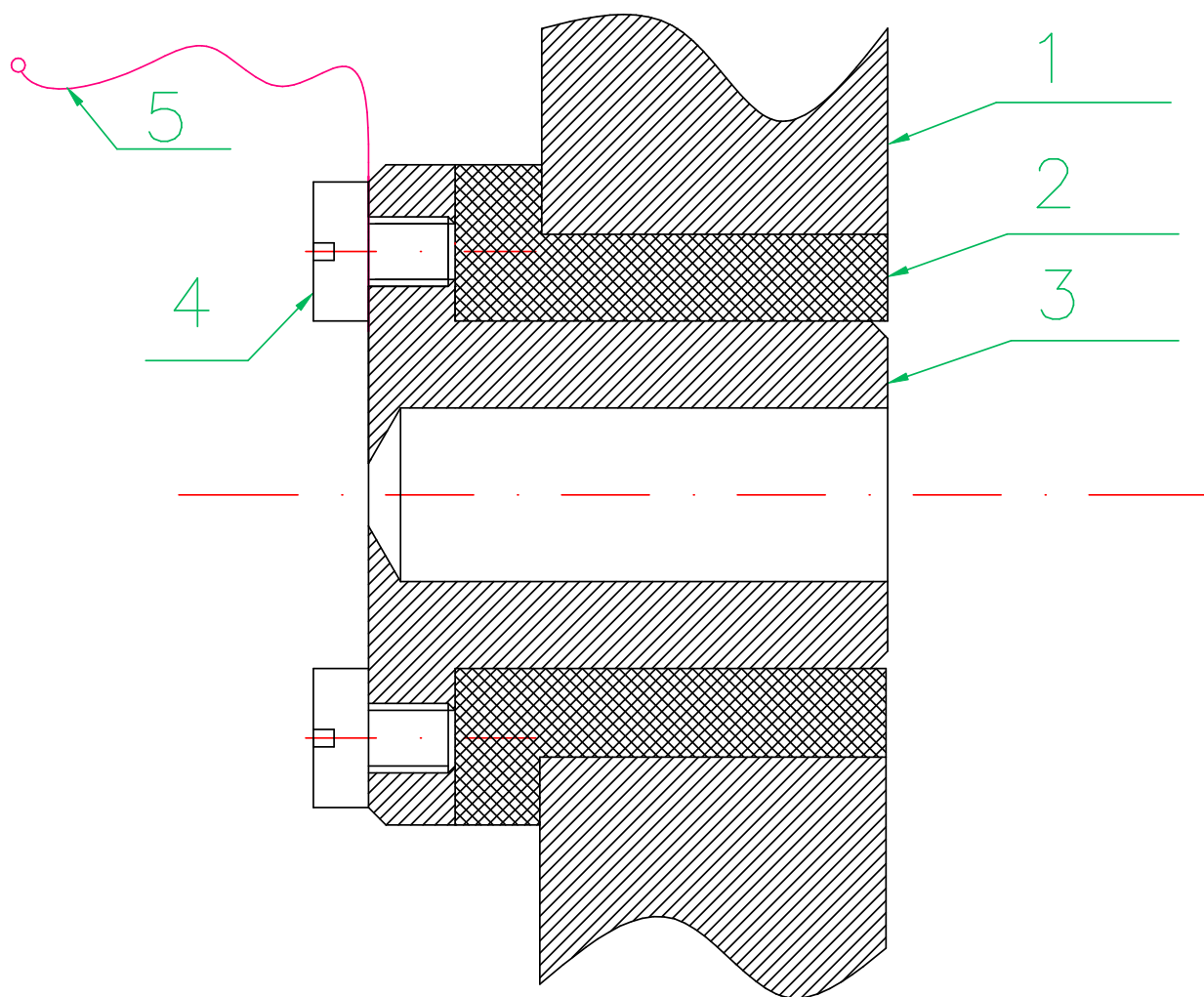




				KFPP - MFF	
				13g	5:1
ZN.MATERIALU		T.O. 001		MĚŘÍTKO	
ROZM.POLOT. TYČ 20x15 NEREZ (HLINIK)					
PDM.ZAŘ.				Č.SN.	
VYPRACOVAL L. NOUZÁK		NORM.REF.		POZN.	
PŘEZKOUŠEL				TR.Č.	
TECHNOL.		SCHVÁLIL		Č.V.	
NÁZEV					
CLONA				1-2-02	
				Listů	List



				KFPP - MFF	
ZN.MATERIALU			T.O. 001	HMOTNOST 10g	MĚŘÍTKO 5:1
ROZM.POLOT. TYČ Ø20x13 TEFLON				Č.SN.	TR.Č.
POM.ZAŘ.		VYPRACOVAL L. NOUZÁK		POZN.	Č.KUSOVNIKU
PŘEZKOUŠEL		NORM.REF.			
TECHNOL.		SCHVÁLIL		STARY V.	Č.V.
NÁZEV POUZDRO				1-2-01	
				Listů	List



5	DRÁT			1
4	ŠROUB M2x2,5			1
3	CLONA	10-2-02		1
2	POUZDRO	10-2-01		1
1	BOČNICE B	Q-062		1
PO.	NÁZEV	ČÍSLO VÝKRESU	MAT.MN.	
			KFPP - MFF	
ZN.MATERIALU	T.O. 001	HMDTNOST	MĚŘÍTKO 5:1	
ROZM.POLOT.		Č.SN.	TR.Č.	
PDM.ZAŘ.		POZN.	Č.KUSOVNIKU	
VYPRACOVAL L. NOUZÁK	NORM.REF.	STARÝ V.	Č.V.	
PŘEZKOUŠEL	SCHVÁLIL			
TECHNOL.				
NÁZEV	CLONA-SESTAVA	1-2-00		
	Listů		List	