Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Bc. Adam Štefánik

# Neúplná stochastická dominance

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK

| | |
|---|---|
| Vedoucí diplomové práce: | RNDr. Ing. Miloš Kopa, PhD. |
| Studijní program: | Matematika |
| Studijní obor: | Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie |
| Studijní plán: | Ekonometrie |

Praha 2012

Rád by som poďakoval vedúcemu práce za vypísanie tejto zaujímavej témy. Taktiež za jeho vytrvalosť pri vedení práce, pomoc, jeho čas, za jeho skúsenosti, podnetné rady a názory. Ďakujem Monike Jakubcovej za pomoc s Gamsom. V neposlednej rade by som rád poďakoval svojim rodičom, za neustálu podporu. Ďakujem za odpustenie všetkým, ktorí trpeli nedostatkom mojej pozornosti kvôli vzniku tejto práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne ............

**Název práce:** Neúplná stochastická dominance
**Autor:** Adam Štefánik
**Katedra:** Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
**Vedoucí diplomové práce:** RNDr. Ing. Miloš Kopa, PhD.
KPMS, Matemeticko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze

**Abstrakt:** Tato práce se zabývá neúplnou stochastickou dominancí a její vlastnostmi. Neúplná stochastická dominance je uvolněním klasické stochastické dominance a současně odstraňuje paradoxní situace, ke kterým docházelo. Jde o případy, kdy klasická stochastická dominance určí indiferentní vztah mezi dvěma portfolii, ale téměř každý investor v praxi dokáže jednoznačně určit lepší portfolio. Původní Leshno and Levy (2002) neúplná stochastická dominance se ukázala jako výpočetne nevýhodná, a tak autori Lizyayev and Ruszczyński (2012) navrhli alternativu. Práce seznamuje s oběma přístupy. Z praktického hlediska je nejzajímavější částí práce otazka volby eficientního portfolia vzhledem k neúplné stochastické dominanci pomocí úlohy lineárního programování. Práce aplikuje postup Lizyayev and Ruszczyński (2012) a pozměňuje kvantilový přístup Kopa and Chovanec (2008) k testování eficience portfolia vzhledem ke stochastické dominanci druhého rádu.

**Klíčová slova:** neúplná stochastická dominance, eficience, CVaR

**Title:** Almost stochastic dominance
**Author:** Adam Štefánik
**Department:** Probability and Mathematical Statistics
**Supervisor:** RNDr. Ing. Miloš Kopa, PhD.
Department of Probability and Mathematical Statistics, MFF UK

**Abstract:** In the presented work we study the almost stochastic dominance and it's properties. Almost stochastic dominance is a relaxation of stochastic dominance. Almost stochastic dominance also deals with paradox situations occurring in case of stochastic dominance. This is a situation when stochastic dominance determines indifferent relationship between two portfolios, but in fact almost all investors can choose the better one. The original almost stochastic dominance presented by Leshno and Levy (2002) is computationally expensive. Lizyayev and Ruszczyński (2012) suggested an alternative approach. This work introduces both approaches. The most interesting part of this work is a search for efficient portfolio with respect to the almost stochastic dominance by the simple linear programming. Lizyayev and Ruszczyński (2012) approach is applied to Kopa and Chovanec (2008) quantile approach for portfolio efficiency testing with respect to second order stochastic dominance.

**Keywords:** almost stochastic dominance, efficiency, CVaR

# Obsah

# Úvod

Teória stochastickej dominancie sa snaží dať odpovede na otázky výberu správneho portfólia alebo aspoň určenia, či je alebo nie je vybrané portfólio dobrou voľbou. Využíva pritom Von Neumann–Morgensternovu teóriu úžitku. V istom zmysle predstavuje alternatívny prístup k známemu Markowitzovmu modelu. Používa sa tiež v rôznych oblastiach ekonómie, finančnej matematiky a štatistiky. Predstavuje čiastočné usporiadanie v priestore náhodných veličín, definované pomocou očakávaného úžitku.

Najviac prác o stochastickej dominancii sa venuje stochastickej dominancii 1. a 2. rádu. Stochastická dominancia 1. rádu medzi dvoma náhodnými veličinami znamená, že všetci nenasýtení investori preferujú jednu náhodnú veličinu pred druhou, pretože im dáva väčší očakávaný úžitok. Podobne stochastická dominancia 2. rádu nastáva ak jedna náhodná veličina je preferovaná pred druhou všetkými riziko averznými investormi. O niečo menej pozornosti sa venuje stochastickým dominanciám vyšších rádov. Hlavným dôvodom je problematická interpretácia ich myšlienok v praktickom svete.

Teória stochastických dominancií využíva distribučné funkcie výnosov, a preto jednou z najväčších nevýhod je predpoklad, že výnosy majú stále rovnaké rozdelenie. Inými slovami dúfame, že ich chovanie bude v budúcnosti podobné ako doteraz. Poučený z veľkej finančnej krízy vieme, že to nie je vždy pravda. To je aj jeden z dôvodov, prečo sa v šiestej kapitole venujeme dátam z pred roka 2008.

Aj keď sú spomínané teórie stochastických dominancií prepracované, v praxi dochádza k paradoxom. Existujú prípady, keď teória posúdi nejaké dve portfólia ako indiferentné, t.j. žiadne nie je lepšie ako to druhé, ale pritom v praxi (takmer) všetci investori bezváhania uprednostnia jedno, ktoré sa im zdá byť lepšie. Niekoľko takých príkladov je uvedených aj v predloženej práci.

V snahe vyhnúť sa paradoxom predstavili Moshe Leshno a Haim Levy vo svojej práci Leshno and Levy (2002) teóriu neúplnej stochastickej dominancie, ktorá prináša čiastočné uvoľnenie v požiadavkách, ktoré reálnejšie popisujú pozorovanú prax. Táto teória však oproti teórii stochastickej dominancie 1. a 2. rádu neobsahuje ani postup ako nájsť najlepšie portfólio a dokonca ani test či je dané portfólio dobrou voľbou vzhľadom k všetkým možnostiam, ktorých je spravidla nekonečne mnoho. Umožňovala len porovnanie dvoch portfólií navzájom. Táto práca mala za cieľ pokúsiť sa odstrániť tieto nedostatky.

Priebeh týchto snáh bol výrazne narušený článkom Lizyayev and Ruszczyński (2012). V článku autori poukazujú na výraznú výpočtovú náročnosť týchto snáh. Prichádzajú s pozmenenou teóriou, aby sa výpočty významne urýchlili a súčasne pokryli niektoré z paradoxov, ktoré sa pôvodnou teóriou neúplnej stochastickej dominancie nepodarilo odstrániť. Hlavným prínosom článku je to, že poskytuje možnosť určenia, či je dané portfólio eficientné vzhľadom k všetkým dostupným možnostiam a tiež možnosť určenia dominujúceho portfólia.

Táto práca si dala za cieľ oboznámiť čitateľa s touto problematikou a pokúsiť sa upraviť kvantilový prístup pre stochastickú dominanciu 2. rádu predstaveného v článku Kopa and Chovanec (2008) vzhľadom k predstavenej teórii neúplnej stochastickej dominancie. Prvá kapitola sa venuje zavedeniu pojmov úžitku a klasickej stochastickej dominancii. V druhej kapitole zavádzame teóriu neúplnej stochastickej dominancie tak ako ju zaviedli Leshno and Levy (2002) a Levy (2006). Tretia kapitola predstavuje upravený prístup tak ako bol predstavený v Lizyayev and Ruszczyński (2012). V štvrtej kapitole upravujeme už spomínaný kvantilový prístup. Kapitola päť hovorí o vzťahu $\varepsilon$ z dvoch rôznych prístupov. Kapitola šesť kapitola skúma ako rôzne hodnoty $\varepsilon$ menia optimálne portfólio v prípade upraveného kvanitilového prístupu. V dodatku možno nájsť histogramy skúmaných aktív.

# Kapitola 1

# Stochastická dominancia

V tejto kapitole si uvedieme základné pojmy, definície a tiež motivácie k ich zavedeniu. Budeme sa opierať o knihu Levy (2006).

## 1.1 Teória očakávaného úžitku

Celá teória stochastickej dominancie je založená na teórii očakávaného úžitku. Jednoduché zamyslenie napovie, že zisk 100 Kč má rôznu hodnotu pre človeka s majetkom niekoľkých miliónov a inú hodnotu pre človeka, ktorý má dlhy. Preto zisk 100 Kč nie je rovnako dobrý pre všetkých ľudí. Našim cieľom bude zovšeobecňovať a hovoriť, že by tak alebo onak konali všetci ľudia.

Uvažujeme dve investície. Označme ich $L_1$ a $L_2$ :

$$L_1 = \{p_1 A_1, p_2 A_2, ..., p_n A_n\}$$

$$L_2 = \{q_1 A_1, q_2 A_2, ..., q_n A_n\},$$

kde $A_i$ je možný zisk [1] s pravdepodobnosťou $p_i$ a $q_i$, $0 \leq p_i, q_i \leq 1$. $A_i$ sú zoradené tak, že $A_1$ je minimum a $A_n$ je maximum. Platí $\sum p_i = 1$ a $\sum q_i = 1$ .Vždy len jeden zisk $A_i$ je nakoniec realizovaný.

***Axióma 1 - Porovnateľnosť***
Z dvoch rôznych výsledkov investície $A_i$ a $A_j$ musí investor jasne určiť či preferuje $A_i$ pred $A_j$ alebo naopak. Medzi $A_i$ a $A_j$ nemôže mať investor indiferentný vzťah.

Zápisom $L_1 \succ L_2$ budeme označovať skutočnosť, že $L_1$ je preferované pred $L_2$ pre uvažovaného investora. Indiferentný vzťah medzi $L_1$ a $L_2$ pre tohoto investora označíme $L_1 \sim L_2$.

[1] Stratu z investície budeme chápať ako záporný zisk

***Axióma 2 - Spojitosť***
Ak $L_3 \succ L_2$ a $L_2 \succ L_1$, potom existuje pravdepodobnosť $p(L_2)$ tak, že

$$L = \{(1 - p(L_2))L_1, p(L_2)L_3\} \sim L_2,$$

Túto axiómu môžeme chápať ako analógiu Darbouxovej vety.

***Axióma 3 - Zameniteľnosť***
Uvažujeme investíciu $L = \{p_1L_1, p_2L_2, p_3L_3\}$. Predpokladajme, že $L_2 \sim B$, kde $B = \{qL_1, (1-q)L_3\}$. Potom

$$L \sim C = \{p_1L_1, p_2B, p_3L_3\}.$$

***Axióma 4 - Tranzitivita***
Uvažujeme investície $L_1$, $L_2$ a $L_3$. Predpokladajme, že $L_1 \succ L_2$, $L_2 \succ L_3$. Potom $L_1 \succ L_3$. Rovnako axióma platí aj pre indiferentý vzťah, stačí nahradiť symbol $\succ$ symbolom $\sim$.

***Axióma 5 - Odbúrateľnosť***
*Zložená investícia* je taká investícia, ktorej zisky sú ďalšie investície. Nech $L^*$ je zložená investícia taká, že $L^* = (qL_1, (1-q)L_2)$, kde $L_1 = \{p_1A_1, (1-p_1)A_2\}$ a $L_2 = \{p_2A_1, (1-p_2)A_2\}$. Potom

$$L^* \sim L = \{p^*A_1, (1-p^*)A_2\}, \text{ kde } p^* = qp_1 + (1-q)p_2.$$

***Axióma 6 - Monotónnosť***
Nech máme dve investície $L_1 = \{pA_1, (1-p)A_2\}$ a $L_2 = \{pA_1, (1-p)A_3\}$, ak $A_3 > A_2$ potom $L_2 \succ L_1$.

## 1.2 Úžitkové funkcie

Preferencia jednej investície pred druhou je závislá na investorovi. Jeden môže preferovať investíciu $L_1$ pred investíciou $L_2$ a druhý naopak investíciu $L_2$ pred investíciou $L_1$. Je preto logickejšie hovoriť, že $L_1 \succ L_2$, ak existuje neklesajúca funkcia $U_1$ tak, že

$$E_{L_1}U_1(x) > E_{L_2}U_1(x).$$

Pre druhého investora môže byť $L_2 \succ L_1$, ak existuje iná neklesajúca funkcia $U_2$, ktorá zodpovedá preferenciám druhého investora tak, že

$$E_{L_2}U_2(x) > E_{L_1}U_2(x).$$

Tieto funkcie budeme nazývať *úžitkové funkcie.*

Z axiómy spojitosti dostávame, že pre dve ľubovoľné $A_1$ a $A_n$ také, že $A_1 < A_i < A_n$, existuje funkcia $U(A_i)$ taká, že

$$\{(1 - U(A_i)A_1, U(A_i)A_n\} \equiv A_i^* \sim A_i.$$

$U(A_i)$ také, že $0 \leq U(A_i) \leq 1$ existuje a je iné pre každého investora. Zároveň určuje jeho preferencie.

**Príklad.** Máme $A_1 = 0$ Kč, $A_2 = 10$ Kč a $A_3 = 20$ Kč. Z axiómy spojitosti plynie, že existuje funkcia $0 \leq U(A_2) \leq 1$ tak, že

$$L^* \equiv \{(1 - U(A_2))0 \text{ Kč}, U(A_2)20 \text{ Kč}\} \sim 10 \text{ Kč}.$$

Pre každého investora existuje iné $U(A_2)$, ktoré vytvorí indiferentný vzťah medzi istým ziskom 10 Kč a $L^*$

$U(A_i)$ je preto úžitok $A_i$ a investícia s najvyšším očakávaným úžitkom $\sum p_i U(A_i)$ je optimálna. Pri voľbe $U(A_1) = 0$ dostávame najnižšiu hodnotu $A_1$ a pri voľbe $U(A_n) = 1$ dostávame najvyššiu hodnotu $A_n$. Z axiómy monotónie platí, že úžitok rastie s rastúcim $A_i$ a preto $U(A_i)$ je neklesajúca. Vopred v celej práci vylúčime konštantné úžitkové funkcie.

## 1.3 Stochastická dominancia 1. rádu

Jediná nám známa informácia o úžitkovej funkcii je to, že je neklesajúca. Ak má úžitková funkcia prvú deriváciu, potom vieme, že $U' \geq 0$. Slovne sa to dá interpretovať tak, že investor vždy preferuje vyšší zisk pred menším ziskom, t.j. je nenasýtený.

Predpokladajme, že investor má na výber s dvoch investícií, ktorých distribučné funkcie výnosov sú označené $F$ a $G$.

**Definícia 1.3.1.** *Nech $F$ a $G$ sú dve distribučné funkcie rôznych investícií, potom $F$ dominuje $G$ vzhľadom k stochastickej dominancii 1. rádu (FSD) ak*

$$F(x) \leq G(x), \forall x \text{ a } \exists x_0 \text{ s ostrou nerovnosťou.}$$

Uvedená definícia je definíciou tzv. silnej (striktnej) stochastickej dominancie 1. rádu. Niektoré články uvádzajú a následne pracujú aj s tzv. slabou stochastickou dominanciou 1. rádu. Tá sa od uvedenej líši tým, že netrvá na existencii $x_0$ s ostrou nerovnosťou.

**Veta 1.3.2.** *Nech $F$ a $G$ sú dve distribučné funkcie dvoch rôznych investícií a $\mathbf{U_1}$ je množina všetkých neklesajúcich funkcií. Potom*

$$F(x) \leq G(x), \forall x \text{ a } \exists x_0 \text{ s ostrou nerovnosťou}$$
$$\Updownarrow$$
$$E_F U(x) \geq E_G U(x), \forall U \in \mathbf{U_1} \text{ a } \exists U_0 \text{ s ostrou nerovnosťou}$$

*Dôkaz.* Dôkaz možno nájsť v Levy (2006). □

## 1.4 Stochastická dominancia 2. rádu

Motiváciou k stochastickej dominancii 2. rádu je zohľadnenie investorovej averzie voči riziku. Túto averziu môžeme definovať niekoľkými spôsobmi. Pre nás bude úžitková funkcia investora s averziou voči riziku konkávna funkcia. Taká, že ak má druhú deriváciu, tak jej prvá derivácia je nezáporná a jej druhá derivácia je nekladná (t.j. $U' \geq 0$ a $U'' \leq 0$) a existuje aspoň jeden bod, pre ktorý je prvá derivácia kladná (t.j. $U' > 0$) a aspoň jeden bod, pre ktorý je druhá derivácia záporná (t.j. $U'' < 0$).

Investor s averziou voči riziku nepristúpi na *férovú hru*. Cena za vstup do férovej hry je rovnako veľká ako výška očakávanej výhry.

Označme $\mathbf{U_2}$ množinu všetkých konkávnych úžitkových funkcií, ktoré zohľadňujú investorovu averziu voči riziku. Potom $\mathbf{U_2} \subseteq \mathbf{U_1}$, kde $\mathbf{U_1}$ zodpovedá množine úžitkových funkcií zo stochastickej dominancie 1. rádu.

**Definícia 1.4.1.** *Nech $F$ a $G$ sú dve distribučné funkcie dvoch rôznych investícií, potom $F$ dominuje $G$ na základe stochastickej dominancie 2. rádu (SSD) ak*

$$\int_{-\infty}^{x} [G(t) - F(t)]\,\mathrm{d}t \geq 0 \ \forall x \ \textit{a} \ \exists x_0 \ \textit{s ostrou nerovnosťou.}$$

**Veta 1.4.2.** *Nech $F$ a $G$ sú investície, ktorých distribučné funkcie sú $F$ a $G$, potom*

$$\int_{a}^{x} [G(t) - F(t)]\,\mathrm{d}t \geq 0 \ \forall x \ \textit{a} \ \exists x_0 \ \textit{s ostrou nerovnosťou}$$

$$\Updownarrow$$

$$E_F U(x) - E_G U(x) \geq 0, \forall U \in \mathbf{U_2} \ \textit{a} \ \exists U_0 \ \textit{s ostrou nerovnosťou}$$

*Dôkaz.* Dôkaz možno nájsť v Levy (2006). □

**Poznámka.** Za predpokladu normálneho rozdelenia výnosov je stochastická dominancia 2. rádu ekvivalentná so známym Markowitzovým Mean-Variance kritériom. Tento dôkaz uvádza napríklad Levy (2006). M-V kritérium hovorí, že portfólio s váhami $x^*$ je eficientné vzhľadom k strednej hodnote a rozptylu (mean-variance efficient), ak neexistujú iné $x$ splňujúce podmienku $\sum_j x_j = 1$, pre ktoré je

$$r(x) \geq r(x^*) \text{ a súčasne } \sigma^2(x) \leq \sigma^2(x^*)$$

a aspoň jedna z nerovností je ostrá. Kde $r(x)$ je stredná hodnota celkovej výnosnosti portfólia s váhami $x$ a $\sigma^2(x)$ je rozptyl celkovej výnosnosti takéhoto portfólia.

Podmienky na vyššie derivácie úžitkových funkcií vedú k stochastickým dominanciam vyšších rádov. Kvôli náročnejšej ekonomickej interpretácií sú vyššie rády málo používané.

# Kapitola 2

# Neúplná stochastická dominancia

Pri používaní FSD, SSD a dominancií vyšších rádov môžeme naraziť na paradoxné situácie. Uvažujme napríklad úžitkovú funkciu $U_0 \in \mathbf{U_1}$, kde $U_0(x) = x$ pre $x \leq x_0$ a $U_0(x) = x_0$ pre $x > x_0$. Túto funkciu používame pre názornosť, dá sa definovať úžitková funkcia s druhou deriváciou vedúca k rovnakej paradoxnej situácii.

Nech má investor má výber z dvoch investícií. Investícia $F$ má výnos 1 Kč s pravdepodobnosťou 0,1 a výnos 1 000 000 Kč s pravdepodobnosťou 0,9. Investícia $G$ má výnos 2 Kč s pravdepodobnosťou 0,1 a výnos 3 Kč s pravdepodobnosťou 0,9. Nie je ťažké overiť, že distribučné funkcie týchto investícií sa pretínajú a preto nedochádza k dominancií prvého rádu.

Bez pochybností môžeme tvrdiť, že väčšina investorov by preferovala investíciu $F$. Paradoxne v prípade funkcie $U_0$ s $x_0 = 2$ má investícia $G$ vyšší očakávaný úžitok:

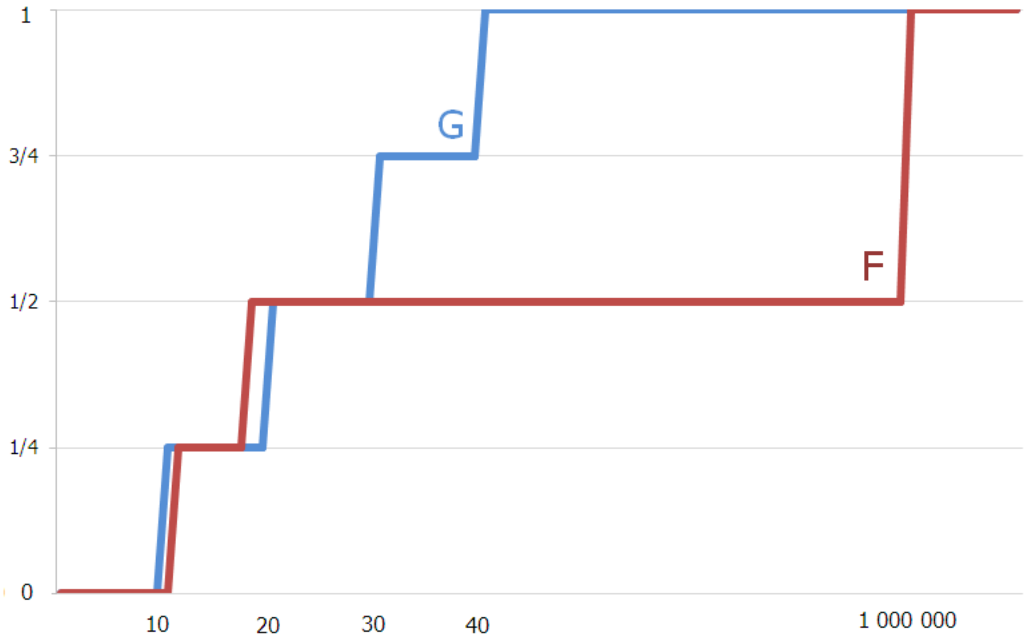
$$E_G U_0(x) - E_F U_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(x) - G(x)] U_0'(x) \mathrm{d}x^{1} =$$

$$\int_{-\infty}^{2} [F(x) - G(x)] U_0'(x) \mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} [F(x) - G(x)] U_0'(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{2} [F(x) - G(x)] \mathrm{d}x > 0$$

Existuje teda aspoň jedna funkcia $U_0 \in \mathbf{U_1}$, pre ktorú je investícia $G$ preferovaná pred investíciou $F$. Tento výsledok platí aj pri zmene čiastky 1 000 000 Kč za akúkoľvek výsokú čiastku. Úžitková funkcia $U_0$ sa dá označiť za extrémnu, pretože investor s takouto úžitkovou funkciou má z čiastky 2 Kč a z čiastky 2 000 000 Kč rovnaký úžitok. Existuje teda veľké podozrenie, že množina $\mathbf{U_1}$ obsahuje funkcie, ktoré v reálnom svete nezodpovedajú rozhodnutiam žiadneho investora.

[1] v bode $x_0$ dodefinujeme $U_0'(x_0) = 0$, aby nevznikol problém s výpočtom integrálu

Podobný paradox nájdeme aj v množine $\mathbf{U_2}$. Uvažujme investície $F$ a $G$. Investícia $F$ má výnosy $\{11, 18{,}1\,000\,000\}$ Kč s pravdepodobnosťami $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$. Investícia $G$ má výnosy $\{10, 20, 30, 40\}$ Kč s pravdepodobnosťami $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$. Distribučné funkcie investícií sú naznačené na Obr. 2.1.




Obr. 2.1: Žiadna dominancia

Distribučné funkcie sa opäť krížia a preto nedochádza k FSD. Nedochádza ani k SSD. Investícia G nemôže dominovať F, pretože má menší očakávaný výnos. Ani investícia F nedominuje G. Nech $x = 20$ a overme SSD z definície:

$$\int_{-\infty}^{20} [G(x) - F(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{10}^{11} [G(x) - F(x)]\,\mathrm{d}x - \int_{18}^{20} [F(x) - G(x)]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - 2(\frac{1}{4}) < 0$$

Medzi $F$ a $G$ nie je žiadna dominancia, preto musí existovať $U_0 \in U_2$, pre ktorú je preferovaná investícia $G$ pred investíciou $F$. Takúto podmienku spĺňa $U_0 \in U_2$ také, že $U_0 = x$ pre $x \leq 20$ a $U_0 = 20$ pre $x > 20$.

S takýmito paradoxmi sa nestretávame len v prípade stochastickej dominance, ale podobný problém nájdeme aj v prípade známeho Markowitzovho Mean-Variance kritéria.

Problémom je, že množiny $\mathbf{U_1}$ a $\mathbf{U_2}$ obsahujú funkcie, ktoré sú matematicky v poriadku no z praktického hľadiska nezodpovedajú preferenciám reálnych investorov. Aby sme sa vyhli takýmto paradoxom, zavedieme množiny $\mathbf{U_1^*}$ a $\mathbf{U_2^*}$ tak, aby neobsahovali extrémne úžitkové funkcie, pričom $\mathbf{U_1^*} \subset \mathbf{U_1}$ a $\mathbf{U_2^*} \subset \mathbf{U_2}$. Upravené kritéria dominancie nazývame neúplná stochastická dominancia (ASD - almost stochastic dominance).

## 2.1 AFSD

Teraz sa zameriame len na rastúce a diferencovateľné úžitkové funkcie. Opäť uvažujme dve distribučné funkcie F a G. Nech F má vyšší očakávaný výnos, potom G nemôže dominovať F. Nech sa distribučné funkcie pretínajú, potom ani F nemôže dominovať G. Definujeme interval $s_1$ tak, že

$$s_1 = s_1(F, G) = \{t \in \mathbb{R} : G(t) < F(t)\}.$$

Nech $\overline{s_1}$ je doplnkom $s_1$. Potom rozdiel v očakávanom úžitku investícií F a G:

$$\Delta \equiv \int\limits_{s_1} [G(x) - F(x)]U'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\overline{s_1}} [G(x) - F(x)]U'(x)\,\mathrm{d}x$$

Prvý integrál (cez $s_1$) je záporný. To spôsobuje, že F nedominuje G vzhľadom k FSD. K tomu dochádza bez ohľadu na to ako veľmi malý je interval $s_1$. Zmenšíme integrál cez interval $s_1$ na minimum a tiež zmenšíme na minimum integrál cez $\overline{s_1}$. Definujeme:

$$\Delta^* \equiv \sup[U'(x)] \int\limits_{s_1} [G(x) - F(x)]\,\mathrm{d}x + \inf[U'(x)] \int\limits_{\overline{s_1}} [G(x) - F(x)]\,\mathrm{d}x$$

Oba sčítance sme zmenšili, preto ak pre nejakú úžitkovú funkciu $\Delta^* \geq 0$, potom $\Delta \geq 0$. Pre takúto úžitkovú funkciu je F preferované pred G. $\Delta^* \geq 0$ upravíme do tvaru :

$$\sup[U'(x)] \leq \inf[U'(x)] \frac{\int\limits_{\overline{s_1}} [G(x) - F(x)]\,\mathrm{d}x}{\int\limits_{s_1} [F(x) - G(x)]\,\mathrm{d}x}$$

Definujeme $\varepsilon$ ako pomer plochy medzi distribučnými funkciami na intervale $s_1$ a pomer celkovej plochy medzi distribučnými funkciami.

$$\varepsilon = \frac{\int\limits_{s_1} [F(x) - G(x)]\,\mathrm{d}x}{\int\limits_{s_1} [F(x) - G(x)]\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\overline{s_1}} [F(x) - G(x)]\,\mathrm{d}x}$$

Potom :

$$\frac{1}{\varepsilon}-1=\frac{\int\limits_{\overline{s_1}}[G(x)-F(x)]\,\mathrm{d}x+\int\limits_{s_1}[F(x)-G(x)]\,\mathrm{d}x}{\int\limits_{s_1}[F(x)-G(x)]\,\mathrm{d}x}-1=\frac{\int\limits_{\overline{s_1}}[G(x)-F(x)]\,\mathrm{d}x}{\int\limits_{s_1}[F(x)-G(x)]\,\mathrm{d}x}$$

Dostávame:

$$U'(x)\leq \sup U'(x)\leq \inf[U'(x)]\ \frac{\int\limits_{\overline{s_1}}[G(x)-F(x)]\,\mathrm{d}x}{\int\limits_{s_1}[F(x)-G(x)]\,\mathrm{d}x}=\inf[U'(x)]\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$$

Označme

$$\mathbf{U_1^*}(\varepsilon)=\{U\in\mathbf{U_1}:U'(x)\leq\inf\{U'(x)\}(\tfrac{1}{\varepsilon}-1)\}\text{ pre všetky }x.$$

V prípade, že $\varepsilon=0$ je nerovnosť splnená. Z definície $\varepsilon$ to znamená, že plocha, ktorá je dôvodom neexistencie FSD je 0 a teda F dominuje G vzhľadom k FSD. Pre nulové $\varepsilon$ nedochádza k paradoxom a nie je potrebné definovať množinu $\mathbf{U_1^*}(\varepsilon)$, pretože v tomto prípade je $\mathbf{U_1^*}(0)=\mathbf{U_1}$.

**Definícia 2.1.1.** *Nech $0<\varepsilon<0,5$ a nech $F$ a $G$ sú distribučné funkcie dvoch rôznych náhodných veličín X a Y, potom X dominuje Y vzhľadom k neúplnej stochastickej dominancie 1. rádu (AFSD alebo $FSD^*$), ak*

$$\int\limits_{s_1}[F(x)-G(x)]\,\mathrm{d}x\leq\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(x)-G(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Hranicu $\varepsilon=0,5$ možno za určitých podmienok chápať ako bod zmeny dominancie z F dominuje G na G dominuje F. Tiež je jasné, že FSD implikuje ASFD.

Ľavú stranu nerovnosti v definícií môžeme chápať ako toleranciu nesplnenia FSD podmienky.

## 2.2 ASSD

Podobne ako v AFSD hľadáme interval, ktorý narušuje SSD. V obrázku 2.1 je tento interval (19,20). Aj keď negatívna plocha začína od bodu 18 je ešte kompenzovaná pozitívnou plochou nad intervalom (10,11). Definujeme interval:

$$s_2=s_2(F,G)=\{t\in s_1(F,G):\int\limits_{-\infty}^{t}[G(x)-F(x)]\,\mathrm{d}x<0\},$$

kde F a G sú distribučné funkcie a $s_1$ je interval narušujúci FSD. Analogicky definujeme aj

$$\varepsilon = \frac{\int\limits_{s_2} |G(x) - F(x)| \,\mathrm{d}x}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |G(x) - F(x)| \,\mathrm{d}x}$$

Označme

$$\mathbf{U_2^*}(\varepsilon) = \{U \in \mathbf{U_2} : -U''(x) \leq \inf\{-U''(x)\}(\tfrac{1}{\varepsilon} - 1)\} \text{ pre všetky } x.$$

**Definícia 2.2.1.** *Nech $0 < \varepsilon < 0,5$ a nech F a G sú distribučné funkcie dvoch rôznych náhodných veličín X a Y, potom X dominuje Y vzhľadom k neúplnej stochastickej dominancie 2. rádu (ASSD alebo SSD*), ak*

$$\int\limits_{s_2} |G(x) - F(x)| \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} |G(x) - F(x)| \,\mathrm{d}x$$

*a súčasne*

$$E_F(X) \geq E_G(Y)$$

Pomocou nasledujúcej vety môžeme alternatívne vyjadriť potrebu blízkosti distribučných funkcií neúplnej stochastickej dominancie

**Veta 2.2.2.** *Nech X a Y sú dve náhodné veličiny a F a G ich distribučné funkcie.*

*(1) F dominuje G vzhľadom k AFSD práve vtedy, keď existuje distribučná funkcia $\widetilde{F}$ taká, že $\widetilde{F}$ dominuje G vzhľadom k FSD a platí*

$$\|F - \widetilde{F}\| = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - \widetilde{F}(x)| \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \|F - G\|$$

*(2) F dominuje G vzhľadom k ASSD práve vtedy, keď existuje distribučná funkcia $\widetilde{F}$ taká, že $\widetilde{F}$ dominuje G vzhľadom k SSD a platí*

$$\|F - \widetilde{F}\| = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - \widetilde{F}(x)| \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \|F - G\|$$

*Dôkaz.* Dôkaz je uvedený v Leshno and Levy (2002) a tak ako v tomto článku si ho predvedieme pre prípad, že F a G sú definované na $[a, b]$ tak, aby $(-\infty < a < b < \infty)$ a bez ujmy na všeobecnosti uvažujme $a = 0$ a $b = 1$.

Predpokladajme, že existuje distribučná funkcia $\widetilde{F}$ taká, že dominuje G vzhľadom k FSD a platí $\|F-\widetilde{F}\| = \int_0^1 |F(x)-\widetilde{F}(x)|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon\|F-G\|$ a $\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \widetilde{F}(x)\,\mathrm{d}x$.

Dôvod nedominancie F nad G je množina $s_1(F,G) = \{t \in \mathbb{R} : G(t) < F(t)\}$. Pretože $\widetilde{F}$ dominuje G, platí pre všetky $t \in \mathbb{R}$ nerovnosť $G(t) \geq \widetilde{F}(t)$ a teda aj pre $t \in s_1$.

Pre $t \in s_1$ dostávame

$$F(t) - \widetilde{F}(t) \geq F(t) - G(t)$$

odtiaľ

$$\int_{s_1} |F(x)-G(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 |F(x)-G(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|F-\widetilde{F}\| \leq \varepsilon\|F-G\|$$

Dôkaz opačnej implikácie ukážeme najprv pre diskrétne rozdelenia s konečným počtom skokov. Budeme sa teda najprv zaoberať nasledovným tvrdením

***Tvrdenie 1.*** Nech X a Y sú diskrétne náhodné veličiny, ktorých distribučné funkcie F a G majú konečný počet skokov.

Označme $H = G - F$. Ak $\int_{s_1} |H(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon\|F-G\|$, potom existuje kumulatívna distribučná funkcia $\widetilde{F}$ taká, že pre všetky $x \in [0,1]$ je $G(x) > \widetilde{F}(x)$ a $\|F-\widetilde{F}\| < 2\varepsilon\|F-G\|$.

**Dôkaz Tvrdenia 1.** $H = G - F$ je schodovitá funkcia s konečným počtom skokov. Nech $I = [a_1, b_1)$ je prvý záporný skok funkcie H. Ak I neexistuje, potom F dominuje G vzhľadom k FSD. Nech $J = [a_2, b_2)$ je prvý kladný skok funkcie H. Vzhľadom k I je H buď naľavo alebo napravo.

Nech $b_2 \leq a_1$, t.j. J je vľavo od I. Nech $\gamma_2$ je hodnota funkcie H na intervale J a nech $-\gamma_1$ je hodnota funkcie H na intervale I. Potom

$$\gamma_2(b_2 - a_2) \geq \gamma_1(b_1 - a_1) \tag{A1}$$

alebo

$$\gamma_2(b_2 - a_2) < \gamma_1(b_1 - a_1) \tag{A2}$$

Nech platí (A1) a nech $\widehat{b}_1 = b_1$. Potom existuje $\widehat{b}_2$ také, že $a_2 < \widehat{b}_2 \leq b_2$ a

$$\gamma_2(\widehat{b}_2 - a_2) = \gamma_1(\widehat{b}_1 - a_1) \tag{A3}$$

Nech platí (A2) a nech $\widehat{b}_2 = b_2$. Potom existuje $\widehat{b}_1$ také, že $a_1 < \widehat{b}_1 < b_1$ a platí (A3).

Definujeme $H_1$ nasledovne

$H_1(z) = \gamma_2$ pre $\widehat{b}_2 \leq z < b_2$
$H_1(z) = -\gamma_1$ pre $a_1 \leq z < \widehat{b}_1$
$H_1(z) = 0$ inak

Analogicky by sme definovali $H_1$ v prípade, že J je vpravo od I. Ďalej definujeme $F_1 = F + H_1$. $F_1$ je potom distribučná funkcia. Rovnaký postup použijeme pre $H_2 = G - F_1$ a definujeme tak $F_2$ ako $F_2 = F_1 + H_2$. H je skokovitá funkcia s konečným počtom skokov a preto sa tento postup zastaví po konečnom počte iterácií. Nech je to $n$ iterácií.

Nech $\widetilde{H}(x) = \sum_{i=1}^{n} H_i(x)$, a $\widetilde{F}(x) = F(x) + \widetilde{H}(x)$. Z konštrukcie $\widetilde{H}$ potom dostávame

$$\int_{s_1} |\widetilde{H}(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{s_1} (F(x) - G(x)) \,\mathrm{d}x$$

a z predpokladoch tvrdenia máme

$$\textstyle\int_{s_1} |H(x)| \,\mathrm{d}x < \varepsilon \|F - G\|$$

Pre všetky $x \in [0,1]$ platí $G(x) \geq \widetilde{F}(x) = F(x) + \widetilde{H}(x)$ a

$$\|F - \widetilde{F}\| = \int_0^1 |F(x) - \widetilde{F}(x)| \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 |H_i(x)| \,\mathrm{d}x = 2 \int_{s_1} [F(x) - G(x)] \,\mathrm{d}x \leq 2\varepsilon \|F - G\|.$$

Tým je dokončený dôkaz Tvrdenia 1. Pre nekonečný počet schodov budeme aproximovať F a G pomocou $F_n$ a $G_n$. Nech teda X a Y sú dve náhodné veličiny s distribučnými funkciami F a G. Potom definujeme

$$\begin{array}{lll}
G_n(x) = 0 & \text{pre } x \leq 0 & \\
G_n(x) = G(\frac{i}{n}) & \text{pre } \frac{i}{n} \leq x < \frac{i+1}{n}, & i = 0, ..., n-1 \\
G_n(x) = 0 & \text{pre } x \geq 1 &
\end{array}$$

a

$$\begin{array}{lll}
F_n(x) = 0 & \text{pre } x \leq 0 & \\
F_n(x) = F(\frac{i+1}{n}) & \text{pre } \frac{i}{n} \leq x < \frac{i+1}{n}, & i = 0, ..., n-1 \\
F_n(x) = 0 & \text{pre } x \geq 1 &
\end{array}$$

Ďalej definujeme $\widetilde{H_n}(x)$ podobne ako $\widetilde{H}(x)$, ale pomocou aproximovaných distribučných funkcií. Potom platí

$$\lim_{m,n\to\infty} \|\widetilde{H_n}(x) - \widetilde{H_m}(x)\| = 0$$

To znamená, že postupnosť $\widetilde{H_n}(x)$, je Cauchyovská. Potom má limitu aj postupnosť $\widetilde{F_n}(x)$. Označíme si ju nasledovne

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{F_n}(x) = \widetilde{F}$$

Následne môžeme rozpísať

$$\|F - \widetilde{F}\| \leq \|F - F_n\| + \|F_n - \widetilde{F_n}\| + \|\widetilde{F_n} - \widetilde{F}\|$$

Pre $n \to \infty$ je $\|F - F_n\| \to 0$ a $\|\widetilde{F_n} - \widetilde{F}\| \to 0$. Ak je $n$ dostatočne veľké, tak $\|F_n - \widetilde{F_n}\| < \varepsilon$ a teda $\|F - \widetilde{F}\| < 2\varepsilon$. Pretože $\widetilde{F_n} \to \widetilde{F}$ a $G_n \to G$ a pre všetky $x \in [0,1]$ platí $G_n(x) > \widetilde{F_n}(x)$ a následne dostávame $G(x) > \widetilde{F}(x)$ pre všetky $x \in [0,1]$, čím je dôkaz pre AFSD hotový.

Dôkaz pre ASSD je analógiou AFSD. □

Nasledujúca veta ukáže spojenie neúplnej stochastickej dominancie s množinami úžitkových funkcií definovaných vyššie.

**Veta 2.2.3.** *Nech X a Y sú dve náhodné veličiny a F a G ich distribučné funkcie.*
*(1) F dominuje G vzhľadom k AFSD práve vtedy, keď pre všetky $u \in U_1^*$ platí*

$$\mathbb{E}_F(u) \geq \mathbb{E}_G(u)$$

*(2) F dominuje G vzhľadom k AFSD práve vtedy, keď pre všetky $u \in U_2^*$ platí*

$$\mathbb{E}_F(u) \geq \mathbb{E}_G(u)$$

*Dôkaz.* Dôkaz možno nájsť v Leshno and Levy (2002). □

## 2.3 Upravený Postov test

Na základe definícií AFSD a ASSD z predošlej kapitoly môžeme ľahko porovnať dve investície medzi sebou. Musíme však brať do úvahy situáciu z bežného sveta, kde máme na výber z oveľa väčšieho počtu investícií. Naviac môžeme jednotlivé investície kombinovať. Tým dostávame nekonečné množstvo dvojíc na porovnávanie. Prirodzenou otázkou teda je, ako nájsť najlepšiu kombináciu alebo aspoň rozdeliť možnosti na lepšie a horšie.

Eficienciou portfólia v prípade FSD a SSD sa zaoberalo niekoľko autorov. Prvým je článok Thierryho Posta a jeho test SSD eficiencie predstavený v Post (2003). Modifikácia pre FSD bola vyvinutá v Kopa and Post (2009). Ďalšie práce Kuosmanen (2004) a Kopa and Chovanec (2008) ponúkajú možnosť učenia dominujúceho portfólia a nie len test či dané portfólio je alebo nie je eficientné.

Pokúsime sa upraviť test, ktorý predstavil Post. Jeho primárny test lineárneho programovania sa pýta, či vieme zostrojiť po častiach lineárnu úžitkovú funkciu pre testované portfólio $\boldsymbol{\tau}$. Dáva nutnú a postačujúcu podmienku eficiencie portfólia a dokáže oddeliť eficientné a neeficientné portfólia. Testovacia štatistika však nemôže byť použitá na vytváranie poradia. V prípade, že naše portfólio je neeficientné test nedokáže určiť, ktoré portfólio ho dominuje.

$\mathbf{X}$ bude matica očakávaných výnosov o $T$ riadkoch a $n$ stĺpcoch, pričom $T > n$. Písmeno $T$ označuje počet scenárov. Najčastejšie uvažujeme, že scenáre sú rovnako pravdepodobné, t.j. každý s pravdepodobnosťou $\frac{1}{T}$. Napríklad môžeme použit výnosy z historických dát za určité obdobie, typicky roky. $n$ je počet možných investícií.

Ak je dostupná bezriziková investícia, v $\mathbf{X}$ bude vystupovať ako stĺpec rovnakých hodnôt. Predpokladáme, že stĺpce sú lineárne nezávislé.

$\mathbf{x^t} = (x_1^t, x_2^t, ..., x_n^t)$ je $t$-ty riadok matice $\mathbf{X}$ a zároveň označuje výnosy pri $t$-tom scenári. Poradie riadkov v matici $\mathbf{X}$ je zanedbateľný usporiadame ich vzostupne podľa očakávaného zisku hodnoteného portfólia.

Budeme podobne ako Post hľadať úžitkovú funkciu $p$, ale na rozdiel od Posta nebude z $U_2$, ale z $U_2^*$ tak, že

$$p(x \mid \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \equiv \min_{t \in \{1,...,T\}} (\alpha_t + \beta_t x),$$

kde pre Posta boli $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1, ..., \alpha_T)^T \in \mathbb{R}^T$ koeficienty úrovne a $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{B_2} \equiv \{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}_+^T : \beta_1 \geq \beta_2 \geq ... \geq \beta_T = 1\}$ boli marginálne úžitky.

Definovaním množiny $\mathbf{B_2}$ si Post zabezpečil, aby bola úžitková funkcia konkávna a neklesajúca.

Množina $\mathbf{U_2^*}(\varepsilon)$ je príliž zložitá na to, aby sme sa pokúsili aplikovať túto množinu ako podmienky do Postovho SSD testu. Vo svojom článku Post uvádza aj FSD úpravu. Navrhuje $\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{B_1} \equiv \{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}_+^T : \beta_t \geq 1 \forall t\}$ .

Úžitkové funkcie neúplnej stochastiskej dominancie prvého rádu sú podmnožinou množiny úžitkových funkcií klasickej dominancie prvého rádu, preto sa naša úprava bude týkať koeficientov $\beta$. K Postovej minimalizácii:

$$\begin{aligned} \eta(\boldsymbol{\tau}) = \min \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad \sum_{t=1}^{T} \beta_t (\boldsymbol{x}^t \tau - x_i^t)/T + \theta & \geq 0, \qquad i = 1, ..., n \\ \beta_t & \geq 1, \qquad t = 1, ..., T \end{aligned}$$

pridáme podmienku, ktorá špecifikuje triedu úžitkových funkcií $\mathbf{U_1^*}(\varepsilon)$:

$$\beta_t \leq 1/\varepsilon - 1, \qquad t = 1, ..., T-1,$$

**Definícia 2.3.1.** *Portfólio $\boldsymbol{\tau}$ prehlásime za AFSD eficientné práve vtedy, keď $\eta(\boldsymbol{\tau}) = 0$*

# Kapitola 3

# $\varepsilon$-ASSD

V prípade ASSD je zložitejšie zaoberať sa eficienciou portfólia. Ako ukazujú Lizyayev and Ruszczyński (2012), je veľmi ťažké určiť dominantné portfólio z nekonečného množstva kombinácií vzhľadom k ASSD navrhnutou v Leshno and Levy (2002). Dokonca, aj hľadanie testu či je alebo nie je dané portfólio eficientné je úloha výpočetne viac než náročná. Sami sa môžeme presvedčiť, že triedu funkcií $\mathbf{U}_2^*(\varepsilon)$ ťažko upravíme na podmienky pre $\beta_t$ v teste z Postovho prístupu tak, aby úloha zostala rozumná. V článku sa preto navrhuje nasledovná úprava ASSD na $\varepsilon$-ASSD.

## 3.1 Zavedenie $\varepsilon$-ASSD

Nech odteraz $\varepsilon \geq 0$.

**Definícia 3.1.1.** *Nech $F_X$ a $F_Y$ sú dve distribučné funkcie dvoch rôznych náhodných veličín $X$ a $Y$, potom $X$ dominuje $Y$ na základe $\varepsilon$-ASSD ak*

$$\int_{-\infty}^{x} [F_X(t) - F_Y(t)]\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon \qquad \forall x.$$

**Veta 3.1.2.** *$X$ $\varepsilon$-ASSD dominuje $Y$ práve vtedy, keď existuje nezáporná náhodná veličina $Z$ taká, že $\mathbb{E}Z \leq \varepsilon$ a $X+Z$ SSD dominuje $Y$.*

*Dôkaz.* Dôkaz možno nájsť v Lizyayev and Ruszczyński (2012). □

Môžeme teda interpretovať $\varepsilon$ ako najmenšiu hodnotu, ktorú je potrebné pridať k X, aby X dominovala nad Y. Analogicky môžeme definovať $\varepsilon$-AFSD

**Príklad.** Uvažujeme dve investície. Investícia F stráca 1 000 000 Kč s pravdepodobnosťou 0,5 a získava 1 000 000 000 Kč s pravdepodobnosťou 0,5. Investícia G získava s určitosťou 1 000 000 Kč.

Väčšina, ak nie všetci investori by volili investíciu G pred F. Báli by sa pravdepodobnej straty veľkej čiastky a volili by radšej istotu zisku. G pritom SSD nedominuje F, čo indikuje potrebu neúplnej dominancie. Použitím ASSD dostávame dominanciu F nad G pre $\varepsilon = 0.001998$. Použitím $\varepsilon$-ASSD dostávame dominanciu G nad F s $\varepsilon > 1\,000\,000$ Kč.

V článku Lizyayev and Ruszczyński (2012) autori nadväzujú na článok Leshno and Levy (2002) a definujú aj dominanciu formulovanú na základe úžitkových funkcií. Pretože škálovanie úžitkových funkcií nemení eficienciu portfólia, obmedzíme sa na:

$$\widetilde{U_2} = \{u \in U_2 : u'(t) \leq 1\}$$

Ľubovoľnú funkciu $u \in U_2$ definovanú na ohraničenom intervale $[a, b]$ môžeme substituovať $\widetilde{u}(t) \equiv u(t)/u'(a)$ a pritom nezmeníme eficienciu ani optimalitu. Vo všeobecnom prípade $\widetilde{u}(t) \equiv u(t)/sup_{t \in S}\ u'(a)$ je prvkom $\widetilde{U_2}$.

**Veta 3.1.3.** *Náhodná veličina $X$ $\varepsilon$-ASSD dominuje náhodnú veličinu $Y$ práve vtedy, keď*

$$\mathbb{E}[u(X)] + \varepsilon \geq \mathbb{E}[u(Y)] \text{ pre všetky } u \in \widetilde{U_2}.$$

*Dôkaz.* Dôkaz možno nájsť v Lizyayev and Ruszczyński (2012). □

## 3.2 Aplikácia $\varepsilon$-ASSD obmedzení

Budeme uvažovať jednoduchú úlohu rozhodovania v neurčitosti pomocou klasickej teórie úžitku. Investor bude vyberať tak, aby maximalizoval očakávaný úžitok. Aj naďalej je $X$ matica očakávaných výnosov o $T$ riadkoch a $N$ stĺpcoch, $T > n$. $T$ je počet scenárov. Scenáre sú rovnako pravdepodobné, t.j. každý s pravdepodobnosťou $\frac{1}{T}$ a $n$ je počet možných investícií.

Medzi investíciami je možné diverzifikovať. Definujeme preto vektor váh $\lambda \in \Lambda$ tak, že

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^n | \textstyle\sum_i \lambda^i = 1, \lambda^i \geq 0, i = 1, ..., n\},$$

Prvá podmienka z definície $\Lambda$ hovorí, že investor investuje celý svoj majetok a druhá podmienka zakazuje tzv. krátke pozície, kedy investor nemôže predávať aktívum, ktoré momentálne nevlastní.

Nasledujúce dve úlohy s $\varepsilon$-ASSD obmedzeniami naväzujú na prácu Dentcheva and Ruszczyński (2003)

$$\begin{array}{rrcll}
 & \max & \mathbb{E}(X\lambda) & & \\
\text{s.t.} & \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_k + s_{ij} & \geq & y_j, & i,j=1,...,T \\
 & \sum_{i=1}^{T} s_{ij}\frac{1}{T} & \leq & \int_{-\infty}^{y_j} F(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon, & j=1,...,T \\
 & s_{ij} & \geq & 0, & i,j=1,...,T \\
 & \lambda & \in & \Lambda &
\end{array}$$

a

$$\begin{array}{rrcll}
 & \max & \mathbb{E}(X\lambda) & & \\
\text{s.t.} & \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_k + d_i + s_{ij} & \geq & y_j, & i,j=1,...,T \\
 & \sum_{i=1}^{T} s_{ij}\frac{1}{T} & \leq & \int_{-\infty}^{y_j} F(t)\,\mathrm{d}t, & j=1,...,T \\
 & \sum_{i=1}^{T} d_i\frac{1}{T} & \leq & \varepsilon & \\
 & s_{ij} & \geq & 0, & i,j=1,...,T \\
 & \lambda & \in & \Lambda &
\end{array}$$

vychádzajú z myšlienky:

$$\begin{array}{rrcll}
 & \max & \mathbb{E}(X) & & \\
\text{s.t.} & \mathbb{E}[(\eta - X)_+] & \leq & \mathbb{E}[(\eta - Y)_+] & \forall \eta \in [a,b] \\
 & X & \in & \boldsymbol{C} &
\end{array}$$

upravenej na:

$$\begin{array}{rrcll}
 & \max & \mathbb{E}(X) & & \\
\text{s.t.} & X(\omega) + S(\eta,\omega) & \geq & \eta & \textit{pre s.v. } (\eta,\omega) \in [a,b]\times\Omega \\
 & \mathbb{E}[S(\eta,\omega)] & \leq & \mathbb{E}[(\eta - Y)_+] & \forall \eta \in [a,b] \\
 & S(\eta,\omega) & \geq & 0 & \textit{pre s.v. } (\eta,\omega) \in [a,b]\times\Omega \\
 & X & \in & \boldsymbol{C} &
\end{array}$$

kde $X$ a $Y$ sú náhodné veličiny zisku z portfólia definované na $[a,b]$. $\boldsymbol{C}$ je množina možných náhodných veličín ziskov. Táto úloha sa prevedie na formuláciu pre konečný diskrétny prípad. Máme teda len konečný počet scenárov $\omega_1, ..., \omega_T$, $p_k = P[\{\omega_k\}]$, $v_i = \mathbb{E}[(y_i - Y)_+]$, $x_k = X(\omega_k)$ a $s_{ik} = S(y_i, \omega_k)$, kde $S$ je vektor rozhodnutí $S : [a, b] \times \Omega \to \mathbb{R}$. "s.v."je skratka pre skoro všetky vzhľadom k súčinovej miere. Zmena k $\varepsilon$-ASSD je len v druhom obmedzení, kde sa pravá strana mení na integrál.

Alternatívny prístup týchto autorov vychádza z článkov Kuosmanen (2004) a Luedtke (2008) a využíva dvojstochastické matice:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbb{E}(X\lambda) \\
\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\lambda_k + d_i - \sum_{j=1}^{T} w_{ij} y_j &\geq 0, \qquad i = 1, ..., T \\
\sum_{j=1}^{T} w_{ij} &= 1, \qquad i = 1, ..., T \\
\sum_{i=1}^{T} w_{ij} \frac{1}{T} &= \frac{1}{T}, \qquad j = 1, ..., T \\
\sum_{i=1}^{T} d_i \frac{1}{T} &\leq \varepsilon \\
w_{ij} &\geq 0, \qquad i, j = 1, ..., T \\
d_i &\geq 0, \qquad i = 1, ..., T \\
\lambda &\in \Lambda
\end{aligned}
$$

Táto úloha hľadá portfólio, ktoré má maximálny výnos za predpokladu, že dominuje daný benchmark.

# Kapitola 4

# Kvantilový prístup

Ďalší z možných prístupov k problematike je založený na kvantiloch. Objavuje sa najmä v práci Kopa and Chovanec (2008). Než sa tento prístup pokúsime upraviť, pripravíme si cestu a to článkom Ogyczak and Ruszczyński (2002).

## 4.1 Kvantily

Kvantilová funkcia $F_x^{(-1)} : (0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ náhodnej veličiny $X$ bude pre nás zľava spojitá inverzná funkcia distribučnej funkcie $F_x$ taká, že:

$$F_x^{(-1)}(p) = \inf\{\eta : F_x(\eta) \geq p\}, \text{ pre } 0 < p \leq 1.$$

Pre dané $p \in [0,1]$ nazveme $q_x(p)$ $p$-kvantilom náhodnej veličiny $X$, ak

$$P\{X < q_x(p)\} \leq p \leq P\{X \leq q_x(p)\}.$$

Potom priamo z definície FSD dostávame, že X dominuje Y na základe FSD práve vtedy, keď $F_X^{(-1)}(p) \geq F_Y^{(-1)}(p)$, pre všetky $0 < p \leq 1$.

Budeme definovať tiež modifikovanú (kumulatívnu) kvantilovú funkciu konzistentnú so SSD. Nazveme ju *druhá kvantilová funkcia* $F_x^{(-2)} : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$:

$$F_x^{(-2)}(p) = \int_0^p F_x^{(-1)}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \text{ pre } 0 < p \leq 1, \text{ a pritom}$$

$F_x^{(-2)}(0) = 0$
$F_x^{(-2)}(p) = \infty$, pre $p \notin [0,1]$.
$F_x^{(-2)}$ je dobre definovaná pre všetky náhodné veličiny $X$, ktoré splňujú podmienku $\mathbb{E}|X| < \infty$.

**Veta 4.1.1.** *Náhodná veličina X SSD dominuje náhodnú veličinu Y práve vtedy, keď*

$$\frac{F_X^{(-2)}(p)}{p} \geq \frac{F_Y^{(-2)}(p)}{p}$$

*pre všetky* $0 < p \leq 1$.

*Dôkaz.* Tento dôkaz je uvedený v Ogyczak and Ruszczyński (2002). □

**Veta 4.1.2.** *Náhodná veličina X ε-ASSD dominuje náhodnú veličinu Y práve vtedy, keď*

$$\frac{F_Y^{(-2)}(p)}{p} - \frac{F_X^{(-2)}(p)}{p} \leq \varepsilon$$

*pre všetky* $0 < p \leq 1$.

*Dôkaz.* Veta je priamym dôsledkom predošlej vety. Stačí si uvedomiť, že veľkosť plochy medzi distribučnými funkciami sa pri prechode na kvantilové funkcie nemení. □

Ďalej budeme aplikovať postup článku Kopa and Chovanec (2008). Nech $Y$ je náhodná veličina straty prislúchajúca k náhodnej veličine výnosu X, t.j. $Y = -X$. Budeme predpokladať, že $\mathbb{E}|Y| < \infty$. Tak ako v článku definujeme *Podmienený value-at-risk(CVaR)* ako riešenie optimalizačnej úlohy

$$CVaR_\alpha(Y) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ a + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[Y-a]^+ \right\}, \tag{2}$$

kde $[x]^+ = \max(x, 0)$.

Z článku Rockafellar and Uryasev (2002) vieme, že *CVaR* môžeme alternatívne definovať ako podmienenú strednú hodnotu $Y$ vzhľadom k $Y > \mathrm{VaR}_\alpha(Y)$, t.j.

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) = \mathbb{E}(Y|Y > \mathrm{VaR}_\alpha(Y)).$$

Ogyczak and Ruszczyński (2002) ďalej uvádzajú, že pre $p \in (0,1)$ a $\eta$ také, že pravdepodobnosť $P[X \leq \eta] = p$, platí

$$F_X^{(-2)}(p) = p\mathbb{E}[X|X \leq \eta].$$

Ak teda použijeme $-Y$ a $1-\alpha$ namiesto $X$ a $p$, dostávame

$$\frac{F_X^{(-2)}(\alpha)}{\alpha} = -\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) \tag{3}$$

čo podrobnejšie ukazujú Kopa and Chovanec (2008). Potom platí nasledujúca veta.

**Veta 4.1.3.** *Náhodná veličina* $X_1$ *ε-ASSD dominuje náhodnú veličinu* $X_2$ *práve vtedy, keď*

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(Y_1) - \mathrm{CVaR}_\alpha(Y_2) \leq \varepsilon$$

*pre všetky* $0 < \alpha \leq 1$.

*Dôkaz.* Veta je priamym dôsledkom Vety 4.1.2 a (3). □

## 4.2 Diskrétne náhodné veličiny

Predpokladajme, že $Y$ je diskrétna náhodná veličina s rovnako pravdepodobnými scenármi $y_t$, $t = 1, ..., T$. V článku Kopa and Chovanec (2008) sa uvádza, že (2) môžeme previesť na nasledovnú úlohu lineárneho programovania

$$\begin{aligned} \mathrm{CVaR}_\alpha(Y) &= \max_{a,\omega_t} \quad a + \frac{1}{(1-\alpha)T}\sum_{t=1}^{T}\omega_t \\ \text{s.t.} \quad \omega_t &\geq y_t - a \\ \omega_t &\geq 0. \end{aligned}$$

Nech $y^{[k]}$ je $k$-ty najmenší prvok z $y^1, y^2, ..., y^T$, teda $y^{[1]} \leq y^{[2]} \leq ... \leq y^{[T]}$. Optimálne riešenie tejto úlohy vyplýva z nasledovnej vety.

**Veta 4.2.1.** *Ak* $\alpha \in \langle \frac{k}{T}, \frac{k+1}{T} \rangle$ *a* $\alpha \neq 1$ *potom*

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(Y) = y^{[k+1]} + \frac{1}{(1-\alpha)T}\sum_{i=k+1}^{T}(y^{[i]} - y^{[k+1]}) \tag{4}$$

*pre* $k = 0, 1, ..., T-1$ *a* $\mathrm{CVaR}_1(Y) = y^{[T]}$.

*Dôkaz.* Dôkaz je uvedený v Kopa and Chovanec (2008). □

**Veta 4.2.2.** *Nech* $Y_1 = -X_1$ *a* $Y_2 = -X_2$ *sú diskrétne náhodné veličiny, ktoré nadobúdajú hodnoty* $y_1^t$ *a* $y_2^t$*, pre* $t = 1, ..., T$ *s rovnakými pravdepodobnosťami. Potom* $X_1$ $\varepsilon$*-ASSD dominuje* $X_2$ *práve vtedy, keď*

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(Y_1) - \mathrm{CVaR}_\alpha(Y_2) \leq \varepsilon$$

*pre všetky* $\alpha \in \left\{0, \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, ..., \frac{T-1}{T}\right\}$.

*Dôkaz.* Nech $\alpha_k = k/T$, $k = 0, 1, ..., T-2$. Ak vezmeme dostatočne veľký kvantil distribučných funkcií dvoch diskrétne rozdelených náhodných veličín dostaneme rovnosť CVaR v nasledovnom zmysle

$$\mathrm{CVaR}_{\beta_1}(Y_i) = \mathrm{CVaR}_{\beta_2}(Y_i), \text{ pre } i = 1, 2 \text{ a pre všetky } \beta_1, \beta_2 \in \langle \tfrac{T-1}{T}, 1 \rangle.$$

Dôkaz bude hotový, ak ukážeme, že ak platí podmienka $\varepsilon$-ASSD dominancie na okrajoch intervalu $\langle \alpha_k, \alpha_{k+1} \rangle$, potom platí tvrdenie pre všetky $\alpha$ v tomto intervale, t.j. ak

$$\begin{aligned} \mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(Y_1) - \mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(Y_2) &\leq \varepsilon \quad a \\ \mathrm{CVaR}_{\alpha_{k+1}}(Y_1) - \mathrm{CVaR}_{\alpha_{k+1}}(Y_2) &\leq \varepsilon \\ \textit{potom} \quad \mathrm{CVaR}_\alpha(Y_1) - \mathrm{CVaR}_\alpha(Y_2) &\leq \varepsilon \quad \textit{pre} \quad \alpha \in \langle \alpha_k, \alpha_{k+1} \rangle. \end{aligned}$$

Toto tvrdenie dokážeme sporom. Nech teda existuje $\widetilde{\alpha} \in \langle \alpha_k, \alpha_{k+1} \rangle$ také, že

$$\mathrm{CVaR}_{\widetilde{\alpha}}(Y_1) - \mathrm{CVaR}_{\widetilde{\alpha}}(Y_2) > \varepsilon.$$

Zo spojitosti funkcie CVaR v premennej kvantil plynie, že existujú $\alpha^1, \alpha^2 \in \langle \alpha_k, \alpha_{k+1} \rangle$, $\alpha^1 \neq \alpha^2$ tak, že

$$\begin{aligned} \mathrm{CVaR}_{\alpha^1}(Y_1) - \mathrm{CVaR}_{\alpha^1}(Y_2) &= \varepsilon \quad a \\ \mathrm{CVaR}_{\alpha^2}(Y_1) - \mathrm{CVaR}_{\alpha^2}(Y_2) &= \varepsilon \end{aligned}$$

Do týchto rovníc dosadíme (4) a dostaneme, že $\alpha^1 = \alpha^2$, čo je hľadaný spor. $\square$

## 4.3 $\varepsilon$-ASSD eficiencia portfólia

Uvažujeme náhodný vektor $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, ..., r_N)'$ výnosov z $N$ aktív a $T$ rovnako pravdepodobných scenárov. Výnosy pri rôznych scenároch označíme

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x^1} \\ \boldsymbol{x^2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x^T} \end{pmatrix}$$

kde $\boldsymbol{x^t} = (x_1^t, x_2^t, ..., x_N^t)$ je $t$-ty riadok matice $\boldsymbol{X}$. Predpokladáme, že stĺpce sú lineárne nezávislé.

Medzi investíciami je možné diverzifikovať. Definujeme preto vektor váh $\lambda \in \Lambda$ tak, že

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^n | \textstyle\sum_i \lambda^i = 1, \lambda^i \geq 0, i = 1, ..., n\},$$

Prvá podmienka z definície $\Lambda$ hovorí, že investor investuje celý svoj majetok a druhá podmienka zakazuje tzv. krátke pozície, kedy investor nemôže predávať aktívum, ktoré momentálne nevlastní.

Testované portfólio označíme $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N)'$ a nech $\Gamma = \left\{0, \frac{1}{T}, \frac{2}{T}, ..., \frac{T-1}{T}\right\}$.

**Definícia 4.3.1.** *Testované portfólio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ je $\varepsilon$-ASSD neeficientné práve vtedy, keď existuje portfólio $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ také, že $\boldsymbol{r'\lambda}$ $\varepsilon$-ASSD dominuje $\boldsymbol{r'\tau}$. V opačnom prípade je portfólio $\boldsymbol{\tau}$ $\varepsilon$-ASSD eficientné.*

**Veta 4.3.2.** *Nech $\alpha_k \in \Gamma$ a*

$$d^* = \max_{\lambda_n} \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n [\mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-\boldsymbol{r'\tau}) - \mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-r_n) + \varepsilon]$$

$$s.t. \sum_{n=1}^{N} \lambda_n [\mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-\boldsymbol{r'\tau}) - \mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-r_n) + \varepsilon] \geq 0, \qquad k = 0, 1, ...T-1, \ \lambda \in \Lambda.$$

*Ak je $d^* > 0$ potom $\boldsymbol{\tau}$ je $\varepsilon$-ASSD neeficientné.*

*Dôkaz.* Ak je $d^* > 0$ potom existuje prípustné riešenie $\boldsymbol{\lambda}$ tejto úlohy, ktoré splňuje

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n [\mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}) - \mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-r_n) + \varepsilon] \geq 0, \qquad \text{pre všetky } \alpha_k \in \Gamma$$

pričom aspoň jedna nerovnosť je ostrá. Pre toto $\boldsymbol{\lambda}$ platí

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-r_n) \leq \varepsilon + \mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}), \qquad \text{pre všetky } \alpha_k \in \Gamma$$

pričom aspoň jedna nerovnosť je ostrá. Z konvexity CVaR platí

$$\mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}) \leq \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-r_n), \qquad \text{pre všetky } \alpha_k \in \Gamma.$$

Spojením posledných dvoch nerovností dostávame

$$\mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}) - \mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}) \leq \varepsilon, \qquad \text{pre všetky } \alpha_k \in \Gamma$$

pričom aspoň jedna nerovnosť je ostrá. Použitím Vety 4.2.2. dostávame, že $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}$ $\varepsilon$-ASSD dominuje $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$ a zbytok dôkazu plynie z definície. □

Podobne ako v SSD prípade môže byť portfólio $\boldsymbol{\tau}$ $\varepsilon$-ASSD neeficientné, aj keď v úlohe z predošlej vety nie je žiadne prípustné riešenie, alebo keď $d^* = 0$. Ak $d^* = 0$ potom je to jeden z dvoch prípadov :

1. Riešenie $\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\tau}$ je jediné. V tomto prípade je $\boldsymbol{\tau}$ $\varepsilon$-ASSD eficientné.

2. Úloha má optimálne riešenie $\boldsymbol{\lambda}^* \neq \boldsymbol{\tau}$. V tomto prípade je $\boldsymbol{\tau}$ $\varepsilon$-ASSD neeficientné a $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}^*$ $\varepsilon$-ASSD dominuje $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$ a naviac $\boldsymbol{\lambda}^*$ je eficientné portfólio.

Prípad, keď $d^* = 0$, $\boldsymbol{\lambda}^* \neq \boldsymbol{\tau}$ a $\boldsymbol{\tau}$ je $\varepsilon$-ASSD eficientné je v rozpore s predpokladom lineárnej nezávislosti stĺpcov matice X.

Ak úloha vo Vete 4.3.2 nemá prípustné riešenie môžeme využiť nasledovnú nutnú a postačujúcu podmienku $\varepsilon$-ASSD eficiencie.

**Veta 4.3.3.** *Nech $\alpha_k \in \Gamma$ a*

$$D^*(\boldsymbol{\tau}) = \max_{D_k, \lambda_n, b_k} \sum_{k=0}^{T-1} D_k$$

$$\begin{aligned}
s.t. \quad \mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}) - b_k - \frac{1}{1-\alpha_k}\mathbb{E}\max(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} - b_k, 0) + \varepsilon &\geq D_k, \qquad k = 0, 1, ...T-1 \\
D_k &\geq 0, \qquad k = 0, 1, ...T-1 \\
\boldsymbol{\lambda} &\in \Lambda
\end{aligned}$$

*Ak je $D^*(\boldsymbol{\tau}) > 0$ potom $\boldsymbol{\tau}$ je $\varepsilon$-ASSD neeficientné a $\boldsymbol{r'\lambda^*}$ $\varepsilon$-ASSD dominuje $\boldsymbol{r'\tau}$. Inak $D^* = 0$ a $\boldsymbol{\tau}$ je $\varepsilon$-ASSD eficientné.*

*Dôkaz.* Nech $\boldsymbol{\lambda}^*, b_k^*, k = 0, 1, ..., T-1$ je optimálne riešenie úlohy zo znenia vety. Ak $D^*(\boldsymbol{\tau}) > 0$, potom

$$b_k^* + \tfrac{1}{1-\alpha_k}\mathbb{E}\max(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}^* - b_k^*, 0) - \mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}) \leq \varepsilon, \qquad \text{pre všetky } \alpha_k \in \Gamma$$

pričom aspoň jedna z nerovností je ostrá. Z alternatívnej definície pre CVaR platí

$$\mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}^*) = \max_{b_k}\left\{b_k + \frac{1}{1-\alpha_k}\mathbb{E}\max(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}^* - b_k, 0)\right\}$$

spojením dostaneme

$$\mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}^*) - \mathrm{CVaR}_{\alpha_k}(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}) \leq \varepsilon, \qquad \text{pre všetky } \alpha_k \in \Gamma$$

pričom aspoň jedna z nerovností je ostrá. Z toho priamo plynie, že $\boldsymbol{r'\lambda^*}$ $\varepsilon$-ASSD dominuje $\boldsymbol{r'\tau}$ a $\boldsymbol{\tau}$ je $\varepsilon$-ASSD neeficientné.

Ak $D^*(\boldsymbol{\tau}) = 0$, potom má úloha jediné optimálne riešenie $\boldsymbol{\lambda^*} = \boldsymbol{\tau}$. Ak by mala iné optimálne riešenie, dostali by sme spor s lineárnou nezávislosťou stĺpcov matice X. Nakoniec si stačí uvedomiť, že $D^*(\boldsymbol{\tau})$ nemôže byť záporné, pretože $\boldsymbol{\tau}$ je vždy prípustným riešením. □

Nelineárnu úlohu lineárneho programovania sa pokúsime tak ako v Kopa and Chovanec (2008) prepísať na úlohu lineárneho programovania použitím definície CVaR ako úlohy lineárneho programovania zo začiatku kapitoly 4.2.

$$D^*(\boldsymbol{\tau}) = \max_{D_k, \lambda_n, b_k, \omega_k^t} \sum_{k=0}^{T} D_k$$

$$\begin{array}{lrcll}
\text{s.t.} & \mathrm{CVaR}_{\frac{k-1}{T}}(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}) + \varepsilon - b_k - \dfrac{1}{(1-\frac{k-1}{T})T}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\omega_k^t & \geq & D_k, & k = 0, 1, ..., T \\
& \omega_k^t & \geq & -\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{\lambda} - b_k, & t, k = 0, 1, ..., T \\
& \omega_k^t & \geq & 0, & t, k = 0, 1, ..., T \\
& D_k & \geq & 0, & k = 0, 1, ..., T \\
& \boldsymbol{\lambda} & \in & \Lambda &
\end{array}$$

Získali sme kritérium $\varepsilon$-ASSD eficiencie pomocou úlohy lineárneho programovania využitím kvantilového prístupu.

# Kapitola 5

# Analýza $\varepsilon$

V prístupoch ASD a $\varepsilon$-ASD má $\varepsilon$ iný význam. Je preto veľmi dôležite zdôrazniť, že sa nejedná o to iste $\varepsilon$.

## 5.1 Porovnanie ASD a $\varepsilon$-ASD

V prístupe Leshno and Levy (2002) preznačíme $\varepsilon$ na $\varepsilon^{LL}$, je definované $\varepsilon^{LL} \in (0, 0.5)$ ako pomer plôch, tak ako je to uvedené v kapitole 2.1 a 2.2. Pripomeňme, že v prípade, že voľnosť zakážeme, t.j. $\varepsilon^{LL} = 0$, dostávame z AFSD reláciu FSD a z ASSD reláciu SSD. $\varepsilon^{LL}$ môžeme interpretovať ako pomer plochy, ktorú sme ochotní obetovať.

**Definícia 5.1.1.** *Nech $0 < \varepsilon^{LL} < 0,5$ a nech $F$ a $G$ sú dve kumulatívne distribučné funkcie dvoch rôznych náhodných veličín X a Y, potom X dominuje Y na základe neúplnej stochastickej dominancie 2. rádu (ASSD alebo $SSD^*$), ak*

$$\int_{s_2} |G(x) - F(x)| \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon^{LL} \int_{-\infty}^{\infty} |G(x) - F(x)| \,\mathrm{d}x$$

*a súčasne*

$$E_F(X) \geq E_G(Y)$$

Článok Levy et al. (2010) uvádza pokusy, ktorými sa autori pokúšali určiť hodnotu $\varepsilon^{LL}$ experimentálne tak, aby reprezentovala skutočnosť. V prípade AFSD dospeli k hodnote $\varepsilon^{LL} = 0.059$ a v prípade ASSD k hodnote $\varepsilon^{LL} = 0.032$. V prípade ASSD použili nasledovný postup. Dotazovanému ponúkli na výber z dvoch investícií.

Tabuľka 5.1: Ponúknuté portfólia

| Investícia A | | Investícia B | |
|---|---|---|---|
| Pravdepodobnosť | Zisk | Pravdepodobnosť | Zisk |
| 1/3 | \$125 | 1/3 | \$100 |
| 1/3 | \$150 | 1/3 | \$200 |
| 1/3 | \$$z$ | 1/3 | \$300 |

Ľahko sa overí, že ani investícia A nedominuje B a ani investícia B nedominuje A vzhľadom k SSD. Respondent mal určiť minimálnu hodnotu $z$ tak, aby investíciu A preferoval pred investíciou B. Autori uvádzajú, že 2.5 % respondentov z celkového počtu 196 študentov zvolilo $z = \$1000$, čo bola zároveň najvyššia hodnota, ktorá sa objavila. Hodnota $\varepsilon^{LL} = 0.032$ je určená pre $z = \$1000$.

Autori Lizyayev and Ruszczyński (2012) k $\varepsilon$ pristupujú inak. Budeme preto používať označenie $\varepsilon^{LR}$. V tomto prípade sa $\varepsilon^{LR}$ interpretuje ako najmenšia hodnota, ktorú je potrebné pridať k X, aby dominovalo nad Y.

**Definícia 5.1.2.** *Nech $F$ a $G$ sú dve distribučné funkcie dvoch rôznych náhodných veličín X a Y, potom X dominuje Y na základe $\varepsilon^{LR}$-ASSD ak*

$$\int_{-\infty}^{x} [F(t) - G(t)]\,\mathrm{d}t \le \varepsilon^{LR} \qquad \forall x.$$

Prvá vec čo rozlišuje uvedené definície, je spôsob akým k $\varepsilon$ pristupujú. V definícii LL sledujeme plochu medzi distribučnými funkciami ako celok. Táto plocha sa ako keby s $\varepsilon^{LL}$ porovnáva len raz. Pričom v prístupe LR prebieha porovnanie pre každé $x$. Aj keď v LR prípade nie sú žiadne obmedzenia na $\varepsilon^{LR}$, v bežných podmienkach by sme záporným $\varepsilon^{LR}$ dosiahli v istom zmysle silnejšiu dominaniciu ako je SSD.

**Veta 5.1.3.** *Nech $s_2$ definované v kapitole 2.2 je súvislý interval, t.j. nech $s_2 = [a, b]$ tak, že $-\infty < a < b < \infty$. Potom buď X dominuje Y na základe SSD alebo*

$$argmax_{x\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{x} [F(t) - G(t)]\,\mathrm{d}t = b.$$

*Dôkaz.* Pre $x \ge b$ rozpíšeme

$$\int_{-\infty}^{x} [F(t) - G(t)]\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} [F(t) - G(t)]\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{b} [F(t) - G(t)]\,\mathrm{d}t + \int_{b}^{x} [F(t) - G(t)]\,\mathrm{d}t.$$

Prvý a tretí integrál na pravej strane sú nekladné a druhý integrál je nezáporný. Odtiaľ priamo plynie, že funkcia nenadobúda maxima pre $x > b$.

Na intervale $(-\infty, a)$ je funkcia nekladná. Ak tu nadobúda maxima, splňuje potom podmienku LR-ASSD dominancie pre $\varepsilon = 0$.

Funkcia je na $[a, b]$ rastúca, preto ak tu nadobúda maxima musí to byť pre hornú hranicu intervalu, t.j. bod b. □

Nech X nedominuje Y na základe SSD. Nech $\Upsilon^{LL}$ je množina všetkých $\varepsilon^{LL}$, pre ktoré X dominuje Y na základe LL-ASSD. Nech ďalej $\Upsilon^{LR}$ je množina všetkých $\varepsilon^{LR}$, pre ktoré X dominuje Y na základe LR-ASSD.

Označme $\varepsilon^{MLL} = \min\limits_{\varepsilon \in \Upsilon^{LL}} \varepsilon$.

Podobne $\varepsilon^{MLR} = \min\limits_{\varepsilon \in \Upsilon^{LR}} \varepsilon$.

Potom z Vety 5.0.3 za platnosti jej predpokladov:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} [F(t) - G(t)]\,\mathrm{d}t + \int\limits_{a}^{b} [F(t) - G(t)]\,\mathrm{d}t = \varepsilon^{MLR}.$$

Druhý integrál na ľavej strane vyjadríme z definície $\varepsilon^{MLL}$ a dosadíme

$$\int\limits_{-\infty}^{a} [F(t) - G(t)]\,\mathrm{d}t + \varepsilon^{MLL} \int\limits_{\mathbb{R}} |F(t) - G(t)|\,\mathrm{d}t = \varepsilon^{MLR}.$$

Uvedený vzťah ukazuje súvislosť medzi jednotlivými $\varepsilon$ z oboch prístupov.

# Kapitola 6

# Aplikácia

V tejto kapitole budeme skúmať vplyv $\varepsilon$ na reálnych dátach. V teste eficiencie portfólia vzhľadom k $\varepsilon$-ASSD, ktorý využíva kvantilový prístup, t.j. test odvodený v kapitole 4.3. Ako testované portfólio použijeme tržné portfólio na Americkej burze cenných papierov. Testovať budeme voči portfóliam, ktoré sa dajú vytvoriť kombináciou ostatných aktív.

Použijeme mesačné nadvýnosy z 10 rôznych reprezentatívnych aktív pre 10 priemyselných odvetví v období 7/1926 do 6/2007 a bezrizikovú úrokovú mieru ako jedenáste dostupné aktívum na trhu. Nadvýnos je výnos nad úrovňou bezrizikovej úrokovej miery. To znamená, že nadvýnos bezrizikovej úrokovej miery je nula v každom období. Medzi spomínané aktíva patria odvetvia, ktoré produkujú netrvanlivé produkty (NoDur), produkty dlhodobej spotreby (Durbl), spracovateľský priemysel (Manuf), energetika (Engry), Hi Tech produkty (HiTec), telekomunikácie (Telcm), obchody (Shops), zdravotná starostlivosť (Hlth), verejnoprospešné služby (Utils) a ďalšie kategórie (Other).

Tržné portfólio vzniklo ako vážený priemer z cenných papierov NYSE, AMEX a NASDAQ. Nadvýnosy priemyselných odvetví sú založené na priemyselnej klasifikácii podľa štvormiestneho kódu SIC. Dáta sú voľne prístupné v internetovej knižnici French (2012). Nasledujúca tabuľka uvádza základné štatistiky nadvýnosov.

Tabuľka 6.1: Základné vlastnosti dát

| Odvetvie | Priemer | Sm. odchýlka | Medián | Minimum | Maximum |
|---|---|---|---|---|---|
| **Tržné** | 0.65 | 5.42 | 0.97 | −29.04 | 38.27 |
| **NoDur** | 0.69 | 4.70 | 0.82 | −24.51 | 34.31 |
| **Durbl** | 0.82 | 7.62 | 0.72 | −34.81 | 79.61 |
| **Manuf** | 0.75 | 6.34 | 1.07 | −29.83 | 57.30 |
| **Enrgy** | 0.79 | 5.97 | 0.61 | −26.01 | 33.47 |
| **HiTec** | 0.80 | 7.46 | 0.98 | −33.86 | 53.33 |
| **Telcm** | 0.57 | 4.60 | 0.73 | −21.59 | 28.13 |
| **Shops** | 0.69 | 5.91 | 0.69 | −30.21 | 36.95 |
| **Hlth** | 0.79 | 5.79 | 0.75 | −34.80 | 38.56 |
| **Utils** | 0.61 | 5.69 | 0.77 | −32.99 | 43.13 |
| **Other** | 0.66 | 6.45 | 0.98 | −30.06 | 58.71 |

Zvolili sme časový horizont 10 rokov, čo predstavuje 120 scenárov. Pri výpočtoch sme použili metódu posuvného okna s uvažovanou šírkou 10 rokov a posunom vždy o 1 rok, t.j. 12 scenárov.

Výpočty prebiehali v programe GAMS22.6 použitím balíčka Cplex, ktorý je zameraný na riešenie úloh lineárneho programovania. Pri výpočte sme používali počítač s procesorom Intel Core 2 Duo s frekvenciou 2,26 GHz a 4 GB RAM.

Zameriame sa hlavne na časový interval 7/1997 až 6/2007. Nasledovné tabuľky uvádzajú rozdelenie výsledných dominujúcich portfólií pre rôzne hodnoty $\varepsilon$. Hodnotu účelovej funkcie označme $D^*(\boldsymbol{\tau})$.

Tabuľka 6.2: Optimálne portfólia vzhľadom k $\varepsilon$ od 0.00 po 0.04

| | $\varepsilon = 0.00$ | $\varepsilon = 0.01$ | $\varepsilon = 0.02$ | $\varepsilon = 0.03$ | $\varepsilon = 0.04$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **NoDur** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Durbl** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Manuf** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Enrgy** | 0.27 | 0.26 | 0.25 | 0.25 | 0.24 |
| **HiTec** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Telcm** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Shops** | 0.10 | 0.10 | 0.09 | 0.09 | 0.09 |
| **Hlth** | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.01 |
| **Utils** | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.14 | 0.14 |
| **Other** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **RiskFree** | 0.47 | 0.48 | 0.49 | 0.51 | 0.52 |
| $D^*(\boldsymbol{\tau})$ | 277.48 | 282.59 | 287.71 | 292.83 | 297.94 |

Tabuľka 6.3: Optimálne portfólia vzhľadom k $\varepsilon$ od 0.05 po 0.45

| | $\varepsilon = 0.05$ | $\varepsilon = 0.15$ | $\varepsilon = 0.25$ | $\varepsilon = 0.35$ | $\varepsilon = 0.45$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **NoDur** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Durbl** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Manuf** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Enrgy** | 0.24 | 0.18 | 0.12 | 0.06 | 0.00 |
| **HiTec** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Telcm** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Shops** | 0.09 | 0.07 | 0.04 | 0.02 | 0.00 |
| **Hlth** | 0.01 | 0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| **Utils** | 0.14 | 0.10 | 0.07 | 0.03 | 0.00 |
| **Other** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **RiskFree** | 0.52 | 0.65 | 0.76 | 0.88 | 1.00 |
| $D^*(\boldsymbol{\tau})$ | 303.06 | 354.21 | 405.37 | 456.52 | 507.67 |

Tržné portfólio US je ASSD neeficientné, pretože $D^*(\boldsymbol{\tau}) > 0$. Z tabuliek jasne vidieť, že s rastúcim $\varepsilon$ podiel bezrizikového aktíva v dominujúcom portfóliu rastie. Ide o plynule presúvanie, nepozoruje- me žiadne veľké skoky. Výsledok to nie je vôbec prekvapivý, pretože bezrizikové aktívum má zo všetkých aktív najmenší rozptyl. Pre $\varepsilon = 0$, t.j. v prípade SSD, je to 47 % a postupne rastie až na hodnotu takmer 100 % pre $\varepsilon = 0.45$.

Rovnaký jav pozorujeme aj v iných obdobiach a dá sa predpokladať, že vždy, keď bude medzi aktívami aj bezrizikové aktívum bude jeho zastúpenie v optimálnom portfóliu rásť s rastúcim $\varepsilon$. Preto je zaujímave pozrieť sa ako sa chová optimálne portfólio v prípade, kedy bezrizikové aktívum nie je medzi možnými aktívami. Nasledovná tabuľka ukazuje výsledky v prípade vynechania bezrizikového aktíva.

Tabuľka 6.4: Optimálne portfólia bez bezrizikového aktíva : roky 97-07

| | $\varepsilon = 0.00$ | $\varepsilon = 0.05$ | $\varepsilon = 0.15$ | $\varepsilon = 0.25$ | $\varepsilon = 0.35$ | $\varepsilon = 0.45$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **NoDur** | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 |
| **Durbl** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Manuf** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Enrgy** | 0.12 | 0.12 | 0.12 | 0.12 | 0.12 | 0.12 |
| **HiTec** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Telcm** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Shops** | 0.22 | 0.22 | 0.22 | 0.22 | 0.22 | 0.22 |
| **Hlth** | 0.24 | 0.24 | 0.24 | 0.24 | 0.24 | 0.24 |
| **Utils** | 0.27 | 0.27 | 0.27 | 0.27 | 0.27 | 0.27 |
| **Other** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| $D^*(\boldsymbol{\tau})$ | 170.43 | 176.43 | 188.43 | 200.43 | 212.43 | 224.43 |

Opäť platí, že tržné portfólio US je ASSD neefìcientné, pretože $D^*(\boldsymbol{\tau}) > 0$. V tomto prípade optimálne portfólio dominuje všetky ostatné portfólia aj pre $\varepsilon = 0.45$. To môže napovedať, že k paradoxným situáciám nedochádza tak často. V skutočnosti pri kontrolovaní jednotlivých období je to asi polovica prípadov, v ktorých zmena $\varepsilon$ mení optimálne rozloženie portfólia. Pozrime sa, ešte na zmeny portfólia v takomto prípade (jedná sa o obdobie 7/1987 až 6/1997).

Tabuľka 6.5: Optimálne portfólia bez bezrizikového aktíva : roky 87-97 (I.)

| | $\varepsilon = 0.00$ | $\varepsilon = 0.05$ | $\varepsilon = 0.15$ | $\varepsilon = 0.25$ | $\varepsilon = 0.35$ | $\varepsilon = 0.45$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **NoDur** | 0.34 | 0.28 | 0.14 | 0.13 | 0.13 | 0.13 |
| **Durbl** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Manuf** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Enrgy** | 0.16 | 0.17 | 0.19 | 0.19 | 0.19 | 0.19 |
| **HiTec** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Telcm** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Shops** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Hlth** | 0.11 | 0.09 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.03 |
| **Utils** | 0.38 | 0.47 | 0.64 | 0.65 | 0.65 | 0.65 |
| **Other** | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| $D^*(\boldsymbol{\tau})$ | 81.49 | 95.58 | 114.56 | 126.56 | 138.56 | 150.56 |

Opäť platí, že tržné portfólio US je ASSD neefìcientné, pretože $D^*(\boldsymbol{\tau}) > 0$. V tomto prípade však pozorujme zatiaľ najvýraznejšie zmeny, ktoré sa však odohrávajú len pre menšie hodnoty $\varepsilon$. Od hodnoty $\varepsilon = 0.15$ sa už portfólio stabilizuje a nemení sa. Pozrime sa ešte na jemnejšie hodnoty $\varepsilon$.

Tabuľka 6.6: Optimálne portfólia bez bezrizikového aktíva : roky 87-97 (II.)

| | $\varepsilon = 0.00$ | $\varepsilon = 0.01$ | $\varepsilon = 0.02$ | $\varepsilon = 0.03$ | $\varepsilon = 0.04$ | $\varepsilon = 0.05$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **NoDur** | 0.34 | 0.33 | 0.32 | 0.31 | 0.30 | 0.28 |
| **Durbl** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Manuf** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Enrgy** | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.17 |
| **HiTec** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Telcm** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Shops** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Hlth** | 0.11 | 0.11 | 0.10 | 0.10 | 0.09 | 0.09 |
| **Utils** | 0.38 | 0.40 | 0.42 | 0.44 | 0.45 | 0.47 |
| **Other** | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| $D^*(\boldsymbol{\tau})$ | 81.49 | 84.55 | 87.51 | 90.31 | 93.01 | 95.58 |

Zatiaľ čo pomer niektorých aktív zostáva takmer nezmenený alebo sa mení len minimálne (napr. Enrgy, Hlth), zastúpenie iných sa relatívne rýchlo mení. Aktívum NoDur relatívne rýchlo stráca svoje zastúpenie na úkor aktíva Utils, ktoré silno posilňuje svoje zastúpenie. Vývoj podobne pokračuje aj pre ďalšie hodnoty $\varepsilon$.

Tabuľka 6.7: Optimálne portfólia bez bezrizikového aktíva : roky 87-97 (III.)

| | $\varepsilon = 0.06$ | $\varepsilon = 0.07$ | $\varepsilon = 0.08$ | $\varepsilon = 0.09$ | $\varepsilon = 0.10$ | $\varepsilon = 0.11$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **NoDur** | 0.26 | 0.25 | 0.23 | 0.22 | 0.21 | 0.20 |
| **Durbl** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Manuf** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Enrgy** | 0.17 | 0.18 | 0.18 | 0.18 | 0.18 | 0.18 |
| **HiTec** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Telcm** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Shops** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| **Hlth** | 0.08 | 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.06 | 0.06 |
| **Utils** | 0.48 | 0.50 | 0.52 | 0.54 | 0.55 | 0.57 |
| **Other** | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| $D^*(\boldsymbol{\tau})$ | 98.00 | 100.33 | 105.81 | 104.64 | 106.60 | 108.44 |

# Záver

V tejto práci sme sa zaoberali neúplnou stochastickou dominanciou, optimalitou a eficienciou vzhľadom k tejto dominancií na množine všetkých možných portfólií, ktoré sa dajú zložiť z dostupných aktív. Pokúšali sme sa uplatniť myslienky stochastickej dominancie druhého rádu do teórie neúplnej stochastickej dominancie.

V prvej kapitole sme si zaviedli základné pojmy z teórie úžitku, úžitkových funkcií a stochastických dominancií 1. a 2. rádu.

V druhej kapitole sme sa venovali neúplnej stochastickej dominancii 1. a 2. rádu. Ukázali sme motiváciu jej zavedenia a základné vlastnosti. Upravili sme Postov test, aby korešpondoval s teóriou neúplnej stochastickej dominancie 1. rádu.

V tretej kapitole sme definovali alternatívnu neúplnú stochastickú dominanciu tak, ako ju navrhli Lizyayev and Ruszczyński (2012). Predstavili sme ich základné myšlienky aj ich úlohy hľadajúce portfólio, ktoré má maximálny výnos za predpokladu, že dominuje daný benchmark.

Štvrtá kapitola bola jednou z hlavných častí tejto práce. Upravili sme v nej kvantilový prístup k eficiencii portfólia vzhľadom k SSD, ktorý predstavili Kopa and Chovanec (2008). Ukázali sme, že teória z tretej kapitoly sa v nej prejaví len malou zmenou. Aby sme to však mohli uplatniť museli sme dokázať analogické tvrdenia ako Kopa and Chovanec (2008). V závere kapitoly tak máme úlohu lineárneho programovania, pomocou ktorej dokážeme určovať eficienciu portfólia vzhľadom k $\varepsilon$-ASSD.

V piatej kapitole sme sa viac venovali rozdielom v prístupoch zavedenia dvoch rôznych neúplných stochastických dominancií. Vyjadrili sme tiež vzťah medzi epsilónmi z jednotlivých prístupov za špeciálnych podmienok.

V poslednej kapitole sme aplikovali odvodený kvantilový postup na reálnych dátach. V žiadnom z prístupov sa nami testované tržné portfólio americkej burzy neukázalo ako $\varepsilon$-ASSD eficientné. Príklady tiež ukázali, že náš prístup preferuje bezrizikové aktíva. Našli sme aj prípad, keď sa optimálne portfólio nemenilo pre nami testované hodnoty $\varepsilon$. Tieto výsledky nám dávajú predstavu ako optimálne portfólio reaguje na zmenu $\varepsilon$.

# Literatúra

Darinka Dentcheva and Andrzej Ruszczyński. Optimization with stochatic dominance constraints. *SIAM Journal of Optimization*, 14:548–566, 2003. 19

Kenneth R. French. Dátová knižnica, marec 2012. URL http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html. 30

Miloš Kopa and Petr Chovanec. A second-order stochastic dominance portfolio efficiency measure. *Kybernetika(Prague)*, 44:243–258, 2008. 4, 3, 15, 21, 22, 23, 26, 35

Miloš Kopa and Thierry Post. A Portfolio Optimality Test Based on the First-Order Stochastic Dominance Criterion. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 44: 1103–1124, 2009. 15

Timo Kuosmanen. Efficient Diversification According to Stochastic Dominance Criteria. *Management Science*, 50:1390–1406, 2004. 15, 20

Moshe Leshno and Haim Levy. Preferred by "All" and Preferred by "Most" Decision Makers:Almost Stochastic Dominance. *Management Science*, 48:1074–1085, 2002. 4, 2, 3, 12, 15, 17, 18, 27

Haim Levy. *Stochastic Dominance : Investment Decision Making under Uncertainty*. Springer, 2006. 3, 4, 6, 7

Haim Levy, Moshe Leshno, and Boaz Leibovitch. Economically relevant preferences for all observed epsilon. *Springer Science+Business Media*, 176:153–178, 2010. 27

Andrey Lizyayev and Andrzej Ruszczyński. Tractable Almost Stochastic Dominance. *European Journal of Operational Research*, 218:448–455, 2012. 4, 3, 17, 18, 28, 35

James Luedtke. New Formulations for Optimization Under Stochastic Dominance Constraints. *SIAM Journal of Optimization*, 19:1433–1450, 2008. 20

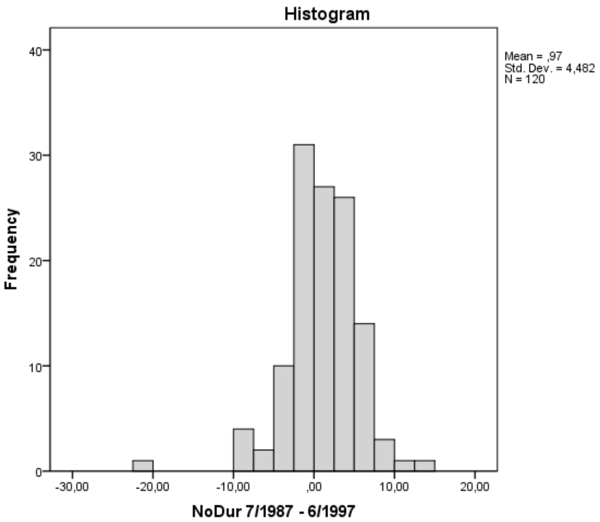
Wlodzimierz Ogyczak and Andrzej Ruszczyński. Dual Stochastic Dominance and Related Mean-Risk Models. *SIAM Journal of Optimization*, 13:60–78, 2002. 21, 22

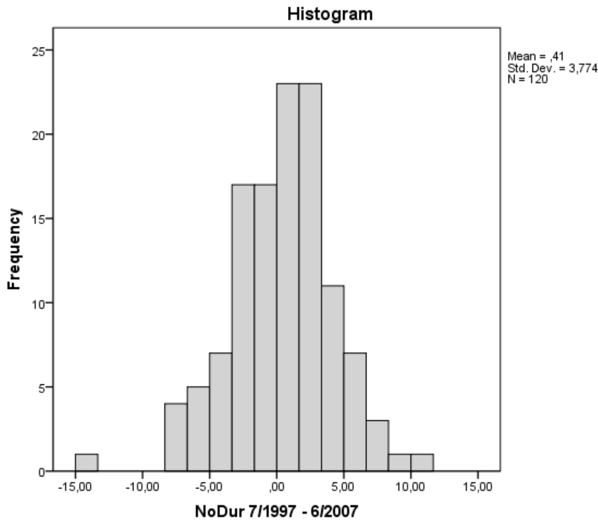
Thierry Post. Empirical Tests for Stochastic Dominance Efficiency. *The Journal of Finance*, 58:1905–1931, 2003. 15

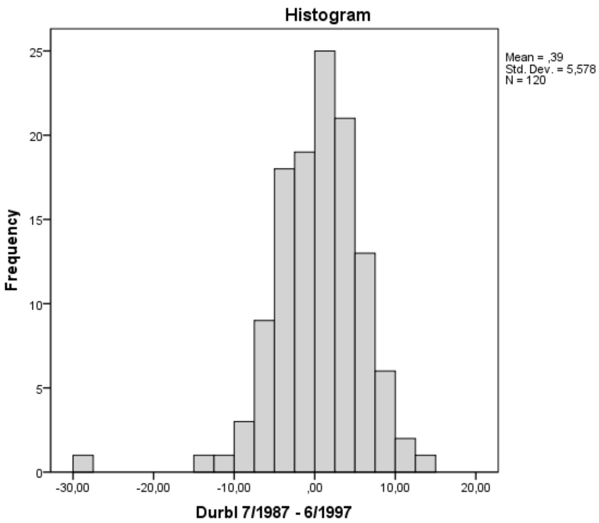
R. Tyrrell Rockafellar and Stanislav Uryasev. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance*, 26:1443–1471, 2002. 22

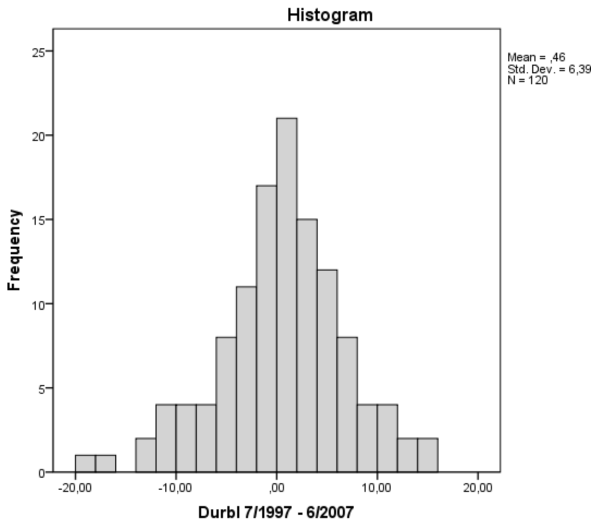
# Dodatok A

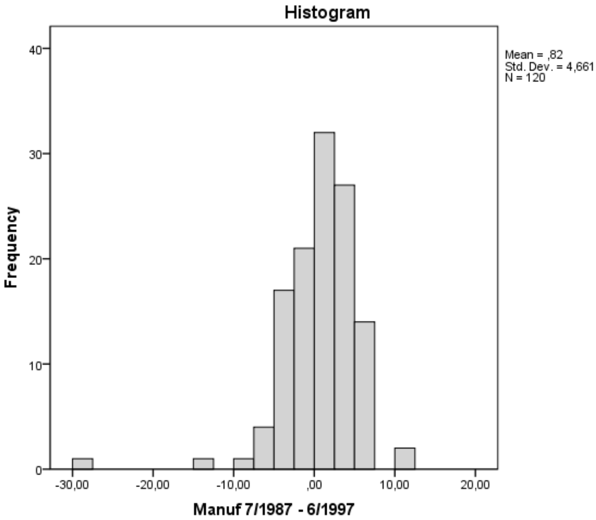
# Dodatok - Histogramy nadvýnosov

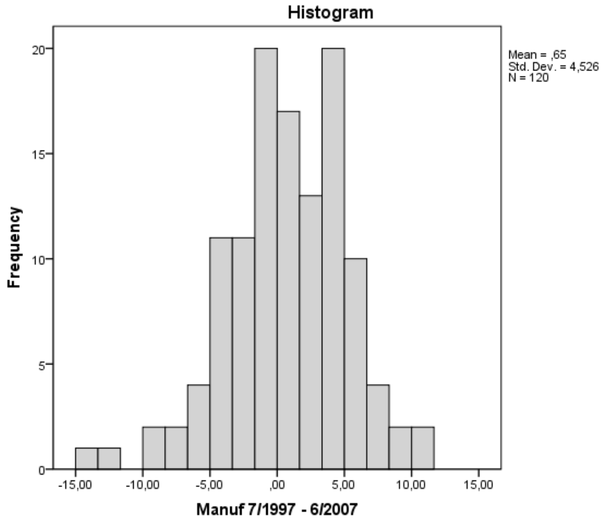


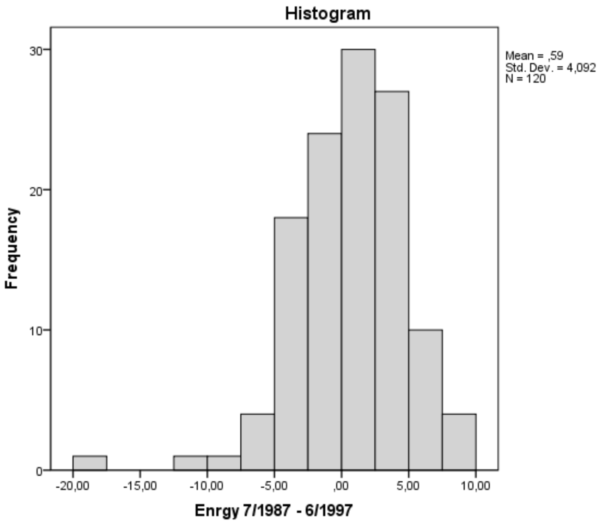



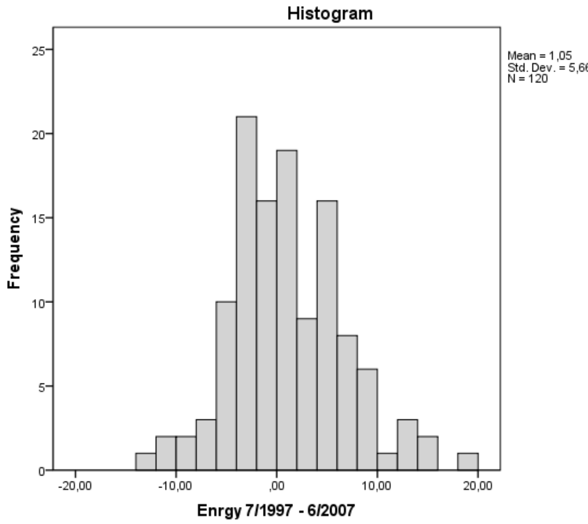



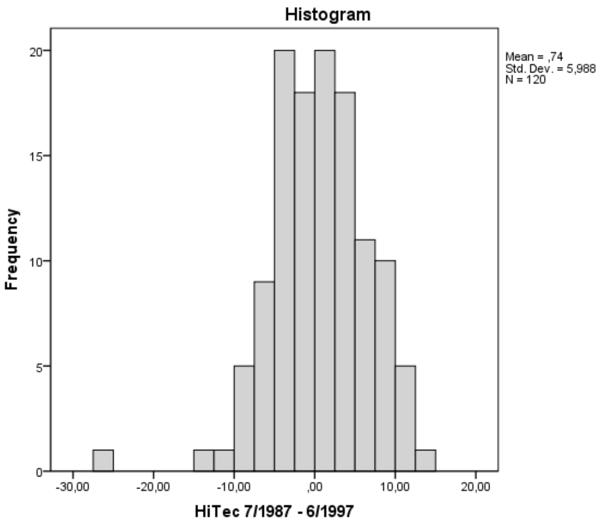



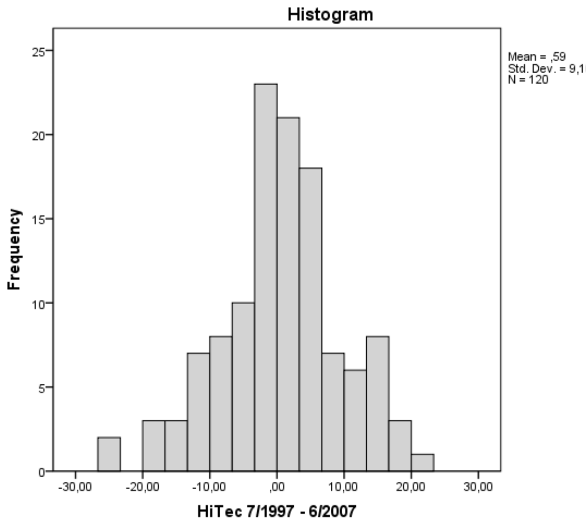

Histogram
Mean = ,82
Std. Dev. = 4,661
N = 120
Frequency
Manuf 7/1987 - 6/1997

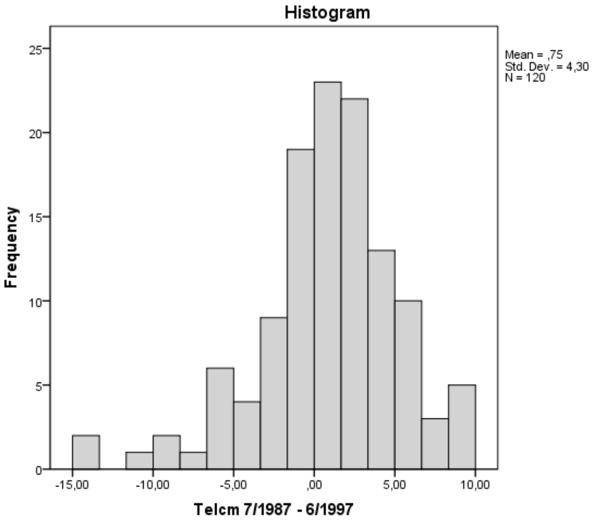

Histogram
Mean = ,65
Std. Dev. = 4,526
N = 120
Frequency
Manuf 7/1997 - 6/2007

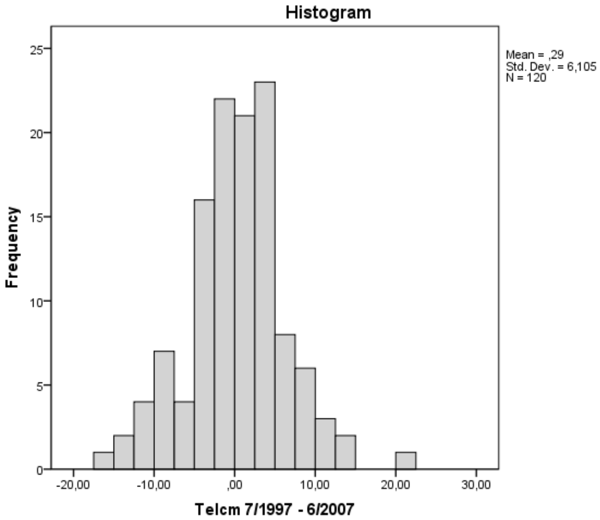

Histogram
Mean = ,59
Std. Dev. = 4,092
N = 120
Frequency
Enrgy 7/1987 - 6/1997

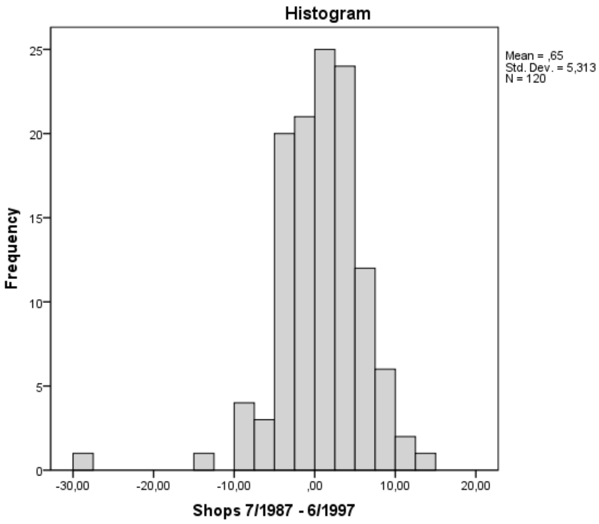

Histogram
Mean = 1,05
N = 120
Frequency
Enrgy 7/1997 - 6/2007

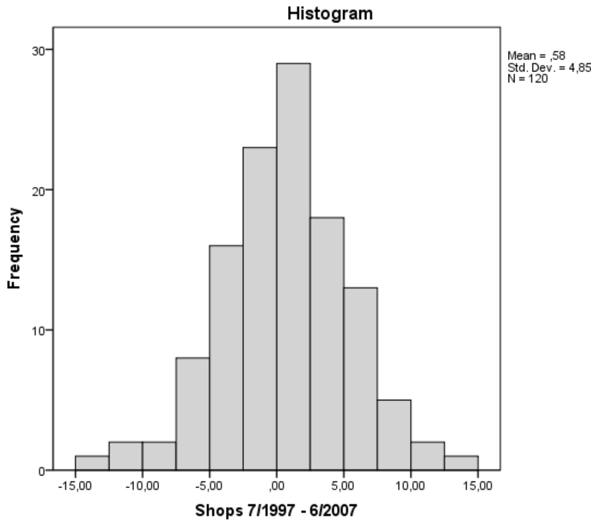

Histogram
Mean = ,74
Std. Dev. = 5,988
N = 120
Frequency
HiTec 7/1987 - 6/1997

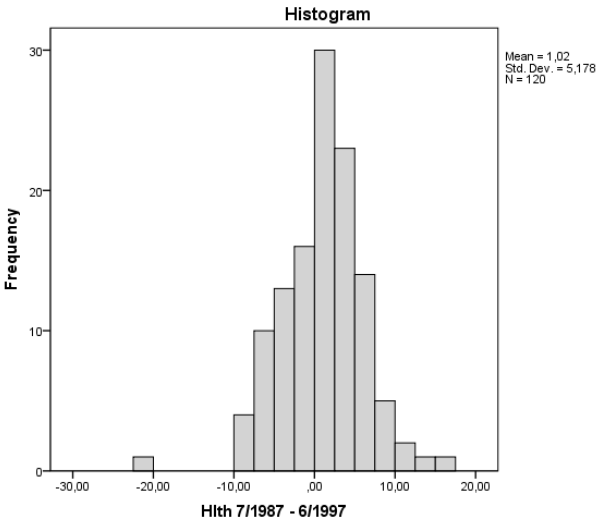

Histogram
Mean = ,59
N = 120
Frequency
HiTec 7/1997 - 6/2007

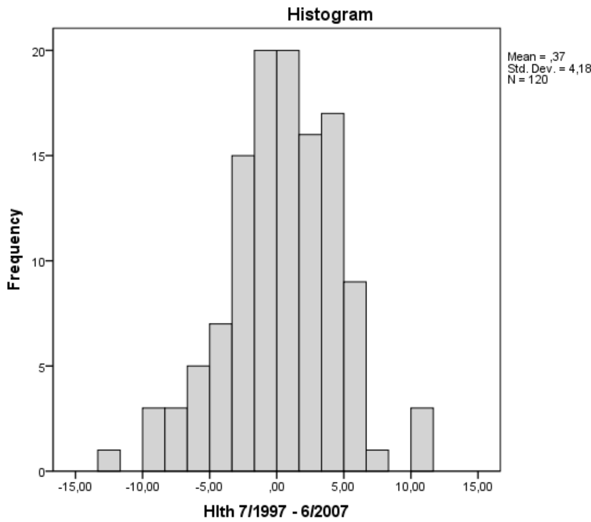

Histogram
Mean = ,75
Std. Dev. = 4,30
N = 120
Frequency
Telcm 7/1987 - 6/1997

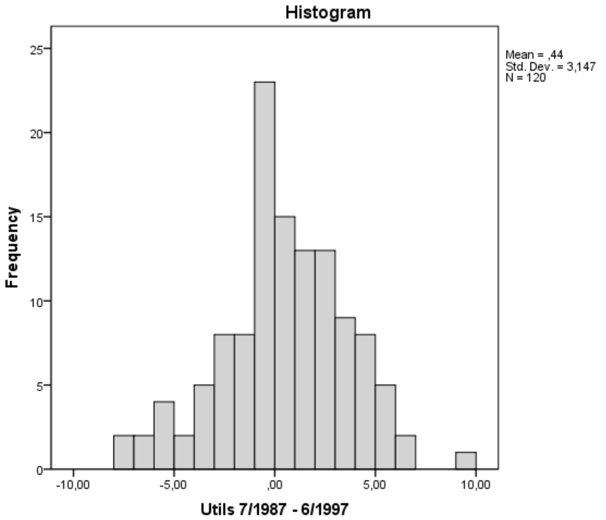

Histogram
Mean = ,29
Std. Dev. = 6,105
N = 120
Frequency
Telcm 7/1997 - 6/2007

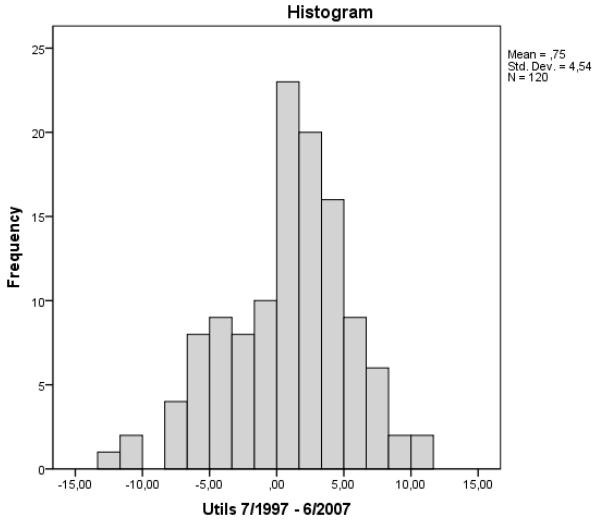

Histogram
Mean = ,65
Std. Dev. = 5,313
N = 120
Frequency
Shops 7/1987 - 6/1997

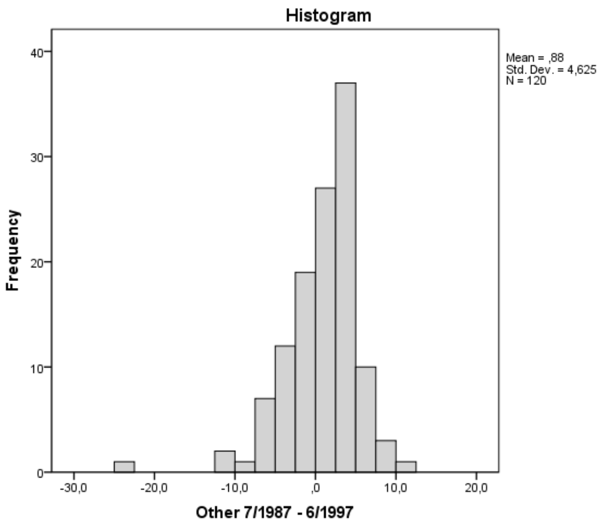

Histogram
Mean = ,58
N = 120
Frequency
Shops 7/1997 - 6/2007

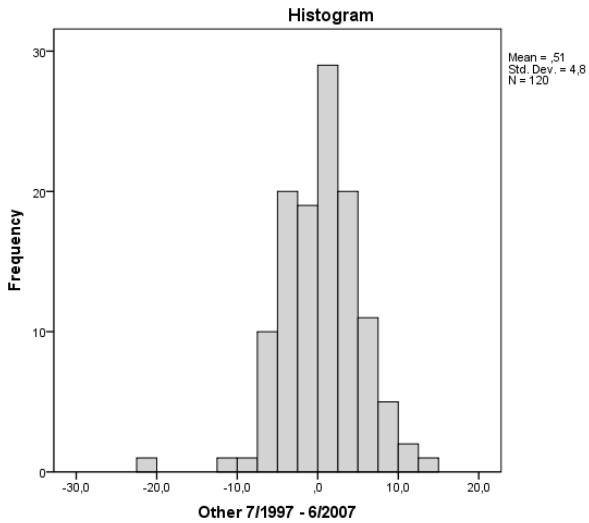

Histogram
Mean = 1,02
Std. Dev. = 5,178
N = 120
Frequency
Hlth 7/1987 - 6/1997

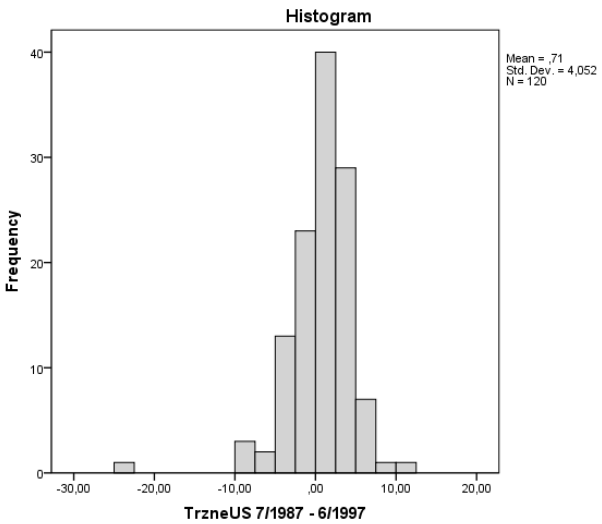

Histogram
Mean = ,37
N = 120
Frequency
Hlth 7/1997 - 6/2007

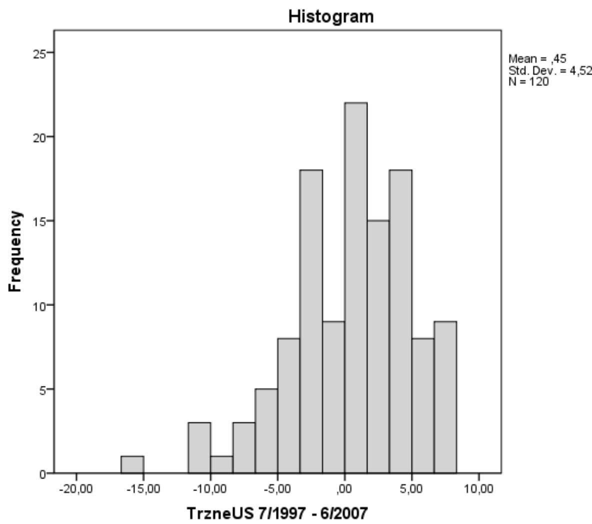

Histogram
Mean = ,44
Std. Dev. = 3,147
N = 120
Frequency
Utils 7/1987 - 6/1997


Histogram
Mean = ,75
Std. Dev. = 4,54
N = 120
Frequency
Utils 7/1997 - 6/2007


Histogram
Mean = ,88
Std. Dev. = 4,625
N = 120
Frequency
Other 7/1987 - 6/1997


Histogram
Mean = ,51
Std. Dev. = 4,8
N = 120
Frequency
Other 7/1997 - 6/2007


Histogram
Mean = ,71
Std. Dev. = 4,052
N = 120
Frequency
TrzneUS 7/1987 - 6/1997


Histogram
Mean = ,45
Std. Dev. = 4,52
N = 120
Frequency
TrzneUS 7/1997 - 6/2007