

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Marek Basovník

Geometrie uvnitř deformovaných černých děr

Ústav teoretické fyziky MFF UK

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák DSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Teoretická fyzika

Praha 2012

Rád bych vyjádřil poděkování doc. Oldřichu Semerákovi za výbornou spolupráci, ochotu a vedení v této diplomové práci. Rovněž děkuji své rodině a přátelům, kteří mě v mém studiu teoretické fyziky nemalým dílem podporují.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Geometrie uvnitř deformovaných černých děr

Autor: Bc. Marek Basovník

Katedra: Ústav teoretické fyziky MFF UK

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák DSc., Ústav teoretické fyziky MFF UK

Abstrakt: V této práci studujeme přesné obecně relativistické prostoročasy buzené černou dírou a dalším zdrojem gravitace, přičemž se omezujeme na dvě třídy statických a axiálně symetrických řešení: Majumdarovo–Papapetrouovo řešení pro dvojici (v obecnosti vícenásobný systém) extrémně nabitých černých děr a „superpozici“ Schwarzschildovy černé díry s Bachovým–Weylovým tenkým prstencem. Vliv dodatečného zdroje na geometrii prostoročasu černé díry sledujeme na průbězích významných invariantů, zejména nejjednodušších skalárů získaných z Riemannova, případně Ricciho tenzoru. Průběhy jsme vykreslili v oblasti vně i uvnitř černé díry; v případě Schwarzschildovy černé díry s prstencem jsme za tím účelem našli prodloužení metriky pod horizont. Ukazuje se, že vnější zdroj může výrazně ovlivnit i geometrii uvnitř černé díry, dokonce i v blízkosti singularity, ačkoli singularita samotná zůstává v obou studovaných řešeních bodová.

Klíčová slova: Obecná relativita, Černé díry, Křivost prostoročasu

Title: Geometry inside deformed black holes

Author: Bc. Marek Basovník

Department: Institute of Theoretical Physics MFF UK

Supervisor: doc. RNDr. Oldřich Semerák DSc., Institute of Theoretical Physics MFF UK

Abstract: In this thesis we study exact general relativistic space-times generated by a black hole and an additional source of gravity, while restricting to two classes of static and axially symmetric solutions: the Majumdar–Papapetrou solution for a couple (in general, a multiple system) of extremally charged black holes and the „superposition“ of a Schwarzschild black hole with the Bach–Weyl thin ring. We follow the effect of the additional source on the geometry of black-hole space-time on the behaviour of important invariants, in particular of the simplest scalars obtained from the Riemann and possibly also Ricci tensor. We have plotted the invariants both outside and inside the black hole; in the case of a Schwarzschild black hole with ring, we found, to this end, an extension of the metric below the horizon. It turns out that the external source may affect the geometry inside the black hole considerably, even in the vicinity of singularity, although the singularity itself remains point-like in both solutions studied here.

Keywords: General relativity, Black holes, Space-time curvature

Obsah

1	Úvod	2
1.1	Černé díry v obecné teorii relativity	2
1.2	Značení	4
2	Majumdarovo–Papapetrouovo řešení	6
2.1	Metrika a souřadnice	6
2.2	Symetrie	7
2.3	Křivost	8
2.4	Geometrie horizontu	10
2.5	Prodloužení metriky pod horizont	11
2.6	Znázornění prostoročasu vně černých děr	12
2.7	Znázornění prostoročasu uvnitř černé díry	13
3	Schwarzschildova černá díra s Bachovým–Weylovým prstencem	23
3.1	Metrika a souřadnice	23
3.2	Metrické funkce na horizontu	24
3.3	Odstranění singularity na horizontu	25
3.4	Průběh vnějšího potenciálu	26
3.5	Prodloužení metriky pod horizont	29
3.6	Křivost	31
3.7	Prostoročas v okolí fyzikální singularity	31
3.8	Analýza metriky pod horizontem	33
4	Závěr	42
	Literatura	44

1. Úvod

1.1 Černé díry v obecné teorii relativity

„... if the semi-diameter of a sphaere of the same density with the sun were to exceed that of the sun in the proportion of 500 to 1, a body falling from an infinite height towards it, would have acquired at its surface a greater velocity than that of light, and consequently, supposing light to be attracted by the same force in proportion to its vis inertiae, with other bodies, all light emitted from such a body would be made to return towards it, by its own proper gravity.“

John Michell, 1783

Tato pasáž dopisu anglického duchovního, geologa a astronoma-amatéra J. Michella fyzikovi H. Cavendishovi [10] je historicky první známou úvahou o možnosti existence objektů s tak silným gravitačním polem, že od nich nedokáže uniknout ani světlo. Předpověď byla učiněna na základě Newtonovy teorie gravitace a korpuskulární teorie světla a je klasickou předzvěstí toho, co dnes známe pod pojmem černá díra. Černé díry jsou jednou ze základních nových predikcí obecné teorie relativity – teorie gravitace, kterou našel Albert Einstein v letech 1907-1915. Základní myšlenkou této teorie je, že gravitační působení mezi hmotnými objekty nemá povahu síly, nýbrž je důsledkem toho, že tyto objekty zakřivují okolní prostoročas. Geometrie prostoročasu naopak určuje pohyb těles, takže v zakřiveném prostoročasu je tento pohyb patřičně jiný než v prostoročasu plochém. Vzájemné působení mezi hmotou a geometrií prostoročasu popisují Einsteinovy rovnice gravitačního pole.

Oproti Michellově klasické představě mají černé díry řadu dalších podivuhodných vlastností. Jejich historie začíná hned v roce 1915, na jehož konci se K. Schwarzschildovi (a téměř současně a elegantněji také J. Drostemu) podařilo vyřešit Einsteinovy rovnice pro sféricky symetrické gravitační pole kolem bodového zdroje. Jak se brzy ukázalo, pokud je ve sféricky symetrickém prostoročase hmotnost M soustředěna do sféry o poloměru menším než $r_g = 2GM/c^2$, vzniká na tomto poloměru v metrice singularita. Později bylo zjištěno, že zmíněnou singularitu lze odstranit přechodem do vhodných souřadnic, tedy že se nejedná o skutečnou singularitu *prostoročasu*, ale vlastnost zvolených (v tomto případě tzv. Schwarzschildových) souřadnic. Samotná kauzální struktura prostoročasu určuje, že se veškerá hmota, která se pod poloměrem r_g vyskytne, musí nutně pohybovat směrem k centru $r = 0$ a tam skončit ve skutečné prostoročasové singularitě¹. Toto centrální singularitu již není možné odstranit přechodem do jiných souřadnic, jak o tom svědčí např. invarianty určené Riemannovým tenzorem, popisujícím křivost prostoročasu.

Výskyt fyzikálních singularit v relativistických prostoročasech je pokládán za jeden z projevů toho, že obecná teorie relativity jakožto nekvantová teorie nestačí pro popis situací, kdy je prostoročas natolik zakřivený, že poloměr jeho křivosti je srovnatelný s tzv. Planckovou délkou $\sqrt{G\hbar/c^3} \doteq 1.6 \cdot 10^{-33}$ cm. Tato délka zhruba

¹Třírozměrná oblast daná kritickým poloměrem $r = r_g$ se později začala označovat jako horizont a pro prostoročasovou oblast jím uzavřenou se ujalo označení černá díra.

určuje škálu, na které by se měla začít projevovat diskrétní (kvantová) struktura prostoročasu. Aby hmotné těleso způsobilo takovéto extrémní zakřivení, musela by však jeho hustota dosáhnout (Planckovy) hodnoty $\frac{c^3}{G^2\hbar} \doteq 5.2 \cdot 10^{93} \text{g/cm}^3$. Obecná relativita je tedy v zásadě použitelná za mimořádně širokého rozsahu podmínek, výjimku představují jen bezprostřední okolí prostoročasových singularit (tedy zejména velmi pozdní fáze úplného gravitačního kolapsu a velmi rané fáze vývoje kosmologických modelů s počáteční singularitou).

V letech 1916-18 bylo Schwarzschildovo řešení Einsteinových rovnic zobecněno na případ elektricky nabitého centra, tzv. Reissnerovo–Nordströmovo řešení. Podstatně obtížnějším se ukázal být popis gravitačního pole rotujícího objektu, kdy prostoročas – již v soulase s Machovými představami o povaze setrvačnosti – nemůže být sféricky symetrický. Metriku reprezentující pole izolované stacionární černé díry (popř. tzv. nahé singularity, kdy v prostoročasu horizont neexistuje) našel až v roce 1963 R. Kerr. Výsledek byl opět brzy zobecněn na případ s nabitým centrem, tzv. Kerrovu–Newmanovu metriku. Postupně byly rovněž dokázány tzv. no-hair teorémy (teorémy o jednoznačnosti černých děr), jimiž se ukázalo, že zmíněná řešení nepředstavují jen nahodilé, zvládnutelné příklady, ale že mají pozoruhodnou obecnost: každá izolovaná stacionární černá díra v asymptoticky plochém prostoročasu, který neobsahuje singularity a uzavřené časupodobné křivky nikde kromě jejího vnitřku, totiž nutně patří do Kerrovu–Newmanovy třídy.

Dnes je studium černých děr zaměřeno na složitější případy, kdy černé díry interagují s dalšími zdroji či dokonce navzájem, případně se nacházejí ve složitějších (např. zářivých nebo kosmologických) prostoročasech. Toto studium je zajímavé již samo o sobě teoreticky, avšak je také motivováno astrofyzikálně, jednak snahou o porozumění vývoji pravděpodobných černých děr (zejména v jádrech galaxií) v reálném vesmíru, jednak snahou o přesnou předpověď gravitačních vln, které by měly být produkovány nestacionárními systémy obsahujícími velmi kompaktní objekty (černé díry či neutronové hvězdy). Díky nelinearitě obecné relativity je studium interagujících těles velmi obtížné a i do budoucna bude zřejmě řešeno především numericky, popř. na základě aproximačních metod. Možnosti přesných analytických řešení jsou naproti tomu značně omezené na vysoce symetrické případy. Pole vícenásobných zdrojů se zatím podařilo explicitně řešit jen ve statickém a axiálně symetrickém případě, kdy se jedna z polních rovnic mimo zdroje (ve vakuu) redukuje na Laplaceovu rovnici, a tedy vede k redukci podstatné části problému na newtonovskou úlohu superpozice gravitačních potenciálů.

V této práci budeme vyšetřovat vlastnosti jednoho z řešení z této (tzv. Weylové) třídy, totiž pole (původně) Schwarzschildovy černé díry obklopené koncentrickým tenkým prstencem, popsáným historickým **řešením Bacha a Weyla**. Toto řešení je možným jednoduchým přiblížením reálných astronomických systémů, obsahujících černou díru s vnějším hmotným diskem. Druhým typem prostoročasu, jemuž se budeme věnovat, je prostoročas popsáný **Majumdarovou–Papapetrouovou metrikou**, který popisuje systém extrémně (a souhlasně) nabitých statických černých děr. Rovnováha takového systému je – podobně jako v klasickém případě – umožněna přesnou kompenzací gravitačního přitahování těles jejich elektrostatickým odpuzováním. Volba uvedených dvou tříd řešení je dána tím, že jsme chtěli černou díru vystavit působení co nejsilnějšího zdroje gravitace. Naším hlavním cílem je totiž zjistit, do jaké míry může být geometrie prostoročasu černé díry ovlivněna dalším zdrojem, a to zvláště pod jejím

horizontem a v blízkosti centrální singularity. Černá díra je ovšem velmi silným (konkrétně Schwarzschildova díra přímo nejsilnějším možným) zdrojem gravitace, takže ke znatelnému ovlivnění jejího pole zřejmě dojde jen v důsledku působení jiného velmi silného zdroje. V případě Majumdarova–Papapetrouova řešení je takovým zdrojem jiná černá díra (soustředíme se zde na případ s toliko dvěma černými dírami), v druhém případě pak „o řád slabší“ – tedy lineární – zdroj v podobě Bachova–Weylova tenkého prstence.

Vlastnosti prostoračasu budeme zkoumat na průbězích invariantů, které lze získat z metriky (funkce *lapse*) a z jejích prvních derivací (skalár, který se na horizontu nazývá povrchovou gravitací a který je obdobou newtonovského gravitačního zrychlení) a těch, které vycházejí z Riemannova tenzoru křivosti. V případě superpozice Schwarzschildovy černé díry s Bachovým–Weylovým prstencem se budeme zajímat pouze o průběh Kretschmannova invariantu, poněvadž v případě vakuových Weylových řešení se jedná o *jediný* netriviální kvadratický invariant křivosti (a lineární jsou nulové). Majumdarova–Papapetrouova metrika je nevakuová, takže další informaci přináší složky Ricciho tenzoru; v tomto případě se proto zajímáme také o stopu kvadrátu Ricciho tenzoru. Podrobněji o invariantech křivosti viz např. [1] (speciálně je díky statičnosti v obou zkoumaných případech nulový Chernův–Pontryaginův skalár, obsahující duál Riemannova tenzoru).

1.2 Značení

Používáme standardní tenzorový zápis, konvenci a značení učebnice [9]. Prostorčasové složky veličin značíme malými řeckými indexy (nabývají hodnot 0-3). Užíváme Einsteinovy sumační konvence, tedy přes dva stejné indexy v opačné pozici (jeden kontravariantní a jeden kovariantní) se automaticky sčítá. Parciální derivace je značena čárkou a kovariantní derivace středníkem v indexové pozici. Metrický tenzor $g_{\mu\nu}$ má signaturu $(-+++)$ a Riemannův tenzor $R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda}$ je definován vztahem $V_{\nu;\kappa\lambda} - V_{\nu;\lambda\kappa} = R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda}V_\mu$, kde V_μ je libovolný kovektor. Všude budeme užívat geometrizovanou soustavu jednotek, v níž jsou rychlost světla a gravitační konstanta rovny jedné, $c = 1$, $G = 1$ ². Limitní vyjádření libovolné veličiny A na horizontu událostí černé díry budeme značit vždy zápisem $A|_{\mathbb{H}}^{(\dots)}$, kde \dots jsou parametry, které popisují konkrétní bod horizontu událostí. Podrobnou definici této limity vždy uvedeme u konkrétního případu aktuálně diskutovaného řešení.

Dále budeme pracovat s několika typy speciálních funkcí. Také u nich se držíme obvyklého značení

„Zjednodušené“ Besselovy funkce prvního a druhého druhu $B_J(z)$ a $B_K(z)$, které jsou řešeními rovnic³

$$zB_J''(z) + B_J'(z) + zB_J(z) = 0, \quad (1.1)$$

$$zB_K''(z) + B_K'(z) - zB_K(z) = 0. \quad (1.2)$$

²Odstavec o značení je citován z [1].

³Naproti standardní definici Besselových funkcí $z^2B_J''(z) + zB_J'(z) + (z^2 - n^2)B_J(z) = 0$ a $z^2B_K''(z) + zB_K'(z) - (z^2 + n^2)B_K(z) = 0$ užíváme pouze „vybraného“ tvaru, kde $n = 0$.

Úplný eliptický integrál prvního druhu

$$K(k) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}. \quad (1.3)$$

Hypergeometrická řada

$${}_nF_m(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m; z) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k \prod_{i=1}^n a_i(a_i + 1) \dots (a_i + k - 1)}{k! \prod_{j=1}^m b_j(b_j + 1) \dots (b_j + k - 1)}. \quad (1.4)$$

Gamma funkce

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (1.5)$$

Heavisideova funkce

$$H(x) \equiv \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \quad (1.6)$$

Fourierova cosinová transformace

$$\hat{f}(x) \equiv \int_0^{\infty} f(\omega) \cos(\omega x) d\omega. \quad (1.7)$$

Inverzní Fourierova cosinová transformace

$$f(\omega) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(x) \cos(\omega x) dx. \quad (1.8)$$

2. Majumdarovo–Papapetrouovo řešení

2.1 Metrika a souřadnice

Podobně jako v klasické fyzice, existuje i v obecné relativitě – navzdory její nelinearitě – jednoduchá třída přesných řešení pro pole soustavy těles, která mají všechna souhlasný elektrický náboj o velikosti rovné své hmotnosti (bráno v geometrizovaných jednotkách). Tato třída zahrnuje i případ soustavy (extrémně nabitých) statických černých děr – tzv. Majumdarovo–Papapetrouovo řešení. V souřadnicích (t, x, y, z) „kartézského“ typu má příslušná metrika tvar

$$ds^2 = -U^{-2}dt^2 + U^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.1)$$

kde funkce U je v případě dvou černých děr, kterému se budeme věnovat, dána předpisem

$$U = 1 + \frac{m_1}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(x+b)^2 + y^2 + z^2}}. \quad (2.2)$$

Černé díry se „nacházejí“ v místech $(t, b, 0, 0)$ resp. $(t, -b, 0, 0)$ a m_1 resp. m_2 vyjadřují jejich hmotnosti. Uvozovkami je míněno, že se v těchto bodech objevují horizonty černých děr. Přestože mají ve zvolených souřadnicích charakter bodu, jejich geometrie odpovídá sféram s konečným nenulovým obsahem, jak ukážeme později. Řešení (2.1) popisuje pouze oblast nad horizonty černých děr. Než uvedeme jeho prodloužení pod horizont, podíváme se na jeho vlastnosti nad a zejména právě na horizontech.

Metriku nejdříve převedeme do dvou dalších souřadnicových soustav. První z nich (t, ρ, σ, ϕ) definujeme transformací

$$(\rho + \sigma)^2 = (x - b)^2 + y^2 + z^2, \quad (2.3)$$

$$(\rho - \sigma)^2 = (x + b)^2 + y^2 + z^2, \quad (2.4)$$

$$\phi = \tan\left(\frac{y}{z}\right) \quad (2.5)$$

a metrika v nich má tvar

$$ds^2 = -U^{-2}dt^2 + U^2 \left[(\rho^2 - \sigma^2) \left(\frac{d\rho^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{d\sigma^2}{b^2 - \sigma^2} \right) + \frac{(\rho^2 - b^2)(b^2 - \sigma^2)}{b^2} d\phi^2 \right], \quad (2.6)$$

$$U = 1 + \frac{m_1}{\rho + \sigma} + \frac{m_2}{\rho - \sigma}. \quad (2.7)$$

Nebude-li uvedeno jinak, budeme pracovat v těchto souřadnicích. Pro pokrytí celé oblasti nad horizontem (všech hodnot původních souřadnic (t, x, y, z)) je třeba volit¹

$$\rho \in \langle b, \infty \rangle, \quad \sigma \in \langle -b, b \rangle, \quad \phi \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (2.8)$$

¹Podle transformačního vztahu (2.5) vidíme, že se hodnoty souřadnic (t, x, y, z) zobrazí na stejné hodnoty (t, ρ, σ, ϕ) jako hodnoty $(t, x, -y, -z)$. Souřadnice x však probíhá osu symetrie a rovina souřadnic (y, z) je k této ose kolmá. Díky osové symetrii tedy tento nedostatek nevadí a body (t, x, y, z) můžeme s $(t, x, -y, -z)$ bez újmy na obecnosti ztotožnit.

Poslední typ souřadnic (t, r, θ, ϕ) získáme transformací

$$r \sin \phi \sin \theta = y, \quad (2.9)$$

$$r \cos \phi \sin \theta = z, \quad (2.10)$$

$$r \cos \theta = x - b. \quad (2.11)$$

Metrika má v nich tvar

$$ds^2 = -U^{-2}dt^2 + U^2(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.12)$$

$$U = 1 + \frac{m_1}{r} + \frac{m_2}{\sqrt{r^2 + 4b^2 + 4rb \cos \theta}}. \quad (2.13)$$

Tyto souřadnice jsou vhodné k popisu horizontu první černé díry. Položením $r = 0$ se ocitneme na horizontu první černé díry a souřadnice θ a ϕ pak parametrizují povrch horizontu.

2.2 Symetrie

Prostorčasové symetrie jsou dány řešeními Killingovy rovnice

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = \xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha} - 2\xi_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0. \quad (2.14)$$

Metrika (2.6), (2.7) má dvě zjevné symetrie – stacionaritu (dokonce statičnost) a axiální symetrii – odpovídající Killingovým polím $\xi_{(t)}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}$ a $\xi_{(\phi)}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \phi}$.

Hledejme další řešení rovnice (2.14) ve tvaru

$$\xi_\alpha^{(x)} = (0, \xi_\rho^{(x)}, \xi_\sigma^{(x)}, 0). \quad (2.15)$$

Díky nulovým složkám v t a ϕ zůstanou po dosazení netriviální pouze rovnice

$$0 = \xi_\mu^{(x)} \Gamma_{tt}^\mu, \quad (2.16)$$

$$0 = \xi_\mu^{(x)} \Gamma_{\phi\phi}^\mu, \quad (2.17)$$

$$\xi_{\rho,\rho}^{(x)} = 2\xi_\mu^{(x)} \Gamma_{\rho\rho}^\mu, \quad (2.18)$$

$$\xi_{\sigma,\sigma}^{(x)} = 2\xi_\mu^{(x)} \Gamma_{\sigma\sigma}^\mu, \quad (2.19)$$

$$\xi_{\sigma,\rho}^{(x)} = \xi_{\rho,\sigma}^{(x)} = 2\xi_\mu^{(x)} \Gamma_{\sigma\rho}^\mu, \quad (2.20)$$

Zaměříme se na soustavu (2.16)–(2.17). Nevystupují zde derivace a jedná se pouze o lineární soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými $\xi_\rho^{(x)}$, $\xi_\sigma^{(x)}$ a nulovou pravou stranou. Triviální řešení $\xi_\alpha^{(x)} = 0$ je nezajímavé. Netriviální řešení můžeme získat pouze tehdy, pokud je determinant matice soustavy (2.16)–(2.17) nulový. Této podmínce vyhovují 2 různé případy (získáme přímým výpočtem $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ z metriky a následně jednoduchými algebraickými úpravami):

$$(\rho, \sigma) = (b, -b), \quad (2.21)$$

$$(\rho, \sigma) = (b, b). \quad (2.22)$$

Tyto body odpovídají horizontům černých děr². Nikde kromě horizontů tedy jiné symetrie, krom statičnosti a osově symetrie, být nemohou. Metrika (2.6) nepopisuje horizonty příliš vhodně (oblast konečného povrchu je zde bodová). Symetrie na horizontech rozebereme jinou, „geometričtější“ cestou v kapitole 2.4.

²Pro upřesnění dodáváme, že nulovost determinantu soustavy (2.16)–(2.17) můžeme zaručit i položením $(\rho, \sigma) = (-b, -b)$ nebo $(\rho, \sigma) = (-b, b)$. Ani jeden z těchto bodů však nevyhovuje podmínce (2.8), tedy je nemá smysl zkoumat.

2.3 Křivost

Nyní nás bude zajímat Riemannův tenzor křivosti v oblasti nad horizonty a především pak právě na horizontech. Přímým výpočtem z metriky (2.6) získáme pro nezávislé složky Riemannova tenzoru vztahy

$$R^{t\phi}_{t\phi} = R^{\rho\sigma}_{\rho\sigma} = -\Psi(\rho^2 - \sigma^2)(\nu_1 + \nu_2 + 4b^2\nu_1\nu_2), \quad (2.23)$$

$$R^{\rho\phi}_{\rho\phi} - R^{t\sigma}_{t\sigma} = 2\Psi(b^2 - \sigma^2)(\mu_1 - \mu_2)^2, \quad (2.24)$$

$$R^{\sigma\phi}_{\sigma\phi} - R^{t\rho}_{t\rho} = 2\Psi(\rho^2 - b^2)(\mu_1 + \mu_2)^2, \quad (2.25)$$

$$R^{\rho\phi}_{\sigma\phi} - R^{t\rho}_{t\sigma} = 6\Psi(\rho^2 - b^2)(4\nu_1\nu_2\rho\sigma - \nu_1 + \nu_2), \quad (2.26)$$

$$R^{\rho\phi}_{\rho\phi} + R^{t\sigma}_{t\sigma} = -2\Psi [4\nu_1\nu_2(3\rho^2\sigma^2 - b^2(2\rho^2 + \sigma^2)) + (\nu_1 + \nu_2)(\rho^2 + 2\sigma^2 - 3b^2)], \quad (2.27)$$

$$R^{\sigma\phi}_{\sigma\phi} + R^{t\rho}_{t\rho} = 2\Psi [4\nu_1\nu_2(3\rho^2\sigma^2 - b^2(\rho^2 + 2\sigma^2)) + (\nu_1 + \nu_2)(2\rho^2 + \sigma^2 - 3b^2)], \quad (2.28)$$

$$R^{\rho\phi}_{\sigma\phi} + R^{t\rho}_{t\sigma} = 2\Psi(\rho^2 - b^2)(-\mu_1^2 + \mu_2^2), \quad (2.29)$$

kde jsme označili

$$\mu_1 \equiv \frac{m_1}{(\rho + \sigma)^2}, \quad (2.30)$$

$$\mu_2 \equiv \frac{m_2}{(\rho - \sigma)^2}, \quad (2.31)$$

$$\nu_1 \equiv \frac{m_1}{(\rho + \sigma)^3}, \quad (2.32)$$

$$\nu_2 \equiv \frac{m_2}{(\rho - \sigma)^3}, \quad (2.33)$$

$$\Psi \equiv \frac{U^{-4}}{\rho^2 - \sigma^2}. \quad (2.34)$$

Pro výrazné zjednodušení výrazů (vyjma (2.23)) jsme zapsali rozdíly resp. součty podobných složek. Ostatní složky můžeme dopočítat ze symetrií nebo jsou nulové.

Dále dopočítáme Ricciho tenzor $R_{\alpha\beta} \equiv R^{\kappa}_{\alpha\kappa\beta}$. Místo přímého vysčítání z této definice vyjdeme z Einsteinových rovnic. V případě Majumdarových–Papapetrouových prostoročasů je vně černých děr přítomno pouze elektromagnetického pole, popsané tenzorem energie a hybnosti

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\alpha\kappa} F_{\beta}^{\kappa} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \right). \quad (2.35)$$

Tenzor elektromagnetického pole

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta} \quad (2.36)$$

je určen potenciálem [5]

$$A_{\alpha} = \left(\pm \frac{1}{U}, 0, 0, 0 \right). \quad (2.37)$$

Díky tomu, že $T_{\alpha\beta}$ (2.35) má nulovou stopu, je také skalární křivost $R \equiv R^{\kappa}_{\kappa}$ nulová a Einsteinovy rovnice nabývají podoby³.

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}. \quad (2.38)$$

³Kosmologický člen neuvažujeme, tedy $\Lambda = 0$.

Znaménko v (2.37) volíme podle toho, zda mají černé díry kladný, nebo záporný náboj⁴. BÚNO předpokládejme kladný náboj. Dosazením (2.37) do (2.36) dostáváme dvě nezávislé složky

$$F^t{}_\rho = U_{,\rho} = \mu_1 + \mu_2, \quad (2.39)$$

$$F^t{}_\sigma = U_{,\sigma} = \mu_1 - \mu_2. \quad (2.40)$$

Ostatní složky $F_{\alpha\beta}$ můžeme dopočítat s využitím antisymetrie, $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$. Významná bude stopa kvadrátu tenzoru $F_{\alpha\beta}$,

$$F^\alpha{}_\beta F^\beta{}_\alpha = \Psi(\rho^2 - \sigma^2)[\mu_1 + \mu_2 + 2\nu_1\nu_2(\rho^2 + \sigma^2 - 2b^2)] \equiv \lambda^2. \quad (2.41)$$

Dále můžeme využitím (2.38) a (2.35) dopočítat složky Ricciho tenzoru,

$$R^t{}_t = -R^\phi{}_\phi = \lambda^2, \quad (2.42)$$

$$R^\rho{}_\rho = -R^\sigma{}_\sigma = \lambda^2 - 2\Psi(b^2 - \sigma^2)(\mu_1 - \mu_2)^2, \quad (2.43)$$

$$R^\rho{}_\sigma = 2\Psi(\rho^2 - b^2)(\mu_1^2 - \mu_2^2), \quad (2.44)$$

$$R^\sigma{}_\rho = 2\Psi(b^2 - \sigma^2)(\mu_1^2 - \mu_2^2). \quad (2.45)$$

Výsledky (2.42)–(2.45) můžeme nakonec ověřit i vysčítáním složek (2.23)–(2.29) Riemannova tenzoru.

Lze ukázat, že λ je jediným nezávislým invariantem popisujícím Ricciho i tenzor elektromagnetického pole⁵.

Jako další zmíníme invariant

$$\kappa^2 \equiv N_{,\alpha} N^{,\alpha} = (U^{-1})_{,\alpha} (U^{-1})^{,\alpha} = \frac{\lambda^2}{4U^4}, \quad (2.46)$$

v jehož definici vystupuje *lapse* funkce, která je ve statických prostoročasech rovna $N = \sqrt{-g_{tt}}$. Speciálně na horizontu se invariant κ nazývá povrchová gravitace. O horizontech extrémních černých děr je obecně známo, že je zde vždy $\kappa = 0$. To můžeme snadno ověřit i pro Majumdarovo–Papapetrouovo řešení. Ve vztahu (2.46) nabývá λ konečných hodnot a zároveň zde U diverguje. Samotné κ je tedy na horizontu jistě nulové.

Dále zmíníme ještě Kretschmannův skalár, který lze v našem případě vyjádřit

$$\begin{aligned} I_{2,2} \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = & 8\Psi^2\{(\mu_1^4 + \mu_2^4)(\rho^2 - \sigma^2)^2 + \\ & 4\mu_1\mu_2(\mu_1^2 + \mu_2^2)(\rho^2 - \sigma^2)(\rho^2 + \sigma^2 - 2b^2) + \\ & 2\mu_1^2\mu_2^2[56b^4 + 3\rho^4 + 2\rho^2\sigma^2 + 3\sigma^4 - 8b^2(\rho^2 + \sigma^2)] + \\ & 24\nu_1\mu_2^2[3b^4 + 3\rho^2\sigma^2 - b^2(\rho^2 - 4\rho\sigma + \sigma^2)] + \\ & 24\nu_2\mu_1^2[3b^4 + 3\rho^2\sigma^2 - b^2(\rho^2 + 4\rho\sigma + \sigma^2)] + \\ & 6(\nu_1^2 + \nu_2^2)(\rho^2 - \sigma^2)^2 + \\ & 12\nu_1\nu_2[6b^4 + \rho^4 + 4\rho^2\sigma^2 + \sigma^4 - 6b^2(\rho^2 + \sigma^2)]\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

⁴Jednou z podmínek rovnováhy Majumdarova–Papapetrouova řešení je shodná polarita nábojů všech černých děr.

⁵Spektrum vlastních čísel matice reprezentující Ricciho tenzor je $(\lambda^2, \lambda^2, -\lambda^2, -\lambda^2)$. Díky tomu, že stopa matice je rovna součtu vlastních čísel, jsou veškeré invarianty zkonstruované ze stop „mocnin“ Ricciho tenzoru závislé pouze na λ . Ostatní invarianty Ricciho tenzoru jsou díky statičnosti nulové. Obdobnou úvahu lze provést u tenzoru elektromagnetického pole.

2.4 Geometrie horizontu

Z kapitoly 2.2 víme, že na horizontech máme podezření na zatím neznámou symetrii. BÚNO budeme zkoumat pouze horizont první černé díry. Provedeme několik geometrických výpočtů, abychom odhalili skutečný tvar horizontu v řeči vlastních vzdáleností a ploch. Povrch horizontu spočítáme v souřadnicích (2.12),

$$\begin{aligned} S_H &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} \, d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{U^4 r^4 \sin^2 \theta} \, d\theta d\phi = 4\pi m_1^2. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Vidíme, že odpovídá povrchu sféry o poloměru m_1 . To samozřejmě nepodává kompletní informaci o tvaru horizontu. Provedeme rozbor délek rovnoběžek a poledníků, kde jako referenční osu volíme osu symetrie (tedy $\theta = 0, \pi$). Při posunu podél poledníku se pohybujeme čistě podél souřadnice θ při konstantním ϕ . Vyjádříme délku oblouku podél poledníku v závislosti na posunu v θ integrálem

$$l_H(\theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \int \sqrt{g_{\theta\theta}} \, d\theta = \int \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{U^2 r^2} \, d\theta = m_1 \theta. \quad (2.49)$$

Nyní spočteme délky rovnoběžek (kružnic kolmých k ose symetrie) v závislosti na úhlu θ ,

$$o_H(\theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi}} \, d\phi = \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{U^2 r^2 \sin^2 \theta} \, d\phi = 2\pi m_1 \sin \theta. \quad (2.50)$$

I délky rovnoběžek a poledníků tedy odpovídají geometrii sféry o poloměru m_1 .

Nyní spočítáme složky Riemannova tenzoru na horizontu. Vrátime se k souřadnicím (2.6). Libovolnou funkci f na horizontu získáme limitou

$$\lim_{\rho \rightarrow b, \sigma \rightarrow \pm b} f(\rho, \sigma), \quad (2.51)$$

kde nejdříve provádíme první limitu. Výpočet limity je obecně závislý na tomto pořadí, takže lépe definovat limitu obecněji v závislosti na směru, podél kterého se k horizontu blížíme, totiž

$$f|_H^{(a)} \equiv \lim_{\rho \rightarrow b(a+1)+a\sigma, \sigma \rightarrow -b} f(\rho, \sigma), \quad (2.52)$$

což chápeme jako limitní přechod funkce f k horizontu ve směru a . Limita je na a obecně závislá. Spočítáme složky Riemannova tenzoru na horizontu v této limitě:

$$R^{t\rho}_{t\rho}|_H^{(a)} = -\frac{a}{m_1^2(1+a)}, \quad (2.53)$$

$$R^{t\rho}_{t\sigma}|_H^{(a)} = -\frac{a}{m_1^2(1+a)}, \quad (2.54)$$

$$R^{t\sigma}_{t\sigma}|_H^{(a)} = -\frac{a}{m_1^2(1+a)}, \quad (2.55)$$

$$R^{\rho\phi}_{\rho\phi}|_H^{(a)} = \frac{1}{m_1^2(1+a)}, \quad (2.56)$$

$$R^{\rho\phi}_{\sigma\phi}|_H^{(a)} = -\frac{a}{m_1^2(1+a)}, \quad (2.57)$$

$$R^{\sigma\phi}_{\sigma\phi}|_H^{(a)} = \frac{a}{m_1^2(1+a)}. \quad (2.58)$$

Ostatní složky jsou buď nulové, nebo shodné (až na znaménko) s uvedenými díky symetriím Riemannova tenzoru. Vidíme, že složky jsou závislé na směru limitního přechodu k horizontu, což znamená, že jsou různé v různých místech horizontu. Při výpočtu invariantů křivosti již závislost na směru a vymizí⁶.

$$R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} \equiv I_{2,1} = \frac{4}{m_1^4}, \quad (2.59)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv I_{2,2} = \frac{8}{m_1^4}, \quad (2.60)$$

$$R^\alpha{}_\beta R^\gamma{}_\alpha R^\beta{}_\delta R^\delta{}_\gamma \equiv I_{4,1} = \frac{4}{m_1^8}, \quad (2.61)$$

$$R^\alpha{}_\beta R^\gamma{}_\delta R^{\epsilon\kappa}{}_\alpha R^{\beta\delta}{}_{\epsilon\kappa} \equiv I_{4,5} = \frac{8}{m_1^8}, \quad (2.62)$$

$$R^\alpha{}_\beta R^\gamma{}_\delta R^{\beta\epsilon}{}_\alpha R^{\delta\kappa}{}_{\gamma\epsilon} \equiv I_{4,7} = \frac{4}{m_1^8}, \quad (2.63)$$

$$R^\alpha{}_\beta R^\gamma{}_\alpha R^\beta{}_\delta R^\epsilon{}_\kappa R^{\lambda\psi}{}_\gamma R^{\delta\kappa}{}_{\lambda\psi} \equiv I_{6,6} = \frac{8}{m_1^{12}}, \quad (2.64)$$

$$R^\alpha{}_\beta R^\gamma{}_\alpha R^\beta{}_\delta R^\epsilon{}_\kappa R^{\delta\lambda}{}_\gamma R^{\kappa\psi}{}_{\epsilon\lambda} \equiv I_{6,8} = \frac{4}{m_1^{12}}, \quad (2.65)$$

$$-R^\alpha{}_\beta R^\gamma{}_\alpha R^\delta{}_\epsilon R^{\beta\kappa}{}_\gamma R^{\psi\omega}{}_{\delta\kappa} R^{\epsilon\lambda}{}_{\psi\omega} \equiv I_{6,47} = \frac{8}{m_1^{12}}, \quad (2.66)$$

$$R^\alpha{}_\beta R^\gamma{}_\delta R^{\beta\kappa}{}_\alpha R^{\delta\psi}{}_\gamma R^{\epsilon\lambda}{}_{\omega\pi} R^{\omega\pi}{}_{\kappa\psi} \equiv I_{6,242} = \frac{8}{m_1^{12}}. \quad (2.67)$$

2.5 Prodloužení metriky pod horizont

Nyní navážeme řešení (2.6) na oblast pod horizontem černé díry m_1 . Je třeba vhodnou transformací odstranit singularitu metriky na horizontu a následně metriku hladce rozšířit. Tento postup je podrobně proveden v [5], odkud vidíme, že oblast pod horizontem první černé díry můžeme zobrazit, pokud obrátíme znaménko u m_1 . V souřadnicích (t, ρ, σ, ϕ) stačí k zobrazení oblasti pod horizontem změnit definiční obor souřadnic ρ, σ . Oblast pod horizontem první černé díry pokryjeme volbou

$$\rho \in \langle -b, b \rangle, \quad (2.68)$$

$$\sigma \in \langle -\infty, -b \rangle, \quad (2.69)$$

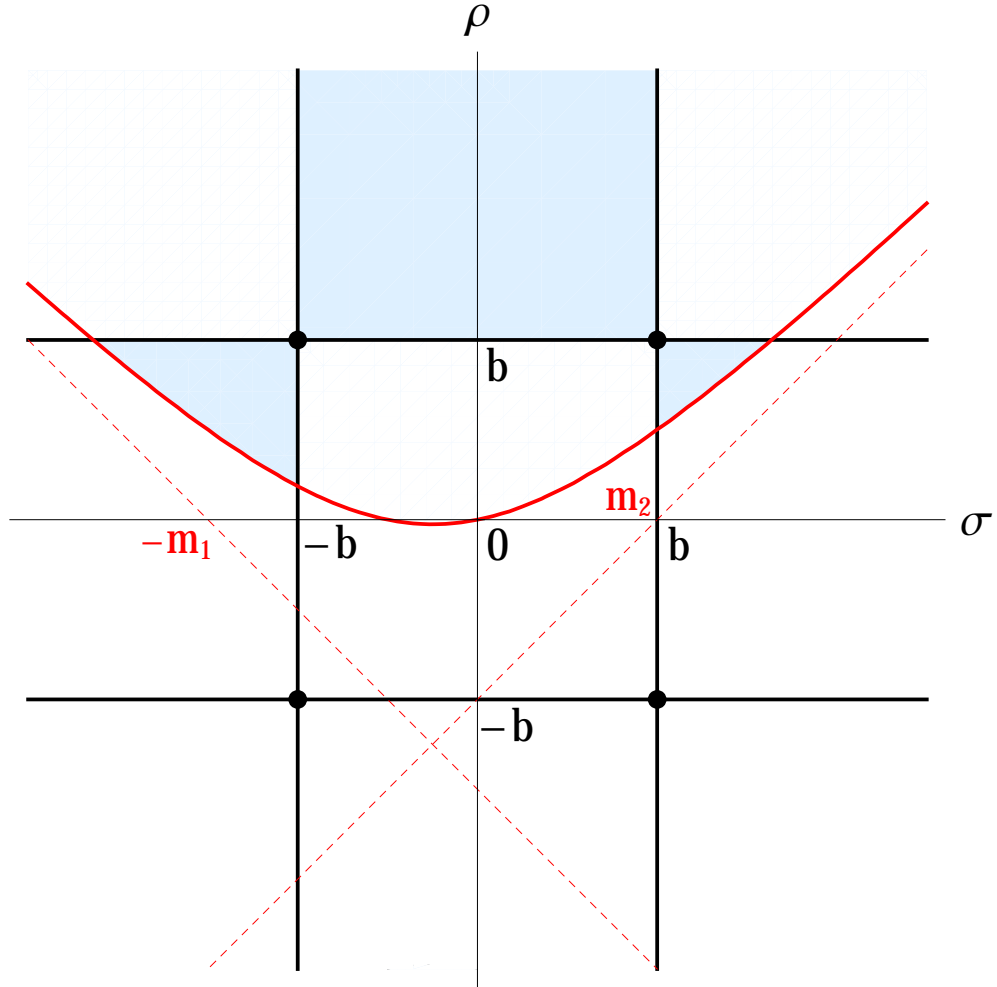
oblast pod horizontem druhé černé díry pokryjeme volbou

$$\rho \in \langle -b, b \rangle, \quad (2.70)$$

$$\sigma \in \langle b, \infty \rangle, \quad (2.71)$$

příčemž metrika zůstává ve tvaru (2.6). Souřadnice (t, ρ, σ, ϕ) tedy umožňují náhled do oblasti nad i pod horizonty obou černých děr. Názorné zobrazení těchto oblastí vidíme na obrázku 2.1. Pod horizontem již narážíme na fyzikální singularitu, kterou identifikujeme tam, kde je $U = 0$. Na obrázku je zvýrazněna červenou čarou a jedná se o hyperbolu s asymptotami, které jsou zakresleny červenou

⁶Používáme značení a definice invariantů křivosti z [8].



Obrázek 2.1: Znázornění Majumdarova–Papapetrouova řešení pro dvě černé díry o hmotnostech m_1, m_2 souřadnicové vzdálenosti $2b$. Černými body jsou vyznačeny horizonty událostí a červenou čarou (tvaru hyperboly) fyzikální singularita. Horizonty „pod“ singularitou nemají žádný fyzikální význam. Modře jsou zvýrazněny oblasti, kde lze metriku vyjádřit – nad i pod horizonty.

přerušovanou čarou. Dostatečným dokladem toho, že je tato oblast skutečnou fyzikální singularitou, je to, že v těchto místech diverguje invariant (2.41). Černé body reprezentují horizonty událostí černých děr a modře jsou zvýrazněny všechny oblasti, kam lze metriku rozšířit (oblast mimo černé díry a oblasti pod horizonty jednotlivých černých děr).

2.6 Znázornění prostoročasu vně černých děr

Zaměříme se na oblast nad horizonty obou černých děr a vykreslíme průběhy některých invariantů. Zobrazíme *lapse* funkci (obrázek 2.2), kterou lze vyjádřit jako $N = \sqrt{-g_{tt}} = U^{-1}$ z (2.2), stopu kvadrátu Ricciho tenzoru (obrázek 2.3) $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$ podle (2.41) a Kretschmannův skalár (obrázek 2.4) $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ podle (2.47). Zobrazíme vždy dva případy, pro stejně hmotné a pro různě hmotné černé díry. Grafy zobrazují vždy „vrstevnice“ daného invariantu. K zobrazení samot-

nému používáme souřadnice (2.1).

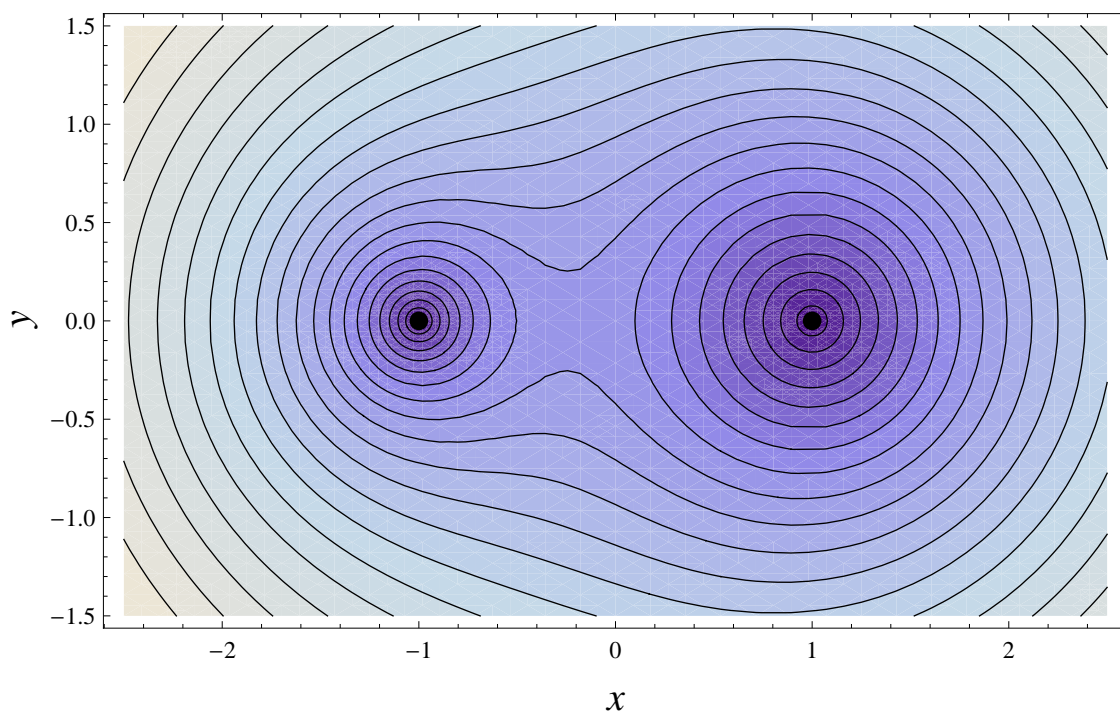
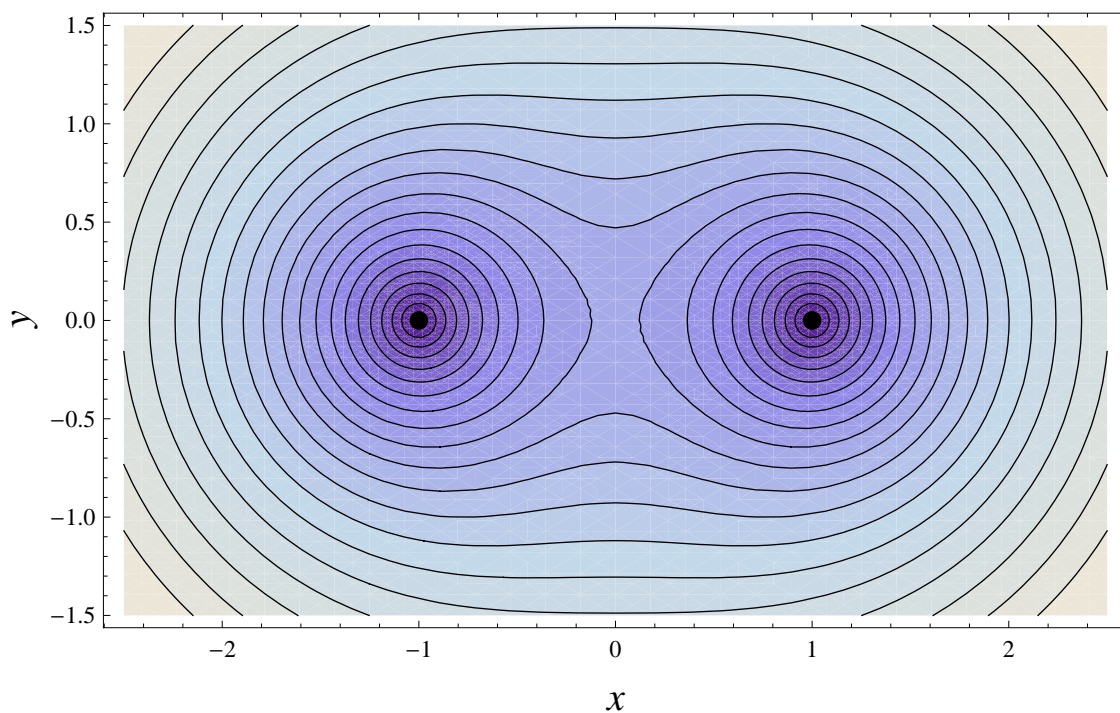
U invariantu $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$ stojí za povšimnutí fakt, že vždy černými dírami vzniká bodová oblast (vždy blíže k lehčí díře), kde je $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} = 0$. Můžeme si též všimnout toho, že invarianty křivosti nabývají vyšší hodnoty na horizontu lehčí černé díry.

2.7 Znázornění prostoročasu uvnitř černé díry

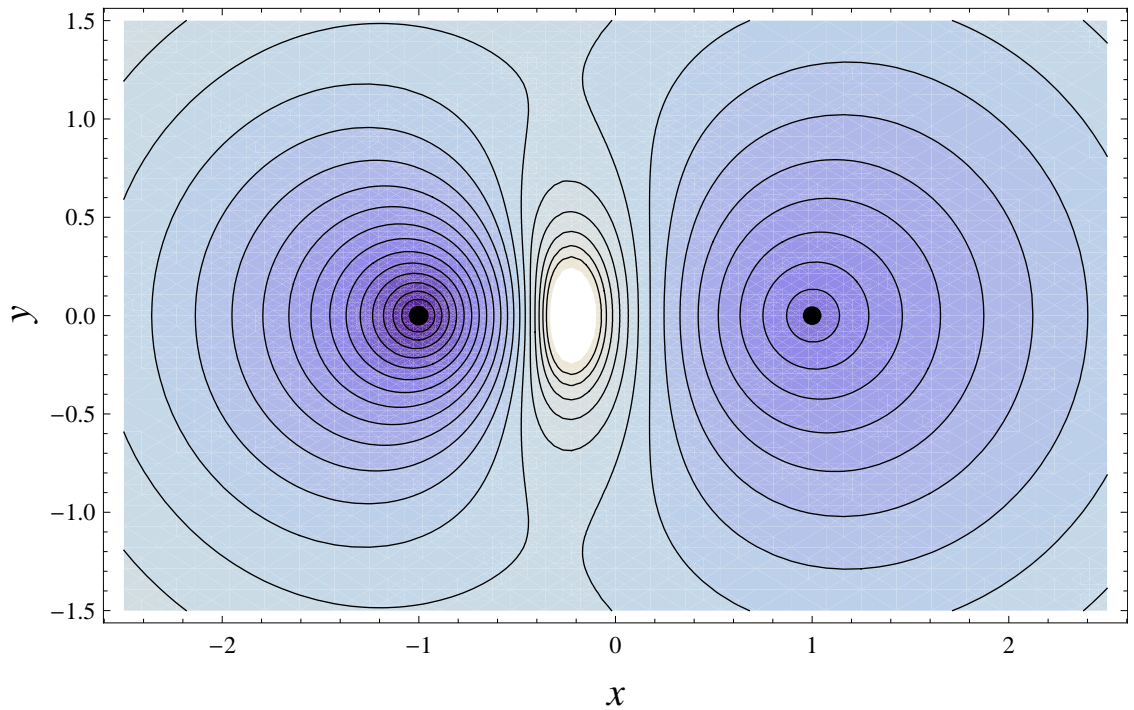
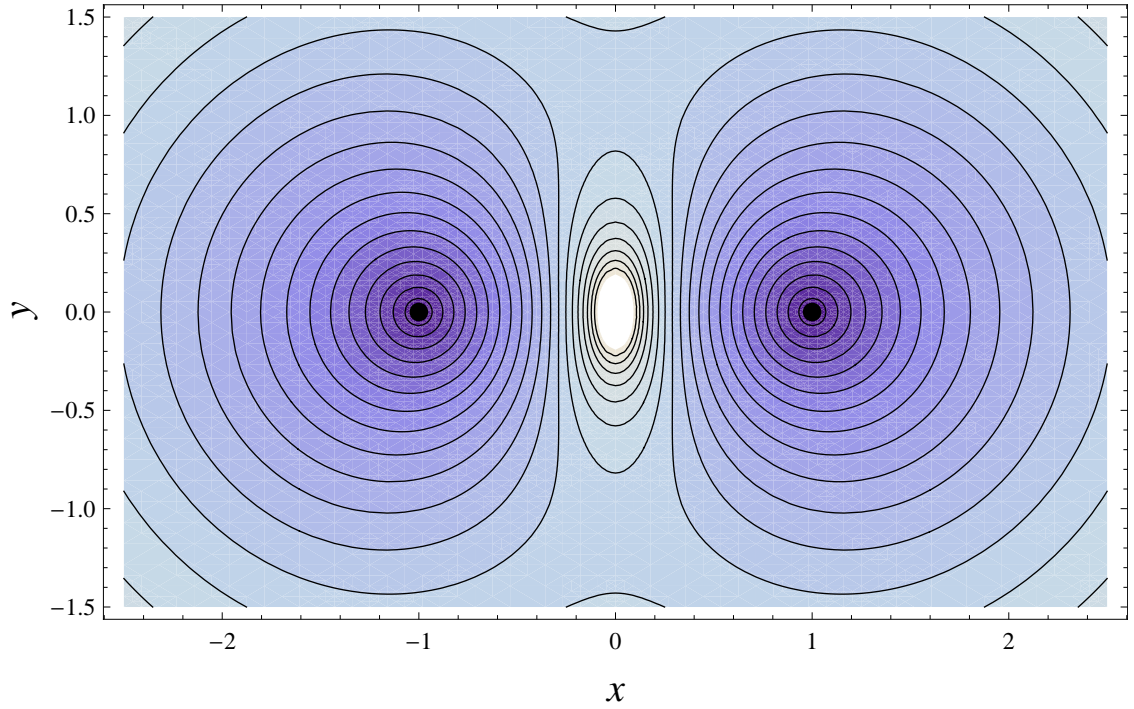
Nyní vybereme jednu z černých děr (BÚNO tu s hmotností m_1) a necháme zobrazit průběhy invariantů. Zobrazíme opět *lapse* funkci $\sqrt{-g_{tt}}$ (2.2), kvadrát Ricciho tenzoru $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$ (2.41) a Kretschmannův skalár $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ (2.47). Ke znázornění zvolíme souřadnice (2.9)–(2.11), které upravíme posunutím $r' = r - m_1$. V těchto souřadnicích má horizont událostí tvar sféry o poloměru m_1 . Problém je s fyzikální singularitou, která se zobrazuje jako oblast nenulového obsahu, ačkoliv je v řeči vlastních vzdáleností bodová. Souřadnice budeme však pro vykreslení dále používat i přes tuto nepříjemnost. Souřadnicový tvar singularity je vykreslen na obrázcích 2.9, 2.10 pro různé hodnoty m_2 a různé hodnoty b .

Na obrázcích 2.5–2.7 odpovídá oblast $r' = m_1$ (zvýrazněna tučně černě) horizontu. Osa symetrie vede rovnoběžně horizontálně podél obrázku a druhá černá díra se nachází ve směru „napravo“ od horizontu. Je patrné, že všechny invarianty mají jak na horizontu, tak na singularitě všude stejné hodnoty. Tuto vlastnost lze potvrdit i analyticky. Obrázek 2.8 dále zachycuje „vrstevnice“ všech tří invariantů v jednom grafu pro porovnání. Invarianty mají velmi podobný průběh, nekoincidují spolu přesně (izočáry se navzájem protínají).

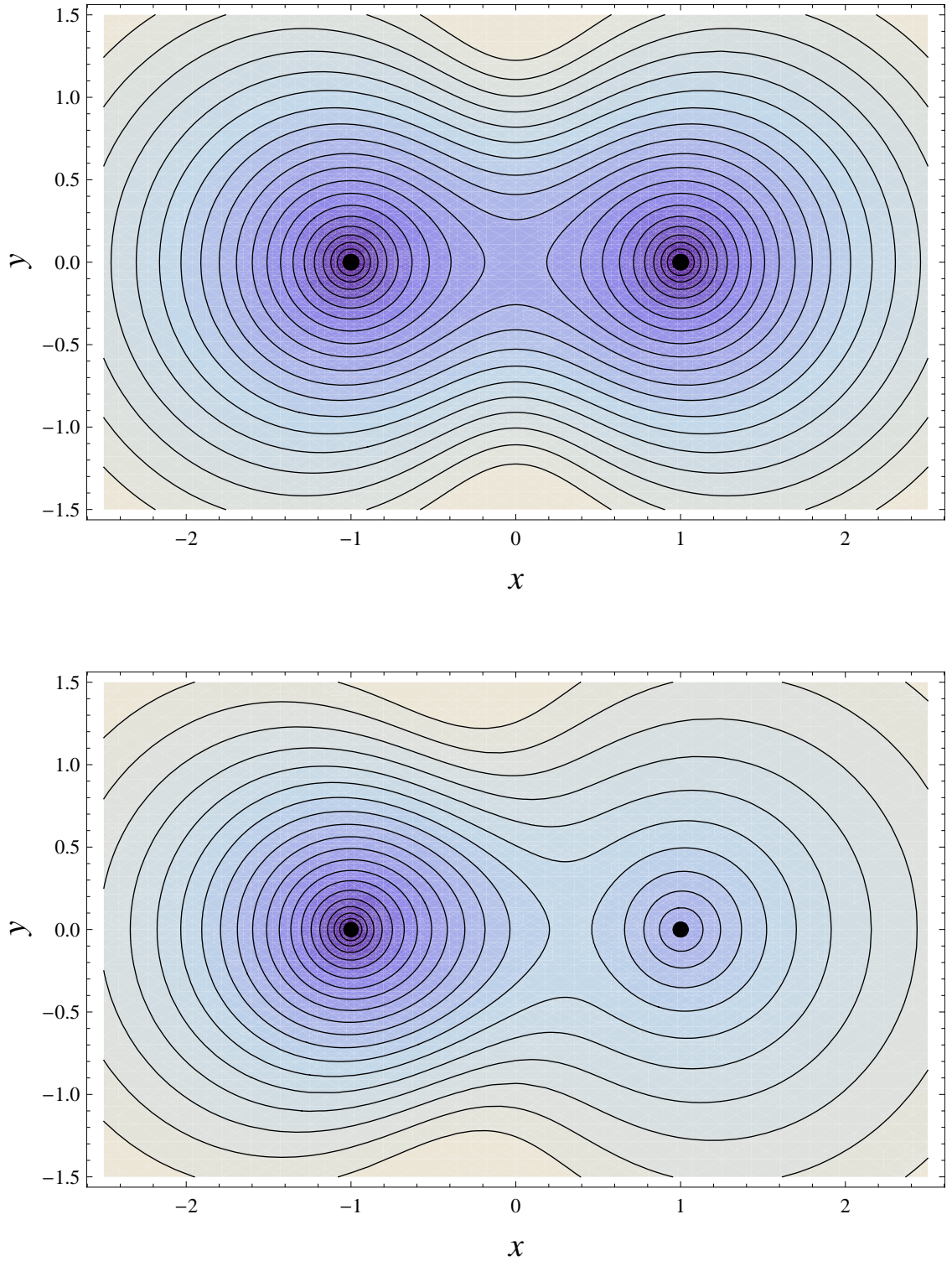
Dále zobrazíme, jak se bude v souřadnicích (2.9)–(2.11) měnit tvar znázornění fyzikální singularity pro různé hodnoty m_2 a b při konstantním $m_1 = 1$.



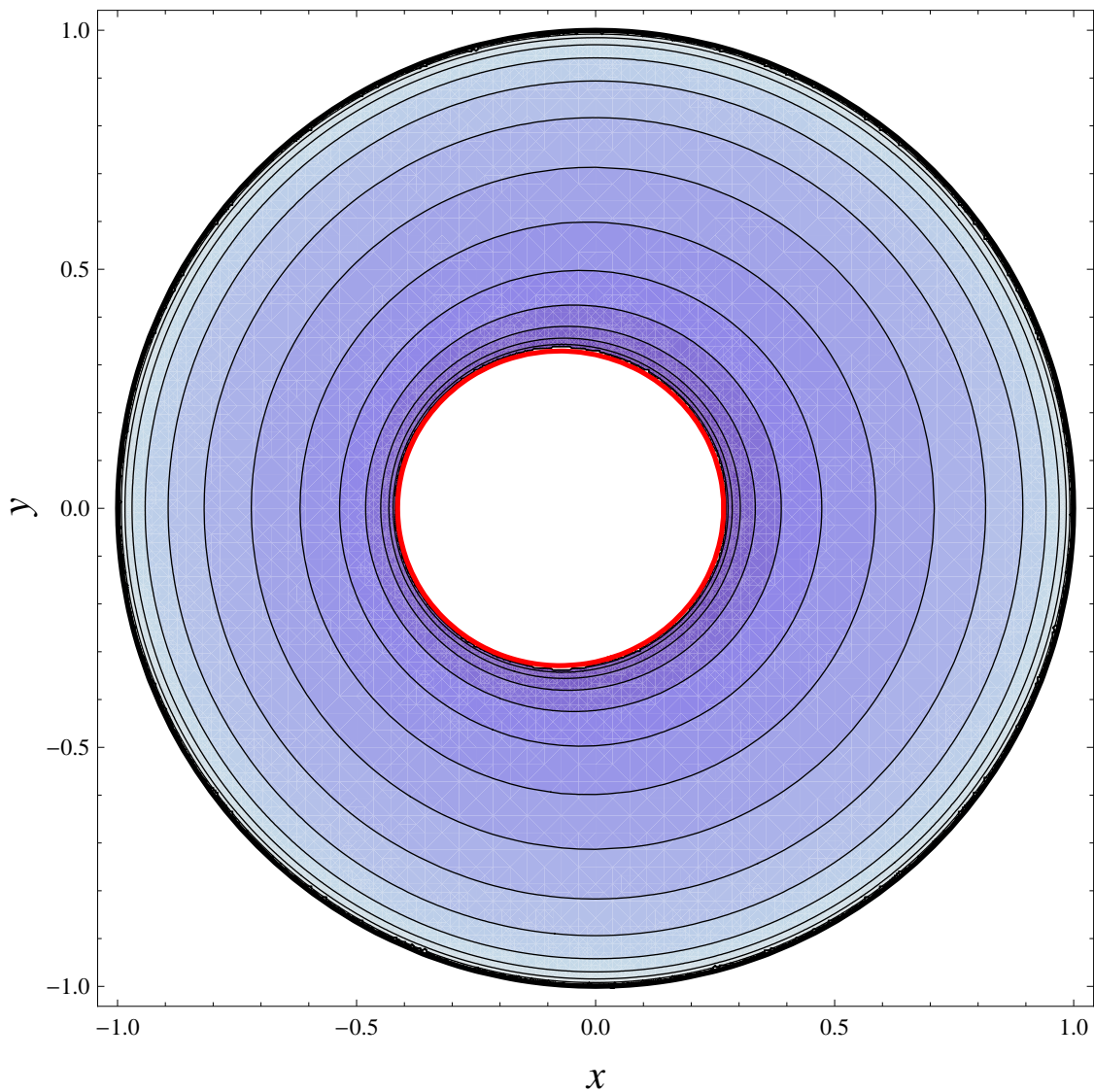
Obrázek 2.2: Lapse funkce $\sqrt{-g_{tt}} = U^{-1}$ pro Majumdarův–Papapetrouův prostoročas se dvěma černými dírami o parametrech $m_1 = 1, m_2 = 1, b = 1$ (nahore) a $m_1 = 1, m_2 = 2.5, b = 1$ (dole). Tmavší oblasti odpovídají vyšším hodnotám. Černými body jsou zvýrazněny horizonty první (vlevo) a druhé (vpravo) černé díry. Pro zobrazení používáme škálu $\ln(1 + \sqrt{-g_{tt}})$.



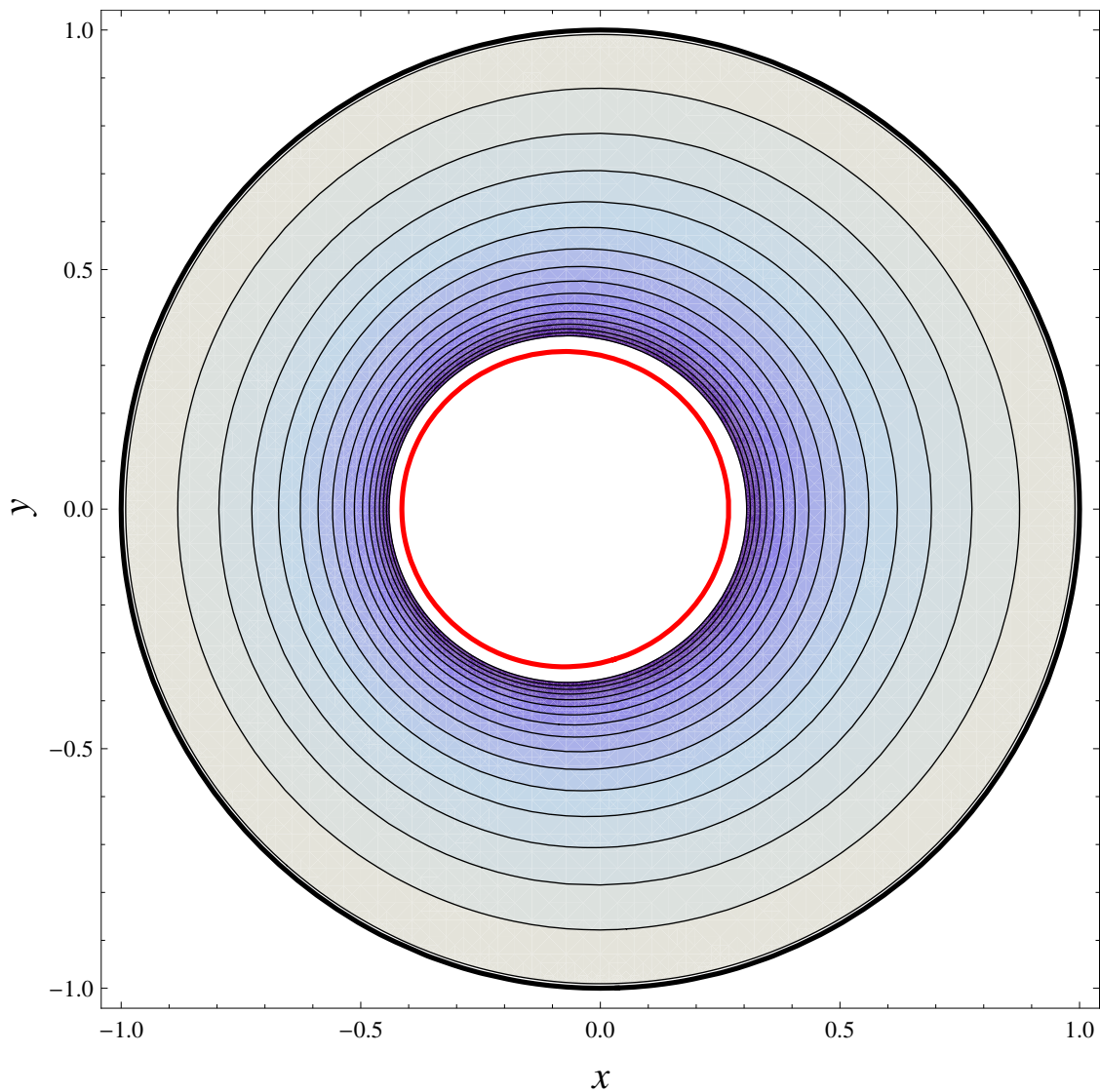
Obrázek 2.3: Ricciho kvadratický skalár $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$ pro Majumdarův–Papapetrouův prostoročas se dvěma černými dírami o parametrech $m_1 = 1, m_2 = 1, b = 1$ (nahore) a $m_1 = 1, m_2 = 2.5, b = 1$ (dole). Tmavší oblasti odpovídají vyšším hodnotám. Černými body jsou zvýrazněny horizonty první (vlevo) a druhé (vpravo) černé díry. Pro zobrazení používáme škálu $\ln(R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta})$. Pozoruhodnou vlastností tohoto invariantu je přítomnost bodové oblasti na spojnici černých děr, kde je $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} = 0$.



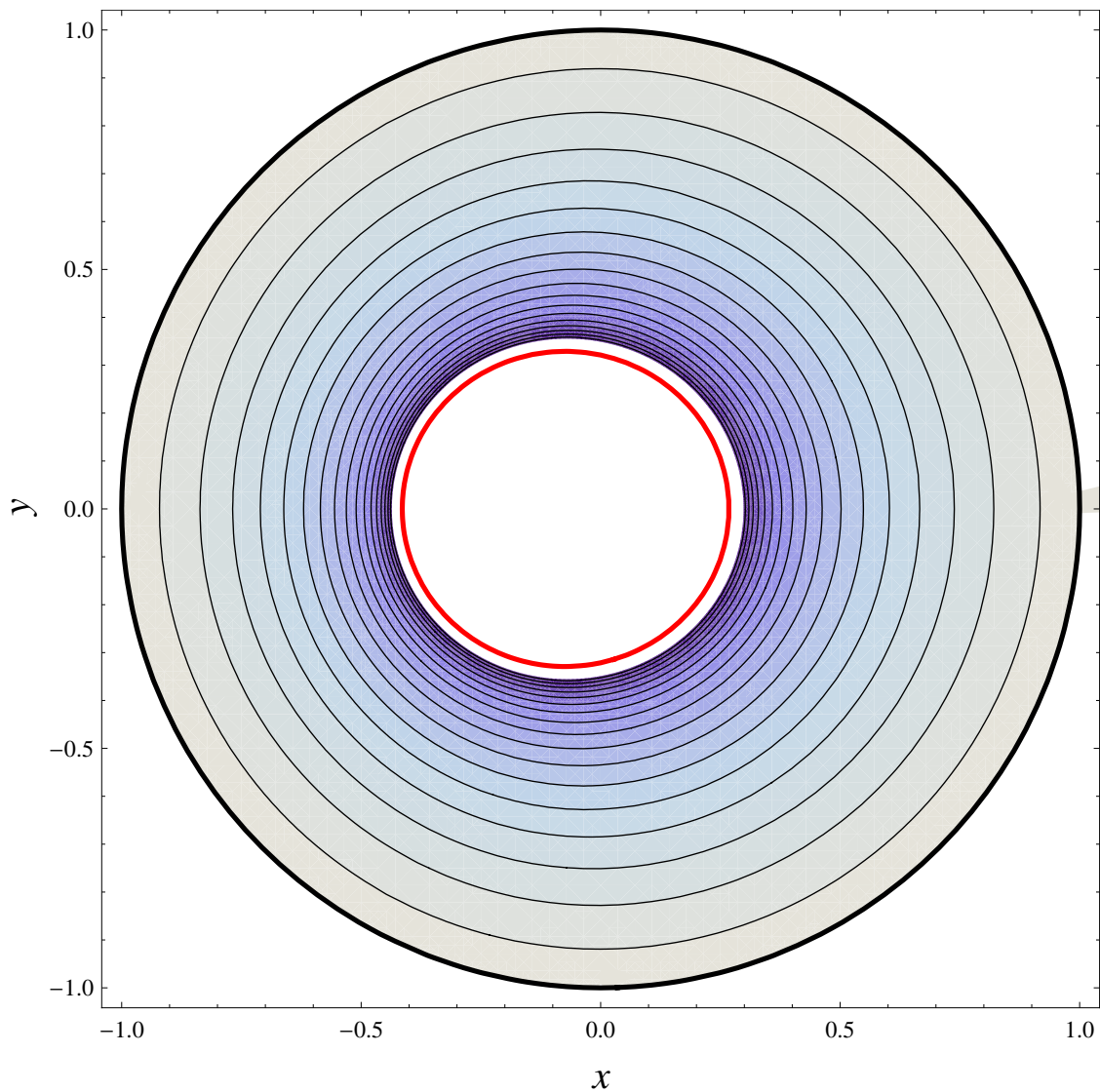
Obrázek 2.4: Kretschanův invariant $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ pro Majumdarův–Papapetrouův prostoročas se dvěma černými dírami o parametrech $m_1 = 1, m_2 = 1, b = 1$ (nahore) a $m_1 = 1, m_2 = 2.5, b = 1$ (dole). Tmavší oblasti odpovídají vyšším hodnotám. Černými body jsou zvýrazněny horizonty první (vlevo) a druhé (vpravo) černé díry. Pro zobrazení používáme škálu $\ln(R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta})$. Je zde velmi dobře vidět, jak je hodnota křivosti vyšší u horizontu lehčí černé díry a zároveň od určité vzdálenosti k hodnotě invariantu více přispívá naopak těžší černá díra.



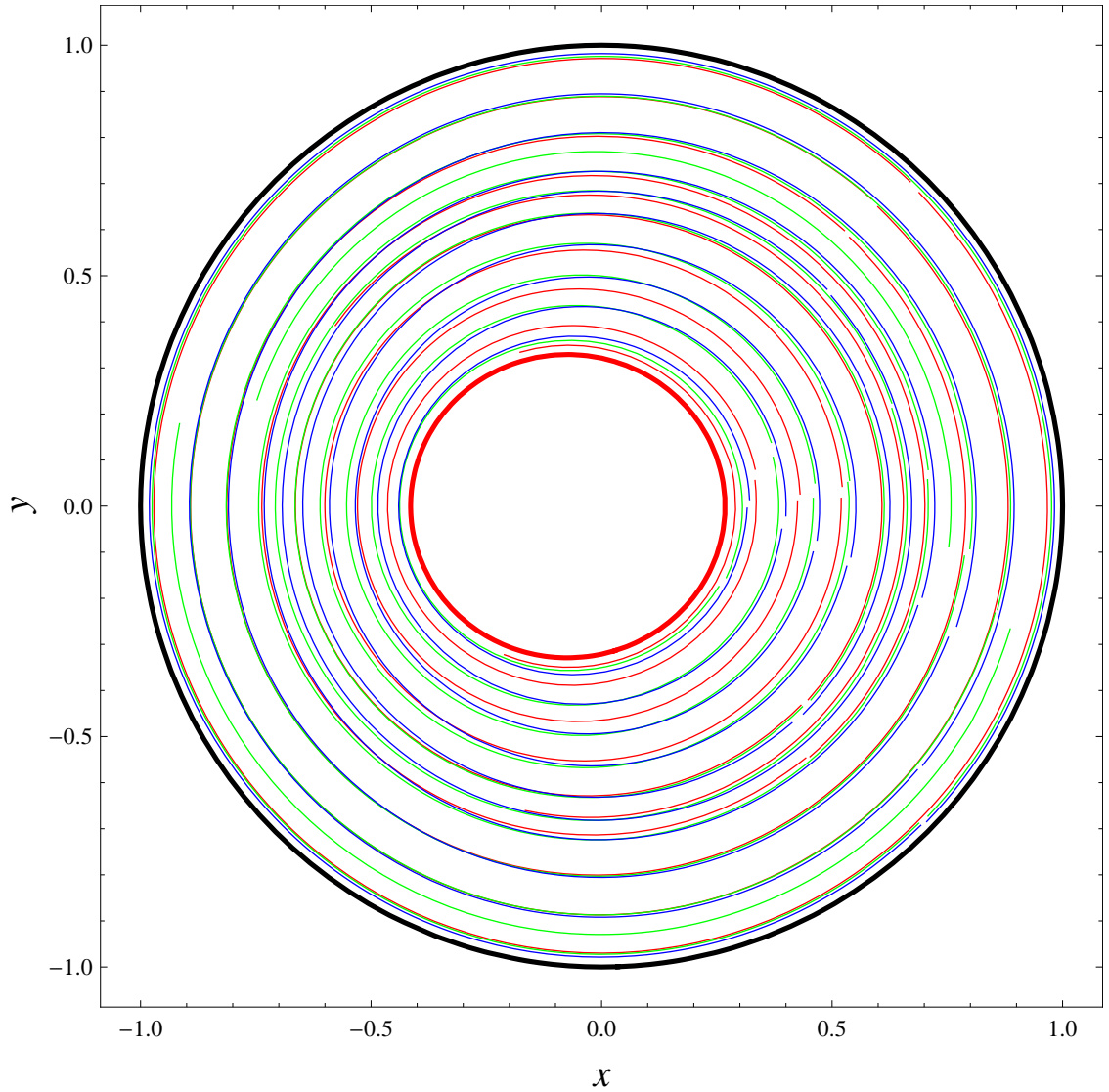
Obrázek 2.5: Lapse funkce $\sqrt{-g_{tt}}$ pod horizontem jedné z černých děr Majumdarova–Papapetrouova prostoročasu s parametry $m_1 = 1, m_2 = 1, b = 1$. Invariant diverguje na horizontu a je nulový va fyzikální singularitě. Tmavší oblasti odpovídají vyšším hodnotám. Červená čára reprezentuje fyzikální singularitu. Pro zobrazení používáme škálu $\ln(\sqrt{-g_{tt}})$.



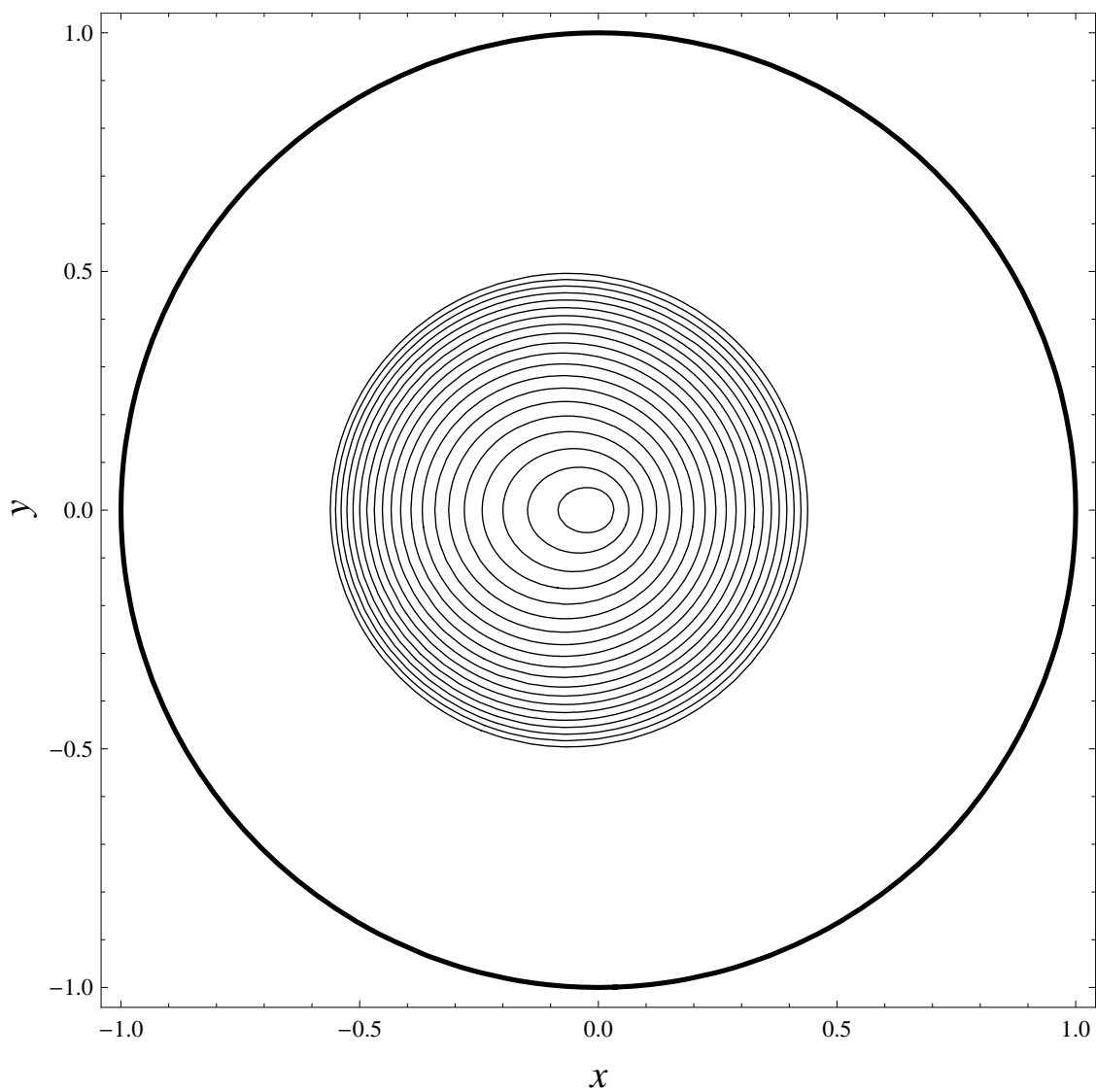
Obrázek 2.6: Skalár $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$ pod horizontem jedné z černých děr Majumdarova–Papapetrouova prostoročasu s parametry $m_1 = 1, m_2 = 1, b = 1$. Invariant má konečnou hodnotu v okolí horizontu a diverguje ve fyzikální singularitě. Tmavší oblasti odpovídají vyšším hodnotám. Červená čára reprezentuje fyzikální singularitu. Pro zobrazení používáme škálu $\ln(R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta})$.



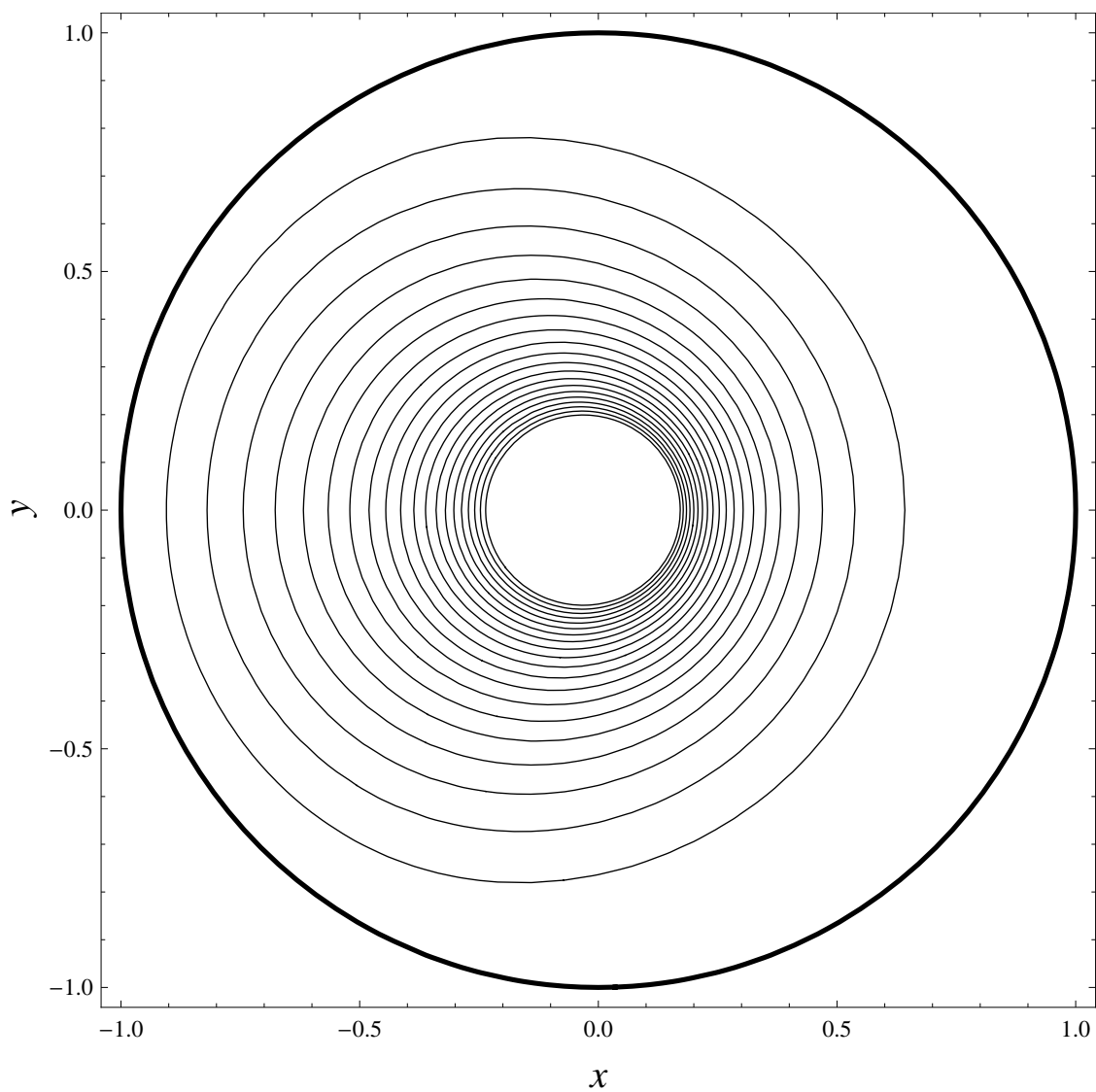
Obrázek 2.7: Kretschmannův skalár $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ pod horizontem jedné z černých děr Majumdarova–Papapetrouova prostoročasu s parametry $m_1 = 1, m_2 = 1, b = 1$. Invariant má konečnou hodnotu v okolí horizontu a diverguje ve fyzikální singularitě. Tmavší oblasti odpovídají vyšším hodnotám. Červená čára reprezentuje fyzikální singularitu. Pro zobrazení používáme škálu $\ln(R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta})$.



Obrázek 2.8: Zobrazení „vrstevnic“ $\sqrt{-g_{tt}}$ (modře), $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$ (zeleně), $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ (červeně) pod horizontem jedné z černých děr Majumdarova–Papapetrouova prostoročasu s parametry $m_1 = 1, m_2 = 1, b = 1$. Při podrobnějším prohlédnutí obrázku si můžeme všimnout toho, že invarianty spolu uvnitř černé díry zcela přesně nekoincidují, ačkoli jejich průběhy jsou si dost blízké. Červená tučná čára reprezentuje fyzikální singularitu.



Obrázek 2.9: Zobrazení (souřadnicového) tvaru singularity pro $m_1 = 1$, $b = 1$ a různá $m_2 \in \langle 0, 2 \rangle$ (širší tvar odpovídá většímu m_2). Tučná kružnice představuje horizont („první“ černé díry).



Obrázek 2.10: Zobrazení (souřadnicového) tvaru singularity pro $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ a různá $b \in \langle 0.1, 2 \rangle$ (širší tvar odpovídá menšímu b). Tučná kružnice představuje horioznt („první“) černé díry.

3. Schwarzschildova černá díra s Bachovým–Weylovým prstencem

3.1 Metrika a souřadnice

Metriku každého vakuového statického a axiálně symetrického prostoročasu lze zapsat ve tvaru (viz [12])

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda-2\nu} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 e^{-2\nu} d\phi^2, \quad (3.1)$$

kde t a ϕ jsou časová a azimutální souřadnice spojené s Killingovými symetriemi, ρ a z jsou válcové souřadnice pokrývající izotropně meridionální řezy, a funkce ν , λ závisí jen na (ρ, z) . Jsou určeny Einsteinovými rovnicemi

$$\nu_{,\rho\rho} + \nu_{,zz} + \frac{1}{\rho}\nu_{,\rho} = 0, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{,\rho} - \rho(\nu_{,\rho})^2 + \rho(\nu_{,z})^2 &= 0, \\ \lambda_{,z} - 2\rho\nu_{,\rho}\nu_{,z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Jak vidíme, rovnice (3.2) pro ν je lineární diferenciální rovnicí (Laplaceova rovnice v cylindrických souřadnicích s axiální symetrií) a splňuje princip superpozice. Funkci λ pak můžeme dopočítat ze znalosti ν pomocí křivkového integrálu

$$\lambda = \int_{\text{osa}}^{\rho,z} \rho[(\nu_{,\rho})^2 - (\nu_{,z})^2] d\rho + 2\rho\nu_{,\rho}\nu_{,z} dz, \quad (3.4)$$

kde se integruje od libovolného místa osy symetrie skrz vakuovou oblast.

V této kapitole budeme studovat speciálně prostoročas superpozice Schwarzschildovy černé díry a Bachova–Weylova prstence, umístěného symetricky kolem díry. Funkci ν získáme součtem řešení pro jednotlivé zdroje [12]

$$\nu_S = \frac{1}{2} \ln \frac{d_1 + d_2 - 2M}{d_1 + d_2 + 2M}, \quad (3.5)$$

$$\nu_{\text{BW}} = -\frac{2mK(k)}{\pi l_2}, \quad (3.6)$$

kde

$$d_{1,2} \equiv \sqrt{\rho^2 + (z \mp M)^2}, \quad (3.7)$$

$$l_{1,2} \equiv \sqrt{(\rho \mp b)^2 + z^2}, \quad (3.8)$$

$$k^2 \equiv 1 - \frac{(l_1)^2}{(l_2)^2} = \frac{4\rho b}{(l_2)^2}. \quad (3.9)$$

M zde vystupuje jako hmotnost Schwarzschildovy černé díry a m , b jako hmotnost a poloha ringu v souřadnici ρ . Celkové ν v metrice (3.1) získáme součtem $\nu = \nu_S + \nu_{\text{BW}}$ a λ výpočtem integrálu (3.4). λ_S , které odpovídá samotné Schwarzschildově černé díře, lze získat z integrace přímo,

$$\lambda_S = \frac{1}{2} \ln \frac{(d_1 + d_2)^2 - 4M^2}{4d_1 d_2}. \quad (3.10)$$

3.2 Metrické funkce na horizontu

Pro účely odstranění singularity na horizontu a analytického prodloužení metriky pod horizont jsou podstatné některé vlastnosti funkcí ν a λ v okolí horizontu. Horizont Schwarzschildovy černé díry odpovídá oblasti $\rho = 0, z \in (-M, M)$. Vyjádření veličiny $A(\rho, \nu)$ na horizontu zdefinujeme a označíme jako¹

$$A|_{\text{H}}^{(z)} \equiv \lim_{\rho \rightarrow 0, z \in (-M, M)} A. \quad (3.11)$$

Dále vždy, pokud uvedeme pojem „rozvoj“, budeme mít na mysli rozvoj do Laurentovy řady dané funkce podle ρ v okolí horizontu. Užitečný pro nás bude rozvoj funkce

$$\nu = -\frac{m}{\sqrt{z^2 + b^2}} + \ln \frac{\rho}{2\sqrt{M^2 - z^2}} + O(\rho^2), \quad (3.12)$$

kde $O(\rho^2)$ je Taylorova řada od druhého řádu. Další důležitou částí bude hodnota $\lambda - \nu$ přímo na horizontu. K výpočtu využijeme identitu z článku [13], která v našem značení zní $(\lambda - \lambda_{\text{S}})|_{\text{H}}^{(z)} = 2\nu_{\text{BW}}|_{\text{H}}^{(z)} - 2\nu_{\text{BW}}|_{\text{H}}^{(z=M)}$. Získáme tak

$$\begin{aligned} (\lambda - \nu)|_{\text{H}}^{(z)} &= 2\nu_{\text{BW}}|_{\text{H}}^{(z)} - 2\nu_{\text{BW}}|_{\text{H}}^{(z=M)} + (\lambda_{\text{S}} - \nu)|_{\text{H}}^{(z)} \\ &= \nu_{\text{BW}}|_{\text{H}}^{(z)} - 2\nu_{\text{BW}}|_{\text{H}}^{(z=M)} + (\lambda_{\text{S}} - \nu_{\text{S}})|_{\text{H}}^{(z)} \\ &= -\frac{m}{\sqrt{z^2 + b^2}} + \frac{2m}{\sqrt{M^2 + b^2}} + \ln \frac{2M}{\sqrt{M^2 - z^2}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dále vyjádříme rozvoj

$$\lambda_{,\rho} - \nu_{,\rho} = \rho(\nu_{,\rho})^2 - \rho(\nu_{,z})^2 - \nu_{,\rho} = O(\rho). \quad (3.14)$$

Není podstatné, jak komplikovaný člen $O(\rho)$ je, podstatná je pouze informace, že se jedná o Taylorovu řadu od prvního řádu. Nyní můžeme díky (3.13) a (3.14) rozvinout

$$\begin{aligned} \lambda - \nu &= (\lambda - \nu)|_{\text{H}}^{(z)} + \int_0^\rho (\lambda_{,\rho} - \nu_{,\rho}) d\rho \\ &= -\frac{m}{\sqrt{z^2 + b^2}} + \frac{2m}{\sqrt{M^2 + b^2}} + \ln \frac{2M}{\sqrt{M^2 - z^2}} + O(\rho^2). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dále také rozvineme (výpočtem rozdílu rovnic (3.15) a (3.12))²

$$\lambda - 2\nu = \frac{2m}{\sqrt{M^2 + b^2}} - \ln \frac{\rho}{4M} + O(\rho^2). \quad (3.16)$$

Poslední podstatný výpočet bude

$$(\rho^2 e^{-2\nu})|_{\text{H}} = 4(M^2 - z^2) \exp\left(-\frac{2m}{\sqrt{z^2 + b^2}}\right). \quad (3.17)$$

¹Při práci se symbolem $|_{\text{H}}$ (tedy limitou) je vždy třeba dát pozor na pravidla pro existence limit, totiž rovnost $(A + B)|_{\text{H}} = A|_{\text{H}} + B|_{\text{H}}$ platí jen tehdy, pokud limity $A|_{\text{H}}$ i $B|_{\text{H}}$ existují. Ověřování tohoto předpokladu nebudeme v textu přímo rozepisovat.

²Můžeme si povšimnout, že konstantní člen rozvoje $\lambda - 2\nu$ není závislý na souřadnici z . To je velmi užitečná vlastnost, kterou využijeme při odstraňování singularity na horizontu. Nejedná se přitom o výsledek daný speciální volbou zdroje (Bachova-Weylova prstence). Lze se přesvědčit, že z (3.2) a (3.3) obecně plyne $(\lambda_{,z} - 2\nu_{,z})|_{\text{H}}^{(z)} = 0$. Konstantní člen rozvoje (3.16) tedy nezávisí na z pro libovolný axiálně symetrický zdroj.

3.3 Odstranění singularity na horizontu

Díky singulárnímu chování ν podle (3.12) na horizontu je též metrika (3.1) singulární. Odstranění této singularity provedeme podobným postupem, který známe z analytického rozšíření Schwarzschildovy metriky v [7]. Liší se ve volbě „želví souřadnice“ a mírně i ve volbě Kruskalových světelných souřadnic. Zavedeme tedy nejdříve želví souřadnici ρ^* , advancovaný a retardovaný čas t^+ , t^- ,

$$d\rho^* = \sqrt{-\frac{g_{\rho\rho}}{g_{tt}}} d\rho = e^{\lambda-2\nu} d\rho, \quad (3.18)$$

$$t^+ = t + \rho^*, \quad (3.19)$$

$$t^- = t - \rho^*. \quad (3.20)$$

Následně získáme

$$-e^{2\nu} dt^+ dt^- = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda-2\nu} d\rho^2 \quad (3.21)$$

a metriku (3.1) pak můžeme přepsat do tvaru

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^+ dt^- + e^{2\lambda-2\nu} dz^2 + \rho^2 e^{-2\nu} d\phi^2. \quad (3.22)$$

Pokračujeme zavedením světelných Kruskalových souřadnic

$$u = -\exp\left(\frac{-t^-}{4\mathcal{M}}\right), \quad (3.23)$$

$$v = \exp\left(\frac{t^+}{4\mathcal{M}}\right), \quad (3.24)$$

kde

$$\mathcal{M} \equiv M \exp\left(\frac{2m}{\sqrt{M^2 + b^2}}\right), \quad (3.25)$$

a tím získáme metriku (3.1) ve tvaru

$$ds^2 = -16\mathcal{M}^2 e^{2\nu} \exp\left(-\frac{\rho^*}{2\mathcal{M}}\right) du dv + e^{2\lambda-2\nu} dz^2 + \rho^2 e^{-2\nu} d\phi^2. \quad (3.26)$$

Podle (3.15) a (3.17) vidíme, že členy g_{zz} a $g_{\phi\phi}$ metriky (3.26) na horizontu konvergují a jsou nedegenerované. Dále vidíme, že jednotlivé řádky maticového zápisu metriky jsou navzájem lineárně nezávislé. Abychom ukázali, že se jedná o regulární metriku, stačí již pouze ukázat, že člen g_{uv} konverguje na horizontu a je nedegenerovaný. S využitím (3.18) a (3.16) dostáváme³

$$\begin{aligned} \rho^* &= \int \left[\frac{4M}{\rho} \exp\left(\frac{2m}{\sqrt{M^2 + b^2}}\right) + O(\rho) \right] d\rho \\ &= 4\mathcal{M} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + O(\rho^2), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\frac{g_{uv}}{-32\mathcal{M}^2} = e^{2\nu} \exp\left(-\frac{\rho^*}{2\mathcal{M}}\right) = \frac{\exp\left(-\frac{2m}{\sqrt{z^2 + b^2}}\right)}{4(M^2 - z^2)} + O(\rho^2). \quad (3.28)$$

Tím jsme ověřili, že člen g_{uv} na horizontu konverguje, je nedegenerovaný, a tedy metrika (3.26) je regulární.

³ ρ_0 , které hraje ve vztahu (3.27) roli integrační konstanty BÚNO, volíme jako $\rho_0 = 1$.

3.4 Průběh vnějšího potenciálu

Zkoumejme chování funkce ν_{BW} rozšířené na \mathbb{C} . Uvažujme rozšíření funkce ν_{BW} (definované podle (3.6)) na komplexní ρ , tedy $\nu_{\text{BW}}(\rho, z) : (\mathbb{C}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$. První užitečnou vlastností je její sudost v ρ . S využitím integrální identity⁴

$$\int_0^{\pi/2} F(\sin^2 \phi) d\phi = \int_0^{\pi/2} F(1 - \sin^2 \phi) d\phi, \quad (3.29)$$

kde F je libovolná integrovatelná funkce, zjišťujeme

$$\begin{aligned} -\frac{\pi\nu_{\text{BW}}}{2m} &= \frac{1}{l_2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{(l_1)^2}{(l_2)^2}\right) \sin^2 \phi}} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{(l_2)^2 - [(l_2)^2 - (l_1)^2] \sin^2 \phi}} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{(l_1)^2 - [(l_1)^2 - (l_2)^2] \sin^2 \phi}} = \\ &= \frac{1}{l_1} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{(l_2)^2}{(l_1)^2}\right) \sin^2 \phi}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Jak z (3.30) vidíme, je funkce ν_{BW} invariantní vůči záměně $l_1 \leftrightarrow l_2$. Tuto záměnu lze též (s přihlédnutím k definici (3.8)) realizovat záměnou $\rho \leftrightarrow -\rho$. Nyní vyslovíme tvrzení, které platí pro sudé funkce⁵:

$$\forall \rho' \in \mathbb{R}; \nu_{\text{BW}} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega); \nu_{\text{BW}} \text{ je sudá} \Rightarrow \nu_{\text{BW}}(i\rho') \in \mathbb{R}. \quad (3.31)$$

Jak jsme v (3.30) ukázali, je ν_{BW} sudá, takže díky tvrzení (3.31) je ryze reálná. Nesmíme však opomenout, že předpokladem tvrzení (3.31) je konvergence rozvoje ν_{BW} (tedy její analytičnost). Nyní ukážeme, že ν_{BW} není analytická pro $\rho \in i\mathbb{R}$, pokud

$$\rho > i\sqrt{(b^2 + z^2)}. \quad (3.32)$$

Úpravíme nejdříve výraz (3.6)

$$\begin{aligned} \nu_{\text{BW}} &= -\frac{2m}{\pi l_2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{l_1^2}{l_2^2}\right) \sin^2 \theta}} = \\ &= -\frac{2m}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\rho^2 + z^2 + b^2 + 2b\rho \cos(2\theta)}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

⁴Důkazem (3.29) je přímočará úprava integrálu, $\int_0^{\pi/2} F(\sin^2 \phi) d\phi = \int_0^{\pi/2} F(\cos^2(\frac{\pi}{2} - \phi)) d\phi = -\int_{\pi/2}^0 F(\cos^2 \phi') d\phi' = \int_0^{\pi/2} F(\cos^2 \phi') d\phi' = \int_0^{\pi/2} F(1 - \sin^2 \phi) d\phi$. Postupně jsme nejdříve využili rovnost $\sin \phi = \cos(\frac{\pi}{2} - \phi)$, substituci $\phi' := \frac{\pi}{2} - \phi$, otočení mezi integrálu, v závěru pak rovnost $\cos^2 \phi' = 1 - \sin^2 \phi'$ a přeznačení zpět na ϕ .

⁵Označením $i\mathbb{R}$ míníme ryze imaginární čísla. Dále $\Omega \equiv \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ je sjednocení množin ryze reálných a ryze imaginárních čísel. $\mathcal{C}^\omega(\Omega) = \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{C}^\omega(i\mathbb{R})$ má zde význam množiny analytických funkcí na množině ryze reálných a ryze imaginárních čísel. Připomínáme, že $\mathcal{C}^\omega(\Omega)$ je pouze úzkou podmnožinou plně holomorfních funkcí na \mathbb{C} . Pro důkaz (3.31) si stačí uvědomit, že sudé funkce mají ve svém rozvoji zastoupeny pouze sudé členy.

Při $\rho^2 < z^2 + b^2$ vede integrál přes nespojitou oblast a při jeho přímém výpočtu si lze všimnout, že v této oblasti zůstane jeho reálná část nulová. Pro tuto oblast vyřešíme (3.2) zvlášť.

Označme $\rho' \equiv i\rho$. Polní rovnice (3.2) a (3.3) mají v této proměnné tvar

$$-\nu_{,zz} + \nu_{,\rho'\rho'} + \frac{1}{\rho'}\nu_{,\rho'} = 0, \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{,\rho'} - \rho'(\nu_{,\rho'})^2 - \rho'(\nu_{,z})^2 &= 0, \\ \lambda_{,z} - 2\rho'\nu_{,\rho'}\nu_{,z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Vidíme, že (3.34) odpovídá vlnové rovnici v rovině s axiální symetrií. Řešení vyjádříme jako superpozici partikulárních řešení, které uvažujeme ve tvaru

$$\nu_\omega = \psi(\rho')\phi(z). \quad (3.36)$$

Dosazením (3.36) do (3.34) získáme rovnost⁶

$$\frac{\phi''(z)}{\phi(z)} = \frac{\psi''(\rho')}{\psi(\rho')} + \frac{1}{\rho'}\frac{\psi'(\rho')}{\psi(\rho')} = -\omega^2 \quad (3.37)$$

a následně partikulární řešení⁷

$$\nu_\omega = B_J(0; \omega\rho') \cos(\omega z). \quad (3.38)$$

Budeme předpokládat plné řešení ve tvaru⁸

$$\nu_{\text{new}} = \int_0^\infty a(\omega)\nu_\omega d\omega = \int_0^\infty a(\omega)B_J(0; \omega\rho') \cos(\omega z) d\omega. \quad (3.39)$$

Funkci $a(\omega)$ nalezneme z okrajových podmínek na horizontu. Z (3.6) plyne rovnost $\nu_{\text{BW}}|_{\text{H}} = -\frac{m}{\sqrt{z^2+b^2}}$. Požadujeme-li, aby ν_{new} splňovalo okrajové podmínky na horizontu, musí platit

$$-\frac{m}{\sqrt{z^2+b^2}} = \int_0^\infty a(\omega) \cos(\omega z) d\omega. \quad (3.40)$$

Hledání $a(\omega)$ je tedy problémem rozkladu $-\frac{m}{\sqrt{z^2+b^2}}$ na cosiny s hustotou a . Na (3.40) lze nahlížet jako na cosinovou Fourierovu transformaci a $a(\omega)$ lze tak vyjádřit transformací k ní inverzní,

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{-m}{\sqrt{z^2+b^2}} \cos(\omega z) dz = -\frac{2m}{\pi} B_K(0; \omega b). \quad (3.41)$$

⁶V rovnosti (3.37) máme na každé straně funkci závislou na jiné proměnné, výrazy musí být konstantní. Tuto konstantu jsme označili jako $-\omega^2$.

⁷Využili jsme tvrzení, že funkce ν je sudá vzhledem k z (zrcadlová symetrie vůči ekvatoriální rovině).

⁸Obecně bychom měli (3.39) získat integrací ω přes celé \mathbb{C} . Jsou dva způsoby, jak ukázat, že k pokrytí celého řešení stačí brát pouze kladné reálné hodnoty ω . První z nich vede přes teorii Fourierových transformací: každou funkci lze jednoznačně rozložit do spektra funkce cosinus. Druhou cestou je dosadit tipnuté řešení do dané diferenciální rovnice, ověřit, že jí vyhovuje, a že navazuje na okrajové podmínky.

Plné řešení tak můžeme psát ve tvaru

$$\nu_{\text{new}} = -\frac{2m}{\pi} \int_0^\infty B_K(0; \omega b) B_J(0; \omega \rho') \cos(\omega z) d\omega. \quad (3.42)$$

Ověřit správnost můžeme tím, že řešení splňuje rovnici (3.34) a okrajové podmínky na $\rho' = 0$ v nultých i prvních derivacích⁹. Tvar řešení (3.42) však není zcela vhodný, díky jeho velmi pomalé konvergenci (funkce má velmi problematický skokový průběh). Můžeme však využít toho, že integrál (3.42) lze velmi dobře upravit pro $z = 0$. Platí

$$\nu_{\text{new}}(\rho', 0) = -\frac{2m}{\pi} \int_0^\infty B_K(0; \omega b) B_J(0; \omega \rho') d\omega = -\frac{2mK\left(-\frac{\rho'^2}{b^2 + \rho'^2}\right)}{\pi\sqrt{b^2 + \rho'^2}}. \quad (3.43)$$

Uvedený úplný eliptický integrál, který má v argumentu ryze reálné hodnoty, již nemá problémy s konvergencí. Známe-li „nultou“ derivaci ν_{new} podle proměnné z v rovině $z = 0$, můžeme v téže rovině vyjádřit ostatní derivace z (3.34). Liché derivace jsou triviálně rovny 0 (jak lze okamžitě nahlédnout derivováním $\cos(\omega z)$ ve výrazu (3.42)). Indukcí tak můžeme získat všechny sudé derivace v rovině $z = 0$, neboť platí (pro aplikaci $2n$ derivací podle z na (3.34))

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}} \left(\nu_{,\rho'\rho'} + \frac{1}{\rho'} \nu_{,\rho'} \right) = \frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+2}} (\nu). \quad (3.44)$$

Z indukce pak získáme derivace ve tvaru hypergeometrických řad. Tento analytický výpočet necháme provést „strojově“ programem. Ze znalosti všech derivací podle z v rovině $z = 0$ tak můžeme ν_{new} psát ve tvaru Taylorova polynomu

$$\nu_{\text{new}} = -\frac{m}{b\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} {}_2F_1\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}; 1; -\frac{\rho'^2}{b^2}\right) \left(\frac{z}{b}\right)^{2n} \right]. \quad (3.45)$$

Taylorova řada obvykle není vhodným prostředkem na dobrou aproximaci, díky své slabé konvergenci. Pro pevné n bude vždy existovat z takové, že pro větší hodnoty bude Taylorův polynom značně divergovat od svého vzoru. Využijeme ale vlastnosti, že Taylorův zbytek z (3.45) roste vzhledem k z výrazně pomaleji, než klesá vzhledem k ρ' . S přihlédnutím k tomu, že pro $\rho'^2 < b^2 + z^2$ již řešení máme, bude na zbylé oblasti $\rho'^2 > b^2 + z^2$ řada (3.45) velmi dobře aproximovat řešení pro dostatečně veliké (a pevné) n a zcela libovolné z ¹⁰.

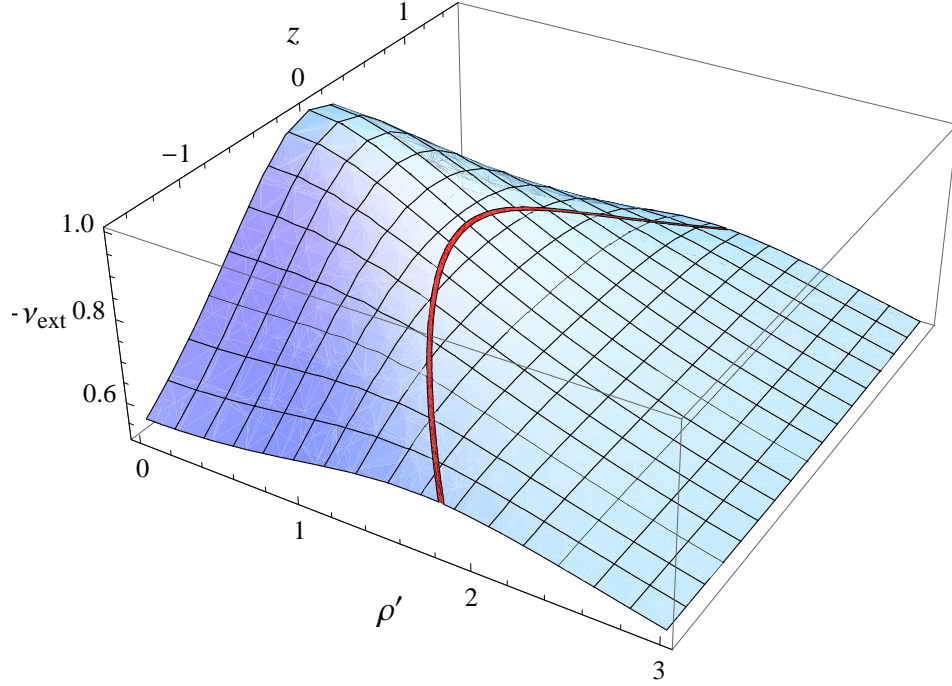
Výsledné ν pro Bachův–Weylův prstenec pod horizontem tedy získáme slepením ν_{BW} definovaném podle (3.6) s volbou ryze imaginárního ρ a ν_{new} definovaném podle (3.45) na hranici, kde přestává řešení (3.6) existovat. Získáme tak

$$\nu_{\text{ext}}(\rho', z) = \nu_{\text{BW}}(i\rho', z)H(-\rho'^2 + z^2 + b^2) + \nu_{\text{new}}(\rho', z)H(\rho'^2 - z^2 - b^2). \quad (3.46)$$

Názorné vykreslení ν_{ext} poskytují obrázky (3.1)–(3.2). Červenou čarou na obrázcích zvýrazňujeme hranici napojení řešení. Samotné ν_{ext} nabývá záporných hodnot a v obrázcích pro lepší přehled vykresluje hodnotu $-\nu_{\text{ext}}$.

⁹Navázání prvních derivací lze ověřit snadno. Derivace (3.42) podle ρ' jsou všude na horizontu nulové. To je očekávaný předpoklad (o ν_{BW} vně horizontu víme, že je na okolí horizontu sudá a hladká v ρ' , a tedy musí být nulové její liché derivace na horizontu podle ρ').

¹⁰Tuto vlastnost nebudeme přímo dokazovat. Ověření toho, jak dobře aproximuje (3.45) svůj vzor, provedeme způsobem, že ji budeme testovat na rovnici (3.34). Budeme tedy testovat hodnotu ϵ ve výrazu $-(\nu_{\text{new}})_{,zz} + (\nu_{\text{new}})_{,\rho'\rho'} + \frac{1}{\rho'}(\nu_{\text{new}})_{,\rho'} = \epsilon(\rho', z)\nu_{\text{new}}$ a podle něj volit vždy dostatečně velké n . Pro vykreslení věrných obrázků budou velmi dobře stačit již pouze první tři členy řady.



Obrázek 3.1: Zobrazení průběhu potenciálu $-\nu_{\text{ext}}$ Bachova–Weylova prstence o parametrech $b = 1$, $m = 1$ pod horizontem Schwarzschildovy černé díry, který odpovídá oblasti $\rho' = 0$. Červenou čarou zvýrazňujeme hranici navázání ν_{BW} s ν_{new} . (prostorový graf)

3.5 Prodloužení metriky pod horizont

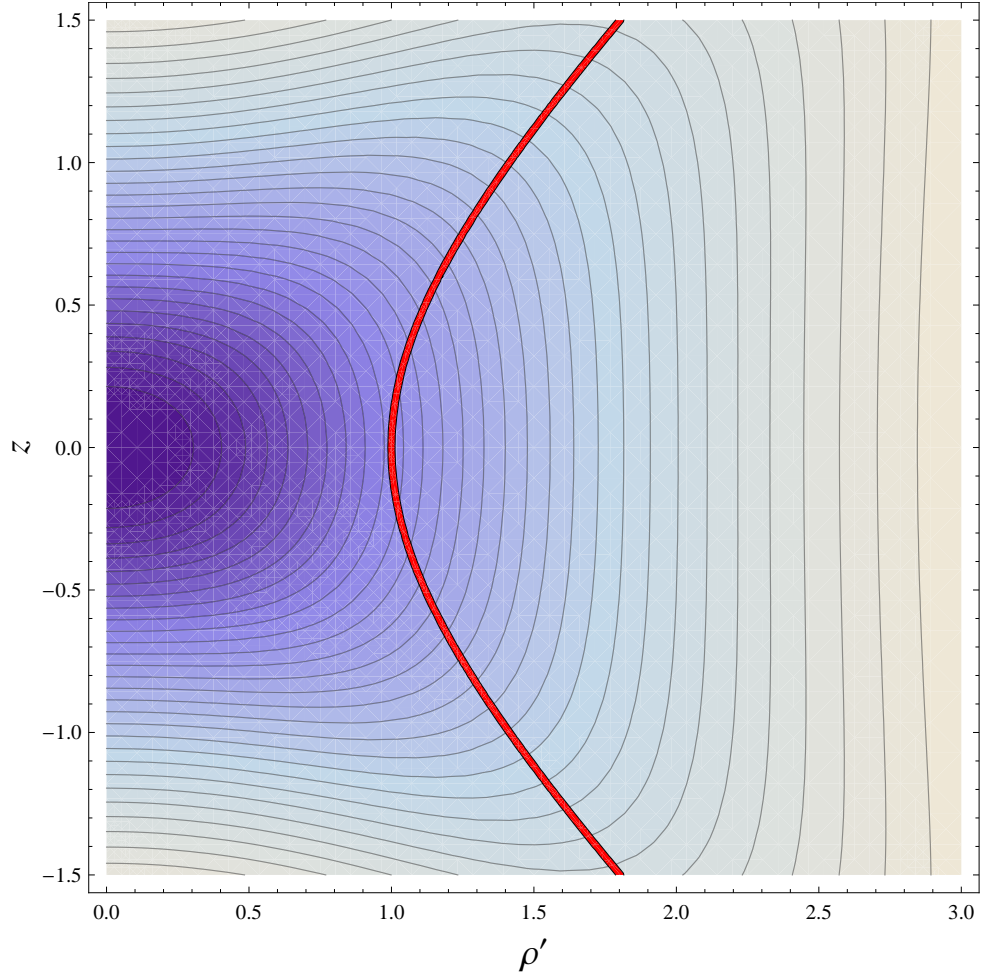
Přímým výpočtem součinu uv z (3.23) a využitím (3.18) získáváme

$$uv = -\exp\left(\frac{\rho^*}{2\mathcal{M}}\right) = \frac{1}{\rho^2}(1 + O(\rho^2)). \quad (3.47)$$

Zároveň ze vztahů (3.18), (3.27) a (3.23) vidíme, že situace, kdy jedna ze souřadnic u , v je rovna nule, odpovídá horizontu¹¹. Prodloužení za (budoucí) horizont provedeme tím způsobem, že souřadnici u prodloužíme do záporných hodnot. Vzhledem k tomu, že souřadnice v je zde kladná, můžeme s přihlédnutím k (3.47) získat prodloužení pod horizont volbou ryze imaginární souřadnice ρ . Tedy položením $\rho \in i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, kde $i\mathbb{R}$ je ryze imaginární část \mathbb{C} . Rovnost (3.47) však vyjadřuje chování uv pouze lokálně v okolí horizontu. Přesvědčíme se nyní, že volba ryze imaginární souřadnice $\rho \in i\mathbb{R}$ skutečně pokrývá celou oblast pod horizontem, nejen lokálně. Ukážeme postupně pro jednotlivé členy metriky (3.1), že se dají pro všechna $\rho \in i\mathbb{R}$ hladce rozšířit.

V kapitole 3.4 jsme se již přesvědčili, že ν_{BW} lze prodloužit volbou ryze komplexní souřadnice ρ na celé oblasti pod horizontem. Uvnitř horizontu pak provádíme v komplikovaných oblastech, kde ν_{BW} pro komplexní ρ selhává, napojení zavedením ν_{ext} podle (3.46). Pro kompletní studium ν nyní provedeme rozbor

¹¹Na horizontu se blíží ρ k nule a podle (3.27) vidíme, že želví souřadnice diverguje k $-\infty$. Mínulý horizont je charakterizován oblastí, kde $t \rightarrow -\infty$ a u zde pak konverguje ke konečné hodnotě a v konverguje k nule. Na budoucím horizontu, kde $t \rightarrow \infty$, je situace opačná, u konverguje k nule a v ke konečné hodnotě.



Obrázek 3.2: Zobrazení průběhu potenciálu $-\nu_{\text{ext}}$ Bachova–Weylova prstence o parametrech $b = 1$, $m = 1$ pod horizontem Schwarzschildovy černé díry, který odpovídá oblasti $\rho' = 0$. Červenou čarou zvýrazňujeme hranici navázání ν_{BW} s ν_{new} .

funkce ν_S náležející Schwarzschildově černé díře. Volbu komplexní souřadnice ρ můžeme též realizovat přechodem k Schwarzschildovým sférickým souřadnicím (r, θ) pomocí transformace

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{r(r-2M)} \sin \theta, \\ z &= (r-M) \cos \theta,\end{aligned}\tag{3.48}$$

pro kterou platí

$$r \in (0, 2M), \theta \in (0, 2\pi).\tag{3.49}$$

Zavedení je shodné se zavedením v [12], avšak podstatná odlišnost je ve volbě intervalu (3.49), kterou popisujeme oblast pod horizontem. Jak lze nahlédnout, při dodržení (3.49) bude ρ nabývat pouze ryze imaginárních hodnot. Při transformaci (3.48) přejde ν_S a λ_S na

$$\nu_S = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{r} \right),\tag{3.50}$$

$$\lambda_S = \frac{1}{2} \ln \frac{r(r-2M)}{(r-M)^2 - M^2 \cos^2 \theta},\tag{3.51}$$

což vede na transformaci metriky (3.1)

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{2M}{r}\right) e^{2\nu_{\text{ext}}} dt^2 + \frac{e^{2\lambda_{\text{ext}} - 2\nu_{\text{ext}}}}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 e^{-2\nu_{\text{ext}}} (e^{2\lambda_{\text{ext}}} d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.52)$$

kde¹²

$$\lambda_{\text{ext}} \equiv \lambda - \lambda_S. \quad (3.53)$$

Zbývá pouze diskuse k λ_{ext} . Z rovnic (3.3) a faktu, že $\nu = \nu_{\text{ext}} + \nu_S$ je ryze reálné (pod horizontem má jako imaginární část pouze konstantní $\frac{1}{2}i\pi$), nutně plyne, že imaginární část λ musí být konstantní. Z (3.51) zároveň vidíme, že imaginární část λ_S je konstantní (pod horizontem je rovna $\frac{1}{2}i\pi$). Tím dostáváme, že λ_{ext} má rovněž pouze konstantní část. Z nutné hladkosti $e^{2\lambda_{\text{ext}} - 2\nu_{\text{ext}}}$ v okolí horizontu plyne, že konstantní imaginární část λ_{ext} musí být buď nulová, nebo rovna $k i\pi$ ¹³. Vzhledem k tomu, že v celé oblasti musí být imaginární část dále konstantní, je tedy člen $e^{2\lambda_{\text{ext}}}$ získaný výpočtem z (3.3) a (3.53) nutně ryze reálný a vyhovuje Einsteinovým rovnicím.

Pro účely analytického prodloužení pod horizont tedy budeme pracovat s metrikou (3.52), (3.49) a funkcemi ν_{ext} , λ_{ext} definovanými podle (3.46) a (3.53). Jak jsme se v této kapitole přesvědčili, metrika hladce navazuje na řešení v okolí horizontu. Dále splňuje Einsteinovy rovnice v celé oblasti pod horizontem a je též hladká (výjimku tvoří pouze zatím nediskutovaný bod $r = 0$, kde se setkáváme s fyzikální singularitou).

3.6 Křivost

Nyní se budeme zabývat křivostí uvnitř horizontu. Z vakuovosti řešení plyne, že Ricciho tenzor a všechny jeho invarianty jsou nulové. Budeme se přesto zabývat pouze průběhem Kretschmannova skaláru, který lze explicitně vyjádřit (viz [11]). Při dodržení značení $\rho' = i\rho$ získáváme

$$\begin{aligned} \frac{e^{4\lambda - 4\nu}}{16} I_{2,2} &= (\nu_{,\rho'\rho'})^2 + (\nu_{,zz})^2 - (\nu_{,\rho'z})^2 - \nu_{,\rho'\rho'} \nu_{,zz} \\ &+ 3(1 - \rho' \nu_{,\rho'}) [-(\nu_{,\rho'})^2 + (\nu_z)^2]^2 - (\rho')^2 [-(\nu_{,\rho'})^2 + (\nu_z)^2]^3 \\ &+ 3\nu_{,\rho'\rho'} (\nu_{,\rho'})^2 + 3\nu_{,zz} (\nu_z)^2 - 6\nu_{,\rho'z} \nu_{,\rho'} \nu_{,z} \\ &- \rho' \nu_{,\rho'} [3(\nu_z)^2 + (\nu_{,\rho'})^2] (\nu_{,\rho'\rho'} + \nu_{,zz}) \\ &+ 2\rho' \nu_{,\rho'z} \nu_{,z} [(\nu_z)^2 + 3(\nu_{,\rho'})^2]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

3.7 Prostorčas v okolí fyzikální singularity

Prostorčas uvnitř horizontu může být komplikovaný, ale v blízkém okolí fyzikální singularity může dojít k podstatným zjednodušením. Hodnotu λ je potřeba získat

¹²Připomínáme, že pro λ neplatí princip superpozice a nelze jednoduše psát $\lambda_{\text{ext}} = \lambda_{\text{BW}}$.

¹³Pro libovolné k však dostaneme efektivně totéž. V metricce vystupuje pouze člen $e^{2\lambda_{\text{ext}}}$, který zůstává stejný pro libovolné k .

uvnitř horizontu vždy integrací (3.4). Problém je ve výchozí oblasti, odkud integrujeme. Při integraci od horizontu nastává problém, že zde λ diverguje. Můžeme však obdobným integrálem spočítat hodnotu λ_{ext} , které je na horizontu konečné. Vyjdeme z definice $\lambda_{\text{ext}} = \lambda - \lambda_{\text{S}}$ (nejdříve v souřadnicích ρ', z) a napíšeme pro něj diferenciální rovnice

$$\lambda_{\text{ext},\rho'} = \lambda_{,\rho'} - \lambda_{\text{S},\rho'} = \rho'(\nu_{,\rho'}^2 + \nu_{,z}^2 - \nu_{\text{S},\rho'}^2 - \nu_{\text{S},z}^2), \quad (3.55)$$

$$\lambda_{\text{ext},z} = \lambda_{,z} - \lambda_{\text{S},z} = \rho'(\nu_{,\rho'}\nu_{,z} - \nu_{\text{S},\rho'}\nu_{\text{S},z}). \quad (3.56)$$

Dále přejdeme k souřadnicím (r, θ) daným transformací (3.48) a vyjádříme $\lambda_{,r} = \lambda_{,\rho'}\rho'_{,r} + \lambda_{,z}z_{,r}$ a $\lambda_{,\theta} = \lambda_{,\rho'}\rho'_{,\theta} + \lambda_{,z}z_{,\theta}$. Ze znalosti λ_{S} (3.5) můžeme vyjádřit

$$\lambda_{\text{ext},r} = -\frac{2\nu_{\text{ext},\rho'}[M - \nu_{\text{ext},z}r(2M - r)\cos\theta]\sin\theta}{\sqrt{r(2M - r)}} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} &+ (\nu_{\text{ext},z}^2 + \nu_{\text{ext},\rho'}^2)(M - r)\sin^2\theta, \\ \lambda_{\text{ext},\theta} &= -[2M\nu_{\text{ext},z} - r(2M - r)(\nu_{\text{ext},z}^2 + \nu_{\text{ext},\rho'}^2)\cos\theta] \\ &+ 2(M - r)\sqrt{r(2M - r)}\nu_{\text{ext},z}\nu_{\text{ext},\rho'}\sin\theta. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Tyto rovnice pak využijeme k výpočtu λ_{ext} v celé oblasti pod horizontem a znalost λ_{ext} na horizontu. Speciálně nás nyní bude zajímat chování v okolí fyzikální singularity, tedy na $r \rightarrow 0$. Limitu k fyzikální singularitě budeme vždy značit

$$\lim_{r \rightarrow 0} A(r, \theta) \equiv A|_{\text{S}}^{(\theta)}. \quad (3.59)$$

Hodnotu λ_{ext} spočítáme nejdříve integrací od horizontu k singularitě podél úsečky $\theta = 0$ a $r \in (2M, 0)$, tedy podél osy symetrie od horizontu k fyzikální singularitě. V limitě $\theta \rightarrow 0$ se podstatně zjednoduší rovnice (3.57), na

$$\lambda_{\text{ext},r}^{(\theta=0)} = 0. \quad (3.60)$$

Podél osy symetrie je tedy hodnota λ_{ext} konstantní. Přímo na fyzikální singularitě pak dopočítáme hodnotu λ_{ext} v závislosti na směru podle rovnice (3.58). Tato rovnice přejde v limitě $r \rightarrow 0$ na rovnici

$$\lambda_{\text{ext},\theta}|_{\text{S}}^{(\theta)} = -2\nu_{\text{ext},z}|_{\text{S}}^{(\theta)}M\sin\theta. \quad (3.61)$$

Zbývá vyjádřit $\nu_{\text{ext},z}|_{\text{S}}^{(\theta)}$. Z transformace (3.48) vidíme, že při $r = 2M$ a $r = 0$ se zobrazujeme na stejné hodnoty ρ a souřadnice z pouze změní znaménko. O samotné funkci ν_{ext} víme, že je sudá vůči z . Díky tomu můžeme psát

$$\nu_{\text{ext}}|_{\text{S}}^{(\theta)} = \nu_{\text{ext}}|_{\text{H}}^{(\theta)}, \quad (3.62)$$

$$\nu_{\text{ext},z}|_{\text{S}}^{(\theta)} = -\nu_{\text{ext},z}|_{\text{H}}^{(\theta)}. \quad (3.63)$$

Zmíníme dále, že na horizontu (v limitě $r \rightarrow 2M$) přejde (3.58) na

$$\lambda_{\text{ext},\theta}|_{\text{H}}^{(\theta)} = -2\nu_{\text{ext},z}|_{\text{H}}^{(\theta)}M\sin\theta. \quad (3.64)$$

Tím z (3.61), (3.63) a (3.64) dostáváme rovnost

$$\lambda_{\text{ext},\theta}|_{\text{S}}^{(\theta)} = -\lambda_{\text{ext},\theta}|_{\text{H}}^{(\theta)}. \quad (3.65)$$

Nyní díky konstantnímu λ_{ext} na ose symetrie (3.60) plyne z (3.65) a (3.13) důležitý výsledek

$$\lambda_{\text{ext}}|_{\text{S}}^{(\theta)} = -2\nu_{\text{ext}}|_{\text{H}}^{(\theta)} + 2\nu_{\text{ext}}|_{\text{H}}^{(\theta=0)} = \frac{2m}{\sqrt{b^2 + M^2 \cos^2 \theta}} - \frac{2m}{\sqrt{b^2 + M^2}}. \quad (3.66)$$

Nakonec můžeme ještě upřesnit singulární chování Kretschmannova skaláru. Po provedení transformace výrazu (3.54) do souřadnic (r, θ) podle (3.48) a dosazením za $\nu = \nu_{\text{S}} + \nu_{\text{ext}}$ z (3.50) dostáváme v okolí $r = 0$ rozvoj

$$\begin{aligned} I_{2,2} &= \frac{48M^2}{r^6} \exp(12\nu_{\text{in}}|_{\text{H}}^{(\theta)} - 8\nu_{\text{in}}|_{\text{H}}^{(\theta=0)}) + O(r^{-5}) \\ &= \frac{48M^2}{r^6} \exp\left(-\frac{12m}{\sqrt{b^2 + M^2 \cos^2 \theta}} + \frac{8m}{\sqrt{b^2 + M^2}}\right) + O(r^{-5}). \end{aligned} \quad (3.67)$$

3.8 Analýza metriky pod horizontem

Nyní přejdeme k analýze metriky (3.52), (3.49). Na obrázcích 3.3–3.6 je vykreslen průběh $\sqrt{g_{tt}}$ (v logaritmické škále) pro různě vzdálené Bachovy–Weylovy prstence. Obrázky představují průběh v rovině (r, θ) , tedy v rovině procházející osu symetrie, která vede horizontálně rovnoběžně k obrázkům. Fyzikální singularita se nachází v počátku souřadnic jako bodová.

Dále zobrazíme Kretschmannův invariant pro různě hmotné prstence na obrázcích 3.7–3.10, které zobrazujeme ve škále definované

$$f(x) = xH(\epsilon - x) + (7\epsilon - 6\epsilon^{7/6})H(-\epsilon + x), \quad (3.68)$$

kde volíme $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$. Tato škála kompenzuje fakt, že Kretschmannův invariant klesá přibližně se šestou mocninou vzdálenosti od fyzikální singularity a nízké hodnoty ($R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} < \epsilon$) zobrazuje lineárně.

Za zmínku stojí fakt, že pro dostatečně hmotné prstence vzniká uvnitř horizontu oblast záporných křivosti. Samotný výraz Kretschmannova invariantu je pro analytické vyjádření oblasti, kde dochází ke změně znaménka, příliš komplikovaný. Podmínku, pro jaké hodnoty hmotnosti prstence m tyto oblasti vznikají, však analyticky vyjádřit můžeme. Využijeme rovnosti

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 12\mathcal{R}^2, \quad (3.69)$$

platné na horizontu [4]. \mathcal{R} značí Gaussovu křivost horizontu (jakožto 2D plochy), kterou můžeme vyjádřit [13]

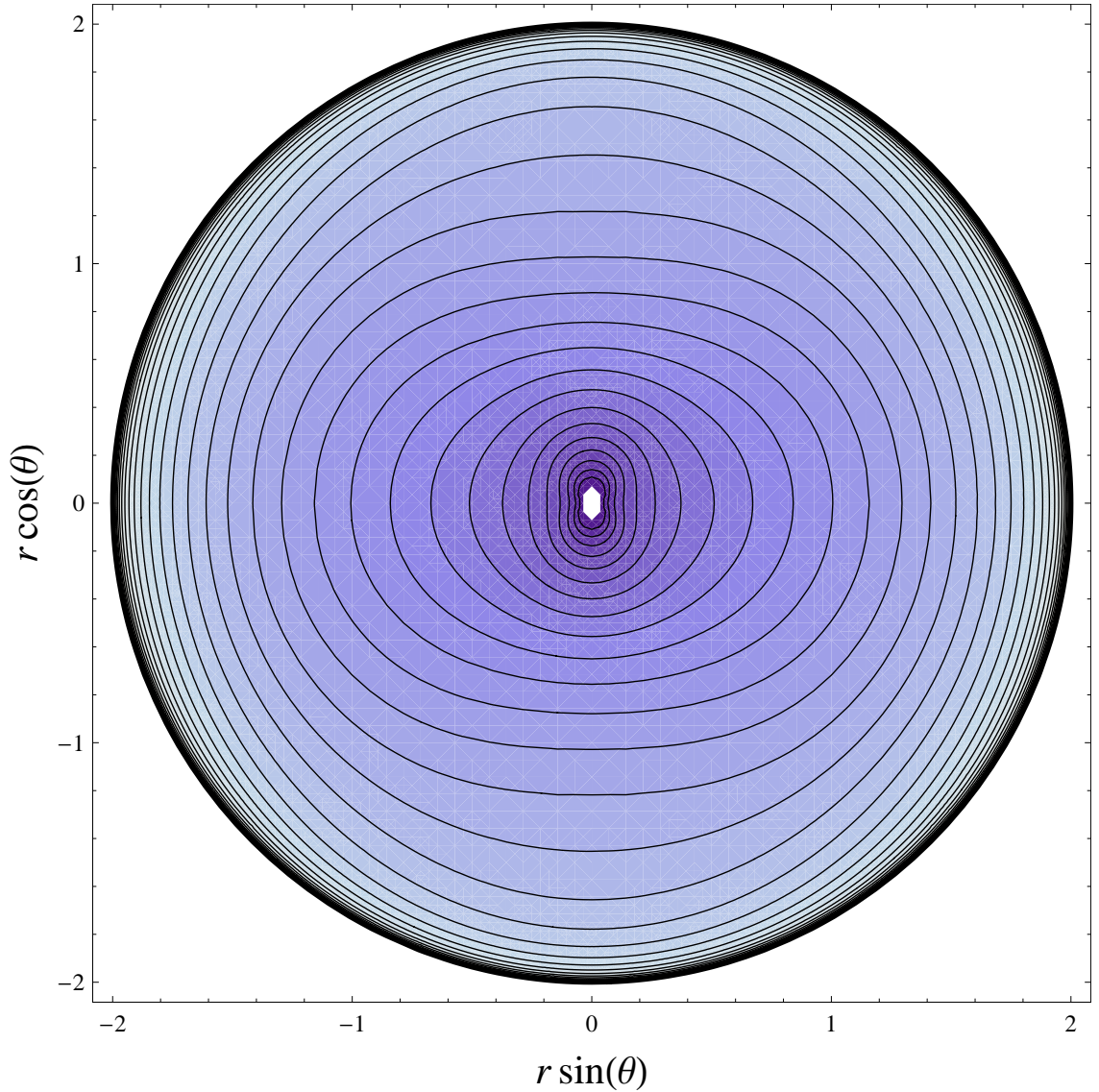
$$\mathcal{R}|_{\text{H}}^{(\theta)} = \frac{1 + 3\nu_{\text{ext},\theta}|_{\text{H}}^{(\theta)} \cot \theta + \nu_{\text{ext},\theta\theta}|_{\text{H}}^{(\theta)} - 2(\nu_{\text{ext},\theta}|_{\text{H}}^{(\theta)})^2}{4M^2 e^{2\nu_{\text{ext}}|_{\text{H}}^{(\theta)} - 4\nu_{\text{ext}}|_{\text{H}}^{(\theta=0)}}}. \quad (3.70)$$

Díky identitě (3.69) je přítomnost oblastí záporného Kretschmannova invariantu pod horizontem spojena s tím, že na horizontu existují místa, kde lze splnit $\mathcal{R} = 0$. Můžeme předpokládat, že mezní případ splnění rovnosti $\mathcal{R} = 0$ nastává na ose, kdy $(\theta = 0$ nebo $\theta = \pi)$. Při tomto dosazení dostáváme podmínku

$$m > \frac{(M^2 + b^2)^{3/2}}{4M^2}. \quad (3.71)$$

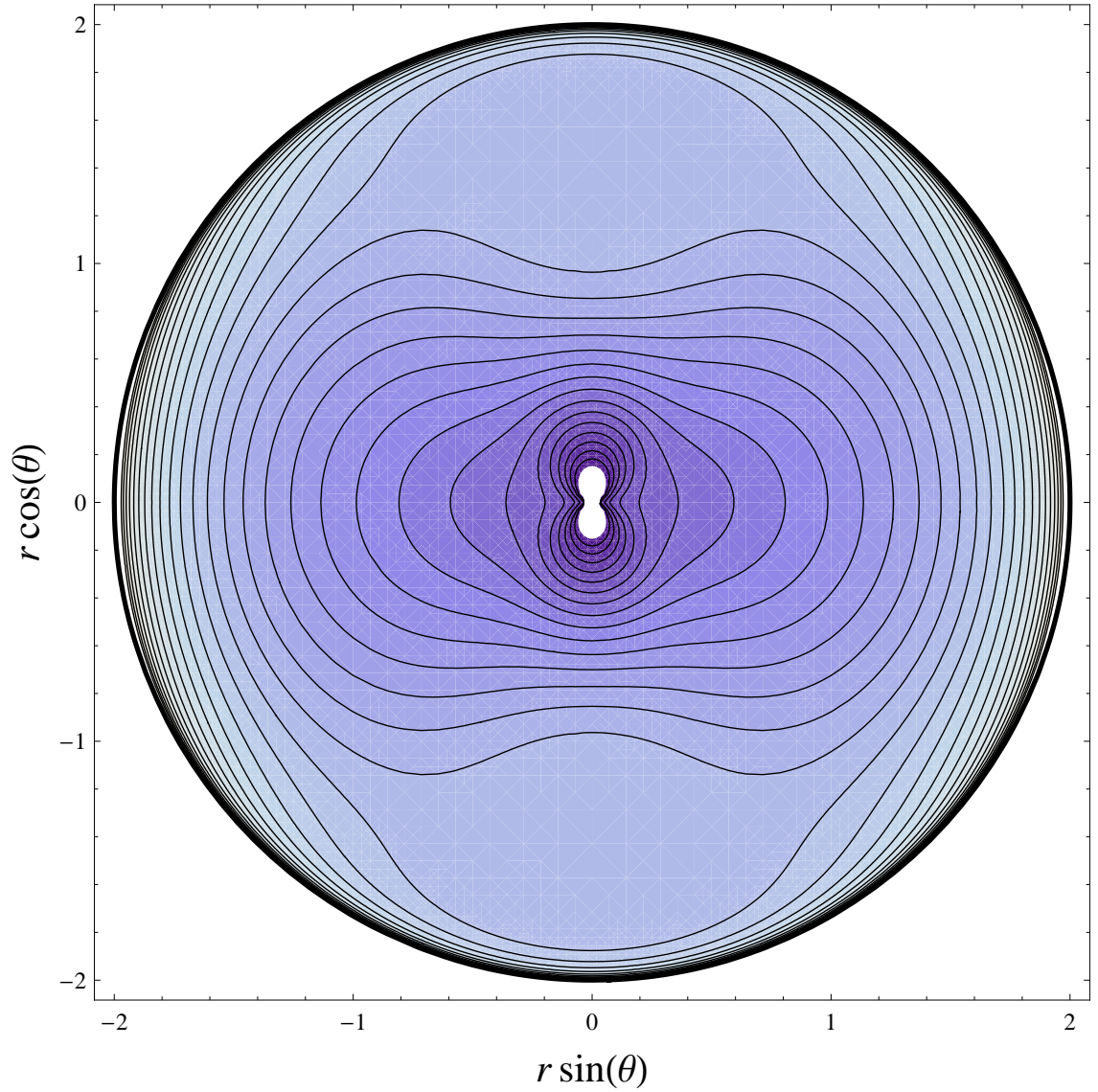
Tato nerovnost je podmínkou existence oblastí záporných křivosti pod horizontem¹⁴.

¹⁴Tuto podmínku lze vyhodnotit jako dostačující, ale přísně vzato nemusí být podle zmíně-

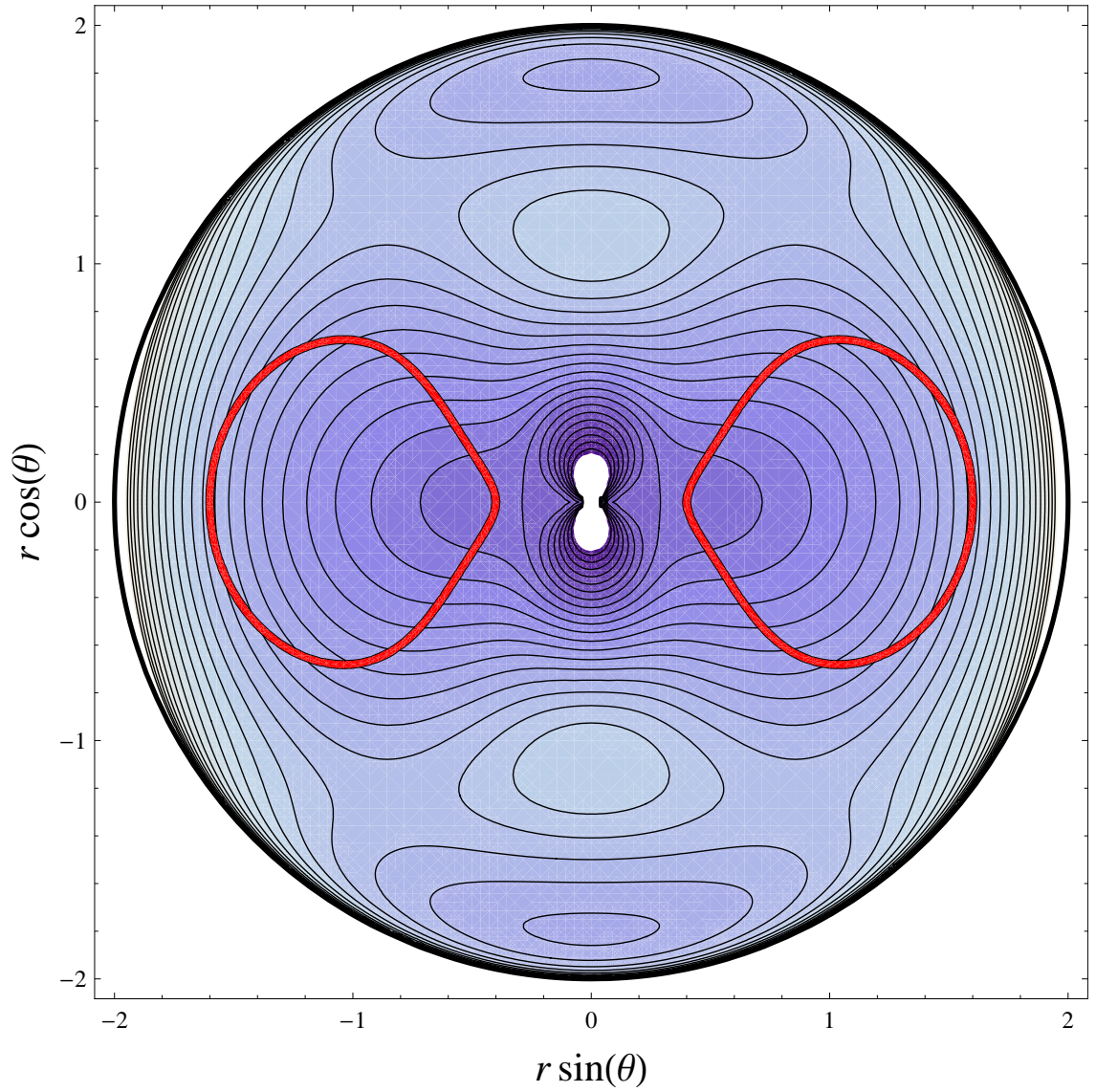


Obrázek 3.3: Lapse funkce $\sqrt{g_{tt}}$ uvnitř horizontu Schwarzschildovy černé díry o hmotnosti $M = 1$, obklopené Bachovým–Weylovým prstencem o parametrech $m = 5$, $b = 1.5$ v logaritmické škále $\ln(\sqrt{g_{tt}})$. Tmavší oblasti odpovídají větším hodnotám.

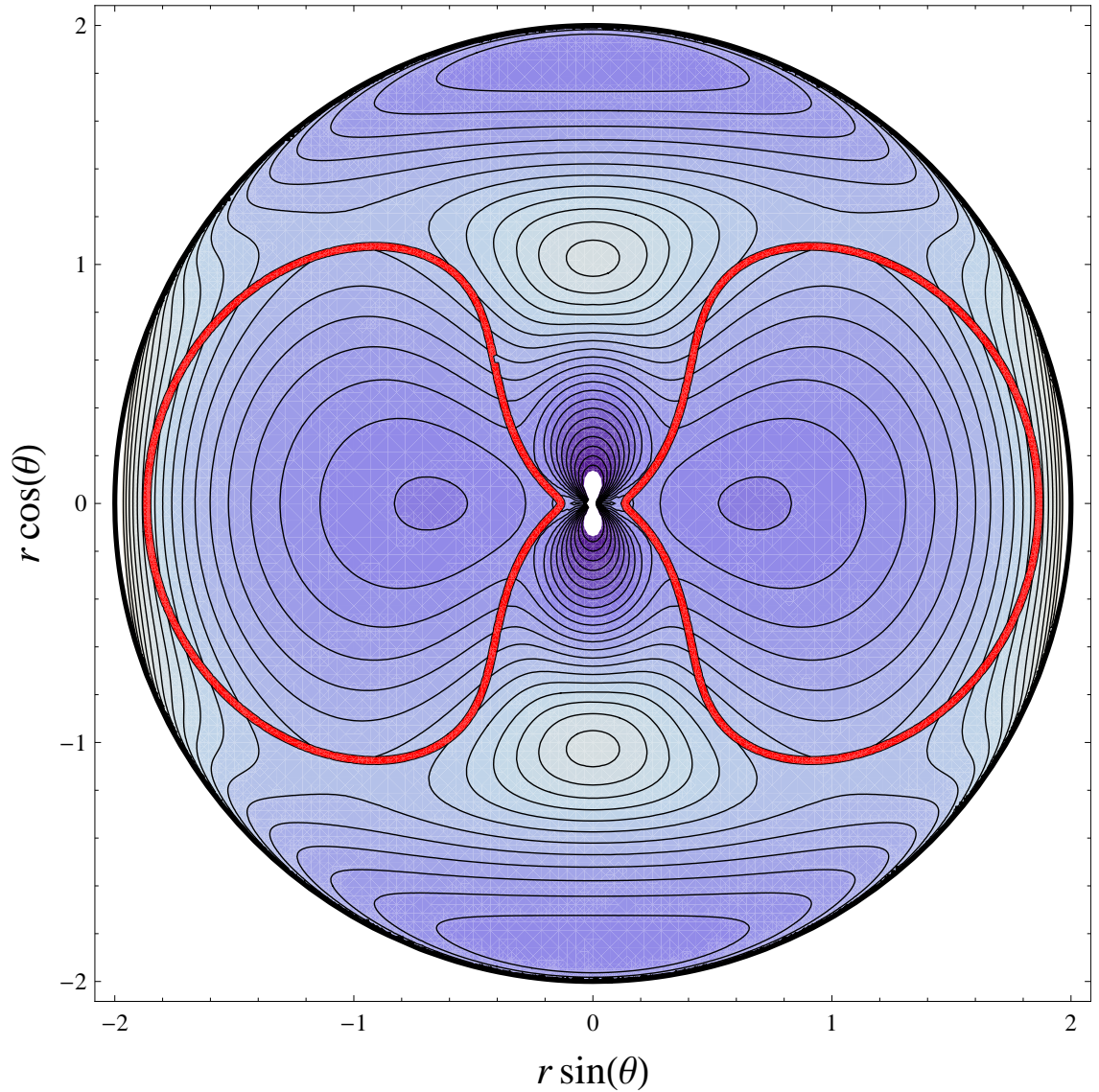
ných argumentů nutná. Předpokládáme zde, že oblast záporných křivostí uvnitř horizontu se bude vždy dotýkat horizontu. Tento předpoklad ponecháme bez důkazu. Pro jeho objasnění bychom museli přímo zkoumat rovnici $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ uvnitř horizontu. O tom, jak se chovají oblasti záporných křivostí, se přesvědčujeme na sérii obrázků 3.7–3.10.



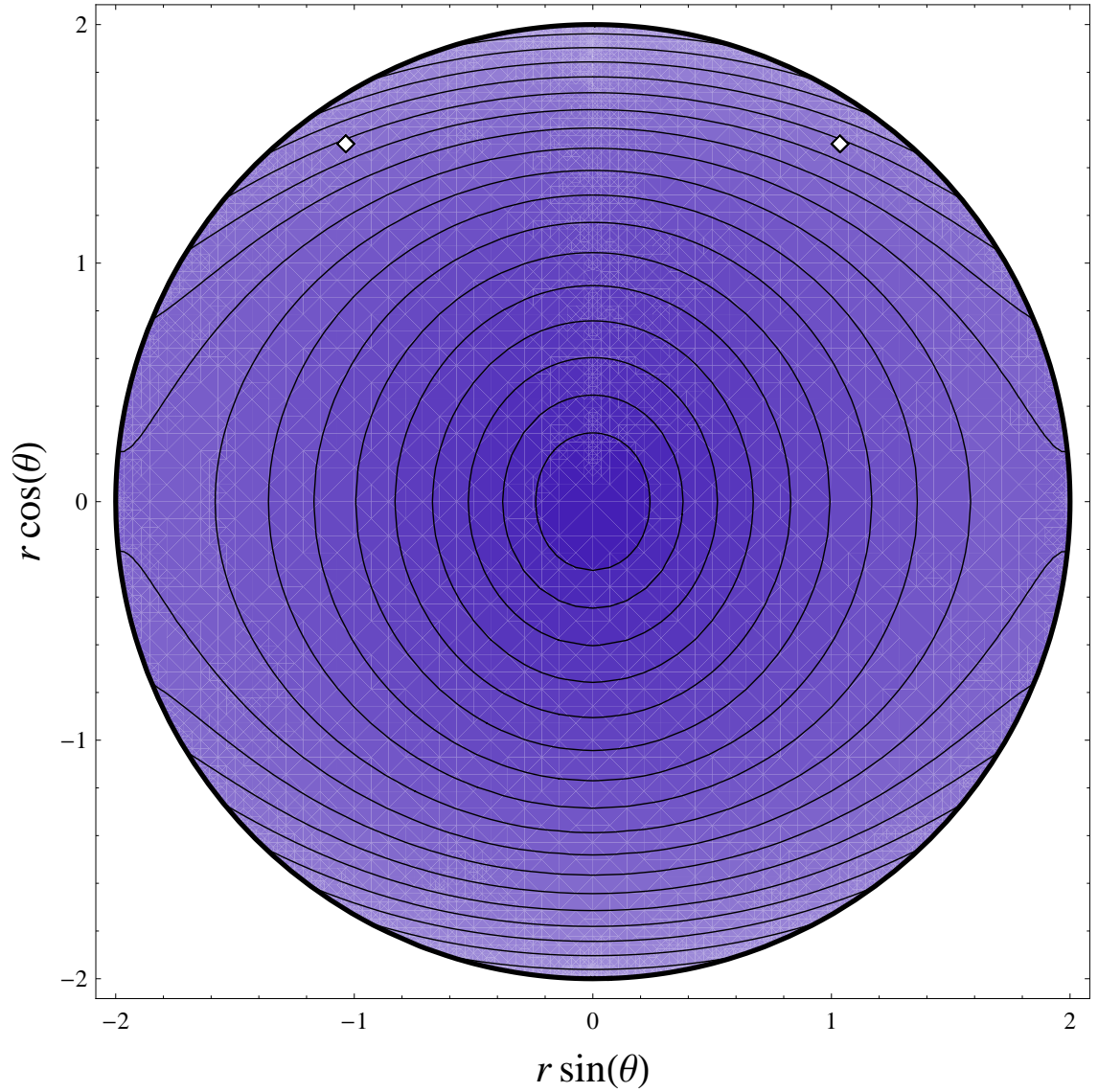
Obrázek 3.4: Lapse funkce $\sqrt{g_{tt}}$ uvnitř horizontu Schwarzschildovy černé díry o hmotnosti $M = 1$, obklopené Bachovým–Weylovým prstencem o parametrech $m = 5$, $b = 1$ v logaritmické škále $\ln(\sqrt{g_{tt}})$. Tmavší oblasti odpovídají větším hodnotám.



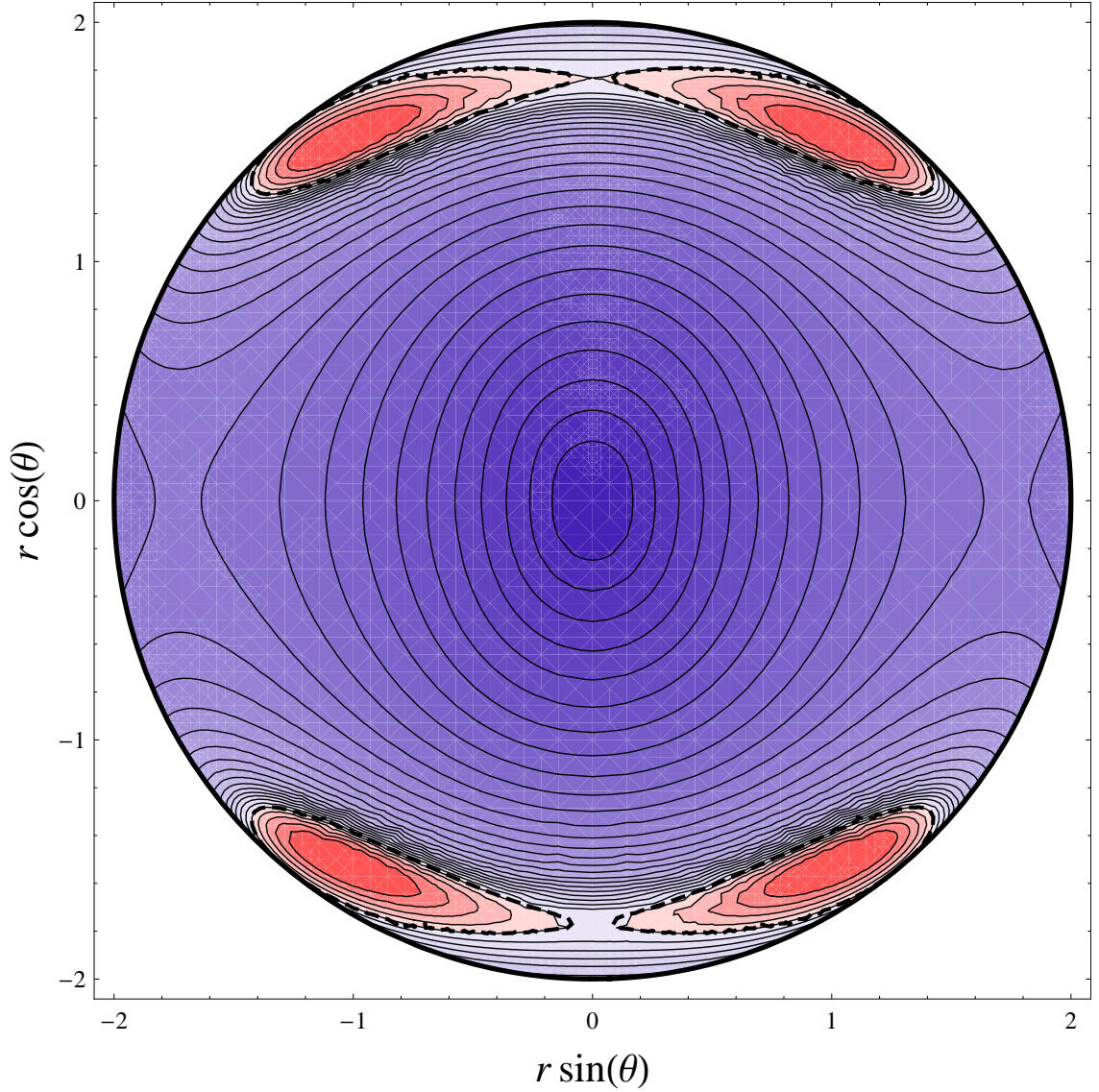
Obrázek 3.5: Lapse funkce $\sqrt{g_{tt}}$ uvnitř horizontu Schwarzschildovy černé díry o hmotnosti $M = 1$, obklopené Bachovým–Weylovým prstencem o parametrech $m = 5$, $b = 0.8$ v logaritmické škále $\ln(\sqrt{g_{tt}})$. Červenou čarou je zvýrazněna hranice napojení ν_{new} na ν_{BW} v ν_{ext} . Tmavší oblasti odpovídají větším hodnotám.



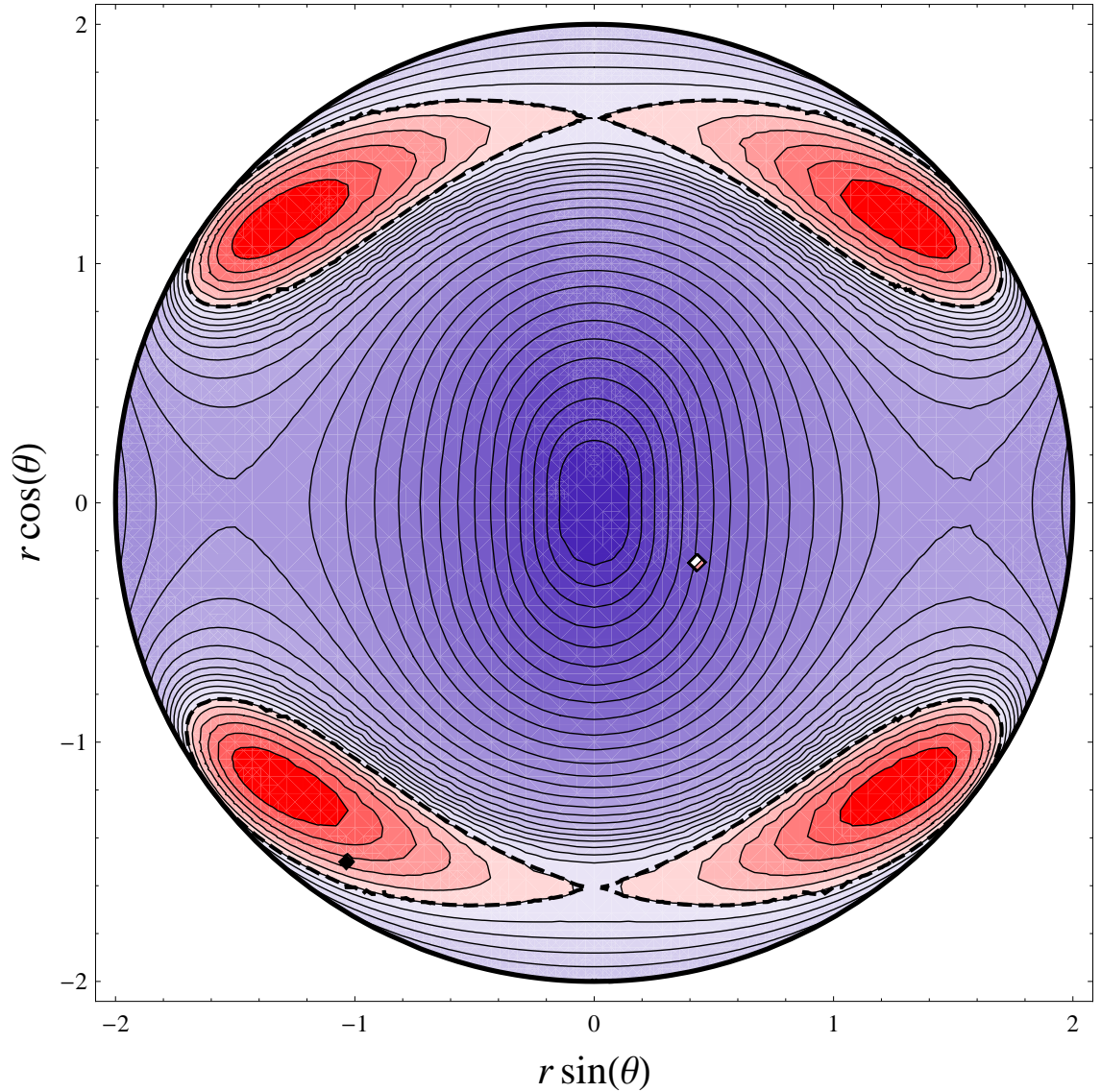
Obrázek 3.6: Lapse funkce $\sqrt{g_{tt}}$ uvnitř horizontu Schwarzschildovy černé díry o hmotnosti $M = 1$, obklopené Bachovým–Weylovým prstencem o parametrech $m = 5$, $b = 0.5$ v logaritmické škále $\ln(\sqrt{g_{tt}})$. Červenou čarou je zvýrazněna hranice napojení ν_{new} na ν_{BW} v ν_{ext} . Tmavší oblasti odpovídají větším hodnotám.



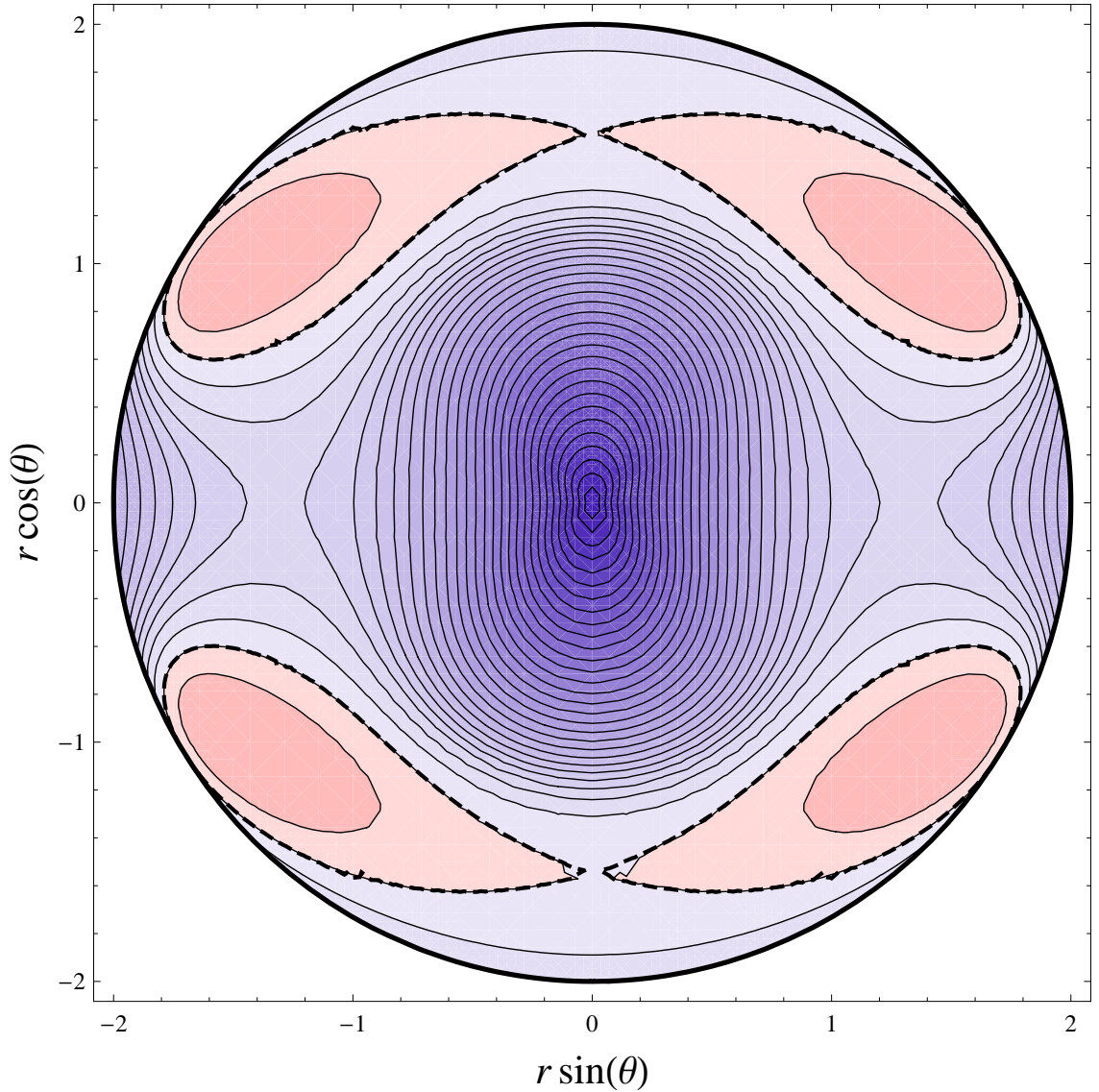
Obrázek 3.7: Kretschmannův skalár $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ uvnitř horizontu Schwarzschildovy černé díry o hmotnosti $M = 1$, obklopené Bachovým–Weylovým prstencem o parametrech $m = 1$, $b = 1.5$. Tmavší odstín odpovídá větším kladným hodnotám.



Obrázek 3.8: Kretschmannův skalár $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ uvnitř horizontu Schwarzschildovy černé díry o hmotnosti $M = 1$, obklopené Bachovým–Weylovým prstencem o parametrech $m = 2$, $b = 1.5$. Tmavší modré části odpovídají vyšším kladným hodnotám a tmavší červené části nižším záporným hodnotám invariantu. Přerušovaná čára vyznačuje oblast, kde se mění znaménko invariantu.



Obrázek 3.9: Kretschmannův skalár $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ uvnitř horizontu Schwarzschildovy černé díry o hmotnosti $M = 1$, obklopené Bachovým–Weylovým prstencem o parametrech $m = 3$, $b = 1.5$. Tmavší modré části odpovídají vyšším kladným hodnotám a tmavší červené části nižším záporným hodnotám invariantu. Přerušovaná čára vyznačuje oblast, kde se mění znaménko invariantu.



Obrázek 3.10: Kretschmannův skalár $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ uvnitř horizontu Schwarzschildovy černé díry o hmotnosti $M = 1$, obklopené Bachovým–Weylovým prstencem o parametrech $m = 4$, $b = 1.5$. Tmavší modré části odpovídají vyšším kladným hodnotám a tmavší červené části nižším záporným hodnotám invariantu. Přerušovaná čára vyznačuje oblast, kde se mění znaménko invariantu.

4. Závěr

V této diplomové práci jsme na dvou třídách přesných obecně relativistických prostoročasů zkoumali, jak ovlivní pole černé díry přítomnost dalšího zdroje gravitace. První byla třída Majumdarových–Papapetrouových prostoročasů, odpovídající poli soustavy souhlasně nabitých extrémních černých děr, které jsou ve statické rovnováze díky přesné kompenzaci vzájemného gravitačního přitahování a elektrostatické repulze. My jsme uvažovali speciálně řešení se dvěma černými dírami, kdy je prostoročas navíc axiálně symetrický. V druhé části jsme se věnovali prostoročasům (původně) Schwarzschildovy černé díry obklopené koncentrickým tenkým prstencem, popsáním Bachovým-Weylovým řešením.

Vlastnosti prostoročasové geometrie jsme studovali na chování několika základních invariantů, získaných z metriky (funkce *lapse*) nebo z jejích prvních či druhých derivací (skalár nazývaný speciálně na horizontu povrchovou gravitací, resp. Kretschmannův skalár a případně stopa kvadrátu Ricciho tenzoru). Průběhy těchto skalárů jsme vykreslili na řadě obrázků, z nichž je také patrné, jak se tvar pole (či křivosti) mění se změnou parametrů systému, především pak s hmotností dodatečného zdroje. Zvláštní pozornost jsme věnovali deformaci geometrie uvnitř černé díry. V případě Majumdarova-Papapetrouova řešení jsme za tím účelem vyšli z rozšíření metriky pod horizont, které bylo popsáno v literatuře [5], [2], v případě řešení pro Schwarzschildovu černou díru s Bachovým-Weylovým prstencem jsme rozšíření pod horizont našli samostatně v analogii s postupem, který se používá pro izolovanou Schwarzschildovu černou díru.

Hlavní zajímavostí chování geometrie u Majumdarova-Papapetrouova řešení se dvěma černými dírami je zjištění, že horizonty obou děr zůstávají nezávisle na parametrech systému přesně sférické a i hodnoty všech významných invariantů nejsou sousední černou dírou nijak ovlivněny (jsou na celém horizontu stejné), ačkoli oblast pod horizontem ovlivněna sousední dírou je (a na rozdíl od samotného horizontu sféricky symetrická není). Jedná se patrně o chování typické právě jen pro extrémní horizonty.

V případě Schwarzschildovy černé díry obklopené Bachovým-Weylovým prstencem jsme metriku uvnitř horizontu získali slepením dvou map. První jsme obdrželi přechodem k ryze imaginární radiální Weylově souřadnici. Druhou, potřebnou tam, kde první nebyla dobře definována, jsme obdrželi přepisem příslušné polní rovnice do tvaru dvourozměrné vlnové rovnice se středovou symetrií a okrajovými podmínkami danými poměry na horizontu. Obě mapy na sebe hladce navazují. Ukázalo se každopádně, že druhou mapu je třeba použít jen v případě, kdy se prstenec nalézá pod světelnou kruhovou orbitou prostoročasu. (Takový prstenec však již není příliš fyzikální, minimálně jej nelze interpretovat pomocí kontrarotujících geodetických proudů.) Z postupu je zřejmé, že rozšíření metriky by fungovalo i pro jiný (pravděpodobně libovolný) vnější statický a axiálně symetrický zdroj. Speciálně jsme se zaměřili na chování invariantů na horizontu a v centrální singularitě a odvodili příslušné analytické průběhy (také ty jsou zřejmě univerzální a nezávislé na detailech vnějšího zdroje). Geometrie uvnitř černé díry se ukázala být prstencem znatelně ovlivněna, a to i v bezprostřední blízkosti centrální singularity, tato singularita však každopádně zůstává bodovou.

Poněkud překvapivým je zjištění, že Kretschmannův skalár, ačkoli je „kvadra-

tický“, může v některých oblastech nabývat záporných hodnot. Takové oblasti se vyskytují např. i v Kerrově prostoročasu; autor článku [6] v té souvislosti hovoří dokonce o „novém typu záporné prostoročasové křivosti, kterou nelze pochopit pomocí ničeho dosud známého“. V práci [3] jsou oblasti záporného Kretschmannova skaláru interpretovány střízlivěji jako „oblasti gravitomagnetické dominance“ v analogii s chováním invariantů elektromagnetického pole. V této souvislosti je ovšem zajímavý zjištěný výskyt takovýchto oblastí v námi studovaném prostoročasu (původně) Schwarzschildovy černé díry obklopené tenkým prstencem, poněvadž zde se jedná o prostoročas *statický*, tedy takový, v němž se gravitomagnetické efekty nevyskytují.

Na závěr je třeba upozornit, že všechny předložené obrázky sice ukazují průběhy invariantů, avšak v *souřadnicovém* zobrazení zkoumaného prostoročasu, takže není možno z nich přímo usuzovat na „skutečný tvar“ geometrie. Za tím účelem by bylo třeba průběhy vykreslit „v řeči vlastních vzdáleností“, tj. provést izometrické vnoření získaných izočar do eukleidovské roviny.

Literatura

- [1] Basovník M.: *Prostorčas uvnitř černých děr*, bakalářská práce, Praha (2010).
- [2] Chandrasekhar S.: *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford Univ. Press, New York (1983), kap. 113.
- [3] Cherubini C., Bini D., Capozziello S., Ruffini R., Fang L. Z.: *Second order scalar invariants of the Riemann tensor*, Int. J. Mod. Phys. D **11** (2002), 827-841.
- [4] Frolov V. P., Shoom A. A.: *Interior of distorted black holes*, Phys. Rev. D **76** (2007), 064037.
- [5] Hartle J. B., Hawking S. W.: *Solutions of the Einstein–Maxwell equations with many black holes*, Commun. Math. Phys **26** (1972), 87–101.
- [6] Henry R. C.: *Kretschmann scalar for a Kerr–Newman black hole*, Astrophys. J. **535** (2000), 350-353.
- [7] Kruskal M. D.: *Maximal extension of Schwarzschild metric*, Phys. Rev. **119** (1960), 1743-1745.
- [8] Martín-García J. M., Portugal R., Manssur L. R. U.: *The invar tensor package*, Comp. Phys. Commun. **177** (2007), 640–648.
- [9] Michell J.: Letter to Henry Cavendish (Thornhill, May 26, 1783), Philos. Trans. R. Soc. London **74** (1783), 35-57.
- [10] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.: *Gravitation*, Freeman, San Francisco (1973).
- [11] Semerák O.: *K některým vlastnostem polí černých děr*, doktorská disertační práce, Praha (2009).
- [12] Semerák O., Zellerin T., Žáček M.: *The structure of superposed Weyl fields*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **308** (1999), 691–704.
- [13] Semerák O., Zellerin T., Žáček M.: *Erratum: The structure of superposed Weyl fields*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **322** (2001), 207–208.