Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ondřej Sojka

Laplaceova transformace a lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: obecná matematika

Praha 2012

Na tomto místě bych rád poděkoval zejména svému vedoucímu, panu RNDr. Tomáši Bártovi, Ph.D., za zapůjčení potřebné literatury, ochotu a za cenné rady. Dále bych chtěl poděkovat své rodině za poskytnuté zázemí a svým přátelům za projevenou podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 24. května 2012 Ondřej Sojka

Název práce: Laplaceova transformace a lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Autor: Ondřej Sojka

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D., katedra matematické analýzy

Abstrakt: V práci je zavedena Laplaceova transformace, jsou ukázány její nejzásadnější vlastnosti jako jsou oblast konvergence, posunutí, škálování, převod konvoluce na součin či její vztah k diferenciálnímu počtu, a nastíněn problém inverzní Laplaceovy transformace, zejména její jednoznačnost. Obě transformace jsou ilustrovány na nejběžnějších funkcích. Dále se práce věnuje konkrétní aplikaci Laplaceovy transformace na obyčejné lineární diferenciální rovnice vyššího řádu s konstantními koeficienty s poznámkou o lineárních soustavách rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty.

Klíčová slova: Laplaceova transformace, inverzní Laplaceova transformace, diferenciální rovnice, konstantní koeficienty

Title: Laplace transform and linear differential equations with constant coefficients

Author: Ondřej Sojka

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: This thesis introduces the Laplace transform along with the most important properties such as the region of convergence, translation theorems, scaling, conversion of convolution to multiplication or its relation to differential calculus. There is also outlined the problem of the inverse Laplace transform, especially its uniqueness. Both transforms are illustrated on the most common functions. Further a particular application on higher-order ordinary linear differential equations with constant coefficients is explored with remark about systems of first-order ordinary linear differential equations with constant coefficients.

Keywords: Laplace transform, inverse Laplace transform, differential equations, constant coefficients

Obsah

Úvod

Laplaceova transformace patří mezi nejvýznamnější integrální transformace a společně s Fourierovou transformací tvoří silné a běžně užívané výpočetní prostředky v oblasti matematiky, fyziky či inženýrství. V této práci si přiblížíme Laplaceovu transformaci a předvedeme její aplikaci na obyčejné diferenciální rovnice. Nejprve se ale podívejme na integrální transformace obecně.

Integrální transformaci funkce $f(t)$ definovanou na $a \leq t \leq b$ budeme značit $\mathcal{I}(f(t))$ a definovat předpisem

$$\mathcal{I}(f(t)) = \int_a^b K(t,s) f(t) \, \mathrm{d}t,$$

kde $K(t,s)$, daná funkce dvou proměnných, se nazývá jádro transformace. Tato definice může být ještě rozšířena pro vektorové proměnné. Různé integrální transformace jsou vytvářeny různými volbami jádra a krajních mezí intervalu, přes který integrujeme. Kupříkladu pro Fourierovu transformaci za jádro volíme $K_{\mathcal{F}}(t,s) = \dfrac{e^{-\mathrm{i}st}}{\sqrt{2\pi}}$ a integrujeme přes celou reálnou osu, pro Laplaceovu transformaci za jádro volíme funkci $K_{\mathcal{L}}(t,s) = e^{-st}$ a integrujeme přes kladnou poloosu. V této práci nás tedy budou zajímat integrály typu

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Laplaceova transformace patří mezi historicky první integrální transformace. Mezi první matematiky zkoumajícími integrální transformace patřili A. L. Cauchy, S. D. Poisson či J. L. Lagrange - nicméně byl to právě francouzský matematik Pierre Simon Laplace, kdo představil Laplaceovu transformaci přibližně v 80. letech 18. století a ve své knize *La Théorie Analytique des Probabilites, 1812* ji pak zmínil včetně několika základních výsledků. Zásluhu na využívání integrálních transformací pak má ještě britský matematik Oliver Heaviside, který Laplaceovu transformaci velmi zpopularizoval při řešení obyčejných diferenciálních rovnic v elektrických obvodech a systémech. Velké množství informací o integrálních transformacích je možné najít v knize D. Bhatty a L. Debnatha [2].

Pro pochopení práce stačí základní znalosti z oblasti reálné a komplexní analýzy a základy teorie míry. Nejdůležitější pojmy ještě zopakujeme v první kapitole.

1. Definice a značení

Začneme sérií definic vedoucích k pojmu tzv. obecného Lebesgueova integrálu.

Definice. *Řekneme, že funkce s je* jednoduchá, *existují-li čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ a měřitelné množiny $M_1, \dots, M_n$ takové, že*

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{M_i}$$

kde χ_A značí charakteristickou funkci množiny A.

Definice. *Buďte $M, M_1, \dots, M_n$ měřitelné množiny, s jednoduchá funkce daná předpisem $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{M_i}$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.* Lebesgueův integrál *jednoduché funkce definujeme předpisem*

$$\int_M s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(M \cap M_i),$$

kde $\lambda(A)$ značí Lebesgueovu míru množiny A. Dále buď f nezáporná měřitelná funkce na M, pak definujeme

$$\int_M f = \sup\{\int_M s,\ 0 \leq s \leq f,\ s \text{ jednoduchá}\}.$$

Nakonec pro f měřitelnou funkci na M definujeme

$$\int_M f = \int_M f^+ - \int_M f^-,$$

pokud je alespoň jeden integrál na pravé straně konečný. Zde označujeme

$$f^+ = \max\{f, 0\},\ f^- = \max\{-f, 0\}.$$

Jiný přístup k definici obecného Lebesgueova integrálu je možné najít například v J. Malý [5], kde je k dispozici rozsáhlejší teorie. V tomto textu se jí dále zabývat nebudeme. Pro účel Laplaceovy transformace se sluší dodat, že pokud je množinou M interval (a, b), integrál se obvykle zapisuje ve tvaru

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Další podstatnou vlastností je absolutní konvergence Lebesgueova integrálu. Ta představuje jisté omezení - zmíníme se o něm později.

Definice. *Řekneme, že funkce f je na množině E z třídy $\mathrm{L^p}(E)$, pokud pro $p \in [1, \infty)$ platí*

$$\int_E |f(t)|^p\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Řekneme, že funkce f je na množině E z třídy $\mathrm{L^p_{loc}}(E)$, pokud pro $p \in [1, \infty)$ a každou kompaktní množinu $K \subseteq E$ platí

$$\int_K |f(t)|^p\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Poznámka. V důsledku našich potřeb v této práci budeme $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}([0,\infty))$ zkracovat na L^{p} a obdobně $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ na $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{loc}}$

Definice. *Nechť jsou f, $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$. Jejich* konvolucí $(f * g)$ *budeme rozumět*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Značení. *Pro komplexní číslo z zavedeme značení $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$, kde $\mathrm{Re}(z)$ značí reálnou a $\mathrm{Im}(z)$ imaginární část čísla z.*

Definice. *Je-li komplexnímu číslu $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$ přiřazeno nějakým předpisem f nejvýše jedno komplexní číslo $w = u + \mathrm{i}v$, $u, v \in \mathbb{R}$ řekneme, že f je* komplexní funkcí komplexní proměnné z *a píšeme*

$$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y).$$

Definice. *Řekneme, že $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ je* komplexní funkce reálné proměnné *a píšeme*

$$f(t) = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f).$$

Dále se f nazývá měřitelná, pokud jsou funkce $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ měřitelné. Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ měřitelná množina a f komplexní měřitelná funkce na M. Pak Lebesgueův integrál komplexní funkce reálné proměnné definujeme vztahem

$$\int_M f = \int_M \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i} \int_M \mathrm{Im}(f).$$

2. Laplaceova transformace

Definice. *Definujme množinu*

$$\mathrm{L}^1_+ = \left\{ f : [0,\infty) \to \mathbb{C} \text{ měřitelná: } \exists c \in \mathbb{R} : \int_0^\infty e^{-ct}|f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

Dále pro f měřitelnou definujme abscisu konvergence

$$c_f = \inf\left\{ c \in \mathbb{R};\ \int_0^\infty e^{-ct}|f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

Tedy $f \in \mathrm{L}^1_+$ pokud $c_f \neq \infty$.

Poznámka. Zřejmě $\mathrm{L}^1 \subset \mathrm{L}^1_+ \subset \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$. Navíc $1 \in \mathrm{L}^1_+$, $1 \notin \mathrm{L}^1$ a $e^{t^2} \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$, $e^{t^2} \notin \mathrm{L}^1_+$.

Definice. *Nechť je funkce $f \in \mathrm{L}^1_+$, pak její* Laplaceovou transformací *rozumíme funkci F, $D(F) = \{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(s) > c_f\}$, definovanou předpisem*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Značení. *Integrál z rovnice (1) budeme nazývat* Laplaceův integrál*, funkci f* předmětem *a funkci F* obrazem*. Laplaceovu transformaci budeme značit symbolem $\mathcal{L}$, tedy*

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s).$$

Poznámka.

1. V našem pojetí je tedy Laplaceova transformace zobrazení z množiny funkcí kladné reálné proměnné (typicky budeme značit t) do množiny funkcí komplexní proměnné (typicky budeme značit s). Jedním z cílů této kapitoly je jejich bližší specifikace.

2. Pro zpřehlednění budeme dále vynechávat argument s v zápisu $\mathcal{L}(f)(s)$, nebo naopak doplníme - z logického hlediska nesmyslný - argument funkce f v případě, že toto bude návodnější (např. $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$, odvodíme později).

Poznámka. Absolutní hodnota funkce f v definici množiny L^1_+ a abscisy konvergence je nutná pouze pro komplexní funkce. Pokud se bude jednat o funkce reálné, můžeme vzhledem k absolutní konvergenci Lebesgueova integrálu uvažovat i vzorec bez ní. Absolutní konvergence Lebesgueova integrálu totiž znamená, že

$$\int_0^\infty e^{-ct} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty \Longleftrightarrow \int_0^\infty |e^{-ct} f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Tento vztah nás limituje například pro funkci

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}e^{t^2}}, & 0 \leq t < \log\log 3 \\ (-1)^n e^{\frac{1}{2}e^{t^2}}, & \log\log n \leq t < \log\log(n+1) \end{cases}$$

jejíž "abscisa *neabsolutní* konvergence" je $c_f = -\infty$ a "abscisa *absolutní* konvergence" je $c_{|f|} = \infty$. Jelikož pracujeme s Lebesgueovým integrálem, platí $f \notin \mathrm{L}^1_+$. Absolutnost konvergence integrálů budeme dále jen tiše předpokládat. Tato ekvivalence neplatí například pro zobecněný Riemannův integrál, který má však jiné nedostatky.

2.1 Vlastnosti Laplaceovy transformace

2.1.1 Konvergence

Věta 2.1.1. *Laplaceova transformace funkce f je (absolutně) konvergentní v celé polorovině* $\mathrm{Re}(s) > c_f$.

Důkaz. Zvolme libovolné $s \in \mathbb{C}$ takové, že $\mathrm{Re}(s) > c_f$. K němu najděme $\varepsilon > 0$, aby $\mathrm{Re}(s) > c_f + \varepsilon$. Pak

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}(s)t} |f(t)| \,\mathrm{d}t \leq \int_0^\infty e^{-(c_f+\varepsilon)t} |f(t)| \,\mathrm{d}t < \infty.$$

□

Přestože je tato věta důležitá, stále nám nedává žádnou informaci o tom, jaké funkce patří do množiny L^1_+. Jednou takovou skupinou jsou tzv. *exponenciálně omezené* funkce.

Věta 2.1.2. *Nechť je $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ a existují konstanty $\alpha \in \mathbb{R}$ a $M \geq 0$ takové, že pro nějaké $t_0 > 0$ platí*

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \text{ pro skoro všechna } t > t_0.$$

Pak $f \in \mathrm{L}^1_+$ a pro její abscisu konvergence platí $c_f \leq \alpha_0$, kde

$$\alpha_0 = \inf\{\alpha \in \mathbb{R},\ \exists M \geq 0 : \ |f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \text{ pro skoro všechna } t > t_0\}.$$

Důkaz. Vezměme α, M, t_0 ze zadání věty a libovolné $s \in \mathbb{C}$, aby $\mathrm{Re}(s) > \alpha$. BÚNO můžeme předpokládat $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ pro všechna $t > t_0$. Pak

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| \,\mathrm{d}t &= \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}(s)t} |f(t)| \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{t_0} e^{-\mathrm{Re}(s)t} |f(t)| \,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^\infty e^{-\mathrm{Re}(s)t} |f(t)| \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

První integrál konverguje, neboť $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$, $[0, t_0]$ je kompakt a

$$\int_0^{t_0} e^{-\mathrm{Re}(s)t} |f(t)| \,\mathrm{d}t \leq C \int_0^{t_0} |f(t)| \,\mathrm{d}t < \infty,$$

kde $C \leq e^{-\mathrm{Re}(s)t}$ pro $t \in [0, t_0]$. Pro druhý integrál platí

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^\infty e^{-\mathrm{Re}(s)t} |f(t)| \,\mathrm{d}t &\leq M \int_{t_0}^\infty e^{(\alpha - \mathrm{Re}(s))t} \,\mathrm{d}t \\ &= M \lim_{\tau \to \infty} \left[\frac{e^{(\alpha - \mathrm{Re}(s))t}}{\alpha - \mathrm{Re}(s)} \right]_{t_0}^{\tau} \\ &= M \lim_{\tau \to \infty} \left(\frac{e^{(\alpha - \mathrm{Re}(s))t_0}}{\mathrm{Re}(s) - \alpha} - \frac{e^{(\alpha - \mathrm{Re}(s))t}}{\mathrm{Re}(s) - \alpha} \right) \\ &= \frac{M e^{(\alpha - \mathrm{Re}(s))t_0}}{\mathrm{Re}(s) - \alpha} < \infty.\end{aligned}$$

Celkově tedy máme (absolutní) konvergenci na množině $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > \alpha\}$. Platnost tvrzení o abscise konvergence je pak jasná z definic. □

Příklad. Uvažujme funkci $f(t) = 2te^{t^2}\cos(e^{t^2})$. Pak $f \in \mathrm{L}^1_+$, ale není exponenciálně omezená:
Je zřejmé, že f není exponenciálně omezená. Dále máme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) &= \int_0^\infty 2te^{-st}e^{t^2}\cos(e^{t^2})\,\mathrm{d}t \\ &= -\sin(1) + s\int_0^\infty e^{-st}\sin(e^{t^2})\,\mathrm{d}t \\ &= -\sin(1) + s\mathcal{L}\left(\sin(e^{t^2})\right),\end{aligned}$$

kde jsme použili integraci per-partes. Funkce $\sin(e^{t^2})$ je exponenciálně omezená ($\alpha_0 = 0$), tedy je prvkem množiny L^1_+ a $\mathcal{L}(f)$ konverguje pro nějaká $s \in \mathbb{C}$.

Tento příklad ilustruje, že exponenciální omezenost je postačující, nikoli nutnou podmínkou existence Laplaceovy transformace.

2.1.2 Základní vlastnosti

Věta 2.1.3. *Nechť f_1, $f_2 \in \mathrm{L}^1_+$ a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Pak existuje $\mathcal{L}(\alpha f_1 + \beta f_2)$ pro $\mathrm{Re}(s) > \max\{c_{f_1}, c_{f_2}\}$ a platí*

$$\mathcal{L}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha\mathcal{L}(f_1) + \beta\mathcal{L}(f_2).$$

Důkaz. Plyne okamžitě z definice Laplaceovy transformace a linearity integrálu. □

Věta 2.1.4. *Nechť $F(s) = \mathcal{L}(f)$. Pak $F(s-a) = \mathcal{L}(e^{at}f(t))$ pro $a \in \mathbb{R}$. Abscisa konvergence funkce $g = e^{at}f(t)$ je $c_g = c_f + a$.*

Důkaz. Počítejme

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(e^{at}f(t)).$$

Dále vezměme $c > c_f + a$ a definujme $d = c - a > c_f$. Pak

$$\int_0^\infty e^{-ct}e^{at}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(c-a)t}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-dt}f(t)\,\mathrm{d}t < \infty,$$

tedy $c_g \leq c_f + a$. Naopak nechť $c < c_f + a$ a $d = c - a < c_f$. Pak

$$\int_0^\infty e^{-ct}e^{at}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(c-a)t}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-dt}f(t)\,\mathrm{d}t = \infty,$$

jinak by vznikl spor s abscisou konvergence c_f. Tedy $c_g = c_f + a$. □

Věta 2.1.5. *Nechť $F(s) = \mathcal{L}(f)$ a nechť $a > 0$. Pak*

$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}),$$

a abscisa konvergence funkce $f_a(t) = f(at)$ je $c_{f_a} = ac_f$.

Důkaz. Počítejme

$$\mathcal{L}(f(at)) = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}at} f(at)\,a\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Zde jsme použili substituci $\tau = at$. Výraz za poslední rovností je požadovaný výsledek. Důkaz tvrzení o abscise konvergence se provede analogicky důkazu v předchozí větě. □

Poznámka. Předchozí dvě věty mohou být snadno rozšířeny a shrnuty do následujícího tvrzení. Pro $c > 0$ a $d \in \mathbb{C}$ platí

$$F(cs+d) = \frac{1}{c}\mathcal{L}\left(e^{-\frac{d}{c}t} f(\frac{t}{c})\right).$$

Abscisa konvergence funkce $g(t) = e^{-\frac{d}{c}t} f(\frac{t}{c})$ je $c_g = \dfrac{c_f - \mathrm{Re}(d)}{c}$.

Důkaz tvrzení pouze kopíruje předchozí dva a proto ho nebudeme uvádět. Najít ho lze například v knize G. Doetsche [3, str. 86].

Věta 2.1.6. *Pro $f \in \mathrm{L}^1_+$ definujme funkci f_1 následujícím předpisem:*

$$f_1(t) = \begin{cases} f(at-b), & at-b \geq 0 \\ 0, & at-b < 0 \end{cases}$$

Pak pro $a > 0$ je $f_1 \in \mathrm{L}^1_+$. Pokud $b \geq 0$, platí

$$\mathcal{L}(f_1)(s) = \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}s} \mathcal{L}(f)(\frac{s}{a}),$$

a v případě $b < 0$ platí

$$\mathcal{L}(f_1)(s) = \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}s} \left(\mathcal{L}(f)(\frac{s}{a}) - \int_0^{-b} e^{-\frac{s}{a}t} f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Funkce $\mathcal{L}(f_1)$ jsou konvergentní pro $\mathrm{Re}(s) > ac_f$, kde c_f je abscisa konvergence funkce f.

Důkaz. I tento důkaz je obdobný předchozím dvěma, proto uvedeme pouze hlavní kroky a detaily necháme na čtenáři. Počítejme:

$$\mathcal{L}(f_1) = \int_0^\infty e^{-st} f(at-b)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}s} \int_{-b}^\infty e^{-\frac{s}{a}t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Nyní odlišíme dva příklady ze znění věty. Nejprve pro $b \geq 0$ máme

$$\mathcal{L}(f_1) = \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}s} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}t} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}s} \mathcal{L}(f)(\frac{s}{a}),$$

v opačném případě pak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_1) &= \frac{1}{a}\, e^{-\frac{b}{a}s} \left(\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}t} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{-b} e^{-\frac{s}{a}t} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{a}\, e^{-\frac{b}{a}s} \left(\mathcal{L}(f)(\frac{s}{a}) - \int_0^{-b} e^{-\frac{s}{a}t} f(t)\,\mathrm{d}t\right). \end{aligned}$$

□

Velmi důležitou vlastností Laplaceovy transformace je převod konvoluce na součin. Tuto vlastnost oceníme později při řešení obyčejných diferenciálních rovnic s nenulovou pravou stranou.

Věta 2.1.7. *Nechť mají f, $g \in \mathrm{L}^1_+$ abscisu konvergence c. Pak pro $\mathrm{Re}(s) \geq c$ platí*

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g).$$

Důkaz. Začněme s pravou stranou rovnice

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) &= \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-s\sigma} g(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(\tau+\sigma)} f(\tau)\, g(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right) \mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Substituujme nyní $t = \tau + \sigma$ a všimněme si, že τ je ve vnitřním integrálu pevné (a tedy $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}t$). Pokud dále definujeme $g(t) = 0$ pro $t < 0$ získáme postupně

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) &= \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty e^{-st} f(\tau)\, g(t-\tau)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(\tau)\, g(t-\tau)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Díky předpokladům tento integrál konverguje a je tedy možné zaměnit pořadí integrace

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(\tau)\, g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-st} f(\tau)\, g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}t \\
&= \mathcal{L}(f * g).
\end{aligned}$$

□

2.1.3 Vztah k diferenciálnímu počtu

Poznámka. V následující kapitole se podíváme na vztah Laplaceovy transformace a operací diferenciálního počtu. Pro tyto účely se budeme bavit o absolutně spojitých funkcích. Pro f absolutně spojitou na intervalu $a \leq t \leq b$ existuje derivace skoro všude a platí

$$f(t) = \int_a^t f'(s)\,\mathrm{d}s, \ \forall t : a \leq t \leq b.$$

Věta 2.1.8. *Nechť $f \in \mathrm{L}^1_+$ a pro funkci komplexní proměnné F platí $\mathcal{L}(f) = F(s)$. Pak je F holomorfní na $\{s \in \mathbb{C},\ s > c_f\}$.*

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení je možné najít v knize G. Doetsche [3, str. 144], kde vychází z aproximací integrálu na konečných intervalech a následného použití Weierstrassovy věty. $\square$

Věta 2.1.9. *Je-li $f \in \mathrm{L}^1_+$ taková, že $c_f \geq 0$, pak je i $\varphi(t) := \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ z množiny L^1_+ a pro abscisu konvergence platí $c_\varphi \leq c_f$. Navíc pro $\Phi(s) = \mathcal{L}(\varphi)$ platí*

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{s} \text{ pro } \mathrm{Re}(s) > c_f \text{ a } F(s) = \mathcal{L}(f).$$

Důkaz. Volme $\varepsilon > 0$ a definujme $c = c_f + \varepsilon$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_0^x e^{-ct}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \text{ pro } x > 0 \\ g(x) &= e^{cx}\psi(x) \\ h(x) &= e^{cx}. \end{aligned}$$

Takto existují $g'(x)$ i $h'(x)$ pro $x > 0$, $h'(x) \neq 0$, $h(x)$ reálná a

$$\begin{aligned} \frac{g'(x)}{h'(x)} &= \frac{e^{cx}(c\psi + \psi')}{ce^{cx}} = \frac{1}{c}(c\psi + \psi') \\ &= \frac{1}{c}\left(c\int_0^x e^{-ct}\varphi(t)\,\mathrm{d}t + e^{-cx}\varphi(x)\right) \\ &= \frac{1}{c}\left(\left[-e^{ct}\varphi(t)\right]_0^x + \int_0^x e^{-ct}f(t)\,\mathrm{d}t + e^{-cx}\varphi(x)\right) \\ &= \frac{1}{c}\int_0^x e^{-ct}f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Jelikož integrál $\mathcal{L}(f)$ v bodě c konverguje, platí $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g'(x)}{h'(x)} = \dfrac{F(c)}{c}$ pro $c > c_f$. Podle l'Hospitalova pravidla má stejnou limitu i výraz $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ a tedy

$$\Phi(c) = \frac{1}{c}F(c).$$

Tento vztah tedy platí pro všechna $c > c_f$ a z holomorfnosti funkcí $F(s), \Phi(s)$ pro $\mathrm{Re}(s) > c_f$ platí tento vztah i na celé polorovině $\mathrm{Re}(s) > c_f$. $\square$

Věta 2.1.10. *Nechť je funkce $f(t)$ absolutně spojitá pro $t > 0$, $f' \in \mathrm{L}^1_+$ a pro její abscisu konvergence platí $c_{f'} \geq 0$. Pak je i $f \in \mathrm{L}^1_+$, $c_f \leq c_{f'}$ a existuje limita $\lim\limits_{t\to 0_+} f(t) = f_0$. Pro Laplaceovu transformaci funkce f' navíc máme*

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f_0$$

na $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > c_{f'}\}$.

Důkaz. Jelikož je $f' \in \mathrm{L}^1_+$, je Legesgueovsky integrovatelná. Nemusí však být definována přímo pro $t = 0$. Fixujeme $T > 0$ a pro každé $0 < \varepsilon < T$

$$\int_\varepsilon^T f'(t)\,\mathrm{d}t = f(T) - f(\varepsilon).$$

Protože $\int_0^T f'(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje, existuje také $\lim_{\varepsilon\to 0_+}[f(T) - f(\varepsilon)]$, z čehož plyne existence $f_0 = \lim_{\varepsilon\to 0_+} f(\varepsilon)$. A protože T bylo libovolné, platí také

$$\int_0^t f'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t) - f_0.$$

Z předchozí věty pak máme požadovaný výsledek. □

Věta 2.1.11. *Jsou-li derivace funkce $f(t)$, $t > 0$, absolutně spojité pro $t > 0$ až do řádu $n \in \mathbb{N}$ a $f^{(n)}$ je z množiny L^1_+ s $c_{f^{(n)}} \geq 0$, jsou i všechny derivace nižších řádů z množiny L^1_+ a existují limity*

$$\lim_{t\to 0_+} f(t) = f_0, \lim_{t\to 0_+} f'(t) = f_1, \ldots, \lim_{t\to 0_+} f^{(n-1)}(t) = f_{n-1}.$$

Navíc $c_f \leq c_{f^{(n)}}$ a platí

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - f_0 s^{n-1} - \ldots - f_{n-1} \textit{ pro } \mathrm{Re}(s) > c_{f^{(n)}}.$$

Důkaz. Postupujeme indukcí. První krok je dokončený v předchozí větě, předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro všechny indexy až do $(n-1)$. Pro existenci f_{n-1} použijeme stejný argument, tedy fixujeme $T > 0$ a $\varepsilon : 0 < \varepsilon < T$, pak

$$\int_0^T f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^T f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}[f^{(n-1)}(T) - f^{(n-1)}(\varepsilon)],$$

a z konvergence prvního integrálu získáváme existenci $\lim_{\varepsilon\to 0_+} f^{(n-1)}(\varepsilon) = f_{n-1}$. S využitím prvního kroku počítejme

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s\left(s^{n-1}\mathcal{L}(f) - f_0 s^{n-2} - \cdots - f_{n-2}\right) - f_{n-1},$$

což je po roznásobení přesně požadovaný výsledek. □

Věta 2.1.12. *Nechť $f \in \mathrm{L}^1_+$ a $\mathcal{L}(f) = F(s)$ pro $\mathrm{Re}(s) > c_f$. Pak pro $\mathrm{Re}(s) > c_f$ platí*

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F(s) = \mathcal{L}\left((-1)^n t^n f(t)\right).$$

Důkaz. Vzhledem k absolutní konvergenci integrálu pro $\mathrm{Re}(s) > c_f$ platí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty s^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}s^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty -t\,s^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}\left(-tf(t)\right).\end{aligned}$$

Indukcí pak dostaneme požadovaný výsledek

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}s^{n-1}}F(s)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\left((-1)^{n-1}t^{n-1}f(t)\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty (-1)^{n-1}t^{n-1}\,s^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left((-1)^{n-1}t^{n-1}\,s^{-st}f(t)\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty (-1)^n t^n\,s^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{L}\left((-1)^n t^n f(t)\right).\end{aligned}$$

□

Na závěr podkapitoly 2.1 si ukážeme transformace nejběžnějších funkcí.

Příklady.

i) $\mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{s}$:

$$\int_0^\infty e^{-st} 1 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

ii) $\mathcal{L}(t) = \dfrac{1}{s^2}$: Místo přímého výpočtu z definice použijeme konvoluci

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(1 * 1) = \mathcal{L}(1) \cdot \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s^2}$$

iii) $\mathcal{L}(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$: Indukcí doděláme n-tý krok

$$\mathcal{L}(t^n) = \mathcal{L}(1 * n\, t^{n-1}) = \mathcal{L}(1) \cdot n\mathcal{L}(t^{n-1}) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

iv) $\mathcal{L}(\sin(at)) = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$, $\mathcal{L}(\cos(at)) = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$, $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(\cos(at) + \mathrm{i}\,\sin(at)) = \int_0^\infty e^{-st}(\cos(at) + \mathrm{i}\,\sin(at)) \,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st+\mathrm{i}at} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-st+\mathrm{i}at}}{-s+\mathrm{i}a}\right]_0^\infty = -\frac{1}{-s+\mathrm{i}a} = \frac{s+\mathrm{i}a}{s^2+a^2},$$

což po porovnání reálné a komplexní složky dává oba výsledky.

Pro úplnost je správné říct, že všechny tyto vzorce platí pro $\mathrm{Re}(s) > 0$.

2.2 Inverzní Laplaceova transformace

Problematika inverzní Laplaceovy transformace není tak jasná, jak by se možná mohlo na první pohled zdát. V této práci se jí nebudeme zabývat nikterak dopodrobna, zaměříme se pouze na hlavní aspekty. Ukážeme si také několik běžně užívaných metod jejího výpočtu. První důležitou otázkou je, zda je vůbec možné inverzi k Laplaceově transformaci nalézt. Konkrétně potřebujeme vědět, zda-li je Laplaceova transformace prostá. Na to nám odpovídá Lerchova věta o jednoznačnosti.

Věta 2.2.1. *Nechť $f, g \in \mathrm{L}^1_+$ a $F = \mathcal{L}(f)$, $G = \mathcal{L}(g)$. Pokud $F(s) = G(s)$ pro všechna s na nějaké společné oblasti konvergence, pak $f(t) = g(t)$ pro skoro všechna $t > 0$.*

Důkaz. Důkaz vzhledem k délce neuvádíme. Věnuje se mu kapitola II.6 v knize D. V. Widdera [10], ve které je důkaz proveden obecněji pro transformace měr, či text D. Pražáka [6]. □

Lerchova věta nám umožňuje zavést pojem inverzní Laplaceovy transformace.

Definice. *Nechť je $f \in \mathrm{L}^1_+$ a $F = \mathcal{L}(f)$.* Inverzní Laplaceovou transformací *budeme rozumět přiřazení $F \longmapsto f$ a budeme ji značit symbolem $\mathcal{L}^{-1}$. Platí tedy*

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}(f)\right) = f.$$

Pro inverzní Laplaceovu transformaci můžeme využít většinu vět uvedených v předchozí podkapitole a nebo ji můžeme "uhodnout"z tabulkových hodnot. Pro ilustraci uvedeme několik tvrzení, jejichž důkazy jsou jasné a nebudeme je proto uvádět.

Věta 2.2.2. *Nechť jsou $f,\ g \in \mathrm{L}^1_+$ a $F = \mathcal{L}(f)$, $G = \mathcal{L}(g)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $a > 0$. Pak*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}(\alpha F + \beta G) &= \alpha f + \beta g && (2.1)\\
\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}F(s)) &= \begin{cases} f(t-a), & t-a \geq 0 \\ 0, & t-a < 0 \end{cases} && (2.2)\\
\mathcal{L}^{-1}(F(as+\alpha)) &= \frac{1}{a}e^{-\frac{\alpha}{a}t}f(\frac{t}{a}) && (2.3)\\
\mathcal{L}^{-1}(FG) &= f * g && (2.4)
\end{aligned}$$

a podobně i pro další vztahy.

S pomocí transformací i)-iv) odvozených v podkapitole 2.1 a identit (2.1)-(2.4) ukážeme i zde několik důležitých vztahů.

Příklady.

I) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s-a}\right) = e^{at}$: Jedná se o zřejmou kombinaci (2.3) a ii)

II) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-a)^n}\right) = e^{at}\,\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, $n \in \mathbb{N}$: Tentokrát se jedná o kombinaci (2.3) s iii)

Tento vztah nám umožňuje snadnou inverzi racionálních komplexních funkcí. Že to však nemusí být nutně nejvhodnější ilustruje následující příklad.

III) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{7}{s^2-6s+13}\right) = \dfrac{7}{2}\,e^{3t}\sin(2t)$: Postupným využitím (2.1), iv) a (2.3) rychle dostaneme

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{7}{s^2-6s+13}\right) = \frac{7}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s-3)^2+4}\right) = \frac{7}{2}\,e^{3t}\sin(2t)$$

Řešení pomocí parciálních zlomků by naproti tomuto elegantnímu postupu bylo velmi zdlouhavé a náročné na pozornost.

U všech příkladů předpokládáme $\mathrm{Re}(s)$ větší než příslušné abscisy konvergence a $a \in \mathbb{R}$.

Pro zajímavost uvedeme také vzorec pro výpočet inverzní Laplaceovy transformace odvoditelný z residuové věty. Ten je za jistých podmínek shodný se vzorcem pro výpočet inverzní Fourierovy transformace. Ani tuto větu nebudeme, s ohledem na přiměřený rozsah práce, dokazovat. Odvození je možné dohledat v knize G. Doetsche [3, kap. 4.1].

Věta 2.2.3. *Nechť existují konstanty* A, R, $s_0 > 0$ *a komplexně proměnná funkce* $F(s)$ *holomorfní pro* $\mathrm{Re}(s) > s_0$ *splňuje* $|F(s)| \leq \dfrac{A}{|s|^2}$ *pro* $\mathrm{Re}(s) > s_0$ & $|s| > R$. *Pak existuje inverzní Laplaceova transformace funkce* F *a platí pro ni*

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} e^{st} F(s) \, \mathrm{d}s, \ \text{pro } c > s_0.$$

3. Diferenciální rovnice

Definice. *Rovnice*

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}\, x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\, x'(t) + a_0\, x(t) = f(t), \tag{DR}$$

kde $a_i \in \mathbb{C}$ *jsou konstanty, se nazývá* diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty*. Rovnice s nulovou pravou stranou*

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}\, x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\, x'(t) + a_0\, x(t) = 0 \tag{HDR}$$

se nazývá homogenní *rovnice.*

3.1 Teorie rovnic s konstantními koeficienty

V této podkapitole uvedeme základní definice a věty v klasické podobě, v jaké se probírají v základních kurzech matematické analýzy. Klasické důkazy je možné najít v knize I. I. Vrabie [9], naší snahou bude především pokus o odvození nejdůležitějších z následujících vztahů za pomoci Laplaceovy transformace - tvaru fundamentálního systému a variace konstant.

Definice. *Polynom*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

nazveme charakteristickým polynomem *rovnice (DR).*

Věta 3.1.1. *Množina všech řešení homogenní rovnice (HDR) tvoří vektorový prostor dimenze n. Je-li* x_p *jedno řešení nehomogenní rovnice (DR), pak množina všech řešení rovnice (DR) je* $\{x_p + x_h,\ x_h$ *řeší (HDR)*$\}$*. Funkci* x_h *budeme nazývat* obecné řešení.

Definice. *Libovolnou n-tici funkcí* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *tvořící bázi vektorového prostoru řešení redukované rovnice (HDR) nazýváme* fundamentálním systémem *(DR). Libovolné řešení* x_p *rovnice (DR) nazveme* partikulárním řešením*. Tedy*

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = x_p(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t),$$

kde $c_i \in \mathbb{C}$ *jsou konstanty.*

Věta 3.1.2. *Nechť jsou* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *navzájem různé komplexní kořeny charakteristického polynomu s násobnostmi* $k_1, \ldots, k_m$*. Pak fundamentálním systém rovnice (HDR) je množina*

$$\{f_{ij} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ f_{ij}(t) = t^{j-1} e^{\lambda_i t};\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, k_i\}.$$

Poznámka. Je vhodné zdůraznit, že dle předchozí věty získáváme komplexní fundamentální systém, přestože původní funkce byla reálná. Pro každý nereálný kořen charakteristického polynomu $a + ib$ ale platí, že také číslo komplexně sdružené $a - ib$ je kořenem charakteristického polynomu. To nám umožňuje případný převod na reálný fundamentální systém, ve kterém bude příslušná dvojice funkcí $e^{(a \pm ib)t}$ nahrazena funkcemi $e^{at}\sin(bt)$, $e^{at}\cos(bt)$. Pro účely práce budeme dále uvažovat fundamentální systém v komplexním tvaru.

Nyní uvedeme metodu nalezení partikulárního řešení pomocí variace konstant, a to ve dvou tvarech - obecném a konvolučním.

Věta 3.1.3. *Nechť* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *je fundamentální systém (DR) a* $c_1(t), \ldots, c_n(t)$ *splňují pro skoro všechna* $t \geq 0$ *(kde proměnnou* t *pro přehlednost nepíšeme)*

$$\begin{aligned} c_1' x_1 + c_2' x_2 + \cdots + c_n' x_n &= 0 \\ c_1' x_1' + c_2' x_2' + \cdots + c_n' x_n' &= 0 \\ &\vdots \\ c_1' x_1^{(n-2)} + c_2' x_2^{(n-2)} + \cdots + c_n' x_n^{(n-2)} &= 0 \\ c_1' x_1^{(n-1)} + c_2' x_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' x_n^{(n-1)} &= f. \end{aligned}$$

Potom funkce $x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t)$ *je partikulární řešení rovnice (DR).*

Věta 3.1.4. *Nechť* $x_h(t)$ *je řešením (HDR) s počátečními podmínkami*

$$x_h(0) = x_h'(0) = \cdots = x_h^{(n-2)} = 0,\ x_h^{(n-1)} = 1.$$

Pak

$$x_p(t) = (x_h * f)(t)$$

je řešením rovnice (DR) s nulovými počátečními podmínkami

$$x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-2)} = x^{(n-1)} = 0.$$

3.2 Využití Laplaceovy transformace

Naším cílem nyní bude aplikovat teorii vybudovanou v druhé kapitole na diferenciální rovnici (DR). Veškeré úpravy provedeme nejprve formálně, jejich oprávněnost rozebereme na konci kapitoly.

Začněme s rovnicí (DR) a uvažujme $f \in \mathrm{L}^1_+$ spojitou. Aplikací Laplaceova operátoru na obě strany rovnice získáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \mathcal{L}\left(x^{(n)} + a_{n-1}\, x^{(n-1)} + \cdots + a_1\, x' + a_0\, x\right) \\ &= \mathcal{L}(x^{(n)}) + a_{n-1}\, \mathcal{L}(x^{(n-1)}) + \cdots + a_1\, \mathcal{L}(x') + a_0\, \mathcal{L}(x), \end{aligned}$$

neboť dle věty 2.1.3 je Laplaceova transformace lineární. Dle věty 2.1.11 dále máme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) = &(s^n \mathcal{L}(x) - x_0 s^{n-1} - \ldots - x_{n-1}) \\ &+ a_{n-1}(s^{n-1}\mathcal{L}(x) - x_0 s^{n-2} - \ldots - x_{n-2}) \\ &+ \cdots + a_1(s\, \mathcal{L}(x) - x_0) + a_0\, \mathcal{L}(x), \end{aligned}$$

či ekvivalentně

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x)(s^n + s^{n-1}a_{n-1} + \cdots + sa_1 + a_0) = &\mathcal{L}(f) \\ &+ x_0(s^{n-1} + s^{n-2}a_{n-1} + \cdots + sa_2 + a_1) \\ &+ x_1(s^{n-2} + s^{n-3}a_{n-1} + \cdots + sa_3 + a_2) \\ &+ \cdots + x_{n-2}(s + a_{n-1}) + x_{n-1}, \end{aligned}$$

kde $x_0 = x(0), x_1 = x'(0), \dots, x_{n-1} = x^{n-1}(0)$, obecněji limity těchto funkcí u nuly zprava. Položme $X(s) = \mathcal{L}(x)$ a $F(s) = \mathcal{L}(f)$. Dále označme

$$\begin{aligned}
P(s) &= s^n + s^{n-1}a_{n-1} + \cdots + sa_1 + a_0 \\
Q(s) &= x_0(s^{n-1} + s^{n-2}a_{n-1} + \cdots + sa_2 + a_1) \\
&\quad + x_1(s^{n-2} + s^{n-3}a_{n-1} + \cdots + sa_3 + a_2) \\
&\quad + \cdots + x_{n-2}(s + a_{n-1}) + x_{n-1}.
\end{aligned}$$

Z tohoto můžeme řešení transformované rovnice vyjádřit jako

$$X(s) = \frac{F(s) + Q(s)}{P(s)}. \tag{TR}$$

Pokud je možné pro zlomek na pravé straně nalézt inverzní Laplaceovu transformaci, máme hotovo.

3.2.1 Odvození tvaru obecného řešení

Otázkou tedy pouze zůstává, kdy tato inverze bude existovat. Odpověď se pokusíme najít postupně. Je zřejmé, že polynom P odpovídá charakteristickému polynomu rovnice (DR). V prvním kroku tedy položme $f \equiv 0$. Pak $\mathcal{L}(f) = 0$ a řešení transformované rovnice (TR) se redukuje na

$$X(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

V druhém kroku zvolme speciální počáteční podmínky

$$x_0 = 0, \dots, x_{n-2} = 0, \; x_{n-1} = 1,$$

pro které se (TR) dále redukuje na

$$X(s) = \frac{1}{P(s)}.$$

To je racionální funkce proměnné s, kterou dle věty o rozkladu na parciální zlomky umíme rozložit do tvaru

$$X(s) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{b_{ij}}{(s - \lambda_i)^j},$$

kde $\lambda_i \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různé komplexní kořeny polynomu P s násobnostmi k_i. Dle příkladu II) pak pro inverzní Laplaceovu transformaci máme

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} b_{ij} e^{\lambda_i t} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}.$$

Tento výsledek použijeme dále, postup je ale samozřejmě možné aplikovat i pro obecné počáteční podmínky. Polynom Q má pro libovolné počáteční podmínky řád nižší než polynom P, proto stejným postupem dojdeme k formálně stejnému výsledku.

Alternativou k větě o rozkladu na parciální zlomky, je výpočet pomocí věty 2.1.7. Jsou-li $\lambda_1, \dots \lambda_n$ kořeny polynomu P, tj.

$$X(s) = \frac{1}{s - \lambda_1} \cdots \frac{1}{s - \lambda_n},$$

pak

$$x(t) = \left(e^{\lambda_1(.)} * \cdots * e^{\lambda_n(.)}\right)(t).$$

Tento postup je však většinou velmi pracný a hodí se jen ve velmi malém množství případů.

3.2.2 Nalezení partikulárního řešení

Poslední odstavec nám dává návod, jak naložit s nehomogenní rovnicí. Uvažujme počáteční podmínky

$$x_0 = 0, \dots, x_{n-2} = 0, \; x_{n-1} = 0.$$

Pak tvar se (TR) redukuje na

$$X(s) = \frac{F(s)}{P(s)}.$$

To je součin Laplaceovy transformace pravé strany s racionální funkcí $\frac{1}{P}$, jehož inverzní Laplaceova transformace lze dle věty 2.1.7 vyjádřit vztahem

$$x(t) = \left(f(.) * e^{\lambda_1(.)} * \cdots * e^{\lambda_n(.)}\right)(t) = \left(f(.) * b_{ij} e^{\lambda_i(.)} \frac{(.)^{j-1}}{(j-1)!}\right)(t).$$

Vraťme se nyní k obecnému řešení (TR). Díky předchozímu odstavci umíme vyřešit nehomogenní rovnici s pomocí konvoluce. Jelikož však stejně musíme počítat kořeny charakteristického polynomu, můžeme si pro některé pravé strany ušetřit práci. Transformace všech funkcí, které jsme si ukázali v příkladech i)-iv), jsou racionální funkce s řádem čitatele nižším, než je řád jmenovatele. To platí i pro mnoho dalších funkcí. Pro takové funkce f je i X racionální funkce s čitatelem menšího řádu, než je řád jmenovatele. Využitím věty o rozkladu na parciální zlomky máme stejně jako v případě homogenní rovnice

$$X(s) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{b_{ij}}{(s - \lambda_i)^j}$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} b_{ij} e^{\lambda_i t} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}.$$

Získáváme tak řešení bez nutnosti počítat konvoluci. Pro úplnost můžeme doplnit, že tento postup je možný například pro f lineární kombinaci polynomů, sinů a cosinů (včetně jejich hyperbolických podob), nebo pro rovnice se speciální pravou stranou (viz. T. Bárta, D. Pražák [1]). Mnoho dalších příkladů je možné najít například v knize J. L. Schiffa [8, str. 210].

3.2.3 Zobecnění na soustavy prvního řádu

Za zobecnění (DR) je možné považovat soustavu lineárních rovnic prvního s konstantními koeficienty - každá diferenciální rovnice vyššího řádu jde do tvaru soustavy upravit, naopak to již ale neplatí - vezměme diferenciální rovnici (DR) a definujme

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ x_1 &= x_0' \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x_{n-2}'. \end{aligned}$$

Pak soustava

$$\begin{aligned} x_0' &= x_1 \\ &\vdots \\ x_{n-2}' &= x_{n-1} \\ x_{n-1}' &= f - a_{n-1}x_{n-1} - \ldots - a_0 x_0, \end{aligned}$$

je ekvivalentní (DR) - řešení x_0 je řešením (DR). Naopak soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_1, \end{aligned}$$

není možné převést na jednu rovnici druhého řádu.

Mějme tedy soustavu rovnic s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{aligned}$$

a počáteční podmínky

$$x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20}, \ldots, x_n(0) = x_{n0}.$$

Aplikací Laplaceovy transformace na tuto soustavu obdržíme

$$\begin{aligned} (s - a_{11})X_1(s) - a_{12}X_2(s) - \ldots - a_{1n}X_n(s) &= x_{10} + F_1(s) \\ -a_{21}X_1(s) + (s - a_{22})X_2(s) - a_{23}X_3(s) - \ldots - a_{2n}X_n(s) &= x_{20} + F_2(s) \\ &\vdots \\ -a_{n1}X_1(s) - \ldots - a_{nn-1}X_{n-1}(s) + (s - a_{nn})X_n(s) &= x_{n0} + F_n(s) \end{aligned}$$

kde X_i, resp. F_i, jsou pro $i = 1, \ldots, n$ obrazy funkcí x_i, resp. f_i. Tento algebraický systém je možné vyřešit například pomocí Cramerova pravidla. Výsledné (racionální) funkce pak zobrazíme inverzní Laplaceovou transformací.

3.2.4 Diskuze výsledků

Zbývá tedy zdůvodnit, proč jsou výsledky obdržené tímto postupem skutečně řešení rovnice (DR). Uvedeme tři možná zdůvodnění.

1. Dosazením do zadání. Tato možnost je sice bezpečná, avšak velmi pracná.

2. Zkouška pomocí Lerchovy věty. Postup této metody je možné shrnout do následujících kroků. Obdržená řešení, označme je například $\tilde{x}$, jsou zřejmě funkce z $\mathrm{L}^1_+ \cap \mathcal{C}^\infty$. Dosadíme tedy $\tilde{x}$ do rovnice (HDR) a provedeme Laplaceovu transformaci. Získaný výraz je pak z postupu výpočtu $\tilde{x}$ roven funkci $F(s) = \mathcal{L}(f)$. Pro získanou rovnost

   $$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\left(\tilde{x}^{(n)} + a_{n-1}\,\tilde{x}^{(n-1)} + \cdots + a_1\,\tilde{x}' + a_0\,\tilde{x}\right)$$

   pak z Lerchovy věty 2.2.1 pro s.v. $t \geq 0$ plyne

   $$f(t) = \tilde{x}^{(n)} + a_{n-1}\,\tilde{x}^{(n-1)} + \cdots + a_1\,\tilde{x}' + a_0\,\tilde{x}.$$

   Z hladkosti funkce $\tilde{x}$ pak rovnost pro všechna $t \geq 0$.

3. Existence řešení v L^1_+. Pokud bychom dopředu věděli, že se v množině L^1_+ nějaká řešení nalézají, musely by to nutně být výše obdržené výsledky. O existenci těchto řešení hovoří následující věta.

Věta 3.2.1. *Každé řešení rovnice (HDR) je, včetně všech svých derivací až do řádu n, exponenciálně omezené a lokálně integrovatelné na intervalu $[0, \infty)$.*

Důkaz. Mějme soustavu (HDR). Rovnici převedeme na systém lineárních rovnic s konstantními koeficienty (viz. sekce 3.2.3) $y'(t) = Ay(t)$, kde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $y : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Pro normu této rovnice platí $|y'| = |Ay| \leq \|A\|\,|y|$. Dle Gronwallova lemmatu pak platí

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq |y(0)| \exp\left\{\int_0^t \|A\|\,\mathrm{d}s\right\} \\ &= |y(0)| \exp\left\{\|A\| \int_0^t 1\mathrm{d}s\right\} \\ &= Ce^{\|A\|t}, \end{aligned}$$

kde $C \geq 0$. Tedy y je exponenciálně omezené, z čehož plyne exponenciální omezenost nulté až n mínus první derivace x. Pro odvození exponenciální omezenosti n-té derivace x si stačí uvědomit, že

$$x^{(n)} = y'_{n-1} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i y_i,$$

kde všechny členy vystupující v sumě jsou exponenciálně omezené, tudíž i jejich lineární kombinace je exponenciálně omezená. Tyto odhady nám také dávají integrovatelné majoranty na každé kompaktní podmnožině $[0, \infty)$. $\square$

Nyní můžeme s jistotou prohlásit, že obdržené výsledky jsou řešeními rovnice (DR). Diskutujme tedy výsledky jednotlivých částí této podkapitoly.

Úvahy ze sekce 3.2.1 by bylo možné považovat za relativně snadný důkaz věty 3.1.2, který je jinak náročný - konkrétně je pracný důkaz lineární nezávislosti uvažovaných funkcí. Ověřili jsme, že nalezené funkce jsou (v nějaké lineární kombinaci) řešeními pro každou počáteční podmínku. Tedy všechna řešení rovnice (HDR) jsou tohoto tvaru. Dle věty 3.1.1 pak víme, že řešení mají tvořit vektorový prostor dimenze n, odkud je nalezená n-tice funkcí lineárně nezávislá.

V sekci 3.2.2 je pak při označení $x_h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{P}\right)$ ukryt důkaz věty 3.1.4.

Závěr

Problematika Laplaceovy transformace je dnes již relativně dobře prozkoumaným tématem, my jsme se ve druhé kapitole zabývali pouze jejími stěžejními body postačujícími většině běžných aplikací. Tato kapitola by se dala například rozšířit o věty zkoumající stejnoměrnou konvergenci, asymptotické chování funkcí ve vztahu k jejich Laplaceovým transformacím, transformace periodických funkcí atd. Za zobecnění Laplaceovy transformace je možné považovat integrální transformaci s totožným jádrem definovanou na celé reálné ose. Pro rozšiřující studium tímto směrem můžeme doporučit zejména knihu G. Doetsche [3]. Jiným zobecněním je pak transformace měr pomocí Riemann-Stieltjesova nebo Lebesgue-Stieltjesova integrálu zpracovaná například v knize D. V. Widdera [10].

Ve třetí kapitole se věnujeme aplikaci Laplaceovy transformace na obyčejné diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Zkusme nyní zhodnotit výhody tohoto přístupu oproti klasickým metodám popsaným v kapitole 3.1. Na první pohled se může zdát, že je metoda řešení pomocí Laplaceovy transformace nevýhodná, neboť výpočet obecných řešení je značně složitější a mnohem méně přehledný. Ve skutečnosti však tento fakt můžeme vnímat i z opačné strany. Využitím Laplaceovy transformace totiž získáváme řešení pro dané počáteční podmínky přímo, bez nutnosti výpočtu obecného řešení a následného dopočítávání pro dané počáteční podmínky. Stejně tak není nutné používat metody výpočtu rovnice s nehomogenní pravou stranou, například variaci konstant, neboť i s tou počítáme rovnou. Celkově je tedy možné říci, že metoda Laplaceovy transformace je výhodná v případě, kdy potřebujeme řešit konkrétní, nikoli obecně zadaný problém. To je typické mimo jiné pro fyzikální problémy, pro které tak získáváme silný výpočetní nástroj.

Při řešení konkrétních problémů se navíc umíme vypořádat i s další značnou nepříjemností typickou pro rovnice vyšších řádů, kterou je výpočet kořenů charakteristického polynomu, potažmo polynomu P. Pro polynomy od pátého stupně výše neexistuje analytický algoritmus výpočtu kořenů a je často nutné použití přibližných numerických metod. Pokud bychom chtěli řešení pro neurčité počáteční podmínky, museli bychom se spokojit pouze s algoritmem řešení, se kterým se již nedá dále pracovat. Při řešení problémů se zadanými počátečními podmínkami se můžeme kořenům přiblížit s libovolnou přesností, například pomocí Maehlyovy metody, která je zpřesněním Newtonovy metody a jejíž definice a implementace se nalézá například v knize W. H Presse [7].

Další výhodou oproti klasickému přístupu jsou pak integro-diferenciální rovnice, vyskytující se například při výpočtech v obvodech se střídavým elektrickým proudem. Takové rovnice můžeme pomocí Laplaceovy transformace počítat přímo, zatímco pro výpočet za pomocí klasických vět musíme nejprve provést vhodný převod rovnice do požadovaného tvaru. Těmto i dalším aplikacím, mimo jiné na parciální diferenciální rovnice nebo diferenční rovnice, se věnuje kupříkladu kniha J. L. Schiffa [8].

Seznam použité literatury

[1] Bárta, Tomáš; Pražák, Dalibor. *Rovnice se speciální pravou stranou* [online]. Verze 11. 11. 2011. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/Kapitola-LinKonstRadN/LinKonNt2.pdf>

[2] Bhatta, Dambaru; Debnath, Lokenath. *Integral transforms and their applications.* 2. vydání. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006. ISBN: 978-1-58488-575-7

[3] Doetsch, Gustav. *Handbuch der Laplace-Transformation I.* Basel: Verlag Birkhäuser, 1950.

[4] Doetsch, Gustav. *Handbuch der Laplace-Transformation II.* Basel: Verlag Birkhäuser, 1955.

[5] Malý, Jan. *Teorie míry a integrálu* [online]. Převzato 31. 3. 2012. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~maly/tmi11.pdf>

[6] Pražák, Dalibor. *Elementární důkaz Lerchovy věty* [online]. Převzato 16. 5. 2012. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~prazak/uceni/MAA014/lerch.pdf>

[7] Press, William H.; Teukolsky, Saul A.; Vetterling, William T.; Flannery, Brian P. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing.* 3. vydání Cambridge: Cambridge University Press, 2007. ISBN 0-521-88068-8

[8] Schiff, Joel L. *The Laplace Transform: Theory and Applications.* New York: Springer-Verlag, 1999. ISBN 0-387-98698-7

[9] Vrabie, Ioan I. *Differential Equations: An introduction to Basic Concepts, Results and Applications.* Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004. ISBN 981-238-838-9

[10] Widder, David Vernon. *The Laplace Transform.* Princeton: Princeton University Press, 1946.