Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Karolína Dvořáková

Topologie definované pomocí ideálů

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	Doc. RNDr. Ondřej Kalenda Ph.D., DSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2012

Ráda bych poděkovala panu doc. RNDr. Ondřeji Kalendovi, Ph.D., DSc. za spolehlivé vedení této práce, za jeho vstřícný přístup, množství cenných rad, připomínek a návrhů, a za nesmírnou trpělivost, kterou se mnou měl.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Topologie definované pomocí ideálů

Autor: Karolína Dvořáková

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc., katedra matematické analýzy

Abstrakt: V této práci se zabýváme topologiemi, které vzniknou modifikací nějaké dané topologie pomocí ideálů - zaměříme se na ideály lokalizovatelné a silně lokalizovatelné. V první kapitole zavedeme ideálovou topologii pomocí jistého množinového zobrazení a následně ukážeme, jaký je její vztah k původní topologii. Dále budeme zkoumat, jaké vlastnosti nabývají v nové topologii prvky z ideálu, například za určitých podmínek je pak ideál tvořen právě všemi množinami řídkými v ideálové topologii. Nakonec ukážeme, kdy je nová topologie regulární, a zformulujeme nutné a postačující podmínky k tomu, aby byl prostor s ideálovou topologií Baireův. V druhé kapitole pak tyto poznatky aplikujeme na konkrétní příklady ideálů a topologií definovaných pomocí nich.

Klíčová slova: ideálová topologie, lokalizovatelný ideál, řídká množina, množina první kategorie, Baireův prostor

Title: Topologies defined using ideals

Author: Karolína Dvořáková

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: Doc. RNDr. Ondřej Kalenda Ph.D., DSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In this thesis we study the topologies formed by a modification of some given topology using ideals - we focus on localizable and strongly localizable ideals. In the first chapter we use a certain set mapping to define ideal topology, then we show its relation to the initial topology. Next we investigate what properties the elements of ideal obtains in the new topology, for example on certain conditions the ideal becomes exactly the set of all nowhere dense sets in the ideal topology. Finally, we show when the new topology is regular and formulate necessary and sufficient conditions for a set with ideal topology to be a Baire space. In the second chapter we apply the results on concrete examples of ideals and topologies defined by them.

Keywords: ideal topology, localizable ideal, nowhere dense set, meager set, Baire space

Obsah

Použité značení

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
2^X	množina všech podmnožin X
$\overline{A}^{\mathcal{T}}$	uzávěr množiny A v topologii $\mathcal{T}$
$der_{\mathcal{T}}A$	množina hromadných bodů množiny A v topologii $\mathcal{T}$
$Int_{\mathcal{T}}A$	vnitřek množiny A v topologii $\mathcal{T}$
$bd_{\mathcal{T}}A$	hranice množiny A v topologii $\mathcal{T}$
$\mathcal{B}orel(X)$	σ-algebra borelovských množin na X
$A \triangle B$	symetrická diference množin $A,\ B$

Úvod

Ideálová topologie vznikne modifikací nějaké topologie pomocí ideálu, přičemž jako ideál bývá často uvažován soubor množin, které jsou v nějakém smyslu malé. Dalo by se tedy říci, že množiny z nové topologie se lokálně liší od původních „jen trochu“. Přesto i tato „malá“ změna může mít velký vliv na vlastnosti topologického prostoru. Je to dáno především postavením prvků z ideálu vůči nové topologii, jsou v ní například vždy uzavřené.

V první kapitole budeme zkoumat obecné vlastnosti topogie definované vzhledem k lokalizovatelným a silně lokalizovatelným ideálům. Ukážeme například jaký je vztah prvků z ideálu a množin řídkých v nové topologii, zda může být ideálová topologie regulární a kdy je topologický prostor po modifikaci Baireův. V druhé kapitole pak uvedeme některé konkrétní příklady ideálů a jim příslušných topologií.

Kapitola 1

Vlastnosti ideálové topologie

1.1 Ideály a zobrazení $*$

Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický T_1 prostor. Topologie $\mathcal{T}$ bude pro nás na X výchozí a použijeme ji k vytvoření ideálové topologie, jejíž vlastnosti budeme studovat. Pro zjednodušení značení budeme u pojmů vztahujících se k původní topologii symbol '$\mathcal{T}$' vynechávat, tedy místo $\mathcal{T}$-otevřená budeme psát pouze otevřená, místo $\bar{A}^{\mathcal{T}}$ pouze $\overline{A}$, apod.

Jak již název napovídá, nástrojem k modifikaci topologie $\mathcal{T}$ bude ideál na X, tj soubor množin $\mathcal{Z} \subset 2^X$ splňující:

($\mathcal{Z}$1) pokud $Z_1 \in \mathcal{Z}$ a $Z_2 \subset Z_1$, potom $Z_2 \in \mathcal{Z}$;

($\mathcal{Z}$2) pokud $Z_1 \in \mathcal{Z}$ a $Z_2 \in \mathcal{Z}$, potom $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{Z}$.

Pokud je ideál navíc uzavřený na spočetná sjednocení, mluvíme o σ-ideálu.

Je-li $A \subset X$ a $x \in X$, pak řekneme, že množina A má vlastnost $\mathcal{V}$ v bodě x, pokud existuje okolí U bodu x tak, že $U \cap A$ má vlastnost $\mathcal{V}$. Řekneme, že množina A má lokálně vlastnost $\mathcal{V}$, pokud má vlastnost $\mathcal{V}$ v každém $x \in A$. V našem případě bude touto vlastností náležení do ideálu $\mathcal{Z}$.

Pro $A \subset X$ definujme A^* jako množinu těch bodů, ve kterých A není v $\mathcal{Z}$, tj.

$$A^* = \{x \in X : \text{ pro každé okolí } U \text{ bodu } x \text{ je } U \cap A \notin \mathcal{Z}\},$$

navíc díky vlastnosti ($\mathcal{Z}$1) stačí okolí U v definici A^* uvažovat pouze otevřená. Podle [1, §1.] a [3, §7.V] popíšeme základní vlastnosti zobrazeni $A \mapsto A^*$ definovaného vzhledem k $\mathcal{Z}$:

Tvrzení 1.1 *Pro každé $A, B \subset X$ platí:*

(a) A^* je uzavřená,

(b) je-li $A \subset B$, pak $A^* \subset B^*$,

(c) $A^{**} \subset A^* \subset \overline{A}$,

(d) je-li $G \subset X$ otevřená, pak $G \cap A^* = G \cap (G \cap A)^*$,

(e) $(A \cap B)^* \subset A^* \cap B^*$,

(f) $A^* \cup B^* = (A \cup B)^*$,

(g) $A^* \setminus B^* \subset (A \setminus B)^*$.

Důkaz: (a) Z definice A^* plyne, že

$$X \setminus A^* = \bigcup \{G : \ G \text{ otevřená}, \ G \cap A \in \mathcal{Z}\},$$

což je otevřená množina, a tedy A^* je uzavřená.

(b) Nechť $A \subset B$. Je-li $x \in A^*$ a U jeho okolí, pak $U \cap A \notin \mathcal{Z}$ a zároveň $U \cap A \subset U \cap B$, tedy z vlastnosti ($\mathcal{Z}1$) je $U \cap B \notin \mathcal{Z}$ a $x \in B^*$.

(c) Z rovnosti použité v důkazu (a) dostáváme

$$A^* = \bigcap \{F : \ F \text{ uzavřená}, \ A \setminus F \in \mathcal{Z}\}.$$

Označme

$$\Phi := \{F : \ F \text{ uzavřená}, \ A^* \setminus F \in \mathcal{Z}\},$$

pak $A^* \in \Phi$ a $\bigcap \Phi = A^{**}$, tedy $A^{**} \subset A^*$. Protože speciálně $\emptyset \in \mathcal{Z}$, je

$$A^* \subset \{x \in X : \ \text{pro každé } U \text{ okolí bodu } x \text{ je } U \cap A \neq \emptyset\} = \overline{A}.$$

(d) Buď $x \in G \cap A^*$ a U okolí x. Protože $U \cap G$ je též okolí x, je $U \cap G \cap A \notin \mathcal{Z}$, to však znamená, že $x \in (G \cap A)^*$. Tedy $G \cap A^* \subset (G \cap A)^*$ a přidáme-li ještě na obě strany inkluze průnik s G, dostaneme $G \cap A^* \subset G \cap (G \cap A)^*$.

Obrácená inkluze plyne z (b): Protože $G \cap A \subset A$, je $(G \cap A)^* \subset A^*$, a tedy $G \cap (G \cap A)^* \subset G \cap A^*$

(e) Z (b) je $(A \cap B)^* \subset A^*$ a $(A \cap B)^* \subset B^*$, tedy je $(A \cap B)^* \subset A^* \cap B^*$.

(f) Z (b) je $A^* \subset (A \cup B)^*$ a $B^* \subset (A \cup B)^*$, tedy je $A^* \cup B^* \subset (A \cup B)^*$.

Je-li $x \in X \setminus (A^* \cup B^*)$, pak existují U, V okolí bodu x taková, že $A \cap U \in \mathcal{Z}$ a $B \cap V \in \mathcal{Z}$. Z vlastnosti ($\mathcal{Z}1$) pak $A \cap U \cap V \in \mathcal{Z}$, $B \cap V \cap U \in \mathcal{Z}$, a tedy z vlastnosti ($\mathcal{Z}2$) máme $(A \cup B) \cap U \cap V \in \mathcal{Z}$, proto $x \notin (A \cup B)^*$.

(g) Protože $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, postupným užitím (f) a (b) dostáváme $A^* = (A \setminus B)^* \cup (A \cap B)^* \subset (A \setminus B)^* \cup B^*$, a tedy $A^* \setminus B^* \subset (A \setminus B)^*$. □

1.2 Lokalizovatelné ideály

Řekneme, že ideál $\mathcal{Z}$ je *lokalizovatelný*, pokud splňuje:

$$(\forall x \in X \ \exists V \text{ otevřená, že } x \in V \text{ a } A \cap V \in \mathcal{Z}) \Rightarrow A \in \mathcal{Z},$$

neboli $A \in \mathcal{Z}$, kdykoliv je $A^* = \emptyset$.

Řekneme, že ideál $\mathcal{Z}$ je *silně lokalizovatelný*, pokud splňuje:

$$(\forall x \in A \ \exists V \text{ otevřená a } x \in V, \ A \cap V \in \mathcal{Z}) \Rightarrow A \in \mathcal{Z},$$

neboli množina, která je v $\mathcal{Z}$ lokálně, patří do $\mathcal{Z}$ celá.

Podívejme se, jak lze tyto ideály charakterizovat pomocí zobrazení $A \mapsto A^*$ a jaké další vlastnosti tak zobrazení díky lokalizovatenosti resp. silné lokalizovatelnosti získá.

Věta 1.2 *Nechť $\mathcal{Z}$ je ideál na $(X, \mathcal{T})$, pak je ekvivalentní:*

(i) $\mathcal{Z}$ *je lokalizovatelný,*

(ii) *pokud pro* $A \subset X$ *je* $A^* \cap \overline{A} = \emptyset$*, pak* $A \in \mathcal{Z}$*,*

(iii) *pro každou* $A \subset X$ *a pro každou otevřenou* V_{A^*}*,* $A^* \subset V_{A^*}$*, je* $A \setminus V_{A^*} \in \mathcal{Z}$*,*

(iv) *pokud pro* $A \subset X$ *existuje otevřená* V_{A^*} *tak, že* $A^* \subset V_{A^*}$ *a* $A \cap V_{A^*} \in \mathcal{Z}$*, pak* $A \in \mathcal{Z}$

Důkaz: (i)$\Leftrightarrow$ (ii): Podle Tvrzení 1.1(c) je $A^* \subset \overline{A}$, a tedy $A^* \cap \overline{A} = \emptyset$, právě když $A^* = \emptyset$. To, zda je $A \in \mathcal{Z}$, je tedy podle definice ekvivalentní lokalizovatelnosti idálu $\mathcal{Z}$.

(ii)$\Rightarrow$ (iii): Protože pro každou $A \subset X$ a otevřenou $V_{A^*} \supset A^*$ platí $(A \setminus V_{A^*})^* \subset A^* \subset V_{A^*}$, je $\overline{A \setminus V_{A^*}} \cap (A \setminus V_{A^*})^* \subset \overline{A \setminus V_{A^*}} \cap V_{A^*} \subset \overline{A} \setminus V_{A^*} = \emptyset$. Množina $A \setminus V_{A^*}$ tedy splňuje předpoklad z (ii), a je proto $A \setminus V_{A^*} \in \mathcal{Z}$.

(ii)$\Rightarrow$ (iii): Je $A = (A \setminus V_{A^*}) \cup (A \cap V_{A^*})$ a tedy $A \in \mathcal{Z}$ dle vlastnosti ($\mathcal{Z}$2).

(iv)$\Rightarrow$ (ii): Je-li $\overline{A} \cap A^* = \emptyset$, pak existuje otevřená V_{A^*} tak, že $A^* \subset V_{A^*}$ a $A \cap V_{A^*} = \emptyset$, a tedy $A \in \mathcal{Z}$. $\square$

Věta 1.3 ([4, Theorem 1.6]) *Nechť* $\mathcal{Z}$ *je ideál na* $(X, \mathcal{T})$*, pak je ekvivalentní:*

(i) $\mathcal{Z}$ *je silně lokalizovatelný,*

(ii) *pokud pro* $A \subset X$ *je* $A \cap A^* = \emptyset$*,pak* $A \in \mathcal{Z}$*,*

(iii) *pro každou* $A \subset X$ *je* $A \backslash A^* \in \mathcal{Z}$*,*

(iv) *pokud pro* $A \subset X$ *je* $A \cap A^* \in \mathcal{Z}$*, pak* $A \in \mathcal{Z}$*.*

Důkaz: (i)$\Leftrightarrow$(ii): Protože platí $A \cap A^* = \emptyset$, právě když $A \subset X \setminus A^* = \bigcup\{G :\ G \text{ otevřená}, G \cap A \in \mathcal{Z}\}$, neboli právě když A je lokálně v $\mathcal{Z}$, plyne dokazovaná ekvivalence z definice silné lokalizovatelnosti.

(ii)$\Rightarrow$ (iii): Pro množinu $A \backslash A^*$ platí $(A \setminus A^*) \cap (A \setminus A^*)^* \subset (A \setminus A^*) \cap A^* = \emptyset$, tedy splňuje předpoklad z (ii), a proto $A \setminus A^* \in \mathcal{Z}$.

(iii)$\Rightarrow$ (iv): Protože $A = (A \cap A^*) \cup (A \setminus A^*)$, plyne tato implikace z vlastnosti ideálu ($\mathcal{Z}$2).

(iv)$\Rightarrow$ (ii): Jasné. $\square$

Věta 1.4 ([4, Theorem 1.7]) *Nechť* $\mathcal{Z}$ *je lokalizovatelný ideál na* $(X, \mathcal{T})$*. Pak:*

(a) $\mathcal{Z} = \{A \subset X,\ A^* = \emptyset\}$*,*

(b) *Pokud* $B \in \mathcal{Z}$*, pak* $(A \cup B)^* = A^*$ *a* $(A \setminus B)^* = A^*$ *pro každou* $A \subset X$*.*

(c) *Je-li* $\mathcal{Z}$ *silně lokalizovatelný, pak* $A^{**} = A^*$ *pro každou* $A \subset X$*.*

Důkaz: (a) Je-li $A \in \mathcal{Z}$, pak je zřejmě $A^* = \emptyset$ (dokonce pro každý ideál). Naopak pokud $A^* = \emptyset$, pak pro lokalizovatelný ideál je $A \in \mathcal{Z}$ přímo z definice.

(b) První rovnost plyne z Tvrzení 1.1(f) a předchozího bodu, stejně tak i druhá rovnost, neboť $A^* = (A \cup B)^* = ((A \setminus B) \cup B)^* = (A \setminus B)^* \cup B^* = (A \setminus B)^*$.

(c)Nechť $\mathcal{Z}$ je silně lokalizovatelný. Z Tvrzení 1.1(c) již víme , že $A^{**} \subset A^*$. Dále $A^* \setminus A^{**} \subset (A \setminus A^*)^*$ dle Tvrzení 1.1(g), ale z (a) a Věty 1.2 je $(A \setminus A^*)^* = \emptyset$, tedy $A^* \subset A^{**}$. $\square$

Pokud $\mathcal{Z}$ není lokalizovatelný, uvažujme jím generovaný lokalizovatelný ideál

$$\mathcal{Z}_{loc} = \{I \subset X : \forall x \in X \ \exists U \text{ otevřené okolí } x \text{ tak, že } I \cap U \in \mathcal{Z}\}.$$

Je vidět, že pro každou $A \subset X$ vyjde množina A^* stejně vzhledem k $\mathcal{Z}$ i k $\mathcal{Z}_{loc}$, můžeme tedy v dalším textu bez újmy na obecnosti předokládat, že $\mathcal{Z}$ je lokalizovatelný.

1.3 Ideálová topologie

Na $(X, \mathcal{T})$ tedy nyní máme lokalizovatelný ideál $\mathcal{Z}$ a vzhledem k němu definovanou operaci $A \mapsto A^*$. Z již dokázaných vlastností se snadno ověří, že zobrazení c definované pro $A \subset x$ předpisem $c(A) := A \cup A^*$ splňuje Kuratowského axiomy uzávěru, tj.:

- $c(\emptyset) = \emptyset$,
- $A \subset c(A)$,
- $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$,
- $c(c(A)) = c(A)$.

Zobrazení c tedy na X určuje novou, ideálovou, topologii. Označíme ji $\mathcal{R}$, a potom je $c(A) = \overline{A}^{\mathcal{R}}$.

Podle [4, Proposition 1.8] ukážeme, jak lze ideálovou topologii popsat pomocí původní $\mathcal{T}$ a množin z $\mathcal{Z}$:

Věta 1.5 *(a) Topologie $\mathcal{R}$ je jemnější než topologie $\mathcal{T}$.*

(b) Soubor množin $\mathcal{B}_{\mathcal{T},\mathcal{Z}} = \{G \setminus J,\ G \in \mathcal{T},\ J \in \mathcal{Z}\}$ tvoří bázi topologie $\mathcal{R}$.

(c) Pokud $\mathcal{Z}$ je silně lokalizovatelný, pak $\mathcal{B}_{\mathcal{T},\mathcal{Z}} = \mathcal{R}$.

Důkaz: (a) Protože $A^* \subset \overline{A}$ (Tvrzení 1.1(c)), je $\overline{A}^{\mathcal{R}} = A \cup A^* \subset \overline{A}$ pro každou $A \subset X$, a tedy $\mathcal{R}$ je jemnější než $\mathcal{T}$.

(b) Nejdříve ukážeme, že $\mathcal{B}_{\mathcal{T},\mathcal{Z}} \subset \mathcal{R}$. Nechť $A = G \setminus J$, kde G je otevřená a $J \in \mathcal{Z}$. Pak podle (a) je G i $\mathcal{R}$-otevřená a z Věty 1.4(a) je $J^* = \emptyset$, tedy J je $\mathcal{R}$ uzavřená. Množina A je tedy $\mathcal{R}$-otevřená jako rozdíl $\mathcal{R}$-otevřené a $\mathcal{R}$-uzavřené množiny.

Nechť A je $\mathcal{R}$-otevřená. Protože $X \setminus A$ je $\mathcal{R}$-uzavřená, je $(X \setminus A)^* \subset X \setminus A$ a $A \subset X \setminus (X \setminus A)^*$. Pro každé $x \in A$ tedy existuje otevřené okolí G_x tak, že $G_x \cap (X \setminus A) \in \mathcal{Z}$, neboli $G_x \setminus A \in \mathcal{Z}$. Položme $J_x = G_x \setminus A$. Pak $x \in G_x \setminus J_x = G_x \cap A$ a

$$A = \bigcup_{x \in A} (G_x \setminus J_x).$$

$\mathcal{B}_{\mathcal{T},\mathcal{Z}}$ je tedy bází topologie $\mathcal{R}$.

(c) Nechť $\mathcal{Z}$ je navíc silně lokalizovatelný. Ukážeme, že pak $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{T},\mathcal{Z}}$. Nechť A je $\mathcal{R}$ otevřená, pak z (b) víme, že lze psát

$$A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (G_\alpha \setminus J_\alpha), \text{ kde } G_\alpha \in \mathcal{T},\ J_\alpha \in \mathcal{Z}.$$

Položme

$$G = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \quad \text{a} \quad J = G \setminus A.$$

Potom je $J \subset G$ a pro každé $\alpha \in \Lambda$ je $G_\alpha \cap J = G_\alpha \setminus A \subset J_\alpha \in \mathcal{Z}$, tedy J je lokálně v $\mathcal{Z}$ a díky sílné lokalizovatelnosti $J \in \mathcal{Z}$. Pak $A = G \setminus J$, kde G je otevřená a $J \in \mathcal{Z}$, tedy $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{T},\mathcal{Z}}$. □

V důkazech budeme často využívat předchozí větu k tomu abychom ukázali, že nějaká množina je (resp. obsahuje množinu) tvaru $G \setminus J$, G otevřená a $J \in \mathcal{Z}$. Díky vlastnosti ideálu ($\mathcal{Z}1$) můžeme vždy bez újmy na obecnosti předpokládat, že $J \subset G$.

Nyní snadno zjistíme jak vypadají množiny $\mathcal{R}$-uzavřené a v případě silně lokalizovatelného σ-ideálu lze popsat vztah borelovských množin v $\mathcal{T}$ a $\mathcal{R}$.

Důsledek 1.6 *(a) $A \subset X$ je $\mathcal{R}$ uzavřená, právě když je tvaru*

$$A = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (F_\alpha \cup J_\alpha), \text{ kde } F_\alpha \text{ jsou uzavřené a } J_\alpha \in \mathcal{Z}.$$

(b) Je-li $\mathcal{Z}$ silně lokalizovatelný, pak $A \subset X$ je $\mathcal{R}$-uzavřená, právě když $A = F \cup I$, kde F je uzavřená a $I \in \mathcal{Z}$.

(c) Je-li $\mathcal{Z}$ silně lokalizovatelný σ-ideál, pak $A \in \mathcal{B}orel((X,\ \mathcal{R}))$, právě když existuje $B \in \mathcal{B}orel((X,\ \mathcal{T}))$ a $J \in \mathcal{Z}$ tak, že $A = B \triangle J$. □

Důkaz: (a) a (b) plynou z předchozí věty přechodem k doplňkům.

(c) Nechť $\mathcal{Z}$ je silně lokalizovatelný σ-ideál. Označme $\mathcal{A} = \{B \triangle I :\ B \in \mathcal{B}orel((X,\ \mathcal{T})),\ I \in \mathcal{Z}\}$, pak $\mathcal{A}$ je zřejmě σ-algebra, a protože obsahuje $\mathcal{R}$-otevřené a $\mathcal{R}$-uzavřené množiny (z Věty 1.5(c)), je $\mathcal{B}orel((X,\ \mathcal{R})) \subset \mathcal{A}$.

Protože $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$, je $\mathcal{B}orel((X,\ \mathcal{T})) \subset \mathcal{B}orel((X,\ \mathcal{R}))$ a z (b) je $\mathcal{Z} \subset \mathcal{B}orel((X,\ \mathcal{R}))$, a protože $\mathcal{B}orel((X,\ \mathcal{R}))$ je σ-algebra, je $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}orel((X,\ \mathcal{R}))$. □

Lemma 1.7([1, Lemma 1, Lemma 2]) *Nechť $\mathcal{Z}$ je silně lokalizovatelný. Pak:*

(a) Pro každou $G \subset X$ otevřenou a $A \subset X$ platí

$$(G \cap A)^* = (G \cap A^*)^* = \overline{G \cap A^*}.$$

(b) Pro každou $G \subset X$ $\mathcal{R}$-otevřenou a $A \subset X$ platí

$$\overline{G \cap A^*}^{\mathcal{R}} = \overline{G \cap A^*}.$$

Důkaz: (a) Nechť G je otevřená a $A \subset X$. Z Tvrzení 1.1(d) plyne, že $G \cap A^* \subset (G \cap A)^*$. Pak z Tvrzení 1.1(b) a Věty 1.4(a) je $(G \cap A^*)^* \subset (G \cap A)^{**} = (G \cap A)^*$. Dále podle Tvrzení 1.1(g),(e) dostaneme

$$\begin{aligned}(G \cap A)^* \setminus (G \cap A^*)^* &\subset (G \cap (A \setminus A^*))^* \\ &\subset G^* \cap (A \setminus A^*)^* = \emptyset,\end{aligned}$$

neboť díky silné lokalizovatelnosti $\mathcal{Z}$ je množina $(A \setminus A^*)^*$ prázdná (z Vět 1.2, 1.4). Tedy $(G \cap A)^* \subset (G \cap A^*)^*$, a máme tak první rovnost.

Z nerovnosti $G \cap A^* \subset (G \cap A)^*$ dále plyne $\overline{G \cap A^*} \subset (G \cap A)^*$, neboť množina $(G \cap A)^*$ je uzavřená (Tvrzení 1.1(a)). Z Tvrzení 1.1(c) pak plyne

$$\overline{G \cap A^*} \supset (G \cap A^*)^* = (G \cap A)^*,$$

a máme tedy $\overline{G \cap A^*} = (G \cap A)^*$.

(b) Protože $\mathcal{R} \supset \mathcal{T}$, platí $\overline{G \cap A^*}^{\mathcal{R}} \subset \overline{G \cap A^*}$, dokážeme tedy opačnou inkluzi. Buď G $\mathcal{R}$-otevřená, pak podle Věty 1.5(c) je tvaru $G = G_1 \setminus J$, kde G_1 je otevřená a $J \in \mathcal{Z}$. Potom platí

$$\begin{aligned}\overline{G \cap A^*}^{\mathcal{R}} &= \overline{(G_1 \setminus J) \cap A^*}^{\mathcal{R}} = \overline{(G_1 \cap A^*) \setminus J}^{\mathcal{R}} \\ &= (G_1 \cap A^*) \setminus J \cup (G_1 \cap A^*)^* \\ &= (G_1 \cap A^*) \setminus J \cup \overline{G_1 \cap A^*} = \overline{G_1 \cap A^*},\end{aligned}$$

kde jsme použili Větu 1.4(b) a část (a) tohoto lemmatu. Z tohoto již plyne

$$\begin{aligned}\overline{G \cap A^*} &= \overline{(G_1 \setminus J) \cap A^*} = \overline{(G_1 \cap A^*) \setminus J} \\ &\subset \overline{G_1 \cap A^*} = \overline{G \cap A^*}^{\mathcal{R}}.\end{aligned}$$

□

Důsledek 1.8 *(a)* ([1, Corollary of Lemma 1]) *Otevřená množina z ideálu $\mathcal{Z}$ je obsažena v $X \setminus X^*$.*

(b) ([1, Corollary of Lemma 2]) *Pokud $\mathcal{Z}$ je silně lokalizovatelný a prostor X splňuje $X^* = X$, pak pro každou $\mathcal{R}$-otevřenou množinu G platí $\bar{G}^{\mathcal{R}} = \overline{G}$*

Důkaz: (a) Všimněme si, že v důkazu části (a) předchozího lemmatu jsme u inkluze $\overline{G \cap A^*} \subset (G \cap A)^*$, pro $A \subset X$ a G otevřenou, nepotřebovali silnou lokalizovatelnost. Položíme-li $A = X$, dostáváme tak,že pro každou G otevřenou je $G^* \supset \overline{G \cap X^*}$. Je-li $G \in Z$, pak podle Věty 1.4(a) je $G^* = \emptyset$ a tedy $G \subset X \setminus X^*$.

(b) Plyne z části (b) předchozího lemmatu, položíme-li $A = X$. □

Následující věty a jejich důsledky formulujeme podle Vět 2, 3 a důsledků Věty 3 z [1], v předpokladech nám ale bude stačit pouhá lokalizovatelnost $\mathcal{Z}$.

Věta 1.9 *Nechť ideál $\mathcal{Z}$ obsahuje všechny jednoprvkové podmnožiny X, potom pro $A \subset X$ platí:*

(a) $A^* = der_{\mathcal{R}} A$,

(b) A je $\mathcal{R}$-hustě rozložená, právě když $A \subset A^*$,

(c) A je $\mathcal{R}$-řídce rozložená, právě když $A \in \mathcal{Z}$, neboli právě když A je $\mathcal{R}$-uzavřená a diskrétní.

Důkaz: (a) $x \in X$ je $\mathcal{R}$-hromadný bod A, právě když $x \in \overline{A \setminus \{x\}}^{\mathcal{R}}$. Protože jednoprvkové množiny jsou v $\mathcal{Z}$, dostaneme z Věty 1.4(b), že

$$\overline{A \setminus \{x\}}^{\mathcal{R}} = A \setminus \{x\} \cup (A \setminus \{x\})^* = A \setminus \{x\} \cup A^*.$$

Proto je $x \in \overline{A \setminus \{x\}}^{\mathcal{R}}$, právě když $x \in A^*$.

(b) Množina A je $\mathcal{R}$ hustě rozložená, právě když $A \subset der_{\mathcal{R}} A$, a tedy podle (a) právě když $A \subset A^*$.

(c) Nechť A je $\mathcal{R}$-řídce rozložená a V_{A^*} je otevřená taková, že $V_{A^*} \supset A^*$. Pak pišme $A = (A \setminus V_{A^*}) \cup (A \cap V_{A^*})$ a z Věty 1.2((i)$\Rightarrow$(iii)) je $A \setminus V_{A^*} \in \mathcal{Z}$. Užitím Věty 1.4(b) dostaneme $A \cap V_{A^*} \subset A^* = (A \cap V_{A^*})^*$, což znamená, že $A \cap V_{A^*}$ je množina $\mathcal{R}$-hustě rozložená obsažená v A. Je-li A $\mathcal{R}$-řídce rozložená, tj. A neobsahuje žádnou $\mathcal{R}$-hustě rozloženou podmnožinu, pak musí nutně být $A \cap V_{A^*} = \emptyset$, a tedy podle Věty 1.2((i)$\Rightarrow$(iv)) je $A \in \mathcal{Z}$.

Je-li $A \in \mathcal{Z}$, pak A je zřejmě $\mathcal{R}$-uzavřená a z vlastnosti($\mathcal{Z}1$) je i každá její podmnožina $\mathcal{R}$-uzavřená, a tedy A je diskrétní množina v $\mathcal{R}$.

Pokud je $A \subset X$ $\mathcal{R}$-uzavřená a diskrétní, pak $der_{\mathcal{R}} A = \emptyset$, a A je tedy $\mathcal{R}$-řídce rozložená. □

Věta 1.10 *Nechť $\mathcal{Z}$ obsahuje všechny jednoprvkové podmnožiny X. Pak každá množina $A \in \mathcal{Z}$ je tvaru $A = G \cup N$, kde G je $\mathcal{R}$-otevřená množina obsažená v $X \setminus X^*$ a N je $\mathcal{R}$-řídká množina obsažená v X^*.*

Důkaz: Nechť $A \in \mathcal{Z}$, pak z předchozí věty víme, že A je $\mathcal{R}$-řídce rozložená. Obecně v každé topologii platí, že řídce rozložená množina je sjednocením otevřené a řídké množiny, a tedy v našem případě je A sjednocením nějaké $\mathcal{R}$-otevřené G a $\mathcal{R}$-řídké N, stačí tedy ověřit, že tyto množiny mají i zbylé požadované vlastnosti.

Množina G je podle Věty 1.5(b) tvaru

$$G = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \setminus J_\alpha \text{ , kde } G_\alpha \text{ jsou otevřené, } J_\alpha \in \mathcal{Z},\ \forall \alpha \in \Lambda.$$

Z vlastnosti ideálu ($\mathcal{Z}1$) potom pro každé $\alpha \in \Lambda$ je $G_\alpha \setminus J_\alpha \in \mathcal{Z}$ a z vlastnosti ($\mathcal{Z}2$) je i $G_\alpha \in \mathcal{Z}$. Podle Důsledku 1.8(a) je tedy $G_\alpha \subset X \setminus X^*$ pro každé $\alpha \in \mathcal{Z}$, a tudíž je

$$G \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \subset X \setminus X^*.$$

Položme $N_1 = N \cap (X \setminus X^*)$, pak $N_1 \in \mathcal{Z}$, je $\mathcal{R}$-uzavřená a $\mathcal{R}$- řídká, a má tedy prázdný $\mathcal{R}$-vnitřek. Užitím Věty 1.4(b) dostaneme

$$\begin{aligned}\emptyset &= Int_{\mathcal{R}} N_1 = X \setminus \overline{X \setminus N_1}^{\mathcal{R}} \\ &= X \setminus ((X \setminus N_1) \cup (X \setminus N_1)^*) = X \setminus ((X \setminus N_1) \cup X^*) \\ &= N_1 \cup (X \setminus X^*) = N_1.\end{aligned}$$

Je tedy $N \subset X^*$. □

Důsledek 1.11 *Nechť $\mathcal{Z}$ obsahuje všechny jednoprvkové podmnožiny X. Pak:*

(a) Každá množina z ideálu $\mathcal{Z}$ je $\mathcal{R}$-řídká, právě když platí $X^* = X$.

(b) Pokud prostor X splňuje $X^* = X$, pak doplněk každé množiny z ideálu $\mathcal{Z}$ je hustý.

Důkaz: (a) Plyne z předchozí věty.

(b) Je-li $A \in \mathcal{Z}$, pak dle (a) je A $\mathcal{R}$-řídká. Nechť U je neprázdná otevřená. Protože U je zároveň i $\mathcal{R}$-otevřená, ze $\mathcal{R}$-řídkosti A evistuje neprázdná $\mathcal{R}$-otevřená V tak, že $V \subset U$ a $V \cap A = \emptyset$. Pak $U \cap (X \setminus A) \supset V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ a $X \setminus A$ je tedy hustá. □

1.4 $\mathcal{R}$-řídké množiny

Nyní budeme studovat vlastnosti $\mathcal{R}$-řídkých množin, jejich vztah k ideálu $\mathcal{Z}$ a řídkým množinám. Vycházíme zde [1, §3], kde se ve všech tvrzeních předpokládá silná lokalizovatelnost. Některé z nich však platí i za předpokladů pouhé lokalizovatelnosti - buď se silná lokalizovatelnost v důkazu vůbec nepoužívá nebo ji lze obejít.

V celé této části budeme předpokládat, že prostor X navíc splňuje $X^* = X$ a ideál $\mathcal{Z}$ obsahuje všechny jednoprvkové podmnožiny X.

Lemma 1.12 ([1, Lemma 3]) *Řídká množina je $\mathcal{R}$-řídká.*

Důkaz: Nechť $A \subset X$ je řídká a U je neprázdná $\mathcal{R}$-otevřená. Z Věty 1.5(b) obsahuje U množinu tvaru $U_1 \setminus J$, kde $U_1 \neq \emptyset$ je otevřená a $J \in \mathcal{Z}$. Z řídkosti A pak existuje neprázdná otevřená $V_1 \subset U_1$, že $V_1 \cap A = \emptyset$. Položme $V := V_1 \setminus J$. Pak V je $\mathcal{R}$-otevřená neprázdná, $V \subset U_1 \subset U$ a $V \cap A = \emptyset$. Tedy A je $\mathcal{R}$-řídká. □

Lemma 1.13 (podle [1, Lemma 4]) *Pro každou $A \subset X$ platí:*

(a) $\overline{Int_{\mathcal{R}}\overline{A}^{\mathcal{R}}}$ je množina všech bodů, ve kterých A není $\mathcal{R}$-řídká,

(b) $\overline{Int_{\mathcal{R}}\overline{A}^{\mathcal{R}}} \subset A^*$,

(c) pokud $\mathcal{Z}$ je silně lokalizovatelný, pak $\overline{Int_{\mathcal{R}}\overline{A}^{\mathcal{R}}} = \overline{Int\ A^*}$.

Důkaz: (a) Označme $A_d = \overline{Int_{\mathcal{R}}\overline{A}^{\mathcal{R}}}$. Nechť $x \in A_d$ a G je otevřené okolí x. Potom je množina $Int_{\mathcal{R}}\overline{A}^{\mathcal{R}} \cap G$ neprázdná (neboť $A_d \cap G \neq \emptyset$), $\mathcal{R}$-otevřená a obsažená v $A \cap G$, protože

$$Int_{\mathcal{R}}\overline{A}^{\mathcal{R}} \cap G \subset \overline{A}^{\mathcal{R}} \cap G \subset \overline{G \cap A}^{\mathcal{R}}.$$

Tedy $A \cap G$ není $\mathcal{R}$-řídká a A není $\mathcal{R}$-řídká v x.

Naopak, nechť $x \notin A_d$. Množina $G = X \setminus A_d$ je otevřené okolí x. Nechť V je neprázdná $\mathcal{R}$ otevřená. Položme

$$U = V \setminus (\overline{A}^{\mathcal{R}} \setminus Int_{\mathcal{R}}\overline{A}^{\mathcal{R}}).$$

Potom U je $\mathcal{R}$-otevřená, $U \subset V$, a protože $\overline{A}^{\mathcal{R}} \setminus Int_{\mathcal{R}}\overline{A}^{\mathcal{R}}$ je $\mathcal{R}$-řídká, je U neprázdná. Dále je

$$\begin{aligned} U \cap (A \cap G) &= ((V \setminus \overline{A}^{\mathcal{R}}) \cup (V \cap Int_{\mathcal{R}}\overline{A}^{\mathcal{R}})) \cap (A \cap G) \\ &\subset ((V \setminus \overline{A}^{\mathcal{R}}) \cap A) \cup (V \cap Int_{\mathcal{R}}\overline{A}^{\mathcal{R}} \cap G) = \emptyset. \end{aligned}$$

Tedy $A \cap G$ je $\mathcal{R}$-řídká, neboli A je $\mathcal{R}$-řídká v x.

(b) Podle Důsledku 1.11(a) jsou body, ve kterých A není $\mathcal{R}$-řídká, obsaženy v A^*. Z (a) pak dostaneme $\overline{Int_{\mathcal{R}}\overline{A}^{\mathcal{R}}} \subset A^*$.

(c) Nechť $\mathcal{Z}$ je silně lokalizovatelný. Protože $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$, je

$$\overline{Int_{\mathcal{R}}\overline{A}^{\mathcal{R}}} \supset \overline{Int\ A^*}.$$

Množina $X \setminus \overline{A}^{\mathcal{R}}$ je $\mathcal{R}$-otevřená, z Důsledku 1.8(b) proto dostaneme

$$\begin{aligned} Int_{\mathcal{R}}\overline{A}^{\mathcal{R}} &= X \setminus \overline{(X \setminus \overline{A}^{\mathcal{R}})}^{\mathcal{R}} \\ &= X \setminus \overline{(X \setminus \overline{A}^{\mathcal{R}})} = Int\ \overline{A}^{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Dále platí

$$Int\ \overline{A}^{\mathcal{R}} = Int(Int\ \overline{A}^{\mathcal{R}}) \subset Int(\overline{Int_{\mathcal{R}}\overline{A}^{\mathcal{R}}}) \subset Int\ A^*,$$

kde jsme v poslední inkluzi použili část (b).

Přidáním uzávěru tedy dostáváme

$$\overline{Int\ A^*} \supset \overline{Int\ \overline{A}^{\mathcal{R}}} = \overline{Int_{\mathcal{R}}\overline{A}^{\mathcal{R}}}$$

. □

Lemma 1.14 (podle [1, Lemma 5]) *Každá $\mathcal{R}$-řídká množina je sjednocením řídké množiny a množiny patřící do $\mathcal{Z}$.*

Důkaz: Nechť $A \subset X$ je $\mathcal{R}$ řídká. Pak $\overline{A} = A \cup (\overline{A} \setminus A)$ je také $\mathcal{R}$-řídká, neboť $\overline{A} \setminus A$ je řídká a dle Lemmatu 1.12 tedy i $\mathcal{R}$-řídká. Nechť V je otevřená, splňující $(\overline{A})^* \subset V$. Potom z Věty 1.2 ((i)⇒(iii)) a vlastnosti (2) ideálu $\mathcal{Z}$ je $\overline{A} \setminus \overline{V} \in \mathcal{Z}$. Množina $\overline{A} \cap \overline{V}$ je uzavřená a $\mathcal{R}$-řídká, má tedy prázdný $\mathcal{R}$-vnitřek, a protože je $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$, má prázdný vnitřek, a je tedy řídká.

Je tedy

$$A = ((\overline{A} \setminus \overline{V}) \cap A) \cup ((\overline{A} \cap \overline{V}) \cap A),$$

kde $(\overline{A} \setminus \overline{V}) \cap A \in \mathcal{Z}$ a $(\overline{A} \cap \overline{V}) \cap A$ je řídká. □

Věta 1.15 ([1, Theorem 4]) *Pokud $\mathcal{Z}$ obsahuje všechny řídké množiny, pak $A \in \mathcal{Z}$,* *právě když A je $\mathcal{R}$-řídká.*

Důkaz: Plyne z Lemmatu 1.14 a Důsledku 1.11(a). □

Následující důsledek platí dokonce i pro prostor X, který nesplňuje podmínku $X^* = X$.

Důsledek 1.16 ([1, Corollary of Theorem 4]) *Nechť $\mathcal{Z}$ je silně lokalizovatelný. Pak rovnost $A^* = \overline{Int\ A^*}$ platí pro každou $A \subset X$, právě když každá řídká množina patří do $\mathcal{Z}$.*

Důkaz: Je-li splněno, že $X^* = X$, pak tvrzení plyne přímo z Lemmatu 1.13 a předcházející věty.

Pokud X nesplňuje $X^* = X$, pak pišme $A = A_1 \cup A_2$, kde $A_1 \subset X \setminus X^*$ a $A_2 \subset X^*$. Z předchozího pak pro A_2 platí $A_2^* = \overline{Int\ A_2^*}$, a protože z Věty 1.3 je $A_1 \in \mathcal{Z}$, tedy $A_1^* = \emptyset$, je $A^* = A_2^*$ a máme $A^* = \overline{Int\ A^*}$. □

1.5 Další vlastnosti

V této části předpokládejme, že $\mathcal{Z}$ obsahuje všechny jednoprvkové podmnožiny X. Nejdříve se podle [4, Proposition 1.10] podíváme, jak to vypadá s regularitou ideálové topologie.

Tvrzení 1.17 *Topologie $\mathcal{R}$ je na $X \setminus X^*$ regulární.*

Důkaz: Množina $X \setminus X^*$ je otevřená, tedy i $\mathcal{R}$-otevřená. Podle předpokladu je každý bod $x \in X \setminus X^*$ v $\mathcal{Z}$, a tedy $\mathcal{R}$-uzavřený, a z Věty 1.10 je zároveň i $\mathcal{R}$-uzavřený. $X \setminus X^*$ je tedy diskrétní množina v $\mathcal{R}$ a tedy $\mathcal{R}$ je na této množině regulární. □

Důsledek 1.18 *Pokud je $X^* = \emptyset$, topologie $\mathcal{R}$ je regulární.* □

Lemma 1.19 *Je-li $X^* = X$, pak pro každou $A \subset X$ existuje uzavřená množina B tak, že $Int_{\mathcal{R}} A \subset B \subset \overline{A}^{\mathcal{R}}$.*

Důkaz: Pro $A \subset X$ položme $B := A^*$. Pak B je uzavřená (Tvrzení 1.1(a)), zřejmě $B \subset \overline{A}^{\mathcal{R}}$ a z Lemmatu 1.13(b) je $Int_{\mathcal{R}} A \subset \overline{Int_{\mathcal{R}} \overline{A}^{\mathcal{R}}} \subset A^*$. □

Věta 1.20 *Je-li na X^* topologie $\mathcal{R}$ ostře jemnější než topologie $\mathcal{T}$, pak $\mathcal{R}$ není na X regulární.*

Důkaz: Ke sporu předpokládejme, že $\mathcal{R}$ je na X^* ostře jemnější než $\mathcal{T}$ a zároveň je regulární na X. Pak existuje $A \subset X^*$, která je $\mathcal{R}$-uzavřená, ale není uzavřená. Zvolme $x \in \overline{A} \setminus A$. Z regularity $\mathcal{R}$ existuje $\mathcal{R}$-otevřená $U \subset X$, že $A \subset U \subset \overline{U}^{\mathcal{R}} \subset X \setminus \{x\}$. Množina $U \cap X^*$ je $\mathcal{R}$-otevřená v X^* a z předchozího lemmatu existuje B uzavřená v X^*, že $U \cap X^* \subset B \subset \overline{U \cap X^*}^{\mathcal{R}}$. Je tedy

$\overline{A} \subset \overline{B} = B \subset X \setminus \{x\}$ a to je ve sporu s volbou x. $\square$

V důkazu Tvrzení 1.17 jsme ukázali, že $X \setminus X^*$ je diskrétní množina, a tedy pokud nás nyní bude zajímat, kdy je $(X, \mathcal{R})$ Baireův prostor, rozhodující bude opět podmínka pro X^*, neboť $X \setminus X^*$ je Baireův.

Věta 1.21 ([2, Lemma 2(b)]) *Nechť $X^* = X$. Potom:*

(a) $(X, \mathcal{R})$ je Baireův, právě když žádná otevřená množina není tvaru $M \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, kde M je 1. kategorie a $I_n \in \mathcal{Z}$, $n \in \mathbb{N}$,

(b) je-li $(X, \mathcal{R})$ Baireův a $\mathcal{Z}$ obsahuje všechny řídké množiny, je $(X, \mathcal{R})$ dědičně Baireův.

Důkaz: (a) Nechť existuje otevřená $G \subset X$ tak, že $G = M \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, kde M je 1. kategorie a $I_n \in \mathcal{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Protože $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$ je G i $\mathcal{R}$-otevřená a z Důsledku 1.11(a) a Lemmatu 1.12 je $\mathcal{R}$-1. kategorie. $(X, \mathcal{R})$ tedy není Baireův.

Naopak, nechť $(X, \mathcal{R})$ není Baireův. Existuje tedy $\mathcal{R}$-otevřená množina A, která je $\mathcal{R}$-1. kategorie. Z Věty 1.5(b) A obsahuje $\mathcal{R}$-otevřenou množinu $A_1 = G \setminus J$, kde G je otevřená a $J \in \mathcal{Z}$. Protože A_1 je též $\mathcal{R}$-1. kategorie, je podle Lemmatu 1.14 tvaru $A_1 = M \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, kde M je 1.kategorie a $I_n \in \mathcal{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je $G = M \cup J \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, tj. G je otevřená množina, která je sjednocením množiny 1.kategorie se spočetně mnoha množin z $\mathcal{Z}$.

(b) Nechť $(X, \mathcal{R})$ je Baireův a každá řídká množina je v $\mathcal{Z}$. Buď $F \subset X$ $\mathcal{R}$-uzavřená, pak $F = Int_{\mathcal{R}}F \cup bd_{\mathcal{R}}F$. Množina $Int_{\mathcal{R}}F$ je $\mathcal{R}$-otevřená, a tedy Baireův prostor. $bd_{\mathcal{R}}F$ je $\mathcal{R}$ řídká, z Věty 1.15 je tedy $bd_{\mathcal{R}}F \in \mathcal{Z}$ a z Věty 1.9(c) je to diskrétní množina, a to je Baireův prostor. Tedy F je Baireův prostor. $\square$

Kapitola 2

Příklady ideálových topologií

2.1 Ideál konečných množin

Jednoduchým příkladem ideálu na X jsou konečné podmnožiny, tj. $\mathcal{Z} = \{Z \subset X,\ Z \text{ je konečná}\}$. Pokud X je T_1 prostor, nová topologie splyne s původní. V případě, že X není T_1, modifikací topologie pomocí $\mathcal{Z}$ z něj T_1 prostor vznikne.

Tvrzení 2.1 *Je-li $\mathcal{Z}$ ideál konečných podmnožin X, pak:*

(a) $\mathcal{R} = \mathcal{T}$, právě když $\mathcal{T}$ je T_1,

(b) $\mathcal{R}$ je vždy T_1.

Důkaz: (a) $\mathcal{T}$ je T_1, právě když body z X jsou uzavřené množiny, což je, právě když konečné množiny jsou uzavřené, a to je právě když všechny množiny tvaru $G \setminus J$, kde G je otevřená a $J \in \mathcal{Z}$, jsou otevřené. Tedy $\mathcal{T}$ je T_1, právě když bázi $\mathcal{R}$ tvoří všechny otevřené množiny, což znamená, že $\mathcal{R} = \mathcal{T}$.

(b) Protože množiny z ideálu $\mathcal{Z}$ jsou $\mathcal{R}$-uzavřené, jsou speciálně i jednobodové množiny $\mathcal{R}$-uzavřené, a $\mathcal{R}$ je tedy T_1. $\square$

Poznámka 2.2 Že topologie splývají, pokud X je T_1 prostor lze dokázat i takto: $x \in A^*$, právě když pro každé okolí U bodu x je $U \cap A$ nekonečná, což je (v případě T_1 prostoru) právě když x je hromadným bodem A, tj. $A^* = \operatorname{der} A$. Pro každou $A \subset X$ je tedy $\bar{A}^{\mathcal{R}} = A \cup A^* = A \cup \operatorname{der} A = \overline{A}$.

Dále předpokládejme, že X je T_1.

Tvrzení 2.3 *Nechť $\mathcal{Z}$ je ideál konečných podmnožin X. Potom:*

(a) je-li X kompaktní, pak $\mathcal{Z}$ je lokalizovatelný,

(b) $\mathcal{Z}$ je silně lokalizovatelný, právě když X je konečný.

Důkaz: (a) Nechť X je kompaktní a $A \subset X$ splňuje, že pro každé $x \in X$ existuje otevřená V_x tak, že $V_x \cap A \in \mathcal{Z}$. Pak soubor $\{V_x :\ x \in X\}$ je otevřeným pokrytím X a lze z něj vybrat konečné podpokrytí $V_{x_1}, ..., V_{x_n}$. Pak $A \subset \bigcup_{i=1}^{n}(V_{x_i} \cap A)$ je konečná, tedy je v $\mathcal{Z}$. $\mathcal{Z}$ je tedy lokalizovatelný.

(b) Je-li X konečný, pak je zřejmě $\mathcal{Z}$ silně lokalizovatelný.

Pokud je X nekonečný, pak obsahuje nějakou diskrétní nekonečnou množinu. Ta je však lokálně v $\mathcal{Z}$, a $\mathcal{Z}$ tudíž není silně lokalizovatelný. $\square$

Nyní využijeme tohoto ideálu k nalezení protipříkladů, ukazujících nutnost předpokladu silné lokalizovatelnosti v některých tvrzeních z první kapitoly.

Příklad 2.4 1. Mějme $X = [0, 1]$ s restrikcí eukleidovské topologie na $\mathbb{R}$, což je kompakt, a $\mathcal{Z}$ je tedy na tomto prostoru lokalizovatelný. Nechť $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Pak $A^* = \{0\}$ a $A^{**} = \emptyset$. Pro lokalizovatelný ideál tedy nemusí platit, že $A^{**} = A^*$ pro každou $A \subset X$, předpoklad silné lokalizovatelnosti $\mathcal{Z}$ ve Větě 1.4(c) je proto nutný.

2. Požadavek silné lokalizovatelnosti je nutný i v Lemmatu 1.7(a), kde se jednalo o rovnost $(G \cap A)^* = (G \cap A^*)^* = \overline{G \cap A^*}$ pro $A \subset X$ a G otevřenou. Že pouhá lokalizovatelnost nestačí pro rovnost první a druhé množiny a druhé a třetí množiny, plyne z předchozího, neboť položíme-li $G = X$, dostaneme $A^* = A^{**}$, a o tom jsme již ukázali, že platit nemusí.

V případě rovnosti první a třetí množiny ponechme prostor $X = [0, 1]$ jako v 1. a $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, dále položme $G = (0, 1)$. Potom je $(G \cap A)^* = \{0\}$, ale $\overline{G \cap A^*} = \emptyset$.

2.2 Ideál spočetných množin

Nechť $\mathcal{Z} = \{Z \subset X,\ Z \text{ je spočetná}\}$. Operace $*$ definovaná vzhledem k tomuto ideálu pak množině $A \subset X$ přiřadí

$$A^* = \{x \in X,\ \text{pro každé otevřené okolí } U \text{ bodu } x \text{ je } U \cap A \text{ nespočetná}\},$$

tato množina bývá někdy označována jako množina kondenzačních bodů A.

Tvrzení 2.5 *Nechť $\mathcal{Z}$ je ideál spočetných podmnožin X. Potom:*

(a) je-li X je Lindelöfův, pak $\mathcal{Z}$ je lokalizovatelný,

(b) $\mathcal{Z}$ je silně lokalizovatelný, právě když X je dědičně Lindelöfův.

Důkaz: (a) Nechť X je Lindelöfův a $A \subset X$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje okolí V_x tak, že $V_x \cap A \in \mathcal{Z}$. Systém $\{V_x : x \in X\}$ tvoří pokrytí X, lze z něj tedy vybrat spočetné podpokrytí $\{V_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Potom je $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V_{x_n} \cap A)$, A je tedy spočetná a $\mathcal{Z}$ je lokalizovatelný.

(b) Nechť X je dědičně Lindelöfův a $A \subset X$ taková, že pro každé $x \in A$ existuje okolí V_x tak, že $V_x \cap A \in \mathcal{Z}$. Ze systému $\{V_x :\ x \in A\}$ lze vybrat spočetný podsystém $\{V_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$ tak, že $\bigcup_{x \in A} V_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{x_n}$. Potom je tedy $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V_{x_n} \cap A)$ a je proto spočetná a $\mathcal{Z}$ je silně lokalizovatelný.

Pokud X není dědičně Lindelöfův, existuje takový systém otevřených množin $\{V_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$, Λ nespočetná, že žádný jeho spočetný podsystém nepokrývá množinu $V = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$. Transfinitní indukcí najděme body $x_\gamma \in V$, $\gamma < \omega_1$, takto: Zvolme $x_0 \in V$ libovolně. Pak existuje α_0 tak, že $x_0 \in V_{\alpha_0}$. Protože V_{α_0} nepokrývá V, existuje $x_1 \in X \setminus V_{\alpha_0}$ a α_1 tak, že $x_1 \in V_{\alpha_1}$. Máme-li již vybrány body $x_\beta \in V_{\alpha_\beta}$ pro $\beta < \gamma$, pak protože $\{V_{\alpha_\beta} :\ \beta < \gamma\}$ nepokrývá V, existuje $x_\gamma \in V \setminus \bigcup_{\beta < \gamma} V_{\alpha_\beta}$ a α_γ tak, že $x_\gamma \in V_{\alpha_\gamma}$.

Položme $A = \{x_\gamma : \ \gamma < \omega_1\}$. Množina A je pak lokálně spočetná, neboť pro každé $\gamma < \omega_1$ existuje otevřená V_{α_γ} tak, že $x_\gamma \in V_{\alpha_\gamma}$, a protože $x_\beta \notin V_{\alpha_\gamma}$ pro $\beta > \gamma$, obsahuje V_{α_γ} kromě x_γ jen spočetně mnoho dalších bodů z množiny A. Množina A však není spočetná, a $\mathcal{Z}$ tedy není silně lokalizovatelný. □

Z uzavřenosti množin patřících do ideálu $\mathcal{Z}$ plyne, že spočetné množiny nemají žádné $\mathcal{R}$-hromadné body, speciálně prosté posloupnosti nemají $\mathcal{R}$-limity v X. Dokonce platí, že je-li bod x $\mathcal{R}$-limitou posloupnosti (x_n) v X, pak $\{x_n : \ x_n \neq x\}$ je konečná: Pokud by nebyla konečná, pak pro každé okolí U bodu x je $U_\mathcal{R} = U \backslash \{x_n : \ x_n \neq x\}$ $\mathcal{R}$-okolí x, ale neexistuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \geq n_0$ je $x_n \in U_\mathcal{R}$.

Této vlastnosti můžeme využít, budeme-li zkoumat, zda je nová topologie regulární. Je zřejmé, že $A^* \subset \text{der}A$ pro každou $A \subset X$. Zajímá nás tedy, zda pro nějakou množinu $A \subset X^*$ nastane ostrá nerovnost (pak bude $\bar{A}^\mathcal{R} \subsetneqq \bar{A}^\mathcal{T}$ a tedy $\mathcal{R}$ bude na X^* ostře jemnější než topologie původní). Za onu množinu nám podle pozorování výše stačí v X^* zvolit nějakou prostou konvergentní posloupnost konvergentní.

Tvrzení 2.6 *Pokud v X^* existuje alespoň jedna prostá konvergentní posloupnost, pak topologie $\mathcal{R}$ není regulární.* □

Dále z uzavřenosti množin v $\mathcal{Z}$ plyne, že pokud není X spočetný, nemůže být po modifikaci separabilní.

Pomocí ideálu spočetných množin můžeme ukázat, že předpoklad silné lokalizovatelnosti byl nutný i v Lemmatu 1.7(b).

Příklad 2.7 Uvažujme prostor X takto: Jako množinu X vezměme ordinální interval $[0, \omega_1 \cdot \omega]$ a mezi každé dva ordinály α a $\alpha + 1$ vlepme kopii intervalu $(0, 1)$ (označme α-tou kopii $(0, 1)_\alpha$). Na X definujme uspořádání $<_X$ pomocí uspořání $<_\mathcal{O}$ z ordinálního intervalu a uspřádání $<_\mathbb{R}$ z $(0, 1)$ takto: Pro $x, y \in X$ je $x <_X y$, pokud nastane právě jedna z těchto možností:

- $x = \alpha, \ y = \beta, \ \alpha, \beta \in [0, \omega_1 \cdot \omega]$ a $\alpha <_\mathcal{O} \beta$,
- $x, y \in (0, 1)_\alpha$ pro nějaké $\alpha \in [0, \omega_1 \cdot \omega]$ a $x <_\mathbb{R} y$,
- $x = \alpha \in [0, \omega_1 \cdot \omega], \ y \in (0, 1)_\beta$ a $\alpha <_\mathcal{O} \beta$,
- $x \in (0, 1)_\alpha, \ y = \beta \in [0, \omega_1 \cdot \omega]$ a $\alpha <_\mathcal{O} \beta$ nebo $\alpha = \beta$,
- $x \in (0, 1)_\alpha$, $y \in (0, 1)_\beta$ a $\alpha <_\mathcal{O} \beta$.

Topologie na X nechť je dána uspořádáním $<_X$, ideál spočetných množin je pak na X lokalizovatelný (neboť X je kompaktní), není však silně lokalizovatelný (protože X není dědičně Lindelöfův) a platí $X^* = X$.

Jako množinu A zvolme všechny izolované ordinály v X. Potom $A^* = \{\omega_1 \cdot n, \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\omega_1 \cdot \omega\}$, což je spočetná množina, a tedy $A^{**} = \emptyset$. Z toho vyplývá, že všechny podmnožiny A^* jsou $\mathcal{R}$-uzavřené. Položíme-li $G = X \setminus \{\omega_1 \cdot \omega\}$, je G otevřená (tedy i $\mathcal{R}$-otevřená) a platí

$$G \cap A^* = \overline{G \cap A^*}^\sigma \subsetneqq \overline{G \cap A^*} = (G \cap A^*) \cup \{\omega_1 \cdot \omega\}.$$

2.3 Ideál řídkých množin

Nyní uvažujme ideál $\mathcal{Z} = \{Z \subset X : \text{ Z je řídká v } X\}$.

Věta 2.8 *Ideál řídkých množin je silně lokalizovatelný.*

Důkaz: Nechť $A \subset X$ je taková, že pro každé $x \in A$ existuje otevřené okolí G_x, pro které je $A \cap G_x$ řídká množina. Předpokládejme ke sporu, že A není řídká. Existuje tedy neprázdná otevřená U obsažená v $\overline{A}$. Pak existuje $x \in A \cap U$ a $G_x \cap U \neq \emptyset$. Potom je ale $G_x \cap U$ neprázdná otevřená množina obsažená v $\overline{G_x \cap A}$, a to je spor, neboť $G_x \cap A$ je řídká. □

Pro ideál řídkých množin je vždy splněno, že $X^* = X$ - jinak by totiž podle Věty 1.3 byla $X \setminus X^*$ otevřená řídká množina, což nelze.

Tvrzení 2.9 *(a) $A \subset X$ je řídká, právě když je $\mathcal{R}$-řídká, a tedy i množiny 1. kategorie jsou shodné v $\mathcal{T}$ a v $\mathcal{R}$,*

(b) $(X,\ \mathcal{R})$ je Baireův (dokonce dědičně), právě když je $(X,\ \mathcal{T})$ Baireův,

(c) $A \subset X$ má Baireovu vlastnost v $\mathcal{R}$, právě když má Baireovu vlastnost v $\mathcal{T}$.

Důkaz: (a) Plyne z Věty 1.15.

(b) Nechť $(X,\ \mathcal{T})$ není Baireův. Pak existuje otevřená množina 1. kategorie, ta je však zároveň i $\mathcal{R}$-otevřená a $\mathcal{R}$-1. kategorie, tedy $(X,\ \mathcal{R})$ není Baireův.

Naopak, není-li $(X,\ \mathcal{R})$ Baireův, pak existuje $\mathcal{R}$-otevřená $A \subset X$, která je $\mathcal{R}$-1.kategorie (a tedy 1. kategorie). Z Věty 1.5(c) je $A = G \setminus J$, kde G je otevřená a $J \in \mathcal{Z}$. Potom je $G = A \cup J$ otevřená a 1. kategorie, a tedy $(X,\ \mathcal{T})$ není Baireův.

Dědičnost plyne z Věty 1.21(b).

(c) Má-li $A \subset X$ Baireovu vlastnost v $\mathcal{T}$, pak díky (a) a tomu, že $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$, ji má i v $\mathcal{R}$.

Nechť má $A \subset X$ Baireovu vlastnost v $\mathcal{R}$, tj. $A = G \triangle M$, kde G je $\mathcal{R}$-otevřená a M je $\mathcal{R}$-1. kategorie (a tedy 1. kategorie). Pak z Věty 1.5(c) je $G = H \setminus J$, kde H je otevřená a $J \in \mathcal{Z}$, a tedy $A = G \triangle (M \cup J)$ má Baireovu vlastnost v $\mathcal{T}$ □

Využitím dalších vlastností z 1. kapitoly můžeme ukázat, jak vypadá v případě tohoto ideálu množina A^*.

Tvrzení 2.10 *Pro $A \subset X$ je $A^* = \overline{Int\ \overline{A}}$.*

Důkaz: Z Důsledku 1.16 je $A^* = \overline{Int\ A^*} \subset \overline{Int\ \overline{A}}$.

Nechť $x \notin A^*$, pak existuje otevřené okolí U bodu x, že $U \cap A$ je řídká, a tedy $U \cap \overline{A}$ je řídká a $Int\ U \cap \overline{A} = \emptyset$. Potom je

$$\begin{aligned} \overline{Int\ \overline{A}} &= \overline{Int\ ((\overline{A} \setminus U) \cup (\overline{A} \cap U))} \\ &\subset \overline{\overline{A} \setminus U} \cup \overline{Int\ \overline{A} \cap U} = \overline{A} \setminus U \end{aligned}$$

(kde jsme použili, že $Int\ (A \cup B) \subset Int\ A \cup \overline{B},\ A, B \subset X$). Protože $x \in U$, je tedy $x \notin \overline{Int\ \overline{A}}$ a dokázali jsem tak obrácenou inkluzi. □

2.4 Ideál množin 1. kategorie

Podívejme se nyní na ideál $\mathcal{Z} = \{Z \subset X : \; Z \text{ je 1.kategorie v } X\}$ a topologii definovanou pomocí něj.

Věta 2.11 *Ideál množin 1.kategorie je silně lokalizovatelný.*

Důkaz: Nechť $A \subset X$ je taková, že pro každé $x \in X$ existuje otevřená G_x tak, že $G_x \cap A$ je 1. kategorie. Nechť $\mathcal{G}$ je maximální systém otevřených po dvou disjunktních množin takový, že pro každé $G \in \mathcal{G}$ je $\emptyset \neq G \cap A$ 1.kategorie. Protože A je lokálně 1.kategorie, plyne z maximality $\mathcal{G}$, že $A \setminus \bigcup \mathcal{G}$ je řídká.

Dále pro každou $G \in \mathcal{G}$ je $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_{G,n}$, kde $H_{G,n}$ jsou řídké. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $H_n = \bigcup_{G\in\mathcal{G}} H_{G,n}$, pak H_n je lokálně řídká (neboť pro pevné n jsou množiny $H_{G,n}$, $G \in \mathcal{G}$, disjunktní), a protože ideál řídkých množin je silně lokalizovatelný, je H_n řídká, a tedy $\bigcup \mathcal{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ je 1.kategorie.

Dostáváme tedy, že $A = (A \setminus \bigcup \mathcal{G}) \cup (A \cap \bigcup \mathcal{G})$ je 1.kategorie, a ideál množin 1. kategorie je tedy silně lokalizovatelný. □

Pro ideál množin 1. kategorie je splněno $X^* = X$, právě když X je Baireův prostor: Je-li $X^* = X$, pak z Důsledku 1.8(a) není žádná množina 1. kategorie otevřená. V opačném případě je $X \setminus X^*$ otevřená množina 1. kategorie (Věta 1.3), a tedy X není Baireův.

Věta 2.12 ([2,Lemma 2(c)]) *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je Baireův. Potom:*

(a) $A \subset X$ je 1. kategorie, právě když je $\mathcal{R}$-1. kategorie,

(b) $(X,\ \mathcal{R})$ je dědičně Baireův,

(c) $A \subset X$ má Baireovu vlastnost v $\mathcal{R}$, právě když má Baireovu vlastnost v $\mathcal{T}$.

(d) má-li $A \subset X$ Baireovu vlastnost v $\mathcal{R}$, pak je tvaru $F \cap G$, kde F je $\mathcal{R}$-uzavřená a G je $\mathcal{R}$-otevřená.

Důkaz: (a) Plyne z Věty 1.15.

(b) Plyne z Věty 1.21.

(c) Má-li $A \subset X$ Baireovu vlastnost v $\mathcal{T}$, pak z (a) a z toho, že $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$, má A Baireovu vlastnost i v $\mathcal{R}$.

Nechť A má Baireovu vlastnost v $\mathcal{R}$. Potom existuje $\mathcal{R}$-otevřená B a množina M $\mathcal{R}$-1. kategorie tak, že $A = B \triangle M$. Z Věty 1.5(c) je $B = G \setminus I$, kde G je otevřená a $I \in \mathcal{Z}$, tj. I je 1. kategorie, a tedy $A = G \triangle (M \cup I)$ má Baireovu vlastnost v $\mathcal{T}$.

(d) Nechť $A \subset X$ má Baireovu vlastnost v $\mathcal{R}$. Potom i $X \setminus A$ má Baireovu vlastnost v $\mathcal{R}$, existují tedy $\mathcal{R}$-otevřená U a množiny M, N $\mathcal{R}$-1. kategorie tak, že $X \setminus A = (U \setminus M) \cup N$. Potom $A = (X \setminus (U \setminus M) \cap (X \setminus N)$, kde $F = X \setminus (U \setminus M)$ je $\mathcal{R}$-uzavřená a $G = X \setminus N$ je $\mathcal{R}$-otevřená. □

Poznámka 2.13 Části (b)-(d) v předchozí větě platí, i když $(X,\ \mathcal{T})$ není Baireův. V případě (b) jsme již dříve zmiňovali, že $X \setminus X^*$ je vždy Baireův, a tedy stačí ukázat, že je X^* Baireův. V bodech (c),(d) stači použít, že množiny 1. kategorie se stanou $\mathcal{R}$-diskrétními.

2.5 Ideál množin nulové Lebesgueovy míry

Jako prostor X nyní zvolme reálnou přímku s eukleidovskou topologií $\mathcal{E}$ a λ buď Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$. Uvažujme ideál $\mathcal{Z} = \{Z \subset X : \lambda(Z) = 0\}$.

Věta 2.14 *Ideál množin nulové Lebesgueovy míry je silně lokalizovatelný na $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.*

Důkaz: Nechť $A \subset X$ je taková, že pro každé $x \in A$ existuje otevřené okolí U_x tak, že $\lambda(A \cap U_x) = 0$. Protože $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ je dědičně Lindelöfův, ze systému $\mathcal{U}_A = \{U_x : x \in A\}$ lze vybrat spočetný podsystém $\widetilde{\mathcal{U}_A} = \{U_{x_n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{U}_A$ tak, že $\bigcup \widetilde{\mathcal{U}_A} = \bigcup \mathcal{U}_A$. Ze σ-subaditivity míry pak je

$$\lambda(A) = \lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap U_{x_n})) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A \cap U_{x_n}) = 0,$$

a ideál nulových množin je tedy silně lokalizovatelný. □

Prostor $(X, \mathcal{R})$ nebude v tomto případě Baireův, což plyne z následujícího tvrzení o rozkladu reálné přímky.

Tvrzení 2.15 *Reálná přímka je sjednocením množiny 1. kategorie a množiny nulové Lebesgueovy míry.*

Důkaz: Nechť $\{r_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ je množina všech racionálních čísel. Položme $I_{ij} = (r_i - \frac{1}{2^{i+j}},\ r_i + \frac{1}{2^{i+j}}),\ i, j \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $j \in \mathbb{N}$ je $B_j = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_{ij}$ hustá v $\mathbb{R}$ (neboť obsahuje $\mathbb{Q}$), a tedy $A_j = \mathbb{R} \setminus B_j$ je řídká. Dále položme $N = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_j$, pak $\lambda(N) = 0$, protože pro každé $j \in \mathbb{N}$ je $\lambda(B_j) = \frac{1}{2^j}$, a $\mathbb{R} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \cup N$. □

Tvrzení 2.16 $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ *je 1. kategorie v sobě, a tedy není Baireův.*

Důkaz: Z předchozího tvrzení víme, že $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup N$, kde A_n jsou řídké a z Lemmatu 1.12 jsou $\mathcal{R}$-řídké, a $N \in \mathcal{Z}$ je $\mathcal{R}$-řídká z Důsledku 1.11(a). $\mathbb{R}$ je tedy $\mathcal{R}$-1. kategorie. □

Věta 2.17 [1, Theorem 8] *$A \subset \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná, právě když je $\mathcal{R}$-F_σ, právě když je $\mathcal{R}$-G_δ, právě když je $\mathcal{R}$-borelovská.*

Důkaz: $A \subset \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná, právě když existují F typu F_σ, G typu G_δ a $M,\ N$ nulové míry, že $F \cup N = A = G \setminus M$. Protože $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$ a prvky z $\mathcal{Z}$ jsou $\mathcal{R}$-uzavřené, je množina $F \cup N$ typu F_σ v $\mathcal{R}$ a $G \setminus M$ je typu G_δ v $\mathcal{R}$. Tedy A je lebesgueovsky měřitelná, právě když je zároveň F_σ i G_δ v $\mathcal{R}$ (a tedy je $\mathcal{R}$-borelovská). Z Věty 1.5(c) plyne, že každá $\mathcal{R}$-otevřená množina je lebesgueovsky měřitelná, a proto i každá $\mathcal{R}$-borelovská množina je lebesgueovsky měřitelná.

□

Seznam použité literatury

[1] HASHIMOTO, Hiroshi. *On the *topology and its application*. Fund. Math. **91**(1), (1976), 5-10.

[2] KALENDA, Ondřej. *Note on Connections of the Point of Continuity Property and Kuratowski Problem on Function Having the Baire Property*. Acta Univ. Carolinae **38** (1), (1997), 3-12.

[3] KURATOWSKI, Casimir. *Topologie. I, Espaces métrisables, espaces complets.* Warszawa, 1948.

[4] LUKEŠ, Jaroslav; MALÝ, Jan; ZAJÍČEK, Luděk. *Fine topology methods in real analysis and potential theory.* Lecture Notes in Mathematics, 1189. Springer-Verlag, Berlin, 1986.