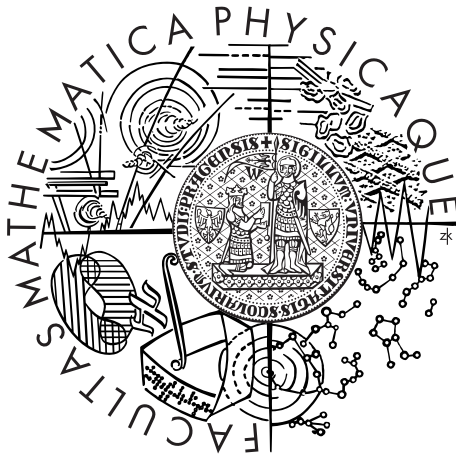


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Matěj Ryston

Řešení pohybových rovnic testovacích částic v okolí černé díry

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka Ph.D.

Studijní program: fyzika

Studijní obor: obecná fyzika

Praha 2012

Rád bych poděkoval vedoucímu této práce Mgr. Tomáši Ledvinkovi Ph.D. za jeho trpělivé a návodné rady a za ochotu, se kterou mi vyšel vstříc při výběru tématu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Matěj Ryston

Název práce: Řešení pohybových rovnic testovacích částic v okolí černé díry

Autor: Matěj Ryston

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Tato práce si dává za cíl podat přehled popisu a řešení pohybových rovnic částic vně sféricky symetrické černé díry (hvězdy) s důrazem na numerická řešení. K tomu účelu je v první kapitole podán souhrnný výklad numerického řešení obyčejných diferenciálních rovnic spolu s výčtem a porovnáním vybraných numerických metod. Ve dalších kapitolách následuje připomenutí základů obecné teorie relativity, popis Schwarzschildova sféricky symetrického řešení Einsteinových rovnic a konečně formulace pohybových rovnic. V poslední části aplikujeme vybrané numerické metody při řešení pohybových rovnic popisujících hmotnou testovací částici a následně ohyb světelných paprsků v blízkosti černé díry.

Klíčová slova: obecná relativita, numerické metody, pohybové rovnice, Schwarzschildova metrika.

Title: Solving equations of motion of test particles in the vicinity of a black hole

Author: Matěj Ryston

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. Tomáš Ledvinka Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: This work aims to give a well-arranged summary of the description and solving the equations of motion of particles outside a black hole (a star) with emphasis on numerical solutions. For that purpose a summary of numerical methods for solving ordinary differential equations, together with a review and comparison of chosen methods, is given. In the second chapter follows a brief recall of the foundations of General Relativity as well as the description of the geometry of Schwarzschild solution of the Einstein equations. After that equations of motion are formulated. In conclusion, selected numerical methods are used on solving said equations of motion of a test particle or those describing bending of light rays in closeness to a black hole.

Keywords: general relativity, numerical methods, equations of motion, Schwarzschild metric.

Obsah

Úvod	6
1 Numerické metody řešení ODR	8
1.1 Úloha s počáteční hodnotou	8
1.2 Lineární více krokové metody	9
1.2.1 Metody Adamsova typu	9
1.2.2 Explicitní Runge-Kuttovy (-Heunovy) metody	11
1.3 Stabilita	14
1.4 Test konvergence metody	15
1.5 Porovnání vybraných metod	16
2 Základní pojmy OTR	22
2.1 4-rozměrný formalismus, metrický tenzor	22
2.2 4-rychlost, 4-zrychlení a paralelní přenos	23
2.3 Schwarzschildovo řešení Einsteinových rovnic	24
2.3.1 Izotropní souřadnice Schwarzschildovy metriky	26
3 Pohybové rovnice	27
3.1 Rovnice geodetiky	27
3.1.1 Rovnice geodetiky ve Schwarzschildově metrice	28
3.2 Langrangeovský popis	28
3.3 Hamiltonovy pohybové rovnice	29
3.3.1 Hamiltonovy rovnice ve Schwarzschildově metrice	29
3.4 Systémy více částic, souřadnicový čas	30
3.5 Pohybové rovnice pro světelné (nehmotné) částice	32
4 Řešení pohybových rovnic	34
4.1 Oběh hmotné částice v blízkosti singularity	34
4.1.1 Počáteční podmínky	34
4.1.2 Konvergence numerických metod	36
4.1.3 Přesnost numerických metod	51
4.2 Ohyb světelného paprsku	53
4.2.1 Počáteční podmínky	53
4.2.2 Konvergence numerických metod (podruhé)	54
4.2.3 Přesnost numerických metod (podruhé)	60
Závěr	62
Seznam použité literatury	65
Dodatky	66

Úvod

Je to už téměř sto let, kdy byla Albertem Einsteinem v roce 1916 zformulována jeho finální verze obecné teorie relativity (OTR). Tato teorie, jakkoli se musela zpočátku potýkat se skepticismem a nedůvěrou vědecké veřejnosti, je dodnes s velkou přesností experimentálně potvrzována a zůstává nejúspěšnější teorií gravitace vůbec. Její fascinující předpovědi v oblasti astrofyziky a kosmologie nejenom že inspirovaly celé generace vědců, ale pronikly také do vědecko-fantastické literatury a staly se součástí všeobecných znalostí široké veřejnosti. Téměř každý se už někdy setkal s pojmy jako černá díra, neutronová hvězda, velký třesk apod. Přesto pochopení a detailní prozkoumání těchto dnes už téměř jistě reálných fenoménů zůstává nadále v rukou fyziků.

Existuje celá řada populárních i vědeckých knih pojednávajících o problematice OTR, v nichž se autoři snaží poskytnout čtenáři vhled do této složité teorie. Pro účely této práce je vhodné mít jisté základní znalosti diferenciální geometrie a obecné teorie relativity na úrovni semestrálního kurzu Obecná teorie relativity (NTMF111) pro bakalářské obory fyziky na Matematicko-fyzikální fakultě UK. Přestože v Kapitole 2 shrneme některé základní pojmy, nebudeme v této práci detailněji probírat použitý matematický formalismus a netriviální fyzikální myšlenky tvořící základ OTR. Případné zájemce o tuto problematiku odkazujeme pro první seznámení na velice názornou českou učebnici [6] nebo více matematicky zaměřenou [5]. Z anglicky psané literatury může čtenář sáhnout například po velice obsáhlé a často citované knize [1], z níž bylo nemalou měrou čerpáno i v této práci.

Stejně jako u všech ostatních oborů lidského myšlení existuje podstatný rozdíl mezi pochopením teorie (alespoň do jisté míry) a praktickým využitím získaných znalostí. Zkoumání pohybu tělesa v gravitačním poli a jeho předpověď je fundamentální problém, který tvoří základ astrofyziky. V této práci si dáváme za cíl překlenout tuto počáteční mezeru a shrnout základní metody OTR při řešení tohoto aplikačně významného problému. Při řešení vycházíme z nejjednodušší situace, kdy zanedbáváme vlastní působení částice na své okolí (od toho název testovací). Tato aproximace předpokládá masivní zdroj gravitačního pole (hvězda, černá díra) v porovnání s testovací částicí (planeta, jiný relativně malý objekt). Podle OTR je pohyb volné částice (tj. na částici nepůsobí nic kromě gravitace samotné) dán zakřivením prostoročasu v okolí hmotného zdroje. V kapitole 2 nastíníme alespoň základy elegantního formalismu, kterým lze geometrii prostoročasu popsat. Jeho součástí jsou samozřejmě i rovnice, jejichž řešením se budeme zabývat v tom nejjednodušším případě sféricky symetrického zdroje gravitačního pole.

Protože rovnice popisující obecnou relativitu jsou nelineární a vcelku komplikované, existuje jen omezeně analyticky řešitelných problémů a i to za cenu jisté aproximace. Proto jsou pro relativitu důležité numerické metody výpočtu. V práci se seznámíme se základními druhy metod pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic a ty poté aplikujeme na známý problém, což nám umožní zkontrolovat a

porovnat naše výsledky. Tímto problémem bude oběh částice v blízkosti singularity. V OTR jsou již téměř od jejího počátku známa přibližná analytická řešení relativistických problémů, většinou platná pro větší vzdálenosti od singularity a nebo oběžné dráhy velmi podobné kružnici. Význam numerického řešení diferenciálních rovnic spočívá hlavně v tom, že se nemusíme omezovat na určitou oblast výpočtu, proto záměrně budeme zkoumat situaci, kterou je jinak obtížné analyticky řešit.

Druhým problémem, kterým se zde budeme zabývat je ohyb slunečních paprsků v blízkosti hvězdy, který OTR předpovídá. Podle ní mění díky silnému zakřivení prostoročasu svoji dráhu i světlo tvořené nehmotnými částicemi (fotony). Pro naší sluneční soustavu byl tento jev ověřen díky zatmění Slunce v roce 1919 britským astronomem Arthurem Eddingtonem, jedním z prvních zastánců Einsteinovy teorie v akademickém světě. OTR se tím ocitla v popředí vědeckého zájmu a do dnes se jí dostává širokého rozpracování (viz např. [1]) a využití především při zkoumání okolního vesmíru.

Předeslané problémy budeme řešit pro tzv. Schwarzschildův prostoročas (popsaný v kapitole 2). Jedná se o nejjednodušší relativistický model nerotující sféricky symetrické černé díry. Na takto jednoduchém a analyticky řešitelném problému lze numerické metody testovat a získat představu o náročnosti a přesnosti řešení pohybu částic okolo černé díry. Na základě těchto výsledků se pak lze kvalifikovaně např. rozhodnout, o kolik je pomalejší řešení ODE oproti náročnému analytickému kódu (viz [2]) nebo třeba při zkoumání pohybu v pertubovaném černoděrovém prostoročase, jaká je chyba metody a jak malou perturbaci tedy nedokážeme z numerického řešení ODR vůbec odlišit.

Složitějšími modely černoděrových prostoročasů jsou například Kerrovo řešení Einsteinových rovnic popisující rotující (axiálně symetrickou) černou díru nebo Kerr-Newmanovo řešení Einstein-Maxwellových rovnic korespondující s rotující černou dírou s nenulovým nábojem. Tyto objekty jsou astrofyzikálně mimořádně důležité.

Nejrychlejším způsobem tzv. *raytracingu*, který je potřeba při zkoumání přenosu záření v blízkosti těchto objektů a při simulaci světelných křivek procesů odehrávajících se v jejich blízkosti, je podle [2] řešení Carterových rovnic, které představují algebraické rovnice svazující počáteční a koncový bod geodetiky ve fázovém prostoru. V astrofyzikálně relevantních situacích je ale gravitační pole černé díry narušeno grav. polem okolní hmoty a takové algebraické rovnice neexistují – je potřeba se vrátit k ODE. Pokud by se na Schw. a následně Kerrově prostoročase podařilo nalézt vhodnou soustavu ODE + numer. metodu, která by je řešila podobně efektivně jako metoda založená na Carterových rovnicích, bylo by zobecnění na porušené gravitační pole velmi pravděpodobně naopak snadné.

1. Numerické metody řešení ODR

V této kapitole shrneme základní pojmy spojené s numerickými metodami výpočtu s důrazem na řešení *obyčejných diferenciálních rovnic* (ODR), zmíníme některé důležité matematické věty pro nalezení jednoznačného řešení a podrobněji probereme konkrétní metody použité při výpočtech v této práci. Náš rozbor bude primárně vycházet z knihy [9].

1.1 Úloha s počáteční hodnotou

Obyčejnou diferenciální rovnici nazýváme rovnicí tvaru

$$u_t(t) = f(u(t), t), \quad (1.1)$$

kde t je proměnná (často ztotožňována s časovou proměnnou), u je hledaná obecně vektorová funkce (dimenze N) a f je spojitá funkce nabývající hodnot na daném definičním oboru. Pro úsporu zápisu jsme označili $\frac{du}{dt} \equiv u_t$. V případě $N > 1$ platí derivace po složkách. K nalezení takové funkce musíme ještě přidat počáteční podmínku, čímž se dostáváme k následující definici:

Pro danou funkci f , hodnotu u_0 , $t_0 \in R$ a $T > t_0$ najdeme funkci $u(t)$ definovanou na intervalu $[t_0, T]$, která splňuje následující podmínky:

$$\begin{aligned} 1) \quad & u(t_0) = u_0, \\ 2) \quad & u_t = f(u(t), t) \text{ pro každé } t \in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Takovýto problém nazýváme *úloha s počáteční hodnotou* (IVP z angl. *initial value problem*). Často se pro jednoduchost pokládá $t_0 = 0$.

Vztah (1.1) obsahuje rovnici prvního řádu. V případě rovnice vyššího řádu je standardním postupem zavedení další proměnné a převedení tak rovnice vyššího řádu na soustavu rovnic řádu o jedna menší. Například rovnici druhého řádu $u_{tt} = f$ (kde jsme pro přehlednost již nevypsali proměnné) můžeme zavedením $v \equiv u_t$ převést na soustavu

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} v \\ f \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Počáteční podmínkou by v tomto případě byl vektor hodnot $(u_0 \ u_{t_0})^T$. Tento postup převedení rovnice druhého řádu na soustavu dvou rovnic prvního řádu dále využijeme při řešení pohybových rovnic v kapitole 4.

Uvedené zadání úlohy s počáteční podmínkou ještě nezaručuje „správné chování“ hledané fce. Lze ukázat (viz [9], oddíl 1.1), že bez bližších požadavků na f nemusí být řešení jednoznačné či vůbec existovat.

1.2 Lineární vícezkrokové metody

Výhodným a často používaným nástrojem pro numerické řešení ODR je diskretizace úlohy. Při ní aproximujeme spojitou funkci množinou diskrétních bodů. Mějme zadanou IVP na intervalu $[0, T]$ v souladu s definicí (1.2). Zvolme reálné číslo k , nazývané *krok metody*, potom zavedeme diskrétní body t_0, t_1, \dots předpisem $t_n = nk$. Naším cílem je bodům t_n přiřadit funkční hodnoty v^n tak, aby¹

$$v^n \approx u(t_n), \quad n \geq 0. \quad (1.4)$$

Dále označme $f^n \equiv f(v^n, t_n)$. Obecná s -zkroková lineární vícezkroková metoda má tvar

$$\sum_{j=0}^s \alpha_j v^{n+j} = k \sum_{j=0}^s \beta_j f^{n+j}, \quad (1.5)$$

kde α_j, β_j jsou konstanty. Současně platí $\alpha_s = 1$ a $\alpha_0 \neq 0$ nebo $\beta_0 \neq 0$. Pokud $\beta_s = 0$, jde o *explicitní* metodu, v případě $\beta_s \neq 0$ se jedná o metodu *implicitní*.

Poznamenejme, že slovo „lineární“ v názvu znamená, že hodnoty v^n a f^n vystupují v (1.5) v prvních mocninách, nikoli protože by vícezkrokové metody byly omezeny pouze na lineární diferenciální rovnice.

1.2.1 Metody Adamsova typu

Často užívanou a úspěšnou rodinou numerických metod jsou aproximace Adamsova typu. Typicky jsou u těchto metod konstanty α_j rovny nule až na $\alpha_{n+s} = 1$ (z definice) a $\alpha_{n+s-1} = -1$ (z důvodů, které budou zřejmé z odvození níže).

Dále se dělí na implicitní *Adams-Moultonovy* (výpočet v^{n+s} zahrnuje i člen f^{n+s} , tedy nutně $\beta_{n+s} \neq 0$) a na *Adams-Bashforthovy* (maximálně člen f^{n+s-1} , tedy $\beta_{n+s} = 0$). Obě skupiny jsou si v mnohém podobné a i jejich myšlenka se opírá o stejný princip. Při jejich odvození vyjdeme z fundamentální relace matematické analýzy:

$$u(t_{n+1}) - u(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} u'(t) dt. \quad (1.6)$$

Použitím rovnice (1.1) a nahrazením $u(t_n)$ diskrétními hodnotami v^n dostáváme

$$v^{n+1} - v^n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f dt. \quad (1.7)$$

Předpokládejme, že známe hodnoty funkce f v bodech t_n . Hlavní myšlenka Adamsonových metod spočívá v aproximaci obecně složité funkce f polynomem $P_k(t)$ stupně $k - 1$. Stupeň polynomu je určen z žádané přesnosti metody.

¹Zde horní index neznámá exponent. Jde pouze o zavedené značení.

Tento postup předvedeme při odvození Adams-Bashforthovy metody druhého stupně ($k = 2$). Polynom má potom tvar $P_2(t) = At + B$, kde $A, B = konst.$ Konstanty určíme z podmínek

$$\begin{aligned} f^n &= At_n + B \\ f^{n-1} &= At_{n-1} + B. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$\begin{aligned} A &= \frac{f^n - f^{n-1}}{k} \\ B &= \frac{f^{n-1}t_n - f^nt_{n-1}}{k}, \end{aligned}$$

kde jsme použili označení konstantního kroku $k \equiv t_n - t_{n-1}$. Substitucí a následnou integrací v (1.7) dostaneme

$$\begin{aligned} v^{n+1} &= v^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{f^n - f^{n-1}}{k} t + \frac{f^{n-1}t_n - f^nt_{n-1}}{k} \right] dt = \\ &= v^n + \frac{1}{2}(f^n - f^{n-1})(t_{n+1} + t_n) + f^{n-1} - f^nt_{n-1} = \\ &= v^n + \frac{3}{2}kf^n - \frac{1}{2}kf^{n-1}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Výsledná rovnice (1.8) je předpisem pro Adams-Bashforthovu metodu druhého řádu. Srovnáním s definiční rovnicí (1.5) můžeme určit charakteristické konstanty $s = 2$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_0 = -\frac{1}{2}$, $\beta_1 = \frac{3}{2}$, $\beta_2 = 0$. Dále spočítáme lokální zaokrouhlovací chybu tohoto vzorce. Předpokládejme, že hodnoty v^0 až v^n jsou přesně rovny funkčním hodnotám $u(t_0)$ až $u(t_n)$, potom je chyba následující číselné hodnoty rovna

$$\begin{aligned} u(t_{n+1}) - v^{n+1} &= u(t_n) + ku'(t_n) + \frac{k^2}{2}u''(t_n) + \frac{k^3}{6}u'''(t_n) + O(k^4) - v^n - \\ &- \frac{3k}{2}f^n + \frac{k}{2}f^{n-1} \stackrel{y' \equiv f}{=} -\frac{k}{2}u'(t_n) + \frac{k}{2}u'(t_{n-1}) + \frac{k^2}{2}u''(t_n) + \frac{k^3}{6}u'''(t_n) + O(k^4) = \\ &= -\frac{k}{2}[u'(t_{n-1}) + ku''(t_{n-1}) + \frac{k^2}{2}u'''(t_{n-1}) + O(k^3)] + \frac{k}{2}u'(t_{n-1}) + \frac{k^2}{2}u''(t_n) + \\ &+ O(k^4) = -\frac{k^2}{2}u''(t_{n-1}) - \frac{k^3}{4}u'''(t_{n-1}) + \frac{k^2}{2}[u''(t_{n-1}) + ku'''(t_{n-1}) + O(k^3)] + \\ &+ O(k^4) = \frac{k^3}{4}u'''(t_{n-1}) + O(k^4). \end{aligned}$$

Při odvození jsme použili pouze Taylorova rozvoje, jehož existenci pro dané funkce předpokládáme. Vidíme tedy, že lokální chyba aproximace pro Adams-Bashforthovu metodu druhého řádu je $O(k^3)$, $k \rightarrow 0$. Globální přesnost metody je ještě o jeden řád horší, protože chyba aproximace se nasčítá s počtem diskrétních bodů, který je úměrný $\frac{1}{k}$.

Implicitní *Adams-Moultonovy* metody vycházejí ze stejného principu jako metody předchozí s tím rozdílem, že polynom $P_k(t)$ interpolujeme i s použitím bodu f^{n+1} . Tato hodnota se pak dostává i do finálních vzorců. Výhodou A-M metod je dosažení vyšší přesnosti při stejném počtu kroků jako u A-B (s-kroková A-M metoda dosahuje lokální přesnosti řádu $s + 1$). Zároveň jsou implicitní metody obecně stabilnější ([9]).

Přednosti obou typů numerických metod se často kombinují v tzv. *Adams-Bashforth-Moulton prediktor-korektor* rutinu, kdy jsou hodnoty f^{n+1} nejdříve určeny pomocí explicitní metody a následně jsou iterovány pomocí implicitní metody dokud neleží nalezené hodnoty s vyžadovanou přesností blízko hodnotě z předchozí iterace. Vzorce pro obecnou s-krokovou Adams-Bashforthovu nebo Adams-Moultonovu formuli lze nalézt v [9].

Na závěr této podkapitoly uvedme bez odvození podle [9] často používané zástupce jak explicitních, tak implicitních metod. Jsou to *Adams-Bashforthova metoda čtvrtého řádu*

$$v^{n+1} = v^n + \frac{k}{24}(55f^n - 59f^{n-1} + 37f^{n-2} - 9f^{n-3}) \quad (1.9)$$

a *Adams-Moultonova metoda třetího řádu*

$$v^{n+1} = v^n + \frac{k}{24}(9f^{n+1} + 19f^n - 5f^{n-1} + f^{n-2}). \quad (1.10)$$

Obě metody jsou lokálně přesné do čtvrtého řádu v k . Často tak tvoří zvolený pár pro výše zmíněnou prediktor-korektor rutinu. Obě uvedené metody budeme dále zkoumat při aplikaci na konkrétní problém.

1.2.2 Explicitní Runge-Kuttovy (-Heunovy) metody

Někdy také zvané klasické Runge-Kuttovy (-Heunovy) metody. Vznikly díky pracem německých matematiků Rungeho (1895), Heuna (1900) a Kuttovy (1901) ([9]). Jsou obecně jednokrokové a představují opačný přístup než výše zmíněné vícekrokové metody. V jednom kroku používají více hodnot funkce f , které ale nejsou ukládány a používány k dalšímu výpočtu. Jejich výhodou je poměrně jednoduchá implementace. Mohlo by se zdát, že je tento typ metod nevhodný v případech, kdy se výpočet funkce f stává náročným, narozdíl od vícekrokových metod, které používají pouze jedno zavolání pravé strany. Nicméně v kapitole 4 uvidíme, že pro námi řešený problém potřebuje metoda *AB4* šestkrát menší krok, aby dosáhla stejné přesnosti jako vybraný zástupce rodiny Runge-Kutta *RK4* (viz níže). Fakticky tak představuje použití této konkrétní vícekrokové metody o 50% větší počet vyhodnocení pravé strany. Otázka efektivity a vhodnosti použití daného typu metody tedy vyžaduje bližší analýzu konkrétního problému.

Mějme celé číslo q (počet fází metody) a dále reálné konstanty $a_{21}, a_{31}, a_{32}, \dots, a_{q1}, a_{q2}, \dots, a_{q,q-1}, b_1, \dots, b_q, c_2, \dots, c_q$. Potom má q -fázová explicitní Runge-Kuttova metoda (ERK) tvar:

$$\begin{aligned}
l_1 &= f(v^n, t_n) \\
l_2 &= f(v^n + ka_{21}l_1, t_n + c_2k) \\
l_3 &= f(v^n + k(a_{31}l_1 + a_{32}l_2), t_n + c_3k) \\
&\vdots \\
l_q &= f(v^n + k(a_{q1}l_1 + \dots + a_{q,q-1}l_{q-1}), t_n + c_qk) \\
v^{n+1} &= v^n + k(b_1l_1 + \dots + b_ql_q).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Koeficienty c_i často splňují podmínky (viz [10])

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}. \tag{1.12}$$

Již od práce Butchera z roku 1964 je zvykem znázorňovat R-K metody pomocí tabulkového schématu

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
c_q	a_{q1}	a_{q2}	\dots	$a_{q,q-1}$	
	b_1	b_2	\dots	b_{q-1}	b_q

Obrázek 1.1: Schéma explicitní R-K metody

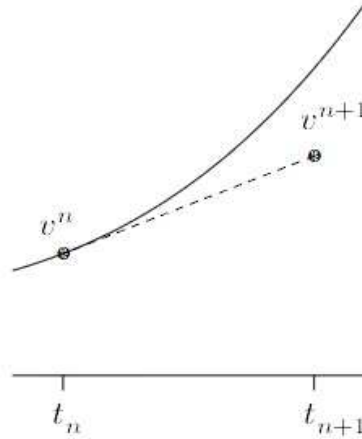
Podrobněji probereme dva nejjednodušší případy, tedy ERK prvního a druhého řádu. Tím prvním je Eulerova metoda, někdy také názorně nazývána metoda tečen. Klíčovým krokem pro určení hodnoty $u(t_{n+1})$ je Taylorův rozvoj do prvního řádu a použití (1.1):

$$v^{n+1} \approx u(t_{n+1}) = u(t_n) + ku'(t_n) + O(k^2) \approx v^n + kf^n + O(k^2). \tag{1.13}$$

Názorně je Eulerova metoda vidět na Obrázku 1.2. Jako metoda prvního řádu je nahrazení tečnou nejnázornější a zároveň v praxi téměř nepoužitelná. Nicméně její pedagogický význam je zřejmý, a tak zůstává součástí naprosté většiny učebnic a úvodních kurzů numerických metod řešení diferenciálních rovnic. Je zajímavé, že Eulerovu metodu získáme i jako Adams-Bashforthovu metodu prvního řádu (tj. použijeme-li při aproximaci polynom nultého stupně).

Pro odvození ERK metody druhého řádu vyjdeme opět z Taylorova rozvoje funkce $u(t_{n+1})$ a obecného vzorce (1.11). Naše odvození sleduje postup Julyana Cartwrighta v jeho práci o R-K metodách [11]. Protože požadujeme přesnost do druhého řádu, rozvedeme

$$\begin{aligned}
u(t_{n+1}) &= u(t_n) + ku'(t_n) + \frac{k^2}{2}u''(t_n) + O(k^3) \\
&\stackrel{(1.1)}{=} u(t_n) + kf^n + \frac{k^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^n + O(k^3) \\
&= u(t_n) + kf^n + \frac{k^2}{2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^n + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^n f^n \right) + O(k^3).
\end{aligned} \tag{1.14}$$



Obrázek 1.2: Znázornění Eulerovy metody, křivka je na intervalu $[t_n, t_{n+1}]$ aproximována tečnou. Obrázek převzat z knihy [9].

Dále se ve vzorci (1.11) omezíme na tvar

$$v^{n+1} = v^n + k(b_1l_1 + b_2l_2) \tag{1.15}$$

a provedeme rozvoj členu l_2 (stačí do druhého řádu)

$$\begin{aligned}
l_2 &= f(v^n + ka_{21}l_1, t_n + c_2k) = f(v^n + ka_{21}l_1, t_n) + c_2k \frac{\partial}{\partial t} f(v^n + ka_{21}l_1, t_n) + O(k^2) \\
&= f^n + kc_2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^n + ka_{21} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^n f^n + O(k^2).
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Dosazením do (1.15) dostáváme

$$v^{n+1} = v^n + kb_1l_1 + kb_2 \left(f^n + kc_2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^n + ka_{21} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^n f^n \right) + O(k^3). \tag{1.17}$$

Nyní z požadavku, aby chyba aproximace $u(t_{n+1}) - v^{n+1}$ byla úměrná nejméně členu třetího řádu v k , dostáváme sadu rovnic

$$b_1 + b_2 = 1 \tag{1.18}$$

$$b_2c_2 = \frac{1}{2} \tag{1.19}$$

$$a_{21}b_2 = \frac{1}{2}. \tag{1.20}$$

Rovnice (1.18) až (1.20) představují soustavu tří rovnic pro čtyři neznámé, můžeme tedy určit maximálně tři konstanty v závislosti na volném parametru, například b_2 . Finální tvar Runge-Kuttovy metody druhého řádu určený až na jeden parametr vychází

$$v^{n+1} = v^n + k(1 - b_2)f^n + kb_2f(v^n + \frac{k}{2b_2}f^n, t_n + \frac{k}{2b_2}). \quad (1.21)$$

Nejčastěji používané metody druhého řádu jsou pro $b_2 = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ a 1 , takže například pro $b_2 = \frac{1}{2}$ dostáváme *Heunovu formuli*

$$v^{n+1} = v^n + \frac{k}{2}(f^n + f(v^n + kf^n, t_n + k)). \quad (1.22)$$

Výše uvedený postup odvození se pro vyšší řády stává nepřehledně složitým, jelikož vzrůstá počet rovnic a nutných podmínek. Butcher ve své knize [12] rozvádí elegantní postup odvození R-K metod vyšších řádů pomocí symboliky rozvětvených stromů. Zde se nebudeme touto problematikou více zabývat a případného zájemce odkazujeme na zmíněnou knihu.

Uveďme si pro úplnost často používanou explicitní metodu *RK čtvrtého řádu*. Je oblíbená zejména proto, že je nejpřesnější RK metodou, pro kterou platí rovnost mezi řádem a počtem fází metody ($p = q$) (viz [9] nebo [12]), a tudíž představuje dobrý kompromis mezi přesností a snadnou implementací.

Podle [9] má tato *RK4* tvar

$$\begin{aligned} l_1 &= kf(v^n, t_n) \\ l_2 &= kf(v^n + \frac{l_1}{2}, t_n + \frac{k}{2}) \\ l_3 &= kf(v^n + \frac{l_2}{2}, t_n + \frac{k}{2}) \\ l_4 &= kf(v^n + l_3, t_n + k) \\ v^{n+1} &= v^n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4). \end{aligned} \quad (1.23)$$

1.3 Stabilita

Samotná přesnost, daná řádem metody, ještě nezaručuje správné chování numerických metod. Důležitou vlastností každé metody je stabilita, která zaručuje, že numerické řešení nediverguje například vlivem propagace diskretizační nebo zaokrouhlovací chyby. Existují dva druhy stability s následujícími definicemi podle [9]:

- **Stabilita:** Někdy nazývaná také nulová stabilita (zero-stability). Týká se situace, kdy držíme $t > 0$ pevné, a měníme krok k . Zajímá nás, zda zůstávají hodnoty $v(t_n)$ omezené pro $k \rightarrow 0$.

- **Stabilita vlastních čísel (Eigenvalue stability):** Jinak také slabá stabilita (weak stability) nebo absolutní stabilita. V tomto případě držíme krok k konstantní a zkoumáme, zda vypočítané hodnoty $v(t_n)$ zůstávají omezeny pro $t \rightarrow \infty$.

První z případů je na analýzu jednodušší. Pro lineární s-krokovou metodu vyjdeme z definičního vztahu (1.5) a definujeme charakteristický polynom

$$\rho(z) = \sum_{j=0}^s \alpha_j z^j. \quad (1.24)$$

Potom řekneme, že s-kroková lineární metoda je stabilní podle první výše popsané definice právě tehdy, když pro všechny kořeny $\rho(z)$ platí $|z| \leq 1$ a každý kořen splňující $|z| = 1$ má násobnost jedna. Podrobnější formulaci a důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v [9]. Díky této formulaci vidíme, že výše zmíněné metody Adams-Bashforthova i Adams-Moultonova jsou v tomto smyslu stabilní pro každý počet kroků $s \geq 1$. Podobně je tomu tak i pro Runge-Kuttovy metody.

Druhý případ stability je obecně velmi komplikované řešit, protože je specifický pro každý problém. Obecná tvrzení jsou převážně pouze pro linearizovanou rovnici $u_t = \alpha u$, $\alpha = konst.$ V takovém případě je možné stanovit podmínky pro takové hodnoty kroku k , aby daná metoda byla tzv. absolutně stabilní (nebo také slabě stabilní, časově stabilní). V této práci se budeme zabývat nelineárními a převážně tenzorovými rovnicemi, proto nebudeme hlouběji rozebírat formalismus pro linearizované problémy. Pro bližší rozbor zároveň s odvozením podmínek absolutní stability pro danou metodu znovu odkazujeme na [9]. Prakticky ale platí, že nestabilitu lze při numerickém řešení jen stěží přehlédnout.

1.4 Test konvergence metody

Při numerických výpočtech není možné vždy porovnat nalezené hodnoty s přesným výsledkem a pouze kvalitativně správné chování není samo o sobě zárukou správnosti našeho výsledku. Je tedy dobré mít po ruce různé metody, kterými můžeme zkoumat chování numerického výpočtu a ověřovat si tak jeho přesnost. Jednou z těchto metod je například konvergence.

Mějme numerickou metodu n -tého řádu. Výsledná hodnota bude tvaru $F(x, k) = f(x) + \alpha k^n + O(k^{n+1})$, kde α je blíže neurčená konstanta. Vezměme nyní tři řešení získaná touto num. metodou s diskrétními kroky k , $2k$ a $4k$. Uvažujme následující výraz

$$\log_2 \frac{\|F(x, 4k) - F(x, 2k)\|}{\|F(x, 2k) - F(x, k)\|}. \quad (1.25)$$

Za předpokladu, že počítáme ve stejném bodě x pro všechny tři metody, tak se společné části $f(x)$ odečtou a zůstane

$$\log_2 \frac{\alpha((4k)^n - (2k)^n)}{\alpha((2k)^n - k^n)} = \log_2 \frac{2^n((2k)^n - k^n)}{((2k)^n - k^n)} = \log_2 2^n = n. \quad (1.26)$$

U metody n -tého řádu tedy dostáváme přímo řád metody. Často pracujeme se složitějšími objekty než jsou funkce o jedné proměnné, v logaritmu tudíž používáme příslušnou normu vhodnou pro daný prostor funkcí.

Při odvozování vzorce (1.26) jsme neuvažovali členy vyšších řádů v rozvoji chyby. Velikost těchto členů je závislá na konkrétním řešeném problému a volbě kroku. V závislosti na jejich chování se může výsledek rovnice (1.25) při průběhu výpočtu měnit a pro některé situace může dokonce silně kolísat. Těchto jevů si budeme všimnout v kapitole 4 u konkrétních numerických výpočtů.

1.5 Porovnání vybraných metod

Porovnejme nyní chování zástupců diskutovaných rodin numerických metod na konkrétním příkladu. Pro výpočet vybereme Runge-Kuttyho metodu čtvrtého řádu (RK4, (1.23)) a čtyřkrokovou Adams-Bashforthovu (AB4, (1.9)) za explicitní metody a Adams-Bashforth-Moultonovu (ABM), tedy výše zmíněnou prediktor-korektorovou rutinu kombinující AB4 s implicitní tříkrokovou AM3 (1.10). Budeme numericky řešit tzv. *logistickou rovnici*. Jde o nelineární ODE prvního řádu tvaru

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y(1 - y), \quad t > 0 \quad (1.27)$$

s danou počáteční podmínkou

$$y(0) = \alpha. \quad (1.28)$$

Z rovnice (1.27) rovnou vidíme konstantní řešení $y \equiv 0$ a $y \equiv 1$. Separací proměnných pak můžeme nalézt přesné obecné řešení

$$y(t) = \frac{\alpha}{\alpha + (1 - \alpha)e^{-\lambda t}}. \quad (1.29)$$

Jelikož jde přesné řešení pro $t \rightarrow \infty$ k jedné, můžeme podobné chování očekávat i od numerických řešení. Hledejme je na intervalu $t \in [0, 10]$ s počáteční hodnotou $y(0) = \frac{1}{2}$. Dále položme pro jednoduchost $\lambda = 1$. Narozdíl od RK4 potřebují AB4 a AM3 jako vícekrokové metody výpočtu více než jednu počáteční hodnotu. Body v^1 , v^2 a v^3 tedy najdeme pouze s pomocí RK4, dosadíme do AB4 a ABM a od v^4 dále již můžeme porovnávat, jak se jednotlivá numerická řešení odlišují od přesného výsledku. Pro výpočet pomocí ABM zvolíme pevný počet čtyř iterací.²

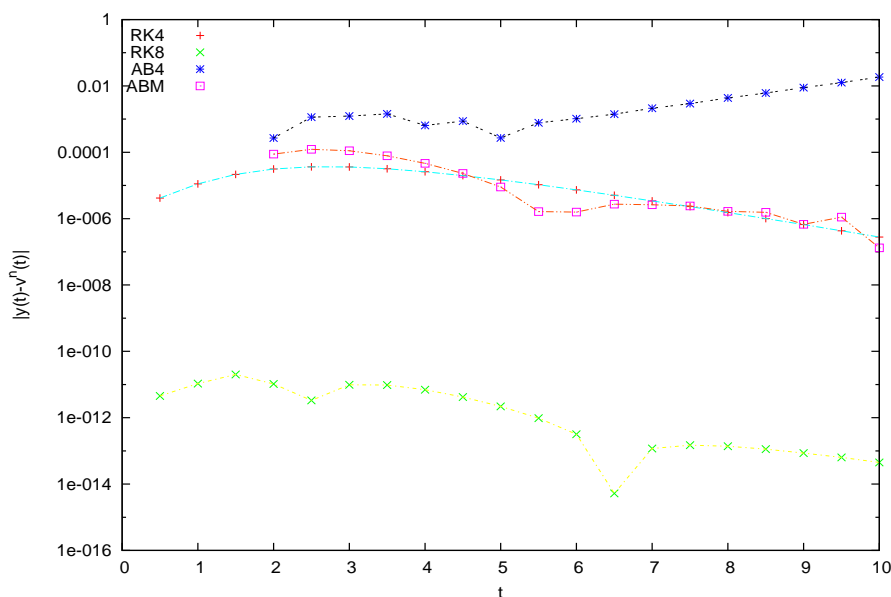
K výpočtu použijeme jednoduchý program v jazyce C++. Zdrojový kód programu je přiložen k elektronické verzi práce.

Pro srovnání je vynesena také chyba Dormand-Princeovy RK8 metody. Jedná se o explicitní metodu typu Runge-Kutta osmého řádu (tomu odpovídá dvanáct

²Viz dokumentace k programu MAPLE 14, příkaz `dsolve` - volba `numeric, method=classical[abmoulton], corrections`.

zavolání fce f v bodech rozprostřených v rozmezí konstantního kroku, viz definice RK metody (1.11)), kterou budeme při dalším výpočtu používat. Její koeficienty zde nebudeme přepisovat v podobě Butcherovy tabulky (viz 1.1), protože jejich složitost by ji činila značně nepřehlednou. Pro zachování přehlednosti textu je výpis koeficientů uveden v Dodatku 1.

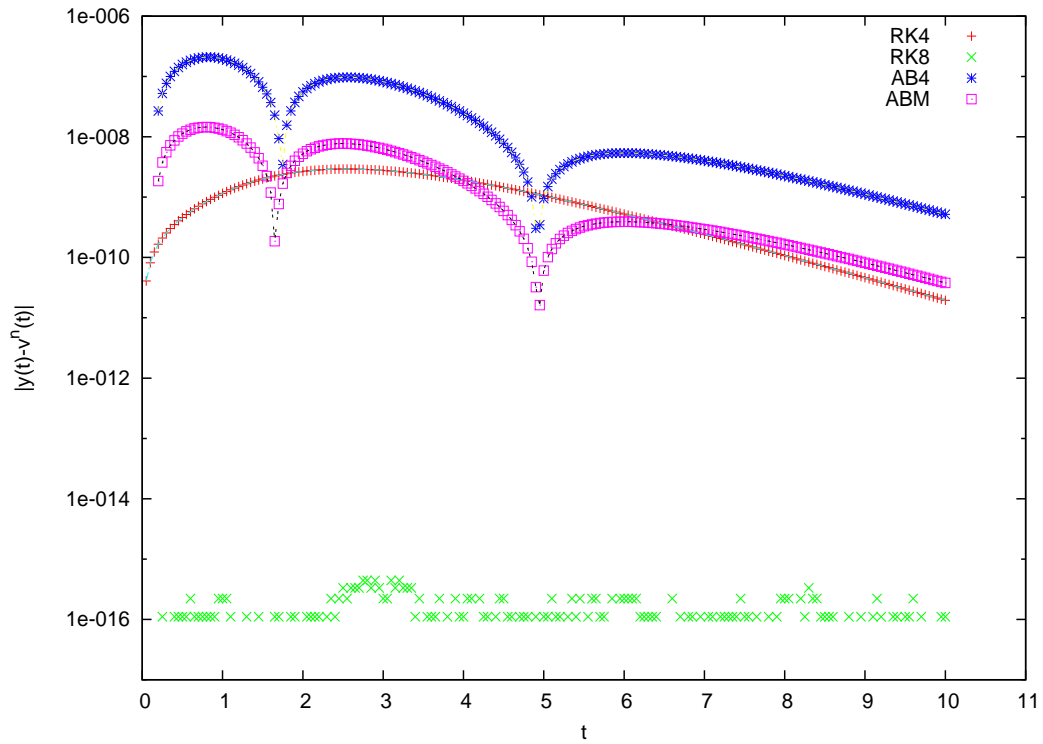
Pro porovnání přesnosti jednotlivých metod vynesme absolutní hodnotu odchylky numerického výsledku od přesného řešení. Výsledky jsou závislé na velikosti diskrétního kroku Δt . Na obrázcích (1.3) až (1.5) jsou vyneseny odchylky pro $\Delta t = 0,5; 0,05$ a $0,005$. Připomeňme, že samotný výpočet pomocí $AB4$ a ABM začíná až v bodě $t = 3\Delta t$.



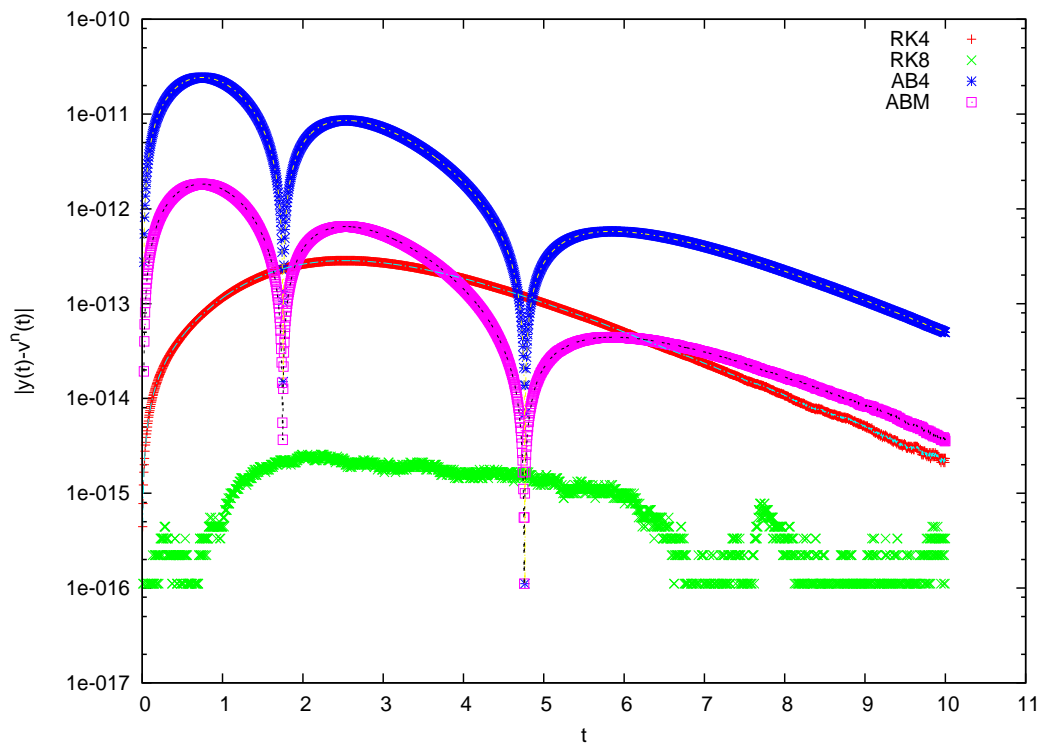
Obrázek 1.3: Odchylky výše zmíněných numerických metod od přesného řešení (1.27) v jednotlivých bodech při $\Delta t = 0,5$.

Na Obrázku 1.3 vidíme, že podle očekávání dává ABM , jako iterační metoda využívající hodnoty původní čtyřkrokové $AB4$, přesnější výsledky než její explicitní vrstevnice. Na dalších dvou obrázcích pak vidíme očekávané zmenšování odchylky od přesného řešení díky zmenšování diskrétního intervalu. U metod $AB4$ a ABM pozorujeme dva nápadné propady v odchylkách od přesného řešení. Ty jsou pravděpodobně způsobeny protnutím přibližného a přesného řešení.

V případě obr. (1.4) vidíme, že odchylka $RK8$ se pohybuje na hranici zaokrouhlovací chyby počítače (v našem případě $\epsilon_r \approx 10^{-16}$), pod kterou se není možné dostat. Naopak, obrázek (1.5) ukazuje, že zmenšení konstantního kroku pro $RK8$ může znamenat nárůst numerické chyby vinou propagace zaokrouhlovací chyby. Přesnost výsledků numerických řešení není tedy dána jen druhem metody a volbou diskrétního kroku, ale zároveň také výpočetním zařízením, které používáme.



Obrázek 1.4: Odchytky výše zmíněných numerických metod od přesného řešení (1.27) v jednotlivých bodech při $\Delta t = 0,05$.



Obrázek 1.5: Odchytky výše zmíněných numerických metod od přesného řešení (1.27) v jednotlivých bodech při $\Delta t = 0,005$.

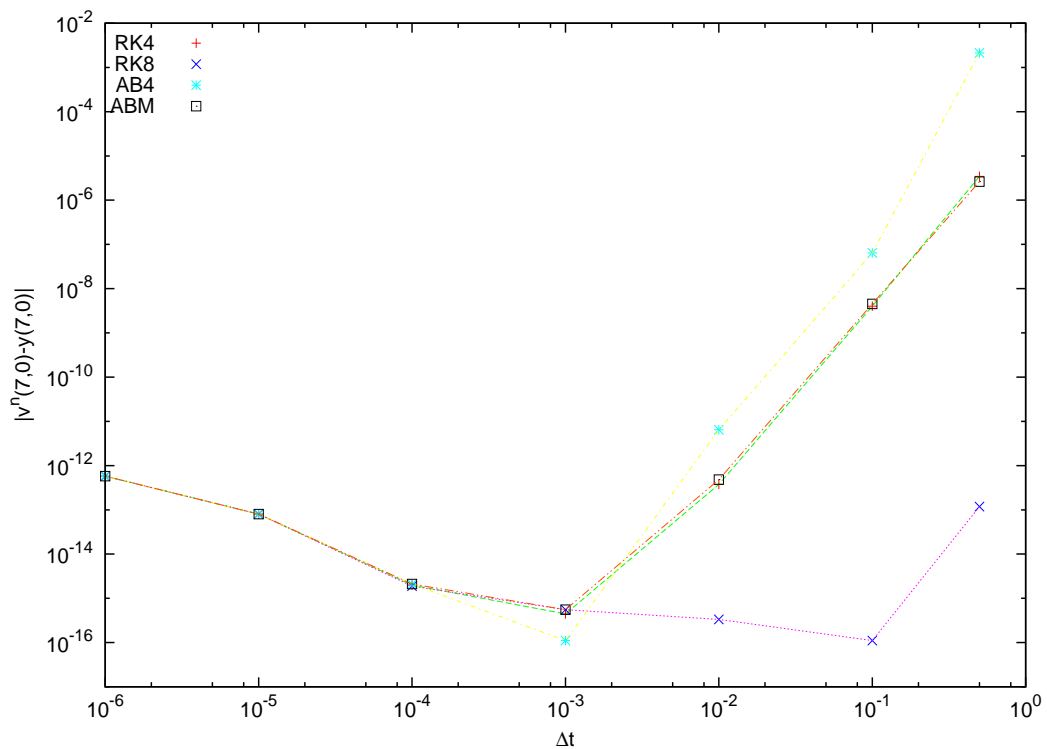
Vynesme dále chybu v konkrétním bodě (volme například $t = 7, 0$) v závislosti na velikosti diskrétního kroku Δt (Obrázek 1.6). Opět vidíme, že zmenšování kroku vede k zpřesňování výsledku až do doby, kdy narazíme na zaokrouhlovací chybu počítače. Z grafu lze vyvodit, že diskrétní krok menší než jedna tisícina vede ke zhoršení přesnosti, tedy opět dostáváme dolní hranici pro velikost kroku.

Výše je ve stručnosti rozebrán pojem konvergence metody. Podívejme se, jak si vedou vybrané metody pro dvě předchozí hodnoty diskrétního kroku $\Delta t = 0, 05$ a $0, 005$ (Obrázky (1.7) až (1.8)). Krok o velikosti jedna polovina neuvažujeme, protože pro náš interval $t \in (0, 10)$ by byla konvergence vyčíslena v příliš málo bodech.

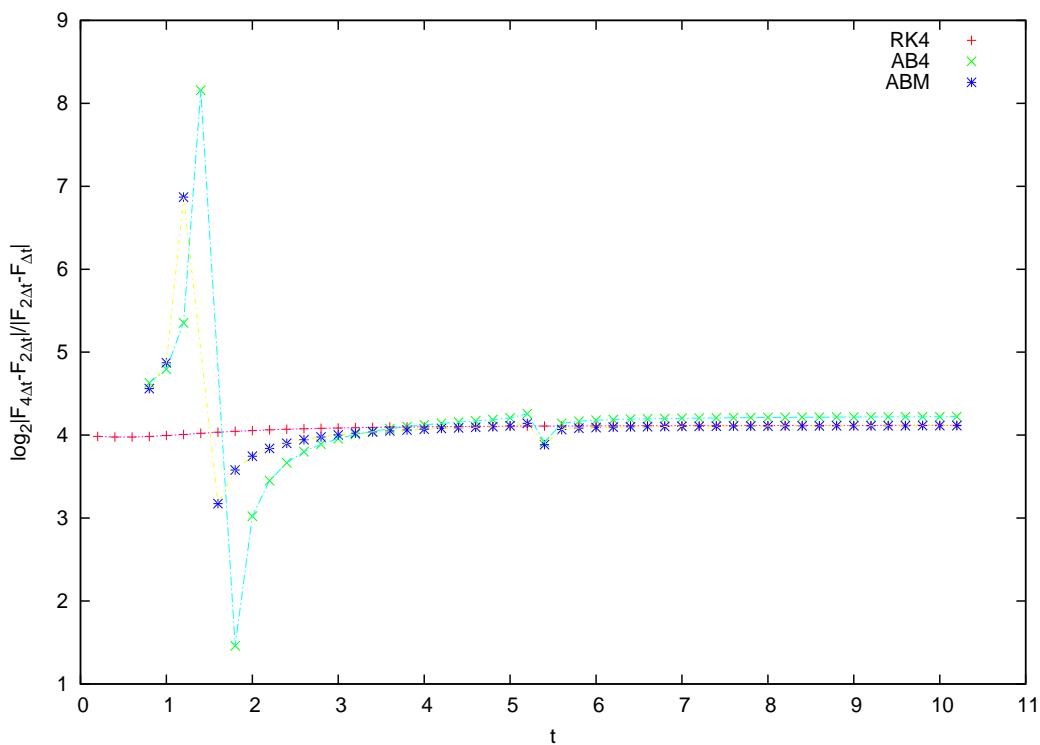
Program použitý k výpočtu z grafů vyloučil záporné či nepravděpodobně vysoké hodnoty logaritmu, které se z teoretických důvodů vymykají očekávanému číselnému rámci, nicméně není možné je při numerickém výpočtu vyloučit. Zároveň jsou vynechány body, kdy program vypsal strojové nekonečno. Patrně proto, že porovnávané body byly příliš blízko sebe na to, aby vztah (1.25) dal konečný výsledek.

U metod *AB4* a *ABM* pozorujeme „přeskoky“, odpovídající bodům $t \approx 1, 7$ a $t \approx 4, 8$, kde se přibližné řešení protíná s přesným (viz výše). Konvergence metody *RK8* není vůbec zobrazena, protože její body jsou příliš blízko sebe (vzhledem k výše zmíněné zaokrouhlovací přesnosti) a numerický výpočet konvergence tak nedává srozumitelné výsledky.

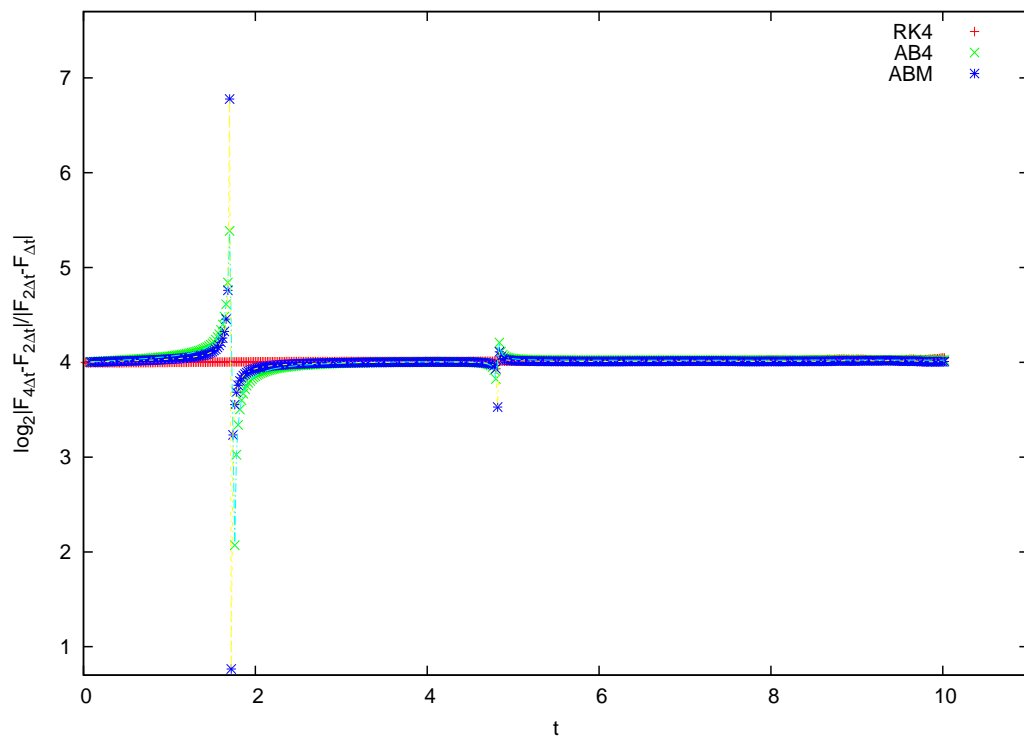
Z naší předběžné analýzy tedy vyplynulo několik závěrů obecně platných pro používání numerických metod. Předně je třeba určit správná kritéria pro výběr nejvhodnějšího numerického kroku pro daný problém. Za jedno takové kritérium jsme si v této práci zvolili konvergenci metody. Dalším důležitým faktorem hrajícím roli při naší volbě je zaokrouhlovací chyba výpočetní aparatury, kterou používáme. Diskrétní reprezentace reálných čísel nám znemožňuje zvolit libovolnou přesnost. Ukázali jsme například, že metoda osmého řádu, ač teoreticky vhodnější než metody menších řádů, nemusí být dobrou volbou pro náš výpočet, když nemůžeme díky zaokrouhlovací chybě kontrolovat její chování v podobě odchylky od správného řešení nebo vyčíslení konvergence.



Obrázek 1.6: Chyba numerických metod v bodě $t = 7,0$ v závislosti na velikosti diskrétního kroku Δt .



Obrázek 1.7: Graf konvergence numerických metod pro $\Delta t = 0,05$.



Obrázek 1.8: Graf konvergence numerických metod pro $\Delta t = 0,005$. Všechny tři metody čtvrtého řádu svým výsledkům odpovídají. Jednotlivé body řešení metody osmého řádu jsou již příliš blízko sebe, aby logaritmus udával při dané strojové přesnosti srozumitelné číselné výsledky.

2. Základní pojmy OTR

V této kapitole vymežíme základní pojmy a konvence formulace OTR v této práci. Budeme vycházet ze standardně používaného popisu pomocí pojmů z diferenciální geometrie. Připravíme si tak půdu pro následující praktické výpočty. Protože půjde o fundamentální pojmy OTR často ovlivňované netriviálními fyzikálními a matematickými předpoklady, budeme často odkazovat na příslušnou literaturu. Dále nastíníme konstrukci pohybových rovnic a jejich ekvivalentní vyjádření v lagrangeově a hamiltonově formalismu. Jak již bylo uvedeno, hlavními zdroji pro tento formalismus jsou učebnice [1],[5] a [6].

2.1 4-rozměrný formalismus, metrický tenzor

Jedním ze nejzásadnějších rozdílů relativity oproti předchozím teoriím je pojem prostoročasu, který vyjadřuje provázanost tří prostorových a jedné časové dimenze. Narozdíl od Newtonovy mechaniky, kde se všechny fyzikální děje odehrávají v třírozměrném prostoru a čas hrál pouze roli důležitého parametru, v relativistických teoriích jsou prostor a čas provázány invariancí fyzikálních zákonů vůči Lorentzovým transformacím.

V této práci budeme popisovat souřadnice událostí standardně 4-vektory číslovanými řeckými indexy. Půjdeme se konvence, ve které indexy probíhají čísla 0, 1, 2, 3, kde nultý index vyhradíme pro časovou složku. Názorněji zapsáno

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (2.1)$$

V OTR pracujeme obecně se zakřivenými prostory¹. Abychom v takové situaci byli vůbec schopni počítat, potřebujeme matematicky popsat geometrii daného prostoru. Vhodný nástroj k tomuto popisu přejatý z diferenciální geometrie je tzv. *metrika* neboli *metrický tenzor*. Tento tenzor druhého řádu, zapisovaný často ve své kovariantní podobě $g_{\mu\nu}$, je obecně funkcí souřadnic. Jeho složky mimojiné určují tvar skalárního součinu

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta, \quad (2.2)$$

kde jsme stejně jako ve zbytku této práce použili Einsteinovu sumační konvenci, kdy se přes dva stejné indexy nahoře a dole sčítá s vynecháním symbolu sumy. Všechny důležité informace o geometrii prostoru jsou v metrickém tenzoru zahrnuty, hraje tedy klíčovou roli v celé relativistické teorii.

¹Slovo prostory je zde myšleno v matematickém slova smyslu. Nezaměňujeme s prostorem fyzikálním. Abstraktní matematický prostor, v našem případě čtyřdimenzionální, nazýváme v OTR prostoročasem, aby se zdůraznil fyzikální význam jednotlivých dimenzí (1 časová a 3 prostorové).

Nejjednodušším příkladem prostoročasu je tzv. Minkowského prostoročas jehož metrický tenzor, často značený $\eta_{\mu\nu}$, má tvar

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Tento prostoročas je někdy též označován jako *plochý*, čímž máme na mysli, že neobsahuje žádné prostoročasové zakřivení. Je relativistickým zobecněním plochého prostoru z klasické mechaniky. Děje odehrávající se v Minkowského prostoročase jsou předmětem zkoumání speciální teorie relativity a kvantové teorie pole.

2.2 4-rychlost, 4-zrychlení a paralelní přenos

Mějme libovolnou diferencovatelnou prostoročasovou křivku parametrizovanou afinním parametrem λ . V každém bodě křivky lze definovat tečný vektor $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$. Pro hmotnou částici je tato křivka, nazývaná též světočára, parametrizovaná vlastním časem τ částice a představuje její prostoročasovou trajektorii. Tečný vektor k ní nazýváme 4-rychlostí částice, tu můžeme zapsat ve složkách $u^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu}{d\tau}$.

V této práci budeme vyšetřovat pohyb volných částic, tedy takových, na které nepůsobí žádná vnější síla. Dynamika volných částic je tedy dána pouze geometrií prostoročasu, jelikož podle OTR nepovažujeme gravitaci za působící sílu nýbrž za vlastnost prostoročasu, která ovlivňuje všechno dění v něm. Když jde o pohyb volné částice, dá se podle klasických představ předpokládat, že její zrychlení bude nulové. K výpočtu zrychlení potřebujeme derivaci rychlosti a zde se naše situace stává zajímavou.

V klasické mechanice a speciální relativitě bychom derivací 4-rychlosti podle vlastního času získali 4-zrychlení. V obecné relativitě ale pracujeme v zakřiveném prostoročase a derivace vektoru tak není dobře definovaná. Vzpomeňme obecnou definici derivace vektoru:

$$\left. \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^\mu(\lambda_0 + h) - x^\mu(\lambda_0)}{h}. \quad (2.4)$$

Sčítání a odčítání vektorů je definováno pouze v jejich společném bodě, takže je nutné jeden z vektorů přenést, přitom se složky vektoru v obecně zakřiveném prostoru nezachovávají, proto je třeba přijít s vhodnějším matematickým nástrojem, který nám umožní správně přenášet vektory do jednoho bodu. Tímto nástrojem je *paralelní přenos*. Umožňuje nám přenést vektor z bodu do bodu podél dané křivky, aniž by se změnila jeho norma. Pro rigorózní odvození a komplexnější vzhled do této problematiky odkazujeme čtenáře na příslušnou literaturu [1, 5, 6]. Pro naše účely se omezíme jen na důsledky ve fyzikálních zákonech, které použití paralelního přenosu přináší. Především zaměníme úplnou derivaci za tzv. absolutní:

$$\frac{dA^\mu}{d\lambda} \rightarrow \frac{DA^\mu}{d\lambda} \equiv \frac{dA^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda}. \quad (2.5)$$

Symbol $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ označuje složky tzv. afinní konexe.² Společně s absolutní derivací se zavádí také kovariantní derivace, která zobecňuje pojem parciální derivace:

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \rightarrow \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha. \quad (2.6)$$

Pro přehlednější zápis budeme nadále zapisovat kovariantní derivaci středníkem, tedy $A^\mu_{;\nu}$ označuje kovariantní derivaci složek vektoru \mathbf{A} podle ν -té souřadnice. Podobně čárka znamená ve zkráceném zápisu parciální derivaci.

S pomocí této notace můžeme zapsat užitečný vztah mezi složkami afinní konexe a metrikou:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}). \quad (2.7)$$

Vztah (2.7) je výhodný pro počítání složek afinní konexe při zadané metrice, čehož využijeme v následující kapitole. Dále zde můžeme nahlédnout, že Christoffelovy symboly jsou díky symetrii metrického tenzoru (záměnnost indexů) symetrické ve druhém a třetím indexu.

2.3 Schwarzschildovo řešení Einsteinových rovnic

Abychom mohli na základě známého rozložení hmotnosti (energie) zdroje určit jím generovanou geometrii prostoročasu, potřebujeme sadu rovnic, která bude tyto dvě veličiny spojovat. Takovou soustavou jsou tzv. *Einsteinovy rovnice pole*:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

kde $G_{\mu\nu}$ nazýváme Einsteinovým tenzorem a $T_{\mu\nu}$ tenzorem energie a hybnosti. Pravá strana vztahu (2.8) má význam zdroje gravitačního pole, obsahuje tedy informaci o rozložení energie zdroje. Einsteinův tenzor na levé straně je funkcí metrického tenzoru $g_{\alpha\beta}$ (a jeho prvních a druhých derivací), který zde představuje neznámou. Ve čtyřrozměrném prostoročase má metrický tenzor šestnáct složek, nicméně díky symetrii $g_{\alpha\beta}$ nám stačí vypočítat pouze deset složek, máme tedy deset Einsteinových rovnic.

Uvažujme nyní sféricky symetrický vakuový prostoročas. To znamená, že vyžadujeme sférickou symetrii rozložení hmotnosti zdroje gravitačního působení a zároveň řešíme problém mimo tento zdroj (tj. $T_{\mu\nu} = 0$). Řešením Einsteinových rovnic za těchto podmínek je tzv. *Schwarzschildovo řešení* (v geometrizovaných jednotkách):

²Afinní konexe je obecně složitější objekt v teorii Riemannovských prostorů. V případě OTR, kdy požadujeme, aby se při paralelním přenosu dvou vektorů zachovával jejich skalární součin, lze přímo odvodit platnost níže uvedeného vzorce (2.7). V takovém případě nazýváme $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ Christoffelovými symboly druhého druhu, popřípadě v čistě kovariantní formě $\Gamma_{\mu\alpha\beta}$ Christoffelovými symboly prvního druhu.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.9)$$

Odvození metriky (2.9)³ lze nalézt v celé řadě učebnic, detailní odvození můžeme najít v [1] nebo [5], stručný nástin podává [6]. Souřadnice t má význam vlastního času pozorovatele stojícího v nekonečné vzdálenosti od počátku, r je radiální vzdálenost volena tak, že dvourozměrná plocha $t = konst$ a $r = konst$ tvoří sféru s povrchem $4\pi r^2$ jako v euklidovském prostoru. Podobně obvod ekvatoriální kružnice ($\theta = \frac{\pi}{2}$) této sféry má délku $2\pi r$. Úhly θ a φ jsou totožné s běžnými třírozměrnými prostorovými souřadnicemi. Parametr M má význam celkové hmotnosti zdroje gravitačního pole umístěného v počátku souřadnic.

Povšimněme si několika vlastností Schwarzschildovy metriky:

- *Asymptotická plochost:* Snadno nahlédneme, že v nekonečné vzdálenosti od zdroje ($r \rightarrow \infty$) přechází metrika na tvar popisující plochý Minkowskiho prostoročas ve sférických souřadnicích. Ten odpovídá situaci, kdy k žádnému zakřivení prostoročasu nedochází, tím pádem tělesa nepocítují gravitační působení. Tato vlastnost souhlasí s naší představou, že se zvětšující se vzdálenosti od zdroje gravitačního pole by měl jeho účinek klesat.
- *Stacionarita:* Geometrie popsaná metrikou je statická (nezávislá na časové souřadnici t), aniž by byl při jejím odvozování podobný předpoklad použit. Gravitační pole vně objektu, který s časem mění svůj tvar, ale zachovává svoji sférickou symetrii (pulsující hvězdy, sférický kolaps) je tedy také možné popisovat pomocí Schwarzschildovy metriky.
- *Singularita a horizont:* Složky metriky (2.9) vykazují zvláštní chování v okolí dvou bodů, $r = 2M$ a $r = 0$. Lze ukázat, že singularita na Schwarzschildově horizontu je pouze zdánlivá, tzv. souřadnicová singularita. Je způsobena chováním daných souřadnic a je možné se jí zbavit transformací do vhodnější vztažné soustavy (viz např. Lemaitrovy nebo Kruskalovy-Szerekesovy souřadnice, [6], kap IV.2.2). Pro detailnější diskuzi Schwarzschildovského horizontu odkazujeme na [1], paragraf 31.2. Pomocí Kretschmannova invariantu $R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ lze ukázat, že bod $r = 0$ skutečně je fyzikální singularitou. Zde přestává být geometrie pomocí metrického tenzoru dobře definovaná a řešení této situace přesahuje jak rozsah této práce, tak i samotnou OTR.

³V jednotkách SI přejde výraz $2M$ na $r_g \equiv \frac{2MG}{c^2}$ (G je Newtonova gravitační konstanta a c rychlost světla). Parametr r_g bývá nazýván Schwarzschildův poloměr či Schwarzschildův horizont a v závislosti na celkové hmotnosti M kvantitativně ovlivňuje chování metriky.

2.3.1 Izotropní souřadnice Schwarzschildovy metriky

Dle teorie relativity jsou všechny souřadnicové systémy fyzikálně ekvivalentní a výsledek měření na našem výběru nezávisí. Samozřejmě ale existují systémy souřadnic, které si vybíráme častěji pro jejich matematickou jednoduchost či názornost. Výše zmiňované Schwarzschildovy souřadnice a v nich vyjádřený čtyř-interval (2.9) jsou toho příkladem. Další často zmiňovanou možností jsou tzv. izotropní souřadnice. Jde o obecný pojem, ve kterém prostoročasový interval nabývá tvaru (viz [1])

$$ds^2 = -f(r)^2 dt^2 + g(r)^2 [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (2.10)$$

Pro názornost převedme nejprve Schwarzschildovu metriku do izotropní podoby. Mějme transformaci

$$r = \left(1 + \frac{M}{2r_1}\right)^2 r_1, \quad (2.11)$$

diferenciací dostáváme

$$dr = \left(1 - \frac{m^2}{4r_1^2}\right) dr_1. \quad (2.12)$$

Vložme nyní rovnice (2.11) a (2.12) do (2.9). Po krátkém výpočtu dojdeme k tvaru

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{M}{2r_1}\right)^2}{\left(1 + \frac{M}{2r_1}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r_1}\right)^4 [dr_1^2 + r_1^2 d\theta^2 + r_1^2 \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (2.13)$$

Dostali jsme izotropní sférické souřadnice. Tento tvar je obzvláště výhodný, protože můžeme snadno přejít k izotropním kartézským souřadnicím použitím známých vztahů $x = r_1 \sin \theta \cos \varphi$, $y = r_1 \sin \theta \sin \varphi$ a $z = r_1 \cos \theta$ a jejich inverzní podoby. Ponechme si ještě označení $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, celkem přejde (2.13) na tvar

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{M}{2r_1}\right)^2}{\left(1 + \frac{M}{2r_1}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r_1}\right)^4 [dx^2 + dy^2 + dz^2]. \quad (2.14)$$

Z poslední rovnice vidíme ještě názorněji než z definice (2.10) nejdůležitější vlastnost tohoto typu souřadnic. Tou je prostorová izometrie. Konkrétně řečeno to znamená, že fyzikální vzdálenost mezi prostorovými body (x, y, z) a $(x + da, y, z)$ je stejná jako mezi (x, y, z) a $(x, y + da, z)$, resp. (x, y, z) a $(x, y, z + da)$. Tuto vlastnost původní Schwarzschildovy souřadnice nemají.

3. Pohybové rovnice

Nyní zformulujeme pohybové rovnice, jejichž řešení bude předmětem čtvrté kapitoly. Naším hlavním tématem je rovnice geodetiky, popíšeme ale i ekvivalentní lagrangeovský a hamiltonovský přístup. Krátce okomentujeme i pohybové rovnice pro světelnou částici či systém více částic časupodobné povahy.

3.1 Rovnice geodetiky

Jak již bylo řečeno výše, budeme se zabývat pohybem volných částic v zakřiveném prostoročase. Volná částice má z definice nulové čtyřzrychlení

$$a^\mu = \frac{Du^\mu}{d\tau} = 0. \quad (3.1)$$

Pomocí definičního vztahu pro absolutní derivaci (2.5) zapíšeme pohybovou rovnici

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0. \quad (3.2)$$

S využitím definice 4-rychlosti dostáváme rovnici druhého řádu

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (3.3)$$

Pro srovnání s klasickou mechanikou můžeme vztah (3.3) přepsat do názornější podoby

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (3.4)$$

Vidíme tedy, že dynamika volné částice je ovlivněna pouze lokální geometrií prostoročasu skrze složky afinní konexe (jež jsou funkcí metriky, viz vzorec (2.7)).

Všimněme si dalšího důležitého detailu. Rozepíšeme rovnici popisující pohyb volné částice (3.2) v kovariantním tvaru ¹:

$$\frac{du_\mu}{d\tau} = \Gamma^\alpha_{\mu\beta} u_\alpha u^\beta \stackrel{(2.7)}{=} \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} (g_{\nu\mu,\beta} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\beta,\nu}) u_\alpha u^\beta = \frac{1}{2} g_{\beta\nu,\mu} u^\nu u^\beta, \quad (3.5)$$

kde jsme použili nulovost součinu symetrického a antisymetrického tenzoru. Ze vzorce (3.5) plyne, že pokud složky metrického tenzoru nezávisí na některé ze souřadnic (parciální derivace je nulová), je příslušná kovariantní složka čtyřrychlosti integrálem pohybu, tedy veličinou, která zůstává během pohybu částice konstantní.

¹Kovariantní forma absolutní derivace 4-rychlosti má tvar $\frac{Du_\mu}{d\tau} = \frac{du_\mu}{d\tau} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} u_\alpha u^\beta$ (viz [6]).

3.1.1 Rovnice geodetiky ve Schwarzschildově metrice

Napočítejme složky afinní konexe v případě Schwarzschildovy metriky (2.9). Využitím vztahu (2.7) můžeme spočítat následující

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & \Gamma_{11}^1 &= -\frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\ \Gamma_{22}^1 &= -(r - 2M) & \Gamma_{33}^1 &= -(r - 2M) \sin^2\theta \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} & \Gamma_{23}^3 &= \cot\theta.\end{aligned}$$

Ostatní složky $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ jsou nulové nebo plynou ze symetrie.

Protože složky Schwarzschildovy metriky (2.9) nejsou závislé na souřadnicích t a φ , plynou z rovnice (3.5) dva integrály pohybu $u_0 \equiv \tilde{E}$ a $u_3 \equiv \tilde{L}$, kde jsme použili standardní značení pro tyto veličiny. Detailnější rozbor těchto veličin lze nalézt například v [1]. Speciálně pro třetí složku ($\mu = 2$) rovnice (3.5) platí

$$\frac{du_2}{d\tau} = r^2 \sin\theta \cos\theta u^3 u^3. \quad (3.6)$$

Zvolíme-li vztahnou soustavu tak, že pohyb částice má počátek v ekvatoriální rovině ($\theta = \frac{\pi}{2}$), bude $\frac{du_2}{d\tau} = 0$, z čehož plyne i $\frac{du^2}{d\tau} = 0$. Pro sféricky symetrický problém pak v této rovině částice zůstane a její pohyb se zredukuje na dvojdimenzionální problém (počáteční podmínka $u^2 = 0$ nám zaručí $x^2 = konst$, tedy pohyb v rovině; viz také [6]).

3.2 Langrangeovský popis

Vztah (3.3) není jedinou možnou formulací pohybové rovnice. Vyjdeme z principu extrémální akce známého již z klasické mechaniky. Definujeme akci vztahem

$$S[x(\tau)] = \int L(x^\mu, \dot{x}^\nu) d\tau, \quad (3.7)$$

kde L je lagrangián a kde jsme označili $\frac{dx}{d\tau} \equiv \dot{x}$. Podmínka nulovosti variace akce podél reálné trajektorie vede na známé Euler-Lagrangeovy rovnice [8]:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right] - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (3.8)$$

Zvolme

$$L_1 = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (3.9)$$

(svým tvarem odpovídá L lagrangiánu klasické volné částice). Podle [8] mají Eulerovy-Lagrangeovy rovnice právě tvar rovnice geodetiky (3.5). Poznamenejme, že pro daný systém není lagrangián pevně určen. Každý lagrangián, který vede na totožné pohybové rovnice, je stejně tak platný.

3.3 Hamiltonovy pohybové rovnice

Další metodou známou z klasické mechaniky je hamiltonovská formulace pomocí zobecněných souřadnic x^α a kanonicky združených hybností p_α . Kanonická hybnost je definována vztahem

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (3.10)$$

Pro lagrangián L_1 platí $p_\mu = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu$. Hamiltonián H získáme z definičního vztahu

$$H = p_\mu \dot{x}^\mu - L(x^\alpha, \dot{x}^\beta), \quad (3.11)$$

kde musíme 4-rychlost vyjádřit pomocí 4-hybnosti. V případě L_1 dostáváme

$$H_1 = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu. \quad (3.12)$$

Pohybové rovnice se nezmění, přeškálujeme-li afinní parametr podél trajektorie lineárně (viz např. [1]). S využitím definice 4-hybnosti $p^\mu = m u^\mu$, kde m je hmotnost částice, můžeme po provedení transformace

$$\tau = m\lambda \quad (3.13)$$

zavést 4-hybnost jako $p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = m \frac{dx^\mu}{d\tau} = m \dot{x}^\mu$. Pak můžeme zformulovat Hamiltonovy pohybové rovnice

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\lambda} &= \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \\ \frac{dp_\mu}{d\lambda} &= - \frac{\partial H}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

V případě volné částice ($H = H_1$) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\lambda} &= g^{\mu\nu} p_\nu \\ \frac{dp_\mu}{d\lambda} &= -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}{}_{,\mu} p_\alpha p_\beta, \end{aligned} \quad (3.15)$$

tedy soustavu rovnic, která je s použitím vztahu (2.7) ekvivalentní s rovnicí geodetiky (3.3), resp. (3.5) - viz [1].

3.3.1 Hamiltonovy rovnice ve Schwarzschildově metrice

Rozepišme rovnici (3.12) pro konkrétní případ Schwarzschildovy metriky:

$$H_1 = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} p_0^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) p_1^2 + \frac{1}{r^2} p_2^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_3^2 \right].$$

Následně můžeme snadno vypočítat pohybové rovnice pomocí (3.14):

$$\begin{aligned}
\frac{dx^0}{d\lambda} &= -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} p_0 \\
\frac{dx^1}{d\lambda} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) p_1 \\
\frac{dx^2}{d\lambda} &= \frac{1}{r^2} p_2 \\
\frac{dx^3}{d\lambda} &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_3
\end{aligned}
\tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_0}{d\lambda} &= 0 \\
\frac{dp_1}{d\lambda} &= -\frac{M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} p_0^2 - \frac{M}{r^2} p_1^2 + \frac{1}{r^3} p_2^2 + \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta} p_3^2 \\
\frac{dp_2}{d\lambda} &= \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} p_2^2 \\
\frac{dp_3}{d\lambda} &= 0,
\end{aligned}$$

čímž dostáváme soustavu rovnic prvního řádu, kterou dále použijeme při výpočtu.

3.4 Systémy více částic, souřadnicový čas

Výše probíraný formalismus je i přes svou nespornou eleganci nevhodný pro popis systému více částic. Každá z nich má svůj vlastní čas τ a není tedy jasné, jak pomocí nich formulovat vývojové rovnice pro celý systém. Řešením je použít souřadnicový čas t , kterým chceme namísto dříve použitého vlastního času τ parametrizovat světočáry částic. Pro pohybové rovnice reprezentované v našem případě rovnicí geodetiky to konkrétně znamená změnu proměnné, od $x^\mu(\tau)$ k $x^\mu(t)$. K tomu nám bude stačit řetězové pravidlo o derivacích a označení $\frac{dt}{d\tau} \equiv u^0$.²

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} &= 0 \\
\frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\mu}{dt} u^0 \right) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} (u^0)^2 &= 0 \\
\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} (u^0)^2 + \frac{dx^\mu}{dt} \frac{u^0}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} (u^0)^2 &= 0
\end{aligned}$$

²Připomeňme, že $x^0 \equiv t$. Jde jen o dvě různá značení téhož.

Dále využijeme původní rovnici geodetiky (3.4) pro $\mu = t$ a dosadíme za $\frac{du^0}{d\tau}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} (u^0)^2 + \frac{dx^\mu}{dt} \left(-\Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\beta}{d\tau} \right) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} (u^0)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} (u^0)^2 - \frac{dx^\mu}{dt} \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} (u^0)^2 + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} (u^0)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} - \frac{dx^\mu}{dt} \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{\beta}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Označme

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \frac{dx^\mu}{dt} \Gamma_{\alpha\beta}^0, \quad (3.17)$$

ve výsledku pak dostáváme rovnici geodetiky vzhledem k souřadnicovému času:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0. \quad (3.18)$$

Stejně tak můžeme postupovat v případě hamiltonovského popisu. Naším cílem je nalézt hamiltonián H , který bude pro kanonicky sdružené souřadnice a hybnosti $x^i(t), p_i(t)$ splňovat rovnice

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Vyjděme opět z akce, bez újmy na obecnosti definované

$$S_2[x^i(t), p_j(t)] = \int 2L_1 dt \stackrel{(3.14)}{=} \int p_\mu dx^\mu = \int \left(p_0 + p_i \frac{dx^i}{dt} \right) dt. \quad (3.20)$$

Dochází tak k separaci časové a prostorové části 4-hybnosti. Srovnáním výsledného tvaru akce a definiční rovnice pro hamiltonián (3.16) se nám přímo nabízí $H = -p_0$. Abychom mohli tento výraz použít pro praktické výpočty, musíme ho zkonkretizovat. Opuštěním vlastního času jsme sice ztratili vazebnou podmínku pro čtyřrychlost $u^\mu u_\mu = -1$ (v geometrizovaných jednotkách), ale můžeme místo toho použít přímo relaci $H_1 = -\frac{1}{2}m^2$, čímž udáme potřebnou vazbu redukující systém rovnice. Aby byl tento postup korektní je dle [8] třeba ukázat, že „extremalizace S_2 vzhledem ke všem možným prostorovým trajektoriím $x^i(t), p_j(t)$ je ekvivalentní extremalizaci S vzhledem k $t(\tau), x^i(\tau)$, kde τ je afinní parametr.“ Důkaz přesahující rozsah této práce lze nalézt tamtéž.

Využijme tedy tuto vazebnou podmínku k formulaci hamiltoniánu. Máme (i,j=1,2,3)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu &= -\frac{1}{2}m^2 \\ g^{00}(p_0)^2 + 2g^{0i}p_0 p_i + g^{ij}p_i p_j &= -m^2 \\ (p_0)^2 + \frac{2g^{0i}}{g_{00}}p_i p_0 + \frac{1}{g_{00}}(g^{ij}p_i p_j + m^2) &= 0.\end{aligned}$$

Řešením kvadratické rovnice máme dvě řešení pro p_0 . Fyzikálně relevantní je pouze řešení se záporným znaménkem u odmocniny z determinantu (to lze ověřit například tak, že ve speciálním případě Minkowského metriky by u kořenu s kladným znaménkem měla volná částice zápornou energii). Nakonec dostáváme výsledný tvar hamiltoniánu

$$H = -p_0 = \frac{g^{0i}}{g^{00}} + \left[\frac{(g^{ij}p_i p_j + m^2)}{-g^{00}} + \left(\frac{g^{0i}p_i}{g^{00}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.21)$$

Tento výsledek je zcela obecný, nezávisí na konkrétním tvaru metrického tenzoru.

3.5 Pohybové rovnice pro světelné (nehmotné) částice

Výše popsany formalismus můžeme s malými úpravami použít i pro nehmotné částice. Typickým zástupcem je například foton, částice světla. Narozdíl od klasické mechaniky předpokládá OTR, že fotony v blízkosti zdroje gravitačního pole mění svou trajektorii. Světelný paprsek se ohýbá. Tento jev byl skutečně pozorován ve 20. letech 20. století a potvrdil tak správnost Einsteinovy předpovědi (viz Úvod).

Pro nehmotné částice pohybující se rychlostí světla (fotony) je čtyřinterval ds tzv. světelné povahy, tedy platí

$$ds^2 \equiv g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = 0, \quad (3.22)$$

z čehož přímo plyne podmínka pro normu čtyřrychlosti nehmotných částic³

$$g^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = 0. \quad (3.23)$$

Dosud jsme se drželi značení $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, kde τ byl vlastní čas částice. Pro nehmotné částice ale pojem vlastního času nedává smysl, je tedy nutné τ chápat pouze jako afinní parametr podél trajektorie částice.

³Alternativní možností by bylo užít hamiltonovského formalismu a nahradit u^μ za p_μ , dostali bychom tím ale formálně stejný vztah jako (3.23) a následující postup by byl identický.

Rozepsáním vztahu (3.23), použitím podmínky pohybu v orbitální rovině (viz komentář k rovnici (3.6)) a označením integrálů pohybu $u^0 \equiv \tilde{E}$ a $u^\varphi \equiv \tilde{L}$ dostáváme

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right). \quad (3.24)$$

Opět používáme geometrizované jednotky $c = 1$, $G = 1$. Úprava této rovnice substitucí $\rho = \frac{1}{r}$ a hledáním funkce $\rho(\varphi)$ (viz např. [1], [5] nebo [6]) vede na relativistickou verzi Binetova vzorce známého z klasické mechaniky. Pro náš případ nehmotné částice má výsledná rovnice tvar

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = 3M\rho^2 - \rho, \quad (3.25)$$

jde tedy o diferenciální rovnici druhého řádu, jejíž řešením je funkce $\rho(\varphi)$, která nám udává pohyb světelného paprsku $(\varphi, r) \equiv (\varphi, \frac{1}{\rho})$ v ekvatoriální rovině.

4. Řešení pohybových rovnic

Nyní přejdeme k řešení pohybových rovnic, jejichž přehled je podán v kapitole 3. Budeme se zabývat oběhem volné testovací částice a ohybem světelného paprsku v blízkosti Schwarzschildovy singularity. Naším cílem je porovnat chování vybraných numerických metod, zjistit pro jaké hodnoty konstantního kroku či formulaci pohybových rovnic je jejich chování optimální.

4.1 Oběh hmotné částice v blízkosti singularity

Pro relativistické orbity jsou známa aproximativní řešení vhodná pro větší vzdálenost od singularity. Numerická řešení nejsou narozdíl od aproximativních přístupů omezena na určité oblasti. Budeme se tedy zabývat problémem oběhu volné testovací částice v relativní blízkosti singularity. Zároveň se v této podkapitole omezíme na časupodobné trajektorie reálné částice, τ bude mít tedy význam vlastního času částice. V geometrizovaných jednotkách má čas i hmotnost rozměr délky. Protože nám jde hlavně o numerickou analýzu, budeme pro přehlednost až na výjimky tyto jednotky vynechávat. Zvolme pro jednoduchost hmotnost testovací částice $m = 1$ a stejně tak i jednotkovou hmotnost zdroje $M = 1$. Stále se pohybujeme ve Schwarzschildových souřadnicích $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$.

4.1.1 Počáteční podmínky

V případě rovnice geodetiky (3.3) máme diferenciální rovnici druhého řádu. Převědeme ji na soustavu dvou rovnic prvního řádu, když využijeme definice čtyřrychlosti a přeznačíme tak první derivace

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv u^\mu, \quad (4.1)$$

čímž dostáváme

$$\begin{pmatrix} x^\mu \\ u^\mu \end{pmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} u^\mu \\ -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Zvolme nyní počáteční podmínky pohybu částice:

$$\begin{aligned} (x^\mu)_{IN} &= (0, r_0, \frac{\pi}{2}, 0) \\ (u^\mu)_{IN} &= (u^0, 0, 0, \frac{\tilde{L}}{r_0^2}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Poslední složku čtyřrychlosti u^3 jsme vyjádřili pomocí integrálu pohybu $\tilde{L} \equiv u_3$ díky vztahu

$$u^3 = g^{3\mu} u_\mu = g^{33} u_3 = \frac{\tilde{L}}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.4)$$

Konkrétní volbu parametrů r_0 a \tilde{L} provedeme níže. Chybí nám ještě určit časovou složku rychlosti u^0 . Jelikož se zabýváme reálnými částicemi jejichž pohyb parametrizujeme pomocí vlastního času, musí pro složky rychlosti v geometrizovaných jednotkách platit

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)(u^0)^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}(u^1)^2 + r^2 [(u^2)^2 + \sin^2\theta(u^3)^2] = -1. \quad (4.5)$$

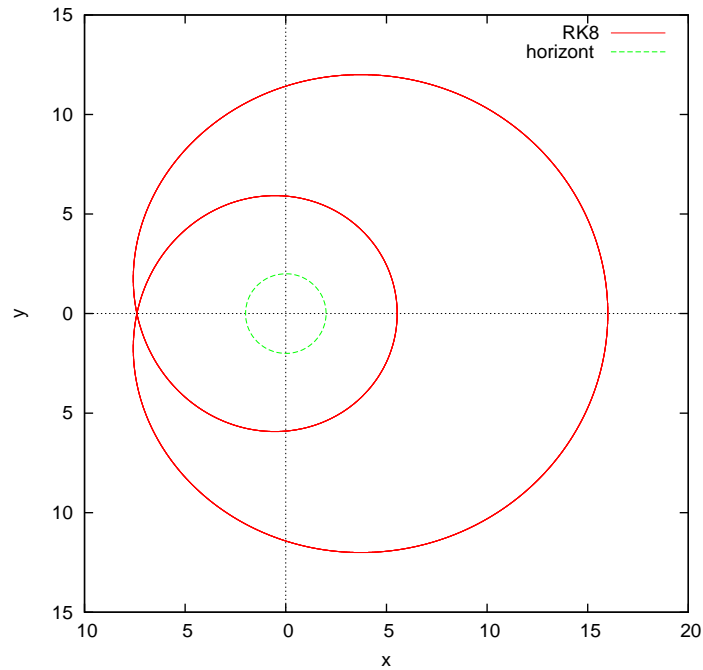
Použijeme počáteční podmínky (4.3) a vyjádříme u^0 :

$$u^0 = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2M}{r_0}} + \frac{\tilde{L}^2}{1 - \frac{2M}{r_0}}}. \quad (4.6)$$

Máme tak všech osm počátečních podmínek potřebných pro řešení soustavy (4.2). Zvolíme nyní parametry r_0 a \tilde{L} . Volbou $r_0 = 16M$ omezíme pohyb na relativní blízkost singularity. Dále zvolme konkrétní hodnotu integrálu pohybu

$$\tilde{L} = 3,6823981191047921. \quad (4.7)$$

Tak dostaneme velice specifickou trajektorii vykreslenou pro prvních pět oběhů na Obrázku (4.1). Vidíme, že se jedná o uzavřenou trajektorii. Jelikož všechny trajektorie ve Schwarzschildově prostoročase vykazují stáčení ve směru pohybu, znamená to, že se tato konkrétní trajektorie stáčí přesně o 2π .



Obrázek 4.1: Prvních pět oběhů vypočítaných pomocí Dormand-Princeovy RK8 metody (viz oddíl 1.5). Díky speciální volbě \tilde{L} dochází ke stáčení trajektorie o celé 2π , takže se jedná o uzavřenou křivku.

Podobně udáme počáteční podmínky pro Hamiltonovy rovnice (3.19), jejichž řešením se budeme také zabývat. V tomto případě máme rovnou soustavu osmi rovnic pro čtyři souřadnice x^μ a složky 4-hybnosti p_μ :

$$\begin{aligned}(x^\mu)_{IN} &= (0, r_0, \frac{\pi}{2}, 0) \\ (p_\mu)_{IN} &= (p_0, 0, 0, \tilde{L}).\end{aligned}\tag{4.8}$$

Díky volbě jednotkové hmotnosti testovací částice máme přímý vztah mezi kovariantními složkami 4-rychlosti a 4-hybnosti $u_\nu = p_\nu$. Pro čtvrtou složku hybnosti tedy rovnou platí $p_3 = \tilde{L}$. Složku p_0 vypočítáme podobným způsobem jako výše. Máme

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -\frac{(p_0)^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (p_1)^2 + \frac{1}{r^2} \left[(p_2)^2 + \frac{(p_3)^2}{\sin^2 \theta} \right] = -1.\tag{4.9}$$

Použijeme počáteční podmínky (4.8) a vyjádříme p_0 :

$$p_0 = -\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r_0}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r_0^2}\right)}.\tag{4.10}$$

K výpočtům budeme používat metody Runge-Kutta čtvrtého řádu (*RK4*), Dormand-Princeovu Rhunge-Kutta osmého řádu (*RK8*), čtyřkrokovou Adams-Bashforthovu (*AB4*) a Adams-Bashforth-Moultonovu prediktor-korektorovou metodu (*ABM*). Samotný výpočet je proveden pomocí programu napsaného v jazyce C++ v překladači Microsoft Visual C++ 2010 Express. Zdrojové kódy jsou spolu s přílušnými externími soubory přiloženy spolu s elektronickou verzí práce na CD. Výstupem všech programů jsou data v textových souborech, které jsou posléze vykresleny grafickým programem Gnuplot, verze 4.4.4.

4.1.2 Konvergence numerických metod

Jedním z kritérií pro porovnání vhodnosti jednotlivých numerických metod a formulací pohybových rovnic je konvergence numerické metody popsané v oddíle (1.4). Budeme hledat pro jaké volby konstatního kroku vykazují metody konvergentní chování. Za tím účelem vyneseme hodnotu logaritmu ve vzorci (1.25) v závislosti na velikosti kroku. Pro výpočet jsme vybrali tři metody čtvrtého řádu a jednu osmého řádu, požadujeme tedy, aby se vynášené hodnoty těmito čísly co nejvíce blížily.

Vzorec (1.25) obsahuje normu na prostoru funkcí. Nabízí se použít reálnou fyzikální vzdálenost danou integrálním vztahem

$$\|x^\mu - y^\mu\| = \int_{x^\mu}^{y^\mu} \sqrt{-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{d\varphi^2}{r^2}},\tag{4.11}$$

ale tento výpočet se může ukázat jako problematický. Zejména proto, že u numerického řešení nelze zaručit, že čtyřinterval bude vždy časupodobný a součet

pod odmocninou tak zůstane nezáporný. Tento problém můžeme obejít tím, že použijeme diferenciální aproximace. Při výpočtech budeme vždy počítat normu rozdílu dvou blízkých bodů. Navíc jak bylo naznačeno, z matematického hlediska nezáleží příliš na tom, jakou abstraktní normu na našem prostoru použijeme. Zvolme tedy pro jednoduchost následující normu:

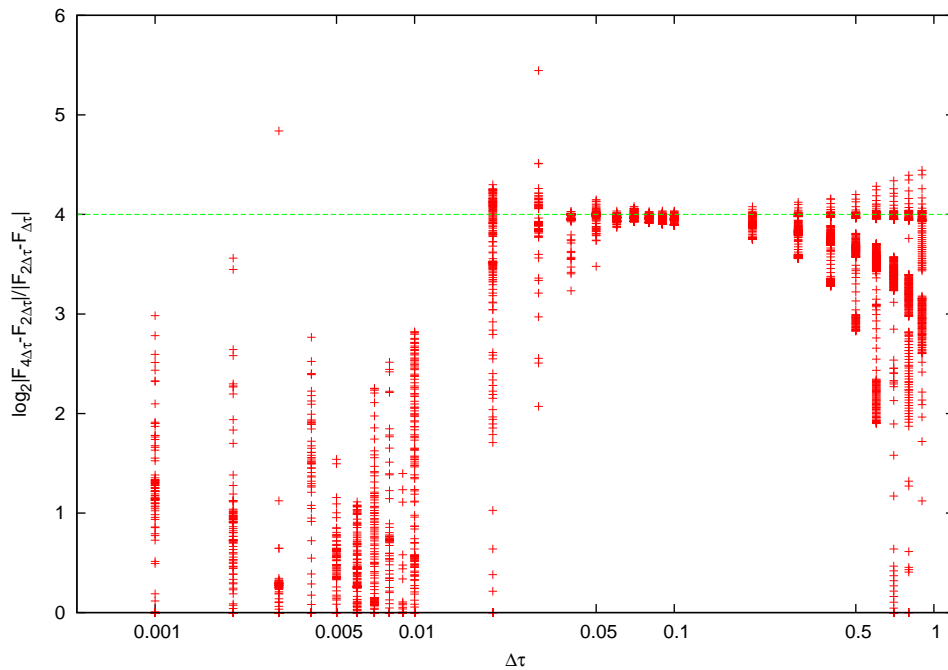
$$(\Delta x)^2 = (\Delta t)^2 + (\Delta r)^2 + r_M^2(\Delta\theta)^2 + r_M^2 \sin^2 \theta_M (\Delta\varphi)^2, \quad (4.12)$$

kde jsme v souladu se Schwarzschildovými souřadnicemi označili $r_m = \frac{r_1+r_2}{2}$ a $\theta_m = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$. Ačkoli bychom ve skutečnosti potřebovali normu na fázovém prostoru, pro naše potřeby je vztah (4.12) dostačující.

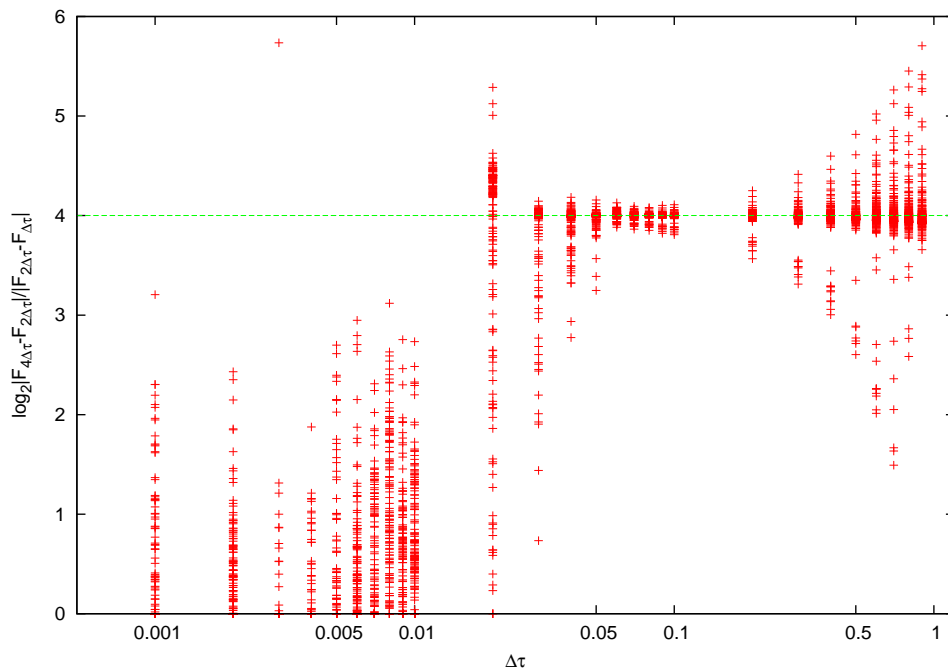
Chování konvergence se může velmi lišit pro různě dlouhé výpočty. Vyšetřujme tedy zvlášť konvergenci pro 2 oběhy částice a 100 oběhů. Konec jednoho oběhu definujeme snadno podle změny znaménka složky $u^1 \equiv \frac{dx^1}{d\tau}$ z kladného na záporné, což značí dosažení vzdálenějšího bodu obratu a přechod od nárůstu souřadnice $r \equiv x^1$ k jejímu zmenšování. Použijeme hodnoty $\Delta\tau = 0,9; 0,8; \dots; 0,002; 0,001$, pro něž vyneseme vždy několik set bodů, ve kterých počítáme konvergenční logaritmus. Pro každou metodu dostaneme tak jeden graf porovnávající konvergenci pro různé velikosti kroku. Na takovém grafu můžeme dobře identifikovat oblast kroků, kde metoda dosahuje svého řádu přesnosti (je známo, že u periodických řešení mohou některé metody svůj řád překročit). Mimo tuto oblast vhodných kroků je pravděpodobné, že stejné přesnosti lze dosáhnout i méně výpočetně náročnými metodami nižšího řádu. Zároveň toto srovnání provedeme pro oba výše zmíněné typy pohybových rovnic, rovnici geodetiky a Hamiltonovy rovnice.

Na obrázcích (4.2a), resp. (4.2b), jsou vykresleny konvergence pro metodu *RK4* v případě rovnice geodetiky, resp. hamiltonových rovnic. Z průběhu konvergence je vidět nežádoucí chování na obou koncích zkoumaného spektra konstantního kroku. Pro malé kroky je patrně způsobeno strojovou reprezentací čísel, protože spolu porovnáváme velmi blízká čísla, pro velké kroky zase malou přesností metody. Konvergence zbylých tří metod jsou vykresleny na obrázcích (4.3a) až (4.3b) v případě *RK8*, (4.4a) až (4.4b) pro *AB4* a (4.5a) a (4.5b) pro *ABM*.

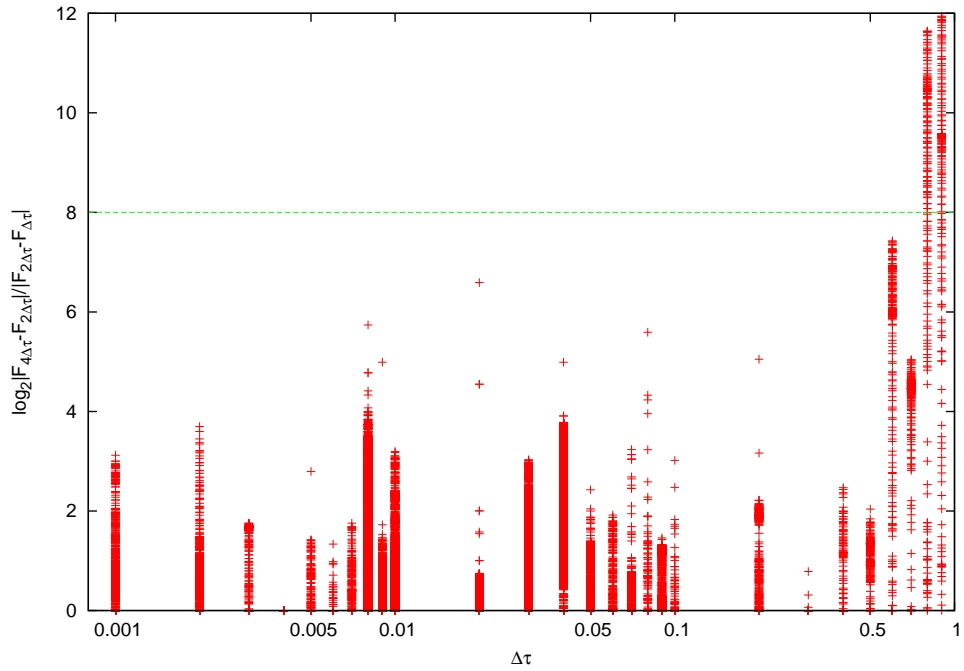
Pro lepší pochopení konvergenčního chování je dobré se podívat na jeho průběh po dobu jednoho oběhu. Na obrázcích (4.6a) a (4.6b) jsou pro ilustraci vykresleny průběhy po jeden oběh v závislosti na vlastním čase pro obě zkoumané metody výpočtu. Byl zvolen diskrétní krok $\Delta\tau = 0,01$. V obou případech vidíme u všech tří metod zakolísání v intervalu, který odpovídá přiblížení se částice k horizontu na vnitřní dráze (viz obrázek (4.1)). Narozdíl od *RK4* se vícekrokové metody snáze vrací k původnímu řádu konvergence. Je možné očekávat, že pro druhý vyšetřovaný případ 100 oběhů bude mít jejich konvergence díky tomuto chování „stabilnější“ chování.



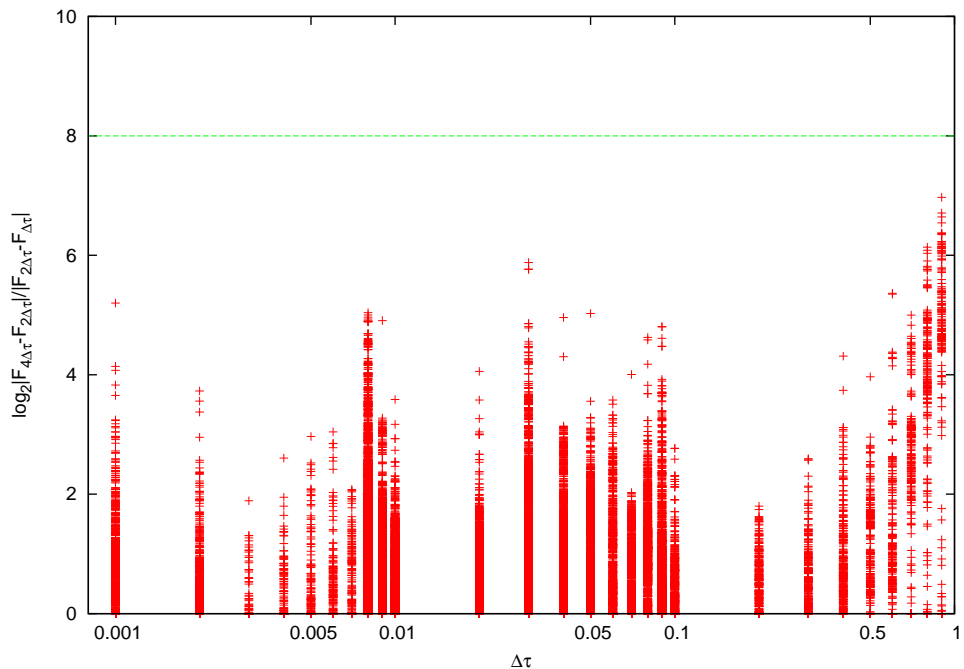
Obrázek 4.2a: Konvergence metody Rhunge-Kutta čtvrtého řádu v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro rovnici geodetiky (3.3). Výpočet probíhal po dva celé oběhy částice. Zřetelně konvergentní chování metoda vykazuje v okolí $\Delta\tau = 0,08$.



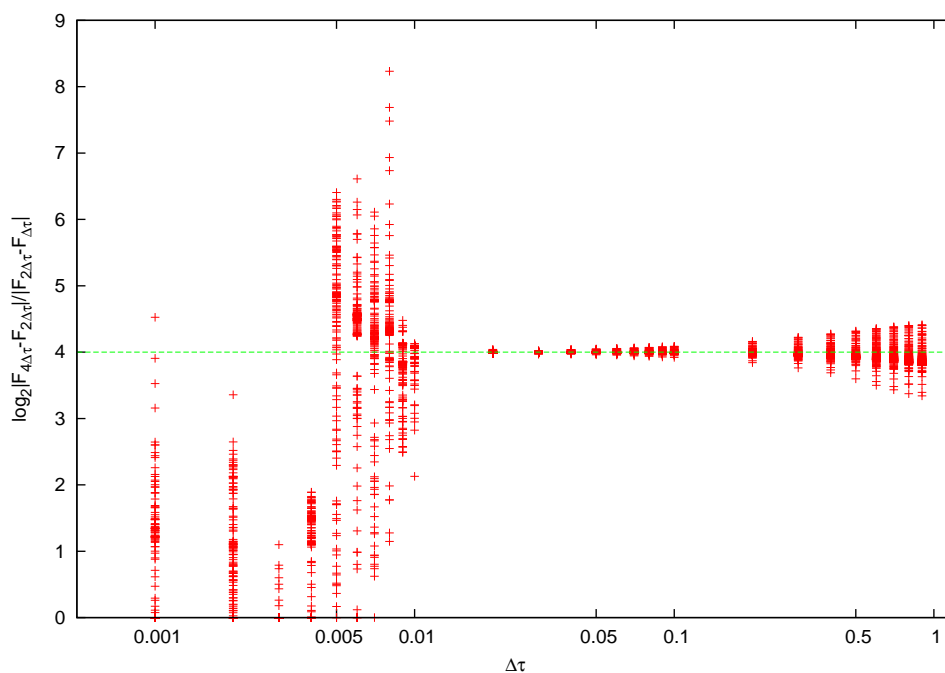
Obrázek 4.2b: Konvergence metody Rhunge-Kutta čtvrtého řádu v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro Hamiltonovy rovnice (3.13). Výpočet probíhal po dva celé oběhy částice. Zřetelně konvergentní chování metoda vykazuje v okolí $\Delta\tau = 0,07$.



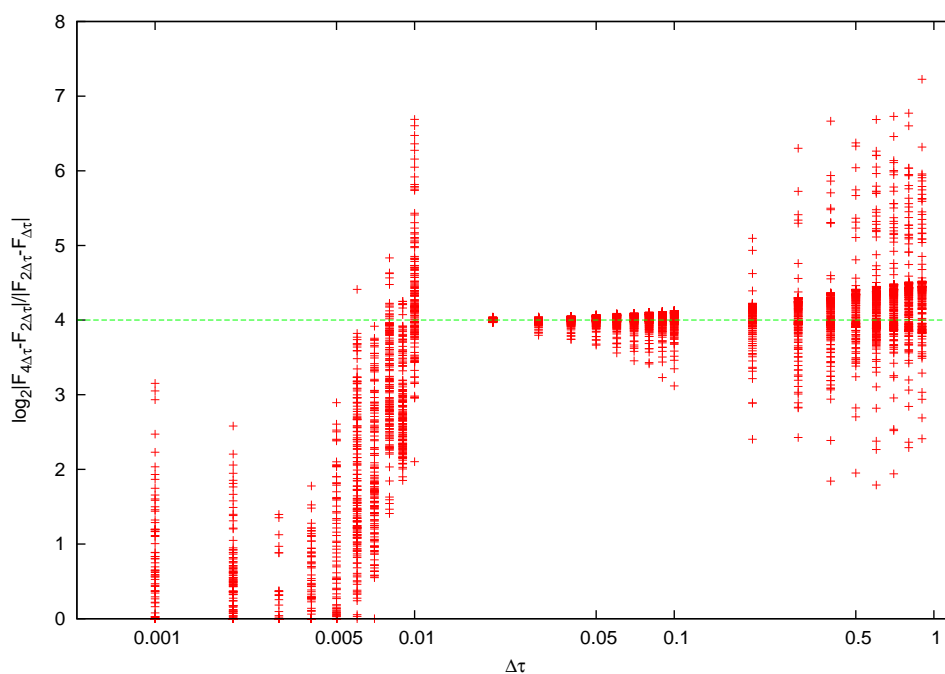
Obrázek 4.3a: *Konvergence metody Runge-Kutta osmého řádu v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro rovnici geodetiky (3.3). Výpočet probíhal po dva celé oběhy částice. Vzhledem k velké přesnosti metody jsou použité kroky příliš malé, abychom viděli zřetelné konvergentní chování.*



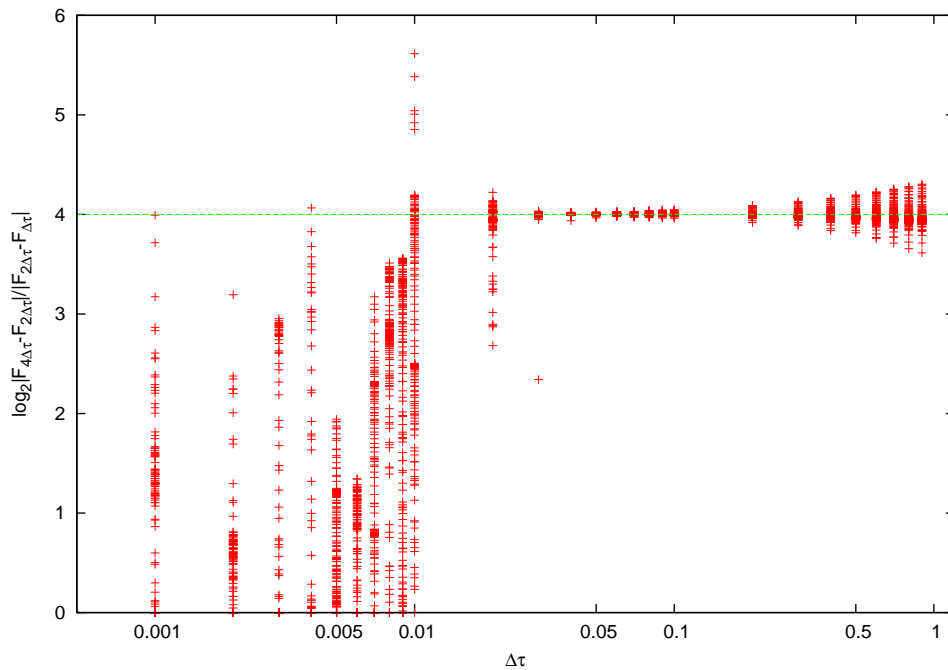
Obrázek 4.3b: *Konvergence metody Runge-Kutta osmého řádu v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro Hamiltonovy rovnice (3.13). Výpočet probíhal po dva celé oběhy částice. Vzhledem k velké přesnosti metody jsou použité kroky příliš malé, abychom viděli zřetelné konvergentní chování.*



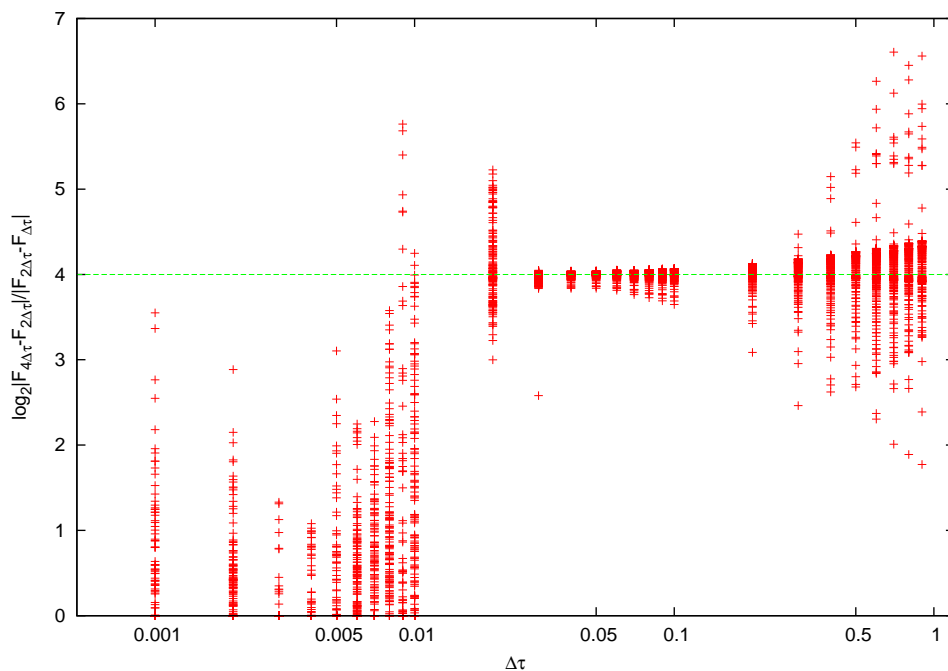
Obrázek 4.4a: Konvergence metody Adams-Bashforth čtvrtého řádu v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro rovnici geodetiky (3.3). Výpočet probíhal po dva celé oběhy částice. Zřetelně konvergentní chování metoda vykazuje v okolí $\Delta\tau = 0,04$.



Obrázek 4.4b: Konvergence metody Adams-Bashforth čtvrtého řádu v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro Hamiltonovy rovnice (3.3). Výpočet probíhal po dva celé oběhy částice. Zřetelně konvergentní chování metoda vykazuje v okolí $\Delta\tau = 0,02$.



Obrázek 4.5a: Konvergence metody Adams-Bashforth-Moulton v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro rovnici geodetiky (3.3). Výpočet probíhal po dva celé oběhy částice. Zřetelně konvergentní chování metoda vykazuje v okolí $\Delta\tau = 0,05$.



Obrázek 4.5b: Konvergence metody Adams-Bashforth-Moulton v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro Hamiltonovy rovnice (3.13). Výpočet probíhal po dva celé oběhy částice. Zřetelně konvergentní chování metoda vykazuje v okolí $\Delta\tau = 0,04$.

Pro jednokrokové metody jakou je i *RK4* se často používá úpravy velikosti konstantního kroku v průběhu výpočtu.¹ Provedme výpočet konvergence *RK4* pro jeden oběh znovu se zmenšením kroku v problémové oblasti. Abychom tento interval bezpečně pokryli, snížíme velikost kroku pro $r < 8M$. Nejprve vyzkoušíme, pro jaké zmenšení intervalu bude chování *RK4* nejvhodnější.

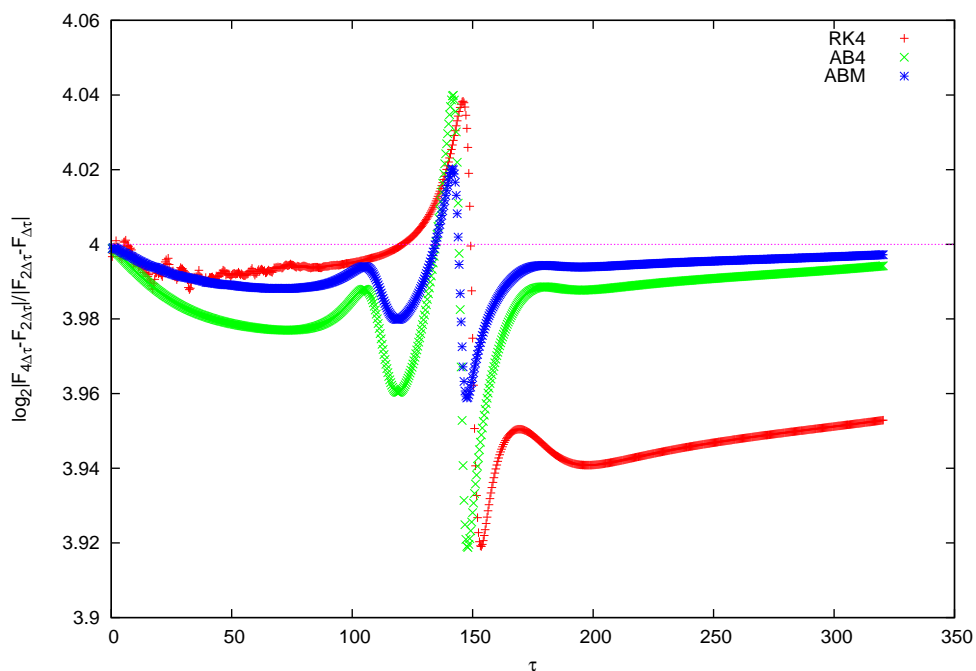
Obrázek (4.6a), resp. (4.6b), srovnává původní chování se snížením kroku na $\frac{\Delta\tau}{2}$, $\frac{\Delta\tau}{4}$, $\frac{\Delta\tau}{8}$, $\frac{\Delta\tau}{12}$ a $\frac{\Delta\tau}{16}$ pro rovnici geodetiky, resp. Hamiltonovy rovnice. U všech úprav kroku vidíme jasné zlepšení, ale nejvhodnějšího kandidáta určíme až po přiblížení (obrázky (4.7a) a (4.7b)). Nejblíže ideálnímu chování je zmenšení kroku na jednu osminu u rovnice geodetiky a jednu čtvrtinu pro Hamiltonovy rovnice, dalšími zmenšeními již zlepšení chování nedosahujeme.

Více se do analýzy úpravy kroku pro jednokrokové metody pouštět nebudeme. Zájemce odkazujeme na často citovanou knihu numerických receptů [3], která obsahuje složitější adaptivní algoritmy s proměnným krokem. Naší výše probíranou analýzu konvergence použijeme dále pro interval 100 oběhů částice. Protože budeme zkoumat delší interval vlastního času, zvětšíme rozsah numerického kroku na hodnoty vyšší než jedna. Nicméně abychom i pro metody používající krok $4\Delta\tau$ získali dostatečné množství bodů v rámci jednoho oběhu ($\tau \approx 309 m$), omezíme se na přidání kroků $\Delta\tau = 1; 2; \dots; 19; 20;$

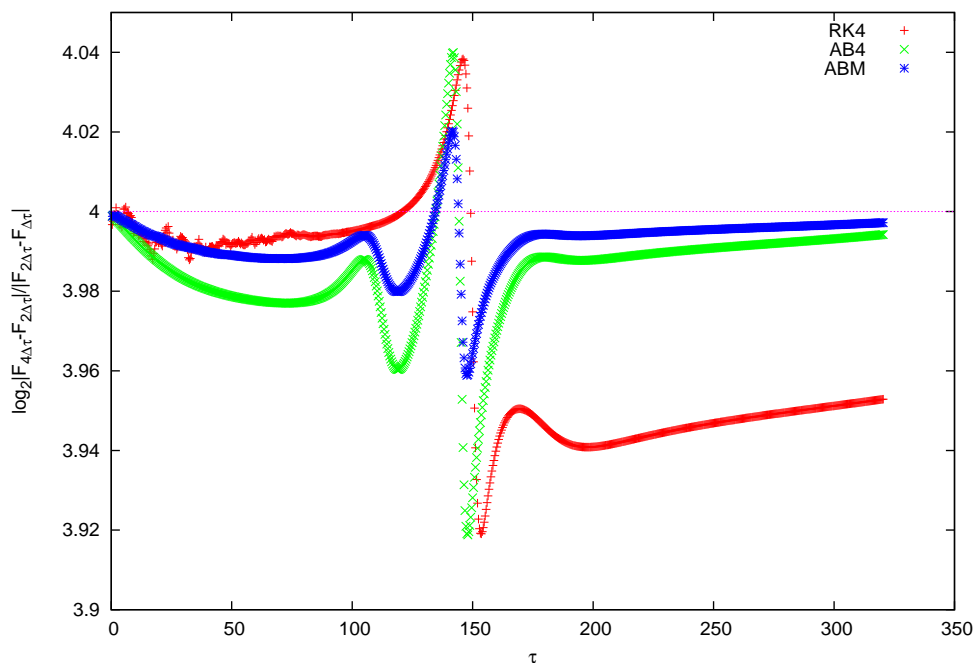
Vykresleme opět nejprve průběh konvergence pro všechny čtyři metody a dvě formulace pohybových rovnic (obrázky (4.9a) až (4.15b)). Podle očekávání si *RK4* již nevede tak dobře a nelze jako v předchozím jednoznačně vybrat krok s nejvhodnějším chováním. Použijme proto úpravu konstantního kroku probíranou výše a to v souladu s předchozími závěry zmenšení při $r < 8$ na $\frac{\Delta\tau}{8}$ pro rovnici geodetiky a $\frac{\Delta\tau}{4}$ u Hamiltonových rovnic.

Obrázky (4.16a) a (4.16b) srovnávají původní konvergenci metody *RK4* u sta oběhů s daty upravenými zmenšováním kroku. Data získaná úpravou kroku nám již umožňují lépe určit nejvhodnější numerický krok.

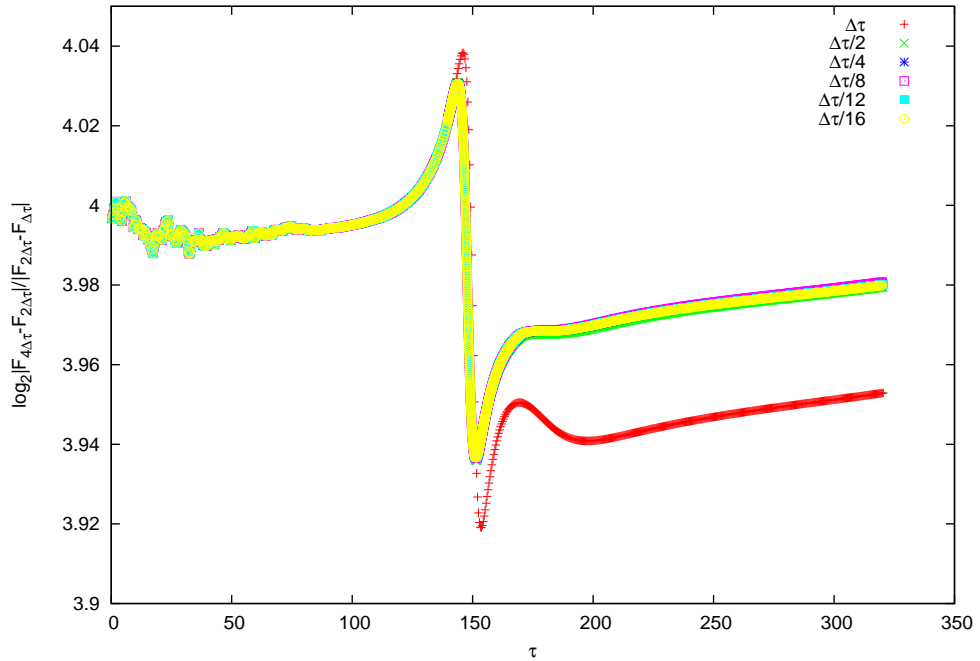
¹Pro vícekrokové metody je tento způsob nevhodný vzhledem k tomu, že používají hodnoty z předchozích několika kroků. Možnou alternativou by byla extrapolace minulých hodnot s novou velikostí kroku s využitím známých derivací hledané funkce z předchozích kroků. Zde se tímto postupem zabývat nebudeme.



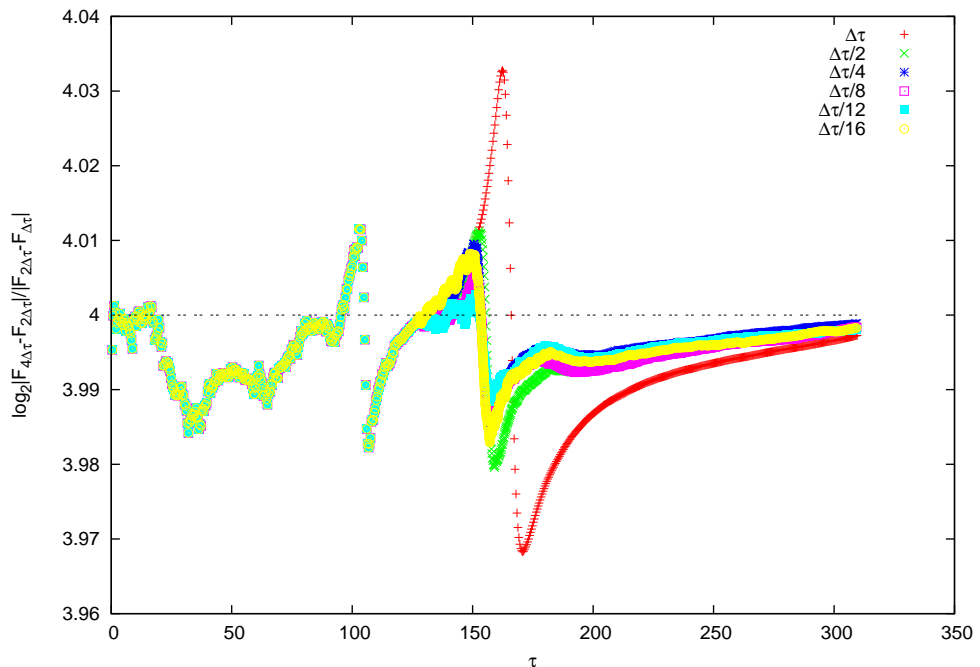
Obrázek 4.6a: Graf konvergence numerických metod po jeden oběh částice v závislosti na vlastním čase. Výpočet pomocí rovnice geodetiky (3.3). Byla zvolena délka kroku $\Delta\tau = 0,01$.



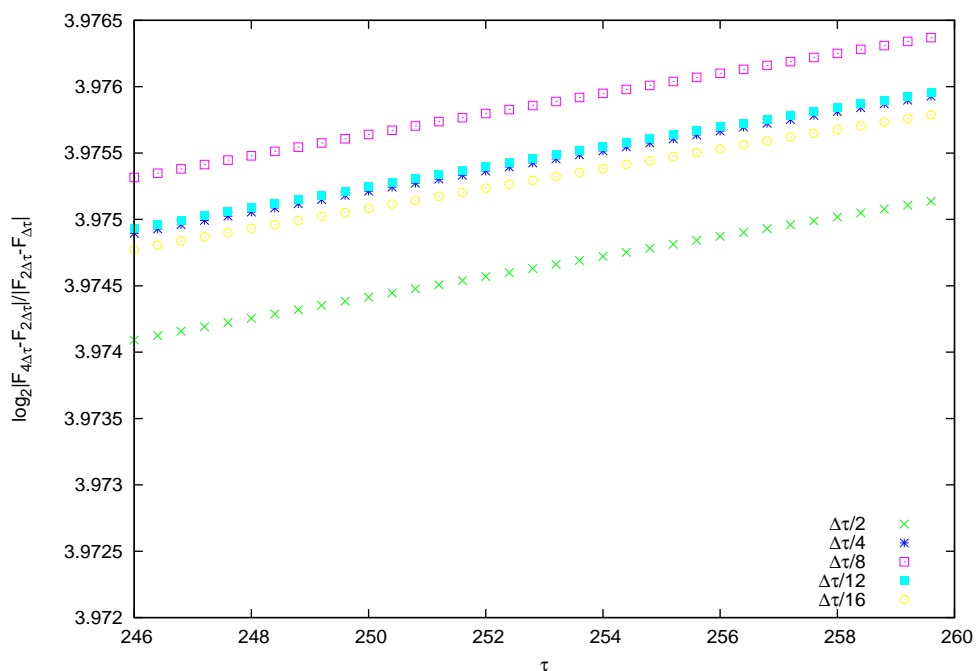
Obrázek 4.6b: Graf konvergence numerických metod po jeden oběh částice v závislosti na vlastním čase. Výpočet pomocí Hamiltonových rovnic (3.13). Byla zvolena délka kroku $\Delta\tau = 0,01$.



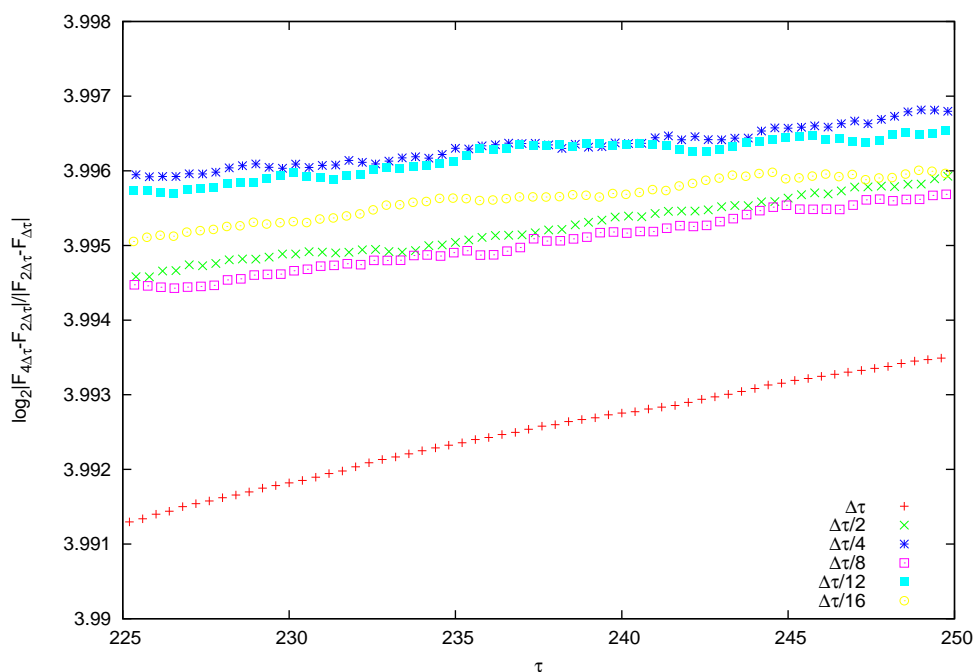
Obrázek 4.7a: Graf konvergence metody RK4 v závislosti na vlastním čase částice pro různá zmenšení kroku při nízké orbitě. Výpočet pomocí rovnice geodetiky (3.3). Všechna zmenšení dosahují lepšího chování zvláště při návratu zpět k původní hodnotě konvergence.



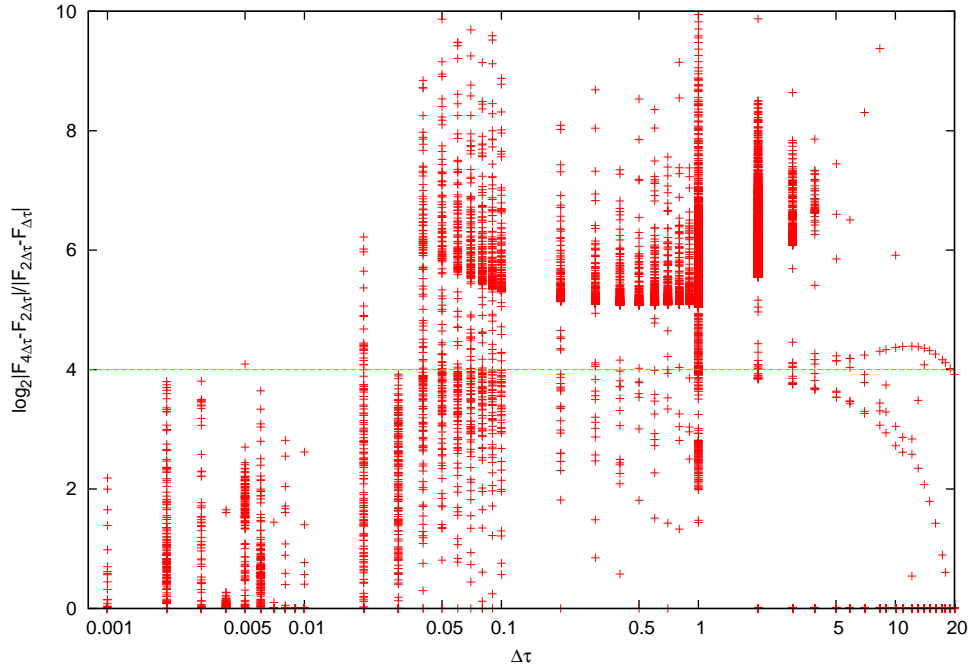
Obrázek 4.7b: Graf konvergence metody RK4 v závislosti na vlastním čase částice pro různá zmenšení kroku při nízké orbitě. Výpočet pomocí Hamiltonových rovnic (3.13). Všechna zmenšení dosahují lepšího chování zvláště při návratu zpět k původní hodnotě konvergence.



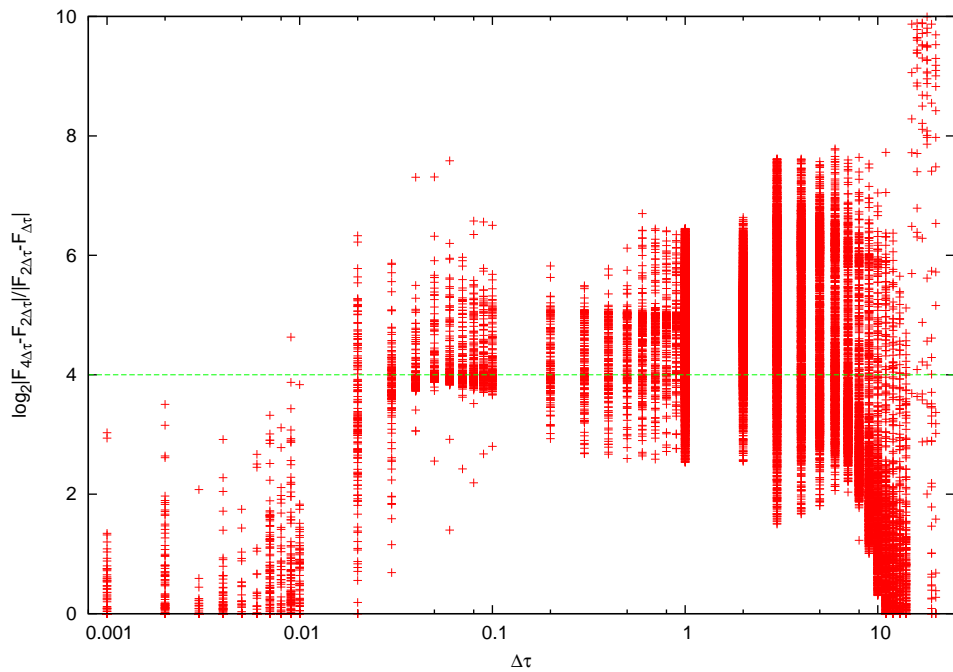
Obrázek 4.8a: Přiblížení grafu (4.7a) pro určení nejvhodnějšího zmenšení kroku u metody RK4. Vypočítáno pomocí rovnice geodetiky (3.3). Nejlépe dopadlo zmenšení na $\frac{1}{8}$ původního kroku. Další zmenšení už ke zlepšení chování nevede.



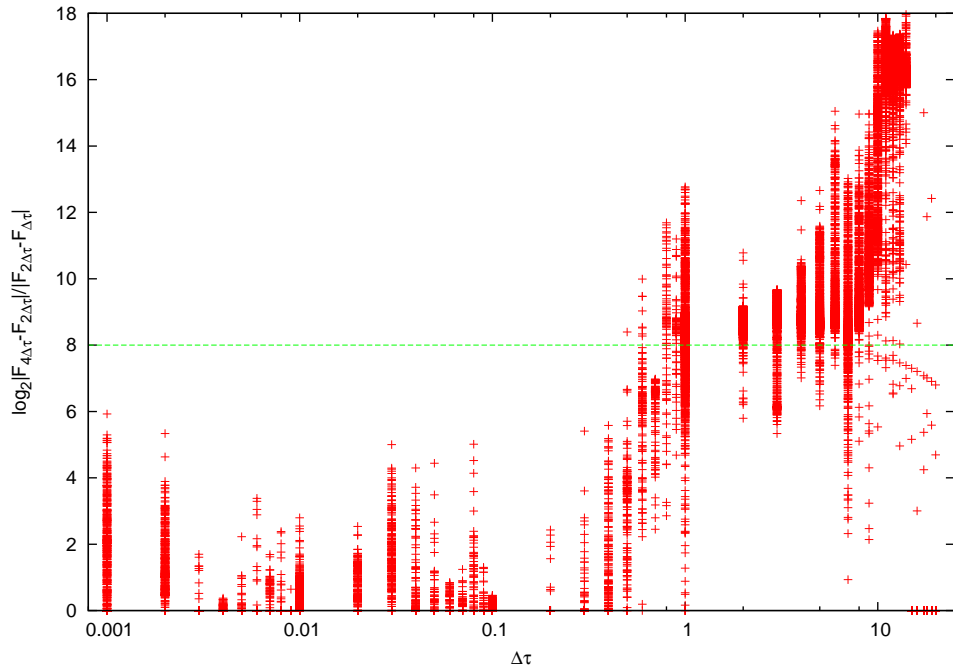
Obrázek 4.8b: Přiblížení grafu (4.7b) pro určení nejvhodnějšího zmenšení kroku u metody RK4. Vypočítáno pomocí Hamiltonových rovnic (3.13). Nejlépe dopadlo zmenšení na $\frac{1}{4}$ původního kroku. Další zmenšení už ke zlepšení chování nevede.



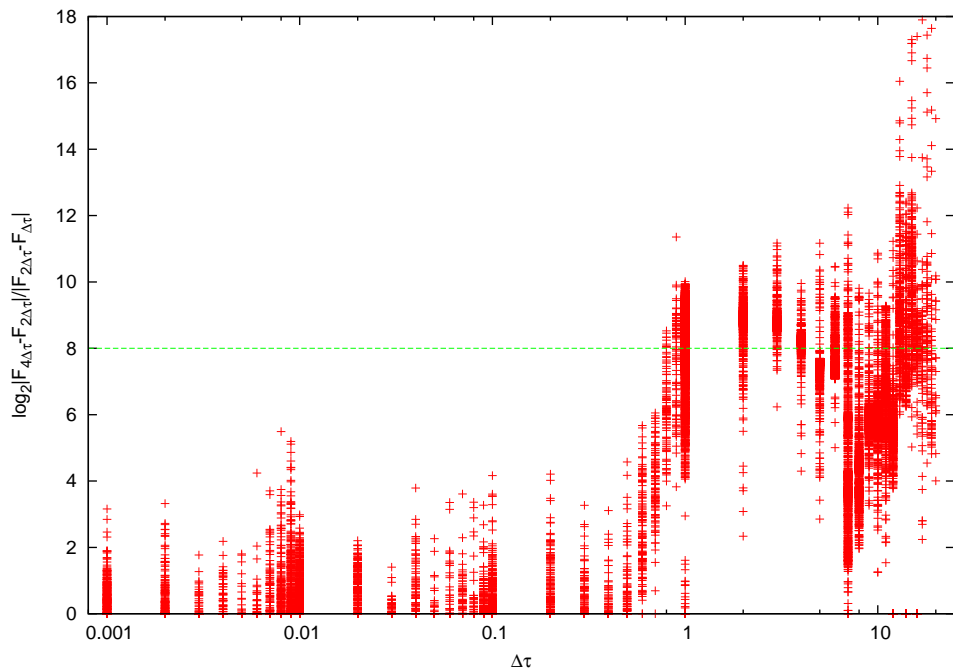
Obrázek 4.9a: Konvergence metody Runge-Kutta čtvrtého řádu v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro rovnici geodetiky (3.3). Výpočet probíhal po sto oběhů částice. Konvergentní chování pozorujeme u hodnot $\Delta\tau = 2; 3$ a 4. Díky velikosti kroku větší než jedna zde převládají vyšší členy chybového rozvoje. Níže je provedena korekce výpočtu vhodným zmenšováním numerického kroku.



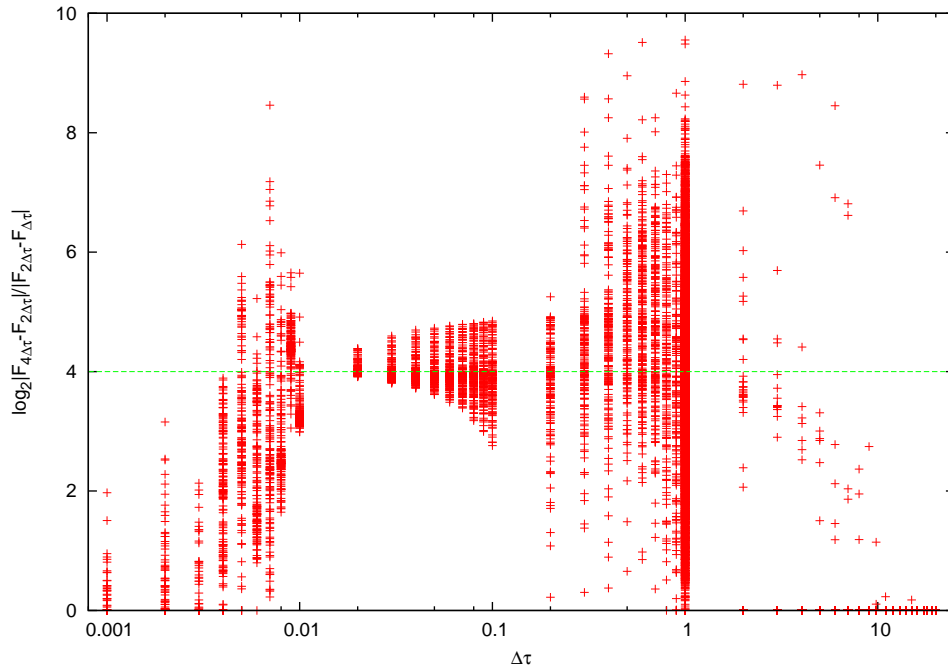
Obrázek 4.9b: Konvergence metody Runge-Kutta čtvrtého řádu v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro Hamiltonovy rovnice (3.13). Výpočet probíhal po sto oběhů částice. Výsledky jsou pozitivnější než v případě rovnice geodetiky výše. Volba kroku kolem hodnoty $\Delta\tau = 0,1$ se ukazuje být nejvíce konvergentní.



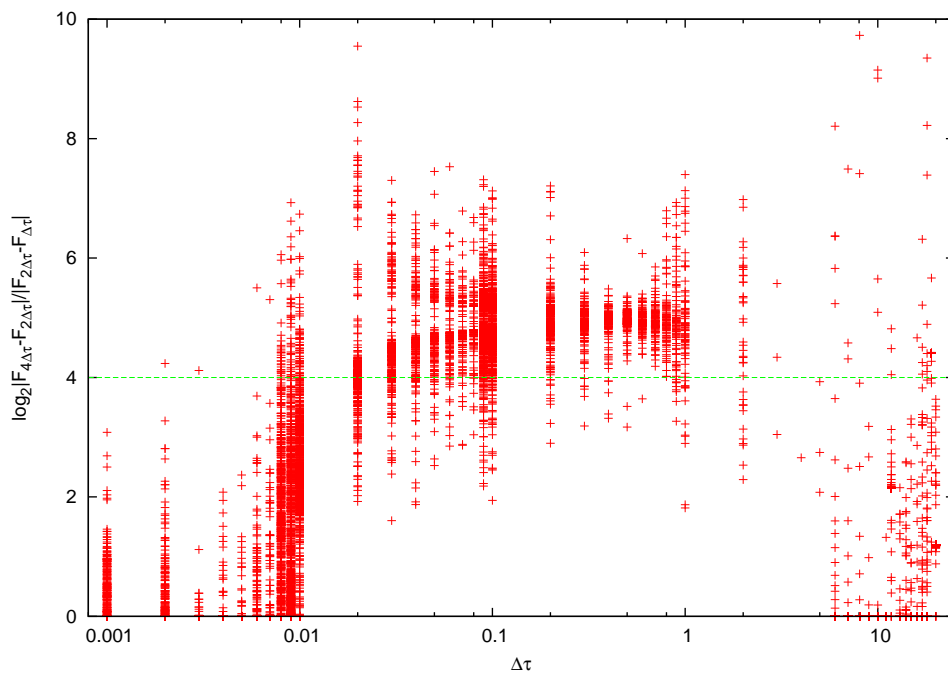
Obrázek 4.10a: *Konvergence metody Rhunge-Kutta osmého řádu v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro rovnici geodetiky (3.3). Výpočet probíhal po sto oběhů částice. Jako zřetelně konvergentní se jeví omezený interval $\Delta\tau = 0,9$ až 4, u nižších kroků se již projevuje vysoká přesnost metody.*



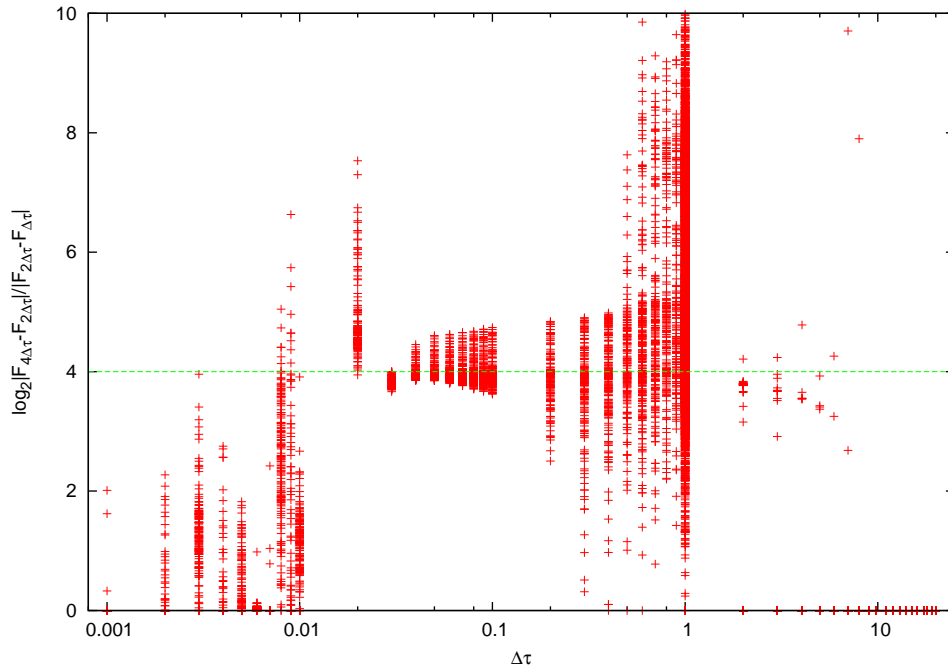
Obrázek 4.10b: *Konvergence metody Rhunge-Kutta osmého řádu v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro Hamiltonovy rovnice (3.13). Výpočet probíhal po sto oběhů částice. Jako zřetelně konvergentní se jeví omezený interval $\Delta\tau = 0,9$ až 4.*



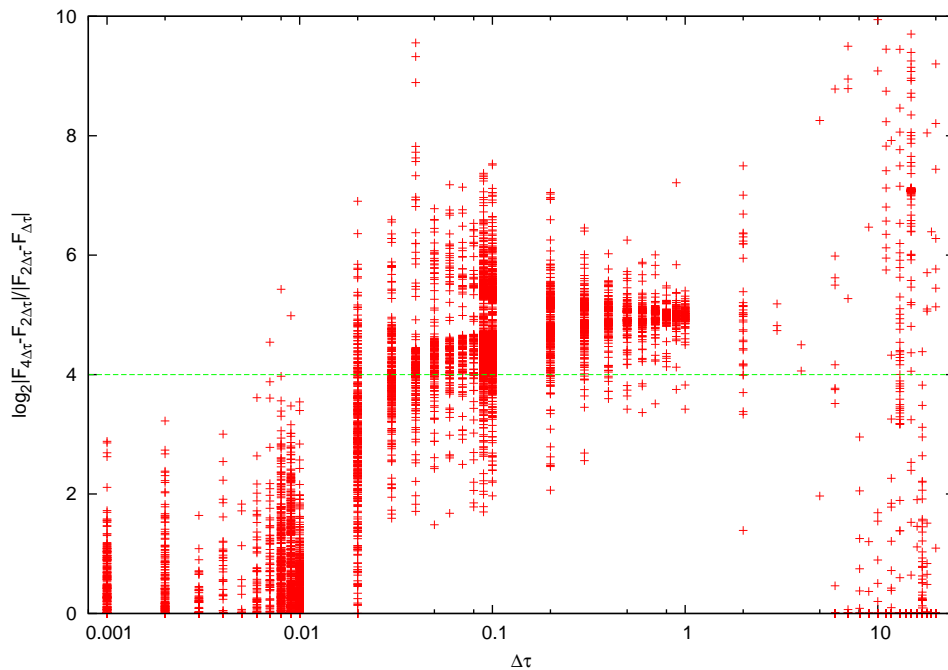
Obrázek 4.11a: Konvergence metody Adams-Bashforth čtvrtého řádu v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro rovnici geodetiky (3.3). Výpočet probíhal po sto oběhů částice. Zřetelně konvergentní chování metoda vykazuje v okolí $\Delta\tau = 0,02$.



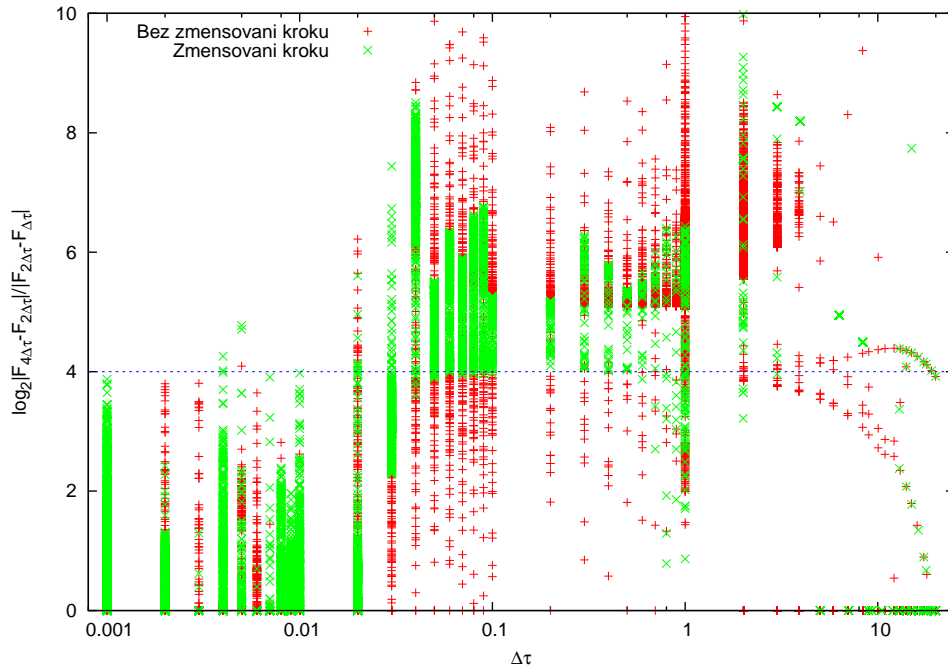
Obrázek 4.11b: Konvergence metody Adams-Bashforth čtvrtého řádu v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro Hamiltonovy rovnice (3.13). Výpočet probíhal po sto oběhů částice. V porovnání s totožným výpočtem pomocí rovnice geodetiky (4.11a) se konvergence pohybuje okolo čísla pět, což mohla způsobit převaha vyššího členu v chybové řadě. Jako konvergentní označíme chování v okolí $\Delta\tau = 0,5$, kde vykazuje konvergence nejmenší rozptyl hodnot.



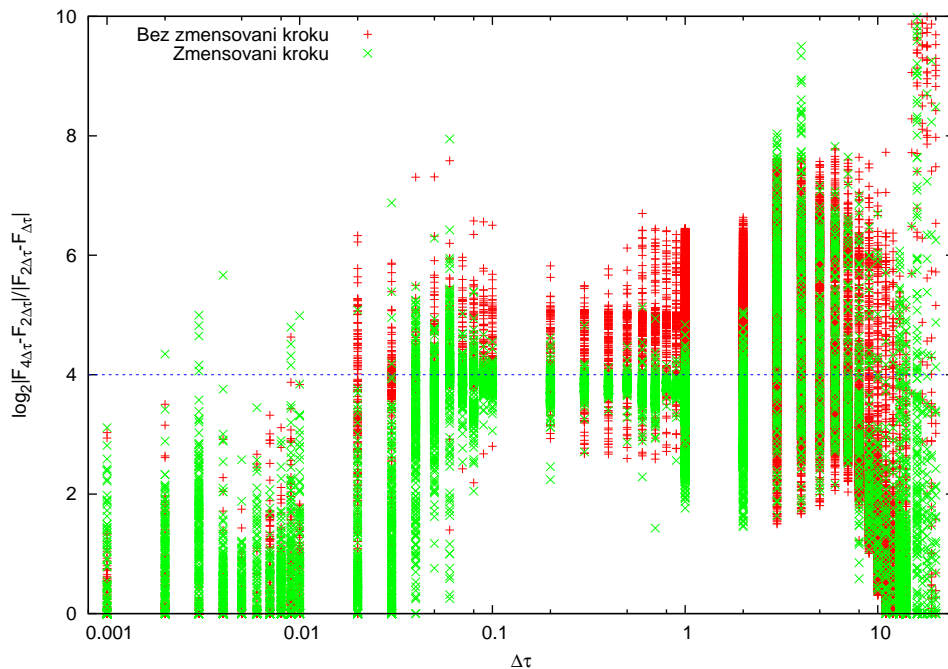
Obrázek 4.12a: Konvergence metody Adams-Bashforth-Moulton v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro rovnici geodetiky (3.3). Výpočet probíhal po sto oběhů částice. Nejvhodnější chování metoda vykazuje pro $\Delta\tau = 0,04$.



Obrázek 4.12b: Vykreslení konvergence metody Adams-Bashforth-Moulton v závislosti na velikosti diskrétního kroku pro Hamiltonovy rovnice (3.13). Výpočet probíhal po sto oběhů částice. Opět vidíme vyšší hodnoty konvergence než u alternativního výpočtu pomocí rovnice geodetiky (4.15a). Nejvíce konvergentní chování pozorujeme v okolí kroku $\Delta\tau = 0,9$.



Obrázek 4.13a: Srovnání původní konvergence pro sto oběhů částice se změnou konstantního kroku u RK4, výpočet pomocí rovnice geodetiky (3.3). Při úpravě kroku již můžeme najít nevhodnější chování, a to v okolí $\Delta\tau = 0,1$.



Obrázek 4.13b: Srovnání původní konvergence pro sto oběhů částice se změnou konstantního kroku u RK4, výpočet pomocí Hamiltonových rovnic (3.13). Opět vidíme mírné zlepšení v chování závislosti. Nejvíce konvergentní chování jeví volby v okolí $\Delta\tau = 0,04$.

4.1.3 Přesnost numerických metod

Druhým, neméně podstatným kritériem pro vyhodnocení správnosti výpočtu je přesnost dané metody. Pro složitější rovnice, jakými jsou i v našem případě rovnice geodetiky a Hamiltonovy rovnice, nemáme přesné řešení, se kterým bychom mohli naše výsledky stejně jako v kapitole 1 porovnávat. Jsou ale i jiné způsoby, jak přesnost zjistit. Připomeňme, že výsledná data numerické metody řádu n a s krokem $\Delta\tau$ můžeme napsat ve tvaru $F(\Delta\tau, n) = f(\tau) + K_n(\Delta\tau)^n$, kde K_n je koeficient u dominantního členu chyby. Ostatní členy úměrné $O(\Delta\tau)^{n+1}$ neuvažujeme, protože jsou buďto zanedbatelné díky mocninám kroku pro $\Delta\tau < 1$ nebo předpokládáme, že jsou utlumeny koeficienty K_m , $m > n$. Níže uvidíme, že tento netriviální předpoklad naší analýzu nijak nenarušuje. Počítejme dále následující výraz pro libovolnou pevnou hodnotu τ :

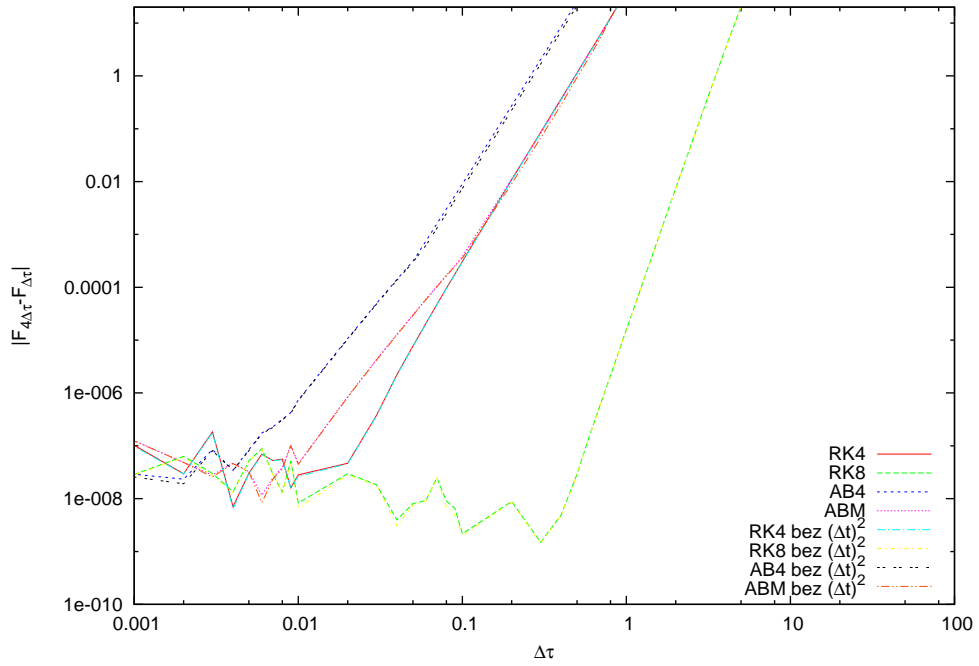
$$|F(\Delta\tau, n) - F(\Delta\tau/4, n)| = |K_n(\Delta\tau)^n| \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \approx |K_n(\Delta\tau)^n|. \quad (4.13)$$

Pro námi používané hodnoty $n = 4$ a 8 se jedná o přijatelnou aproximaci. Při výpočtu v souladu s předchozí podkapitolou přeznačíme $\Delta\tau$ na $4\Delta\tau$ a $\Delta\tau/4$ na $\Delta\tau$. Jedná se pouze o symbolickou záměnu z důvodu konzistence textu, matematicky se tím nic nemění. Výsledkem vzorce (4.13) je právě dominantní chybový člen numerické metody, čímž jsme odůvodnili použití tohoto vzorce pro zjišťování chyby metody. Při samotném výpočtu budeme opět používat normu naznačenou vzorcem (4.12).

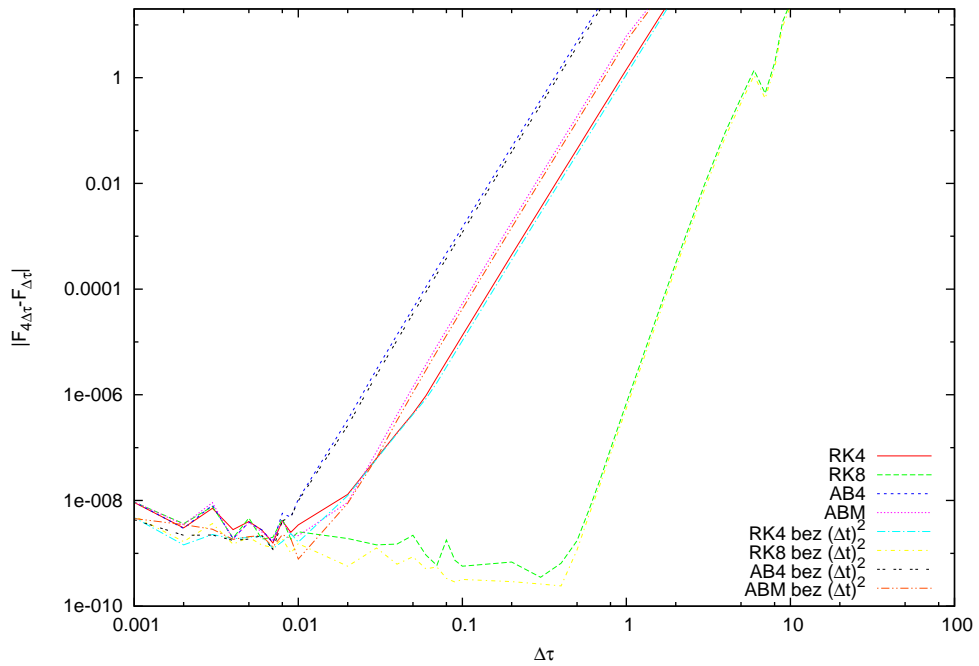
Podívejme se na chování přesnosti zvolených metod. Na obrázcích (4.17a) a (4.17b) jsou vykreslena chování chyb jednotlivých metod v závislosti na numerickém kroku v rozmezí $\Delta\tau = 0,001; 0,002; \dots; 19; 20$. Pro lepší přehlednost byla pro každou metodu vykreslena vždy ta nejvyšší hodnota pro danou evoluci. Dále jsme zpřehlednili grafy vynecháním vysokých hodnot v pravých částech závislosti.

U všech závislostí chyby pozorujeme při zmenšování kroku zastavení poklesu chyby okolo hodnoty 10^{-8} (horní hranice chyby). Tato saturace nám ukazuje, že u složitějších rovnic nám numerické metody ani nemusí umožnit dosáhnout hranice zaokrouhlovací chyby (srovnejme se situací v kapitole 1, kdy bylo této hranice při dostatečně malém numerickém kroku dosaženo). Na druhou stranu také vidíme, že použití numerických kroků větších než jedna může vést k velkému nárůstu chyby. V tomto případě se mohou, v závislosti na konkrétní situaci, stát dominantními i vyšší, původně neuvažované členy zahrnuté v chybě metody.

Nabízí se možnost, že jsme saturaci chyby mohli zapříčinit sami zvolenou normou (4.12), kterou chybu počítáme. Vztah pro normu obsahuje člen $(\Delta t)^2$. Pro 100 oběhů částice dosáhne t narozdíl od ostatních souřadnic řádu 10^4 , takže ve výpočtu $(\Delta t)^2$ od sebe odčítáme dvě relativně blízka velká čísla. Tato operace je jak známo zatížena velkou relativní zaokrouhlovací chybou. Do obrázků (4.17a) a (4.17b) jsou dále zaneseny chyby metod vypočítané pomocí upraveného vztahu pro normu s vynecháním členu $(\Delta t)^2$. Vidíme, že po vynechání tohoto členu nedochází k výraznějšímu zmenšení chyb numerických metod, saturace v původním chybovém výpočtu tedy není způsobena členem $(\Delta t)^2$.



Obrázek 4.14a: Graf absolutní chyby vypočítané vztahem (4.13) v závislosti na délce konstantního kroku u metody RK4. Výpočet proběhl pomocí rovnice geodetiky (3.3).



Obrázek 4.14b: Graf absolutní chyby vypočítané vztahem (4.13) v závislosti na délce konstantního kroku u metody RK4. Výpočet proběhl pomocí Hamiltonových rovnic (3.13).

4.2 Ohyb světelného paprsku

Druhým problémem, který budeme zkoumat je ohyb světelného paprsku. Je to více jak devadesát let, co bylo prokázáno, že paprsek procházející poblíž zdroje gravitačního pole změní svou trajektorii, ohne se v závislosti na tom, jak blízko k danému zdroji prochází. Při našem rozboru aplikujeme podobný postup jako v podkapitole o hmotné částici. Zformulujeme počáteční podmínky, ilustrujeme si výsledky rovnic a vyzkoušíme vhodnost volby konstantního kroku pomocí konvergence numerických metod a jejich konvergence.

4.2.1 Počáteční podmínky

Vyjděme z diferenciální rovnice (3.21). Pro vlastní výpočet ji opět převedeme na soustavu dvou rovnic prvního řádu

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \xi \end{pmatrix}_\varphi = \begin{pmatrix} \xi \\ 3M\rho^2 - \rho \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

s počáteční podmínkou

$$\begin{pmatrix} \rho_0 \\ \xi_0 \end{pmatrix}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{b} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Z definičního vztahu pro ρ vyplývá, že počáteční podmínkou $\rho_0 = \frac{1}{r_0} = 0$ modelujeme příchod fotonu z nekonečna. Druhá podmínka v sobě obsahuje tzv. záměrný parametr b . Ten představuje nejmenší vlastní vzdálenost mezi paprskem a horizontem singularity a formálně bychom ho spočítali integrálním výrazem

$$b = \int_{2M}^{r_{\min}} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}, \quad (4.16)$$

kde r_{\min} je námi zvolená nejmenší hodnota souřadnice r . Vzhledem k vlastnostem Schwarzschildovy metriky tento integrál diverguje. Při numerickém výpočtu se budeme ovšem věnovat paprskům blízkým horizontu, tedy s relativně malým r . Pomožme si diferenciálním přiblížením

$$\Delta s^2 = \frac{\Delta r^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}. \quad (4.17)$$

Toto přiblížení vede ke vzorci pro výpočet záměrného parametru b použitým v [1]

$$b = \frac{r_{\min}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_{\min}}}}, \quad (4.18)$$

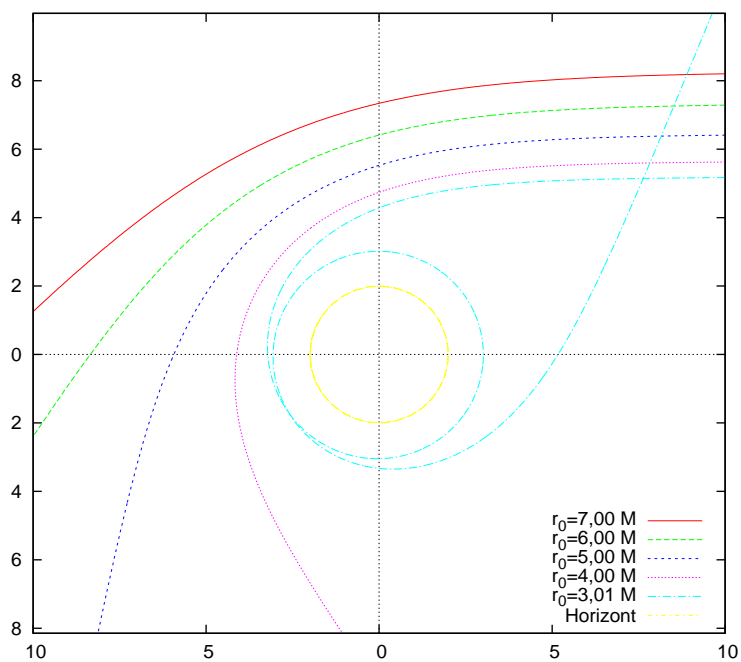
kterého se přidržíme při našem výpočtu. Pro hlubší komentář počáteční podmínky $\xi_0 = \frac{1}{b}$ odkazujeme na [1].

4.2.2 Konvergence numerických metod (podruhé)

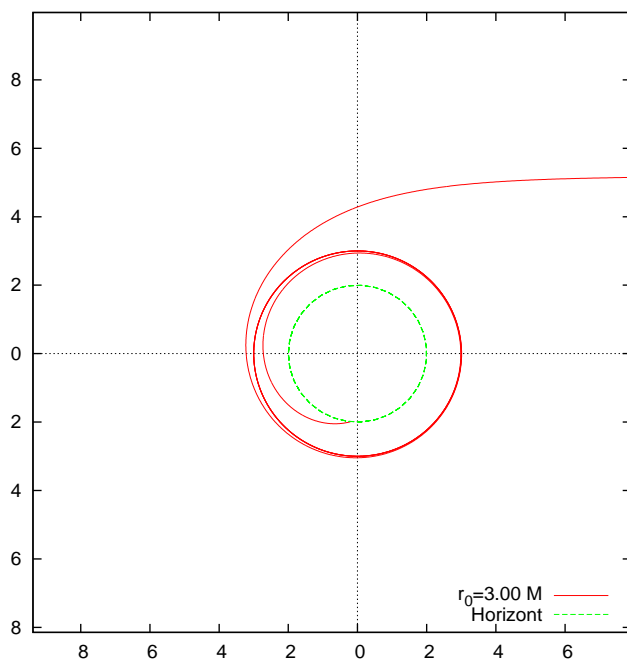
Abychom mohli vyšetřovat konvergenci, je třeba konkretizovat počáteční podmínku volbou r_{\min} . Opět se budeme zabývat trajektoriemi v blízkosti singularity. Budeme zkoumat konvergenci pro případy $r_{\min} = 5 M$ a $r_{\min} = 10 M$. Parametrem, který budeme posouvat o diskrétní krok, je nám zde přímo souřadnice $\varphi \equiv x^3$. To samo o sobě omezuje možný rozsah tohoto parametru. Bez přítomnosti zdroje gravitačního pole by paprsek vyšel z počáteční polohy (při pohledu zhora na ekvatoriální rovinu to znamená zprava) a pokračoval v přímočarém pohybu na druhou stranu souřadné soustavy ($\varphi = (0, \pi)$). Působením gravitačního pole dojde podle předpokladů OTR k ohybu trajektorie závislém na blízkosti paprsku ke zdroji. Pro větší vzdálenosti dojde k malému ohybu a parametr φ skončí na hodnotě jen o málo převyšující π . Pro bližší průlety je možné, jak uvidíme dále, aby se paprsek i otočil dokola a φ tak může dosáhnout určitého násobku π (viz obrázek (4.15a)). Zajímavá je trajektorie paprsku pro $r_{\min} = 3.0 M$. Jak známo z literatury (např [1]), jedná se o nestabilní světelnou orbitu, kdy paprsek po několika obězích padá pod horizont (viz obrázek (4.15b)).

Ať už nastane kterákoli z těchto situací, v porovnání s neomezenou škálou vlastního času z minulé podkapitoly, se pohybujeme v omezeném intervalu, a proto musíme upravit svou volbu délky konstantního kroku. Abychom nasbírali dostatečné množství dat, během naší analýzy budeme zkoušet chování metod pro hodnoty $\Delta\varphi = 0,05; 0,04; 0,03; \dots; 0,0002; 0,0001$.

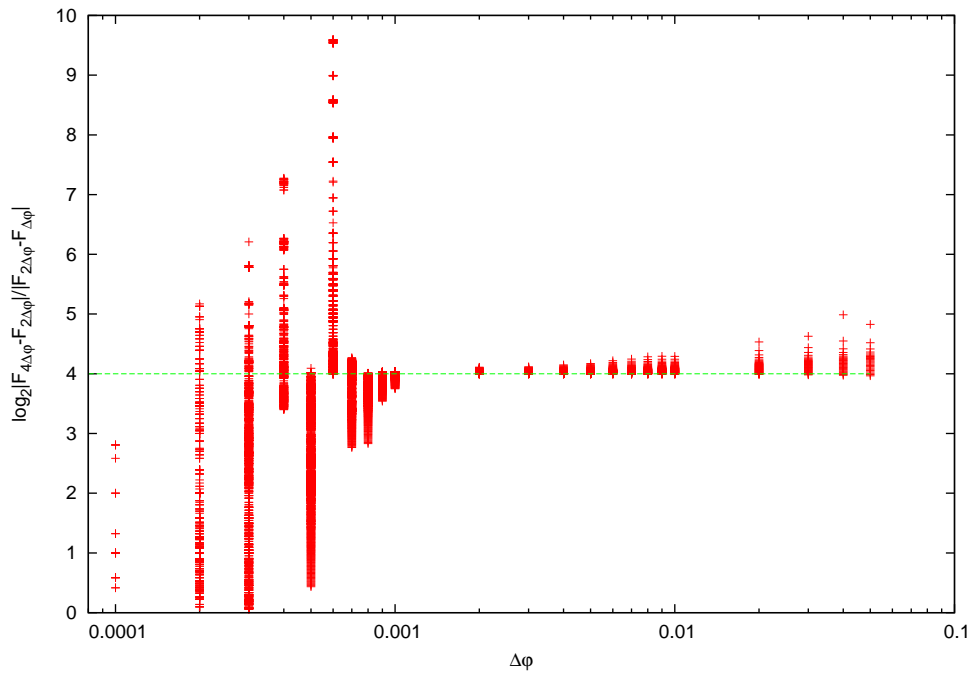
Průběhy konvergence jednotlivých metod v závislosti na volbě konstantního kroku jsou uvedeny na obrázcích (4.16a) až (4.19b). Podobně jako v podkapitole o oběhu hmotné částice vidíme, že pro příliš malé kroky je chování konvergence nežádoucí. V pravých částech závislostí se tolik neprojevuje nepřesnost jako u hmotné částice, protože používáme o řád menší kroky. Z důvodu omezeného intervalu parametru φ zde navíc není tolik vyčíslených bodů. Jednoznačný výsledek udává pouze graf (4.16a). U ostatních nedochází v prostřední, pro nás důležité, části grafu konvergence k výrazné diferenciaci mezi jednotlivými kroky, čímž se nám nabízí více možností volby kroku. Obzvláště to platí pro vzdálenější průlety, tedy $r_0 = 10 M$. Díky dřívějšímu rozboru také není překvapivé, že zaokrouhlovací chyby zabrání konvergenci u metody *RK8* pro menší kroky dosažení osmého řádu. Protože z výše uvedených důvodů nechceme používat větší kroky, nebudeme dále pro ohyb světelného paprsku tuto metodu uvažovat.



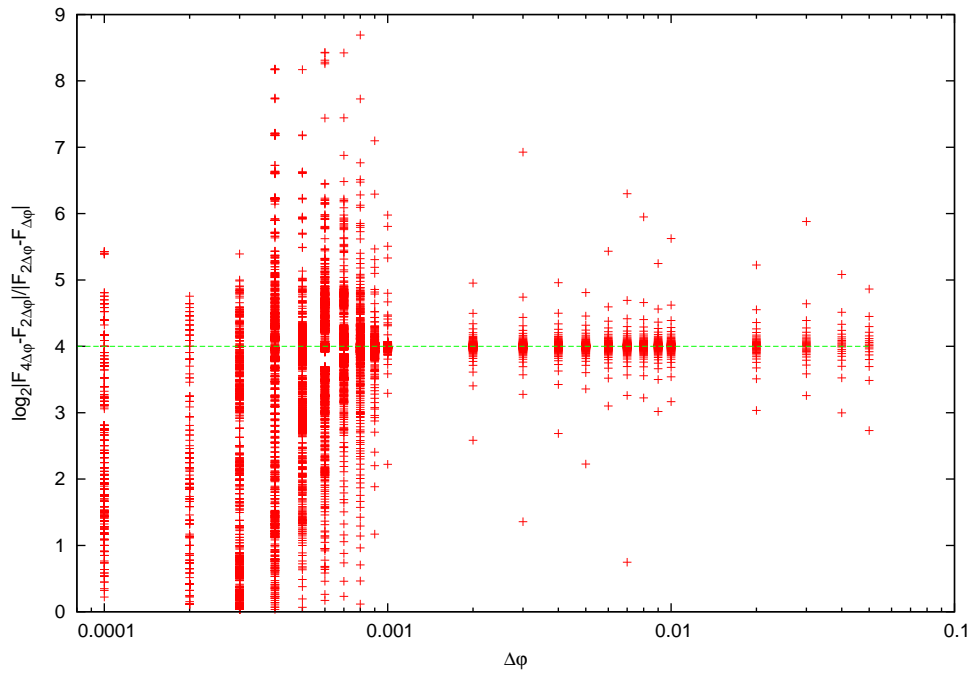
Obrázek 4.15a: Ilustrace ohybu slunečního paprsku v blízkosti singularity. Výpočet proběhl pomocí metody RK8. Čím více se blížíme hranici $r = 3 M$, tím větší je následný ohyb paprsku.



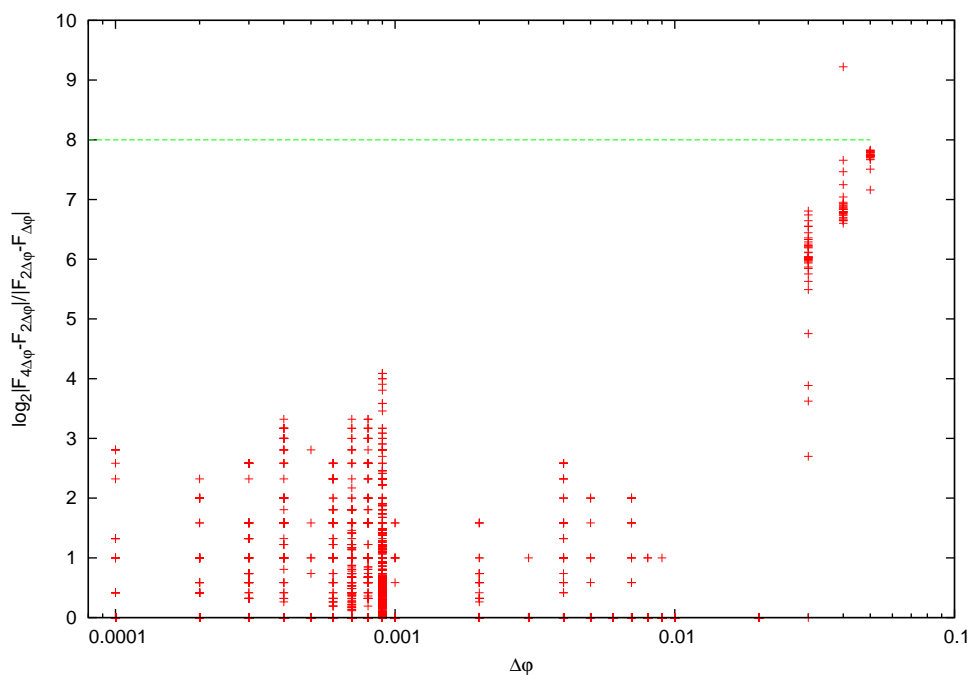
Obrázek 4.15b: Nestabilní orbita na $r = 3 M$ pro světelné paprsky. Výpočet proběhl pomocí metody RK8. Paprsek dopadl na horizont při hodnotě přibližně $\varphi = 36$, což znamená necelých šest oběhů.



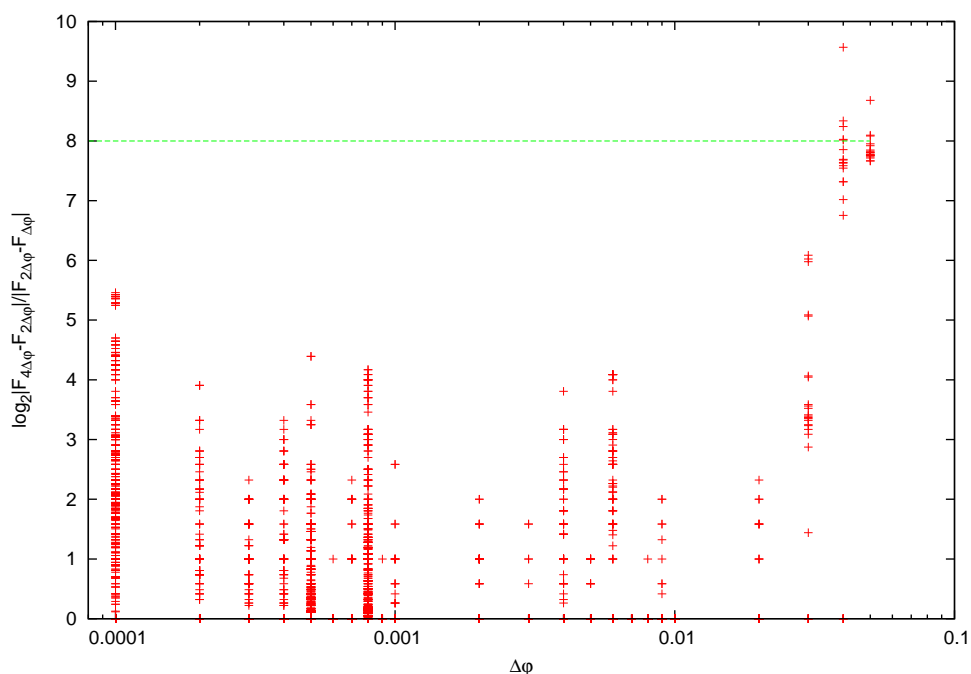
Obrázek 4.16a: Průběh konvergence v závislosti na velikosti konstantního kroku metody RK4 pro počáteční podmínku $r_0 = 5 M$.



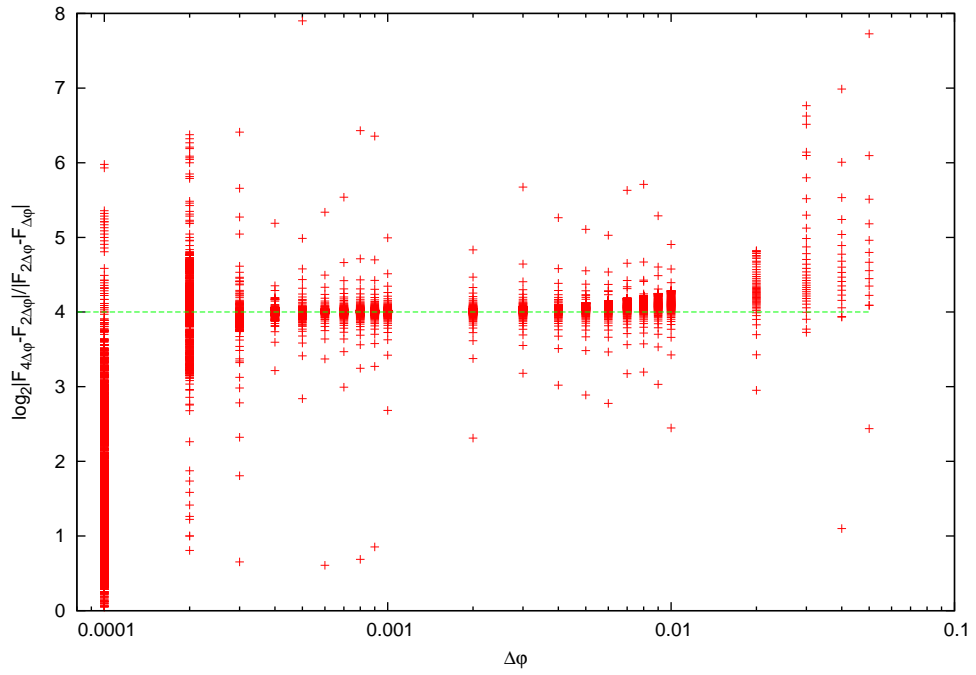
Obrázek 4.16b: Průběh konvergence v závislosti na velikosti konstantního kroku metody RK4 pro počáteční podmínku $r_0 = 10 M$.



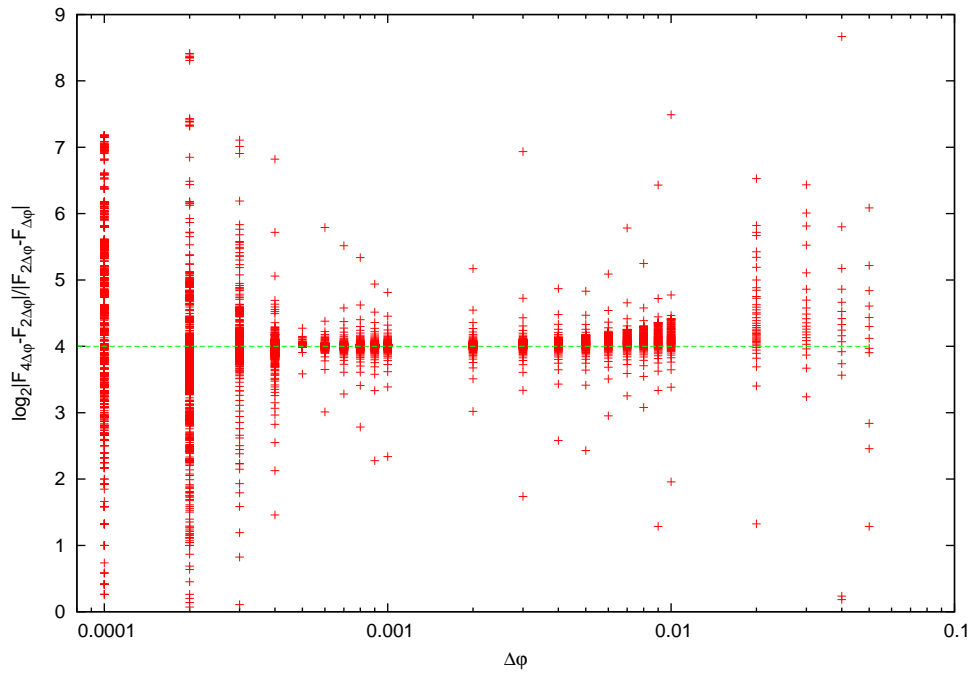
Obrázek 4.17a: Průběh konvergence v závislosti na velikosti konstantního kroku metody RK8 pro počáteční podmínku $r_0 = 5 M$. Volba příliš malých kroků způsobila, že zaokrouhlovací chyba neumožní konvergenci dosáhnout požadovaného řádu.



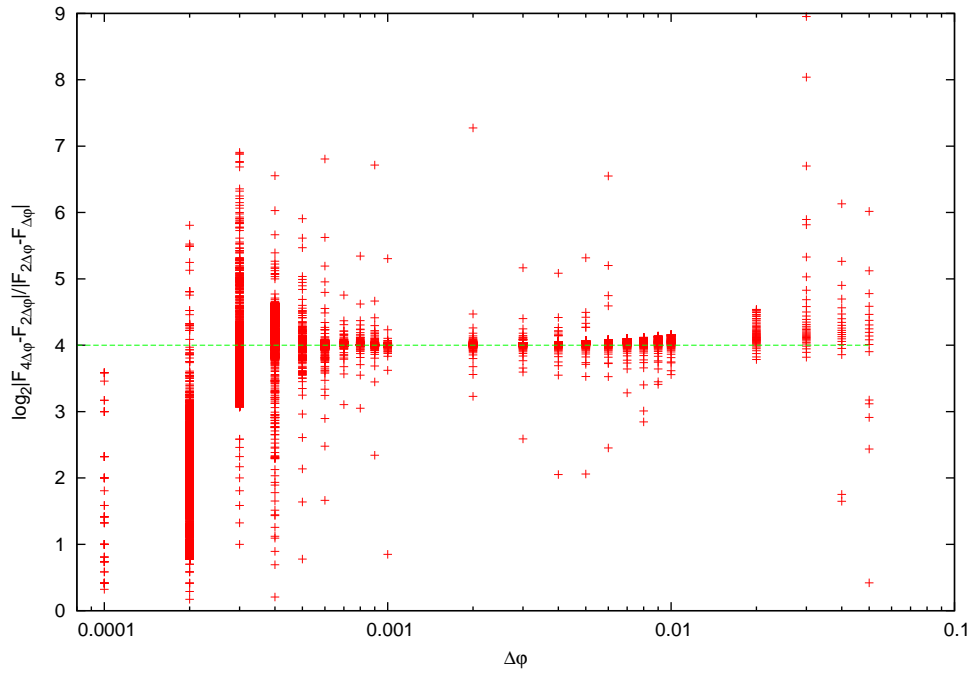
Obrázek 4.17b: Průběh konvergence v závislosti na velikosti konstantního kroku metody RK8 pro počáteční podmínku $r_0 = 10 M$. Volba příliš malých kroků způsobila, že zaokrouhlovací chyba neumožní konvergenci dosáhnout požadovaného řádu.



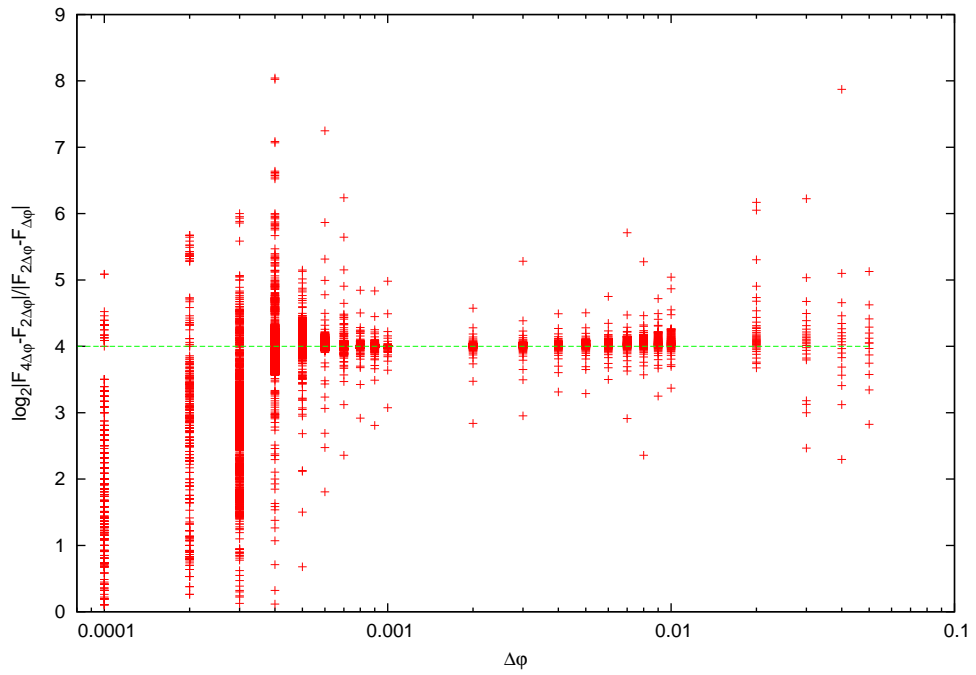
Obrázek 4.18a: Průběh konvergence v závislosti na velikosti konstantního kroku metody AB4 pro počáteční podmínku $r_0 = 5 M$.



Obrázek 4.18b: Průběh konvergence v závislosti na velikosti konstantního kroku metody AB4 pro počáteční podmínku $r_0 = 10 M$.



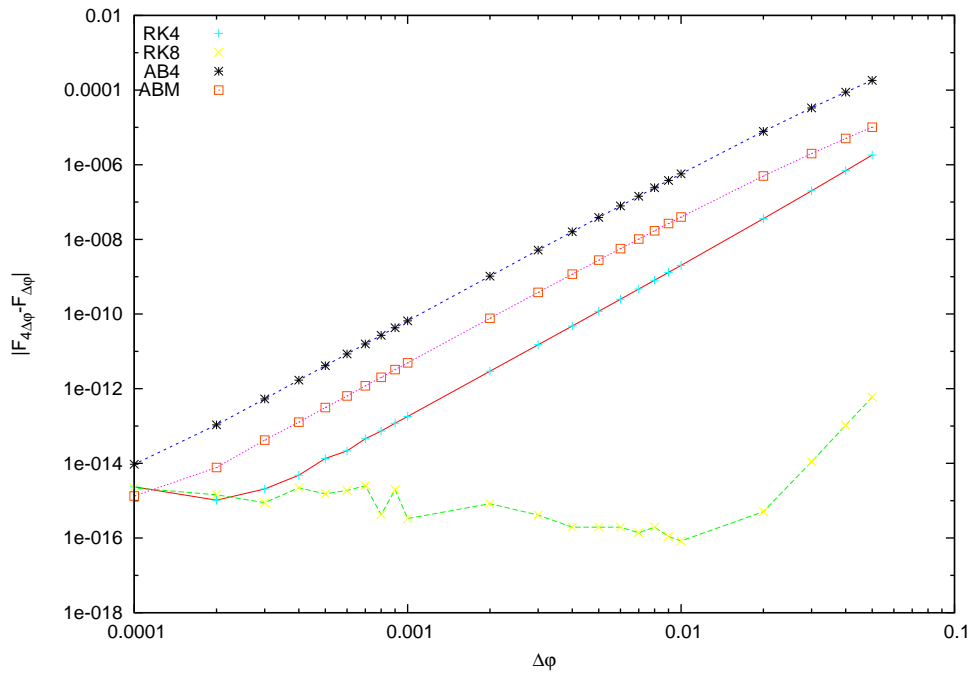
Obrázek 4.19a: Průběh konvergence v závislosti na velikosti konstantního kroku metody ABM pro počáteční podmínku $r_0 = 5 M$.



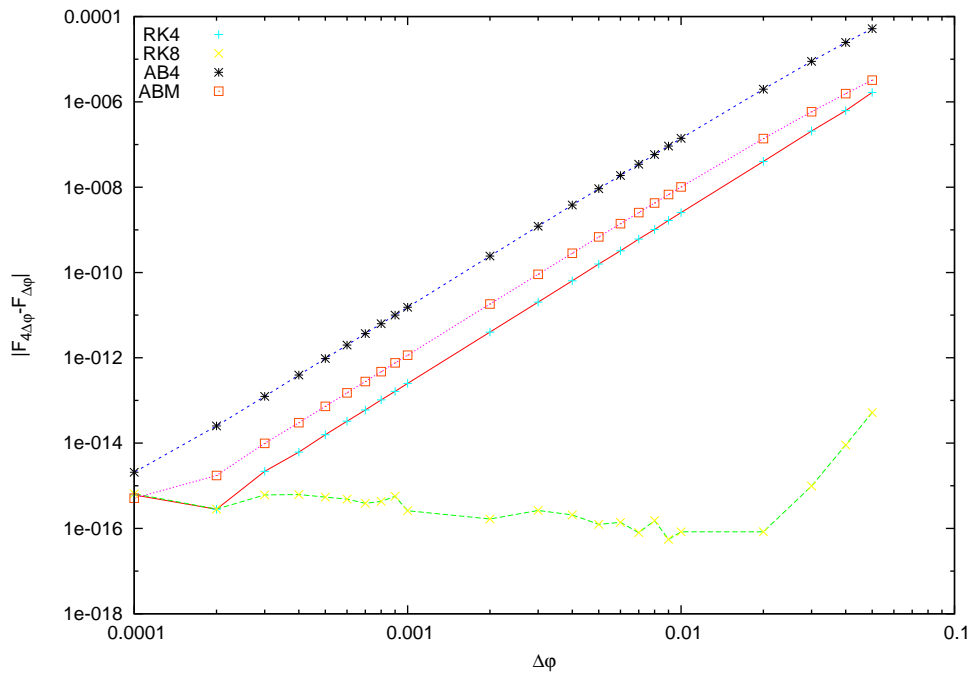
Obrázek 4.19b: Průběh konvergence v závislosti na velikosti konstantního kroku metody ABM pro počáteční podmínku $r_0 = 10 M$.

4.2.3 Přesnost numerických metod (podruhé)

Stejně jako v minulé podkapitole vykresleme ještě přesnost zbývajících tří čtyřkrokových metod pomocí vztahu (4.13), příslušné grafy jsou vykresleny na obrázcích (4.20a) a (4.20b). Ve všech uvedených případech dosahuje chyba metody až na hranici 10^{-16} . Narozdíl od řešení pohybu hmotné částice tedy nenarážíme na bariéru a můžeme zvětšovat přesnost libovolně s ohledem na vliv zaokrouhlovací chyby. Rozdíl v chování je pravděpodobně způsoben relativní jednoduchostí řešené relativistické verze Binetova vzorce narozdíl od soustavy rovnic jakou tvoří rovnice geodetiky nebo Hamiltonovy rovnice.



Obrázek 4.20a: Přesnost numerických metod v závislosti na velikosti konstantního kroku pro počáteční podmínku $r_0 = 5 M$.



Obrázek 4.20b: Přesnost numerických metod v závislosti na velikosti konstantního kroku pro počáteční podmínku $r_0 = 10 M$.

Závěr

Naším cílem byl rozbor numerického řešení daných pohybových rovnic v okolí černé díry (singularity). Za tímto účelem jsme v kapitole 1 popsali nejčastější rodiny numerických metod, ilustrovali jejich odvození na elementárních případech a představili často používané zástupce těchto rodin. Z nich jsme pro naši analýzu vybrali metodu Rhunge-Kutta čtvrtého řádu (*RK4*) a Dormand-Princeovu *RK8* metodu osmého řádu jako zástupce stejnojmenné rodiny, čtyřkrokovou Adams-Bashforthovu metodu čtvrtého řádu (*AB4*) jako explicitního zástupce vícekových metod a takzvanou Adams-Moulton-Bashforth prediktor-korektorovou rutinu (*ABM*) sestávající z tříkrokové implicitní metody Adams-Moultona typu spolu s *AB4*. Tyto vybrané metody jsme aplikovali na logistickou rovnici jako příklad obyčejné diferenciální rovnice s počáteční podmínkou, abychom ilustrovali druh matematických problémů, které v této práci řešíme.

V kapitole 2 byly shrnuty důležité elementární pojmy a formalismus obecné teorie relativity. Byly také okomentovány některé fundamentální rozdíly mezi Newtonovskou mechanikou a OTR včetně zavedení pojmu prostoročas. Pro vyšetřování pohybu částice jsme si vybrali speciální případ Schwarzschildova prostoročasu, který byl ve stručnosti popsán a zasazen do širšího kontextu jako řešení Einsteinových rovnic.

Všechny námi používané pohybové rovnice jsou uvedeny či částečně odvozeny v kapitole 3. Jedná se o rovnici geodetiky (3.3), jakožto přímý důsledek předpokladů obecné relativity a jejího formalismu a dále relativistické Hamiltonovy rovnice (3.13), obdobu konceptu z klasické mechaniky. Pro zdůraznění rozdílu v těchto dvou přístupech je uvedeno i návodné odvození těchto rovnic extremalizací akce. Zároveň jsou v kapitole 3 napočítány všechny potřebné výrazy a konkrétní podoba pohybových rovnic ve Schwarzschildově prostoročase. Dále je zmíněna relativistická verze Binetova vzorce pro nehmotné částice, původně známého taktéž z klasické mechaniky, kterou používáme k výpočtu ohybu světelného paprsku.

Pro samotný výpočet byly v obou řešených problémech, tedy oběh hmotné částice a ohyb světelného paprsku, zvoleny konkrétní počáteční podmínky, abychom mohli provádět analýzu numerických řešení v kapitole 4. Je argumentováno, že zásadní pro numerický výpočet je nejen výběr vhodné metody, ale i volba numerického kroku. Pro vymezení správnosti volby jsou použita dvě kritéria. Konvergence metody spočívající ve výpočtu pomocí různých kroků danou metodou a jejich vzájemné zpracování podle vztahu (1.25). Přesnost metody jsme určovali podle vzorce (4.12).

Jak se ukázalo, je několik faktorů, které je při numerickém výpočtu třeba mít v patrnosti. V první řadě to je diskrétní reprezentace čísel, kterou každá výpočetní aparatura používá. S ní je spojena hlavně zaokrouhlovací chyba, která se v našem případě pohybovala na hranici 10^{-16} . Snaha dostat se s přesností díky řádu metody nebo volbou velmi malých numerických kroků přichází vniveč, ba naopak, vliv zaokrouhlovací chyby způsobuje zhoršení přesnosti. Toto se pro-

jevilo i při výpočtu konvergence, kdy pro příliš malé kroky nedostáváme strojovým výpočtem interpretovatelné výsledky. Obzvláště se tento efekt projevil u zkoumané metody *RK8*, která jako metoda osmého řádu dosahuje hranice naší zaokrouhlovací chyby poměrně brzy.

Pro dané problémy jsme volili zkoumané intervaly numerických kroků v souladu s rozsahy a významem parametrů v nichž jsme tyto kroky prováděli. Je nasnadě, že každá konkrétní aplikace udává sama o sobě podmínky ohraničující volbu numerického kroku. Jak bylo zjištěno, krajní volby kroku se ukazují nevhodné z důvodů zahrnutí zaokrouhlovací chyby u nejmenších kroků ($0,001-0,01$ u hmotné částice, $0,0001-0,0005$ u světelného paprsku) a vzrůstající absolutní chyby u kroků nejvyšších (v případě hmotné částice kroky $\Delta\tau = 1-20$ u metod čtvrtého řádu, u ohybu paprsku nebyly takto vysoké kroky použity). U všech výpočtů konvergence se ukázaly být nejvhodnější hodnoty uprostřed vyšetřovaného intervalu (přesnější hodnota byla závislá na konkrétní metodě a druhu pohybových rovnic).

Konvergence numerické metody udává dobrý přehled o jejím chování při výpočtu. Výsledky kapitoly 4 naznačují, že toto chování je silně závislé na hodnotě parametru, po kterou provádíme výpočet. Zatímco pro dva oběhy hmotné částice udávala konvergence všech metod dobře interpretovatelné a očekávané výsledky, při pouhém prodloužení výpočtu na sto oběhů již tak jednoznačné výsledky nedostáváme (viz podkapitola 4.1.2). Ukazuje se, že je tedy nutné brát v potaz i délku výpočtu a v případě horšího konvergenčního chování přistoupit ke korekčním metodám. Tento postup jsme si demonstrovali pro případ hmotné částice, kdy jsme zjistili zhoršení chování konvergence při oběhu částice po vnitřní orbitě (viz obrázek (4.1)). Jako korekci jsme zvolili zmenšení intervalu v inkriminované oblasti. Empiricky jsme našli pro jaké zmenšení se konvergenční chování nejvíce zlepšilo, toto zmenšení jsme posléze použili ke korekci po dobu celého výpočtu a porovnali s původními daty. Pro sofistikovanější metody kontroly velikosti kroku je odkazováno na příslušnou literaturu [3].

Vynesení přesnosti metody potvrdilo, že chování různých numerických metod závisí na konkrétním systému ODE a dalších parametrech úlohy kterou řešíme. Zatímco v případě logistické rovnice a relativistického Binetovova vzorce pro nehmotné částice jsme dosáhli hranice zaokrouhlovací chyby, u řešení rovnice geodetiky a Hamiltonových rovnic došlo na horní hranici chyby 10^{-8} k pozastavení poklesu chyby se zmenšujícím se krokem. Tato saturace se projevila u všech zkoumaných numerických metod, samozřejmě u *RK8* jakožto u metody osmého řádu k ní došlo poměrně dříve než u metod řádu čtvrtého. Tento jev se tedy zdá být silně závislý na konkrétním problému, který chceme numericky řešit.

V textu práce jsou popsána hlavní aplikačně důležité způsoby ověřování věrohodnosti numerického výpočtu. Ačkoli je konkrétní volba metody a numerického kroku přece jen vázána na konkrétní problém, nastínili jsme kritéria, která tuto volbu v případě obyčejných diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou omezují. Pro rozbor jiných druhů problémů spadajících spíše do oblasti matematického modelování odkazujeme na knihu [4].

Při řešení pohybových rovnic jsme se omezili na sféricky symetrický případ nerotující černé díry (Schwarzschildův prostoročas). Možným rozšířením této práce by bylo rozpracování podobné tematiky v obecnějších prostoročasech, jakými jsou například Kerr-Newmanovo řešení Einstein-Maxwellových rovnic (komentář viz úvod), které by poté mohlo vést k aplikačně důležitým metodám výpočtu při astrofyzikálně relevantních situacích.

Seznam použité literatury

- [1] MISNER, C.W., THORNE, K.S., WHEELER, J.A. *Gravitation*, (Freeman and Co., San Francisco 1973).
- [2] DEXTER, J., and AGOL, E., *A fast new public code for computing photon orbits in a Kerr spacetime*, ApJ 696 1616 (2009).
- [3] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. (2007), *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*, 3rd ed. (Cambridge University Press, Cambridge 2007).
- [4] HOLMES, M.H. *Introduction to Numerical Methods in Differential Equations*. (Springer, 2007).
- [5] KUCHAR, K. *Základy obecné teorie relativity*, (ACADEMIA, Praha 1968).
- [6] DVOŘÁK, L. *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*. (Státní ped. nakladatelství, Praha 1984).
- [7] NOBILI, Anna M., CLIFFORD, M. Will. (6 March 1986). *The real value of Mercury's perihelion advance*, Nature 320, 39-41.
- [8] BERTSCHINGER, E., *Hamiltonian Dynamics of Particle Motion*, (Spring, 1999) .
- [9] TREFETHEN, Lloyd N., *Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*, nepublikovaný text, 1996, ke stažení na <http://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/pdetext.html> .
- [10] HAIRER, E., NOERSETT, S.P., WANNER, G., *Solving Ordinary Differential Equations I - Nonstiff Problems, 2ed* (SSCM 8, Springer 2008).
- [11] CARTWRIGHT, J., *The Dynamics of Runge-Kutta Methods*, nepublikovaný text, 1995, k nalezení na autorově internetové stránce <http://lec.ugr.es/~julyan/papers/rkpaper/root.html> .
- [12] BUTCHER, J. C., *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, (Wiley, 2003). ISBN 0-471-96758-0
- [13] STONE, P., The derivation of Runge-Kutta schemes. *Peter Stone's Maple Worksheets, Peter's Stone Home Page..* Převzato 29. července 2011, <http://www.peterstone.name/Maplepgs/RKcoeff.html> .

Dodatky

Dodatek 1

Koeficienty Dormand-Princeovy RK8 metody

Najít koeficienty pro vyšší RK metody je obecně komplikovaný problém spočívající v řešení soustav algebraických rovnic. Z podmínky na přesnost RK metody navíc ještě neplynou její koeficienty jednoznačně. Rovnice svazující koeficienty pro metodu osmého řádu jsou uvedeny v [10]. Dormand a Prince navrhli metodu, ve které zvolili koeficienty

$$c_7 = \frac{1}{4}, c_8 = \frac{4}{13}, c_{10} = \frac{3}{5}, c_{11} = \frac{6}{7}. \quad (4.19)$$

Toto určení již vede k jednoznačnému řešení. Jelikož je výsledkem složitého systému rovnic, nelze se divit, že jsou některé koeficienty složitějšími racionálními výrazy či dokonce mohou být i iracionální. Jejich zapsání v Butcherově schématu, podobně jako v Kapitole 1 (Obrázek 1.1), by bylo značně nepřehledné, proto se omezíme na vypsání jednotlivých koeficientů. Protože se v této práci zabýváme problémy nezávislými na parametru (t, τ, λ) , nebudeme vypisovat všechny koeficienty c_i , které pro nás nejsou podstatné.

Použijeme-li značení v souladu s (1.11), máme:

$$\begin{aligned} a_{2i} &= \left[\frac{12 - 2\sqrt{6}}{135} \right] \\ a_{3i} &= \left[\frac{6 - \sqrt{6}}{180}, \frac{6 - \sqrt{6}}{60} \right] \\ a_{4i} &= \left[\frac{6 - \sqrt{6}}{120}, 0, \frac{6 - \sqrt{6}}{40} \right] \\ a_{5i} &= \left[\frac{462 + 107\sqrt{6}}{3000}, 0, 0, \frac{-402 - 197\sqrt{6}}{375} \right] \\ a_{6i} &= \left[\frac{1}{27}, 0, 0, \frac{16 + \sqrt{6}}{108}, \frac{16 - \sqrt{6}}{108} \right] \\ a_{7i} &= \left[\frac{19}{512}, 0, 0, \frac{118 + 23\sqrt{6}}{1024}, \frac{118 - 23\sqrt{6}}{1024}, \frac{-9}{512} \right] \\ a_{8i} &= \left[\frac{13772}{371293}, 0, 0, \frac{51544 + 4784\sqrt{6}}{371293}, \frac{51544 - 4784\sqrt{6}}{371293}, \frac{-5688}{371293}, \frac{3072}{371293} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{9i} &= \left[\frac{58656157643}{93983540625}, 0, 0, \frac{-1324889724104 - 318801444819\sqrt{6}}{626556937500}, \right. \\
&\quad \left. \frac{-1324889724104 + 318801444819\sqrt{6}}{626556937500}, \frac{96044563816}{3480871875}, \frac{5682451879168}{281950621875}, \right. \\
&\quad \left. \frac{-165125654}{3796875} \right] \\
a_{10i} &= \left[\frac{8909899}{18653125}, 0, 0, \frac{-4521408 - 1137963\sqrt{6}}{2937500}, \frac{-4521408 + 1137963\sqrt{6}}{2937500}, \right. \\
&\quad \left. \frac{96663078}{4553125}, \frac{2107245056}{137915625}, \frac{-4913652016}{147609375}, \frac{-78894270}{3880452869} \right] \\
a_{11i} &= \left[\frac{-20401265806}{21769653311}, 0, 0, \frac{354216 + 94326\sqrt{6}}{112847}, \frac{354216 - 94326\sqrt{6}}{112847}, \right. \\
&\quad \left. \frac{-43306765128}{5313852383}, \frac{-20866708358144}{1126708119789}, \frac{14886003438020}{654632330667}, \frac{35290686222309375}{14152473387134411}, \right. \\
&\quad \left. \frac{-1477884375}{485066827} \right] \\
a_{12i} &= \left[\frac{39815761}{17514443}, 0, 0, \frac{-3457480 - 960905\sqrt{6}}{551636}, \frac{-3457480 + 960905\sqrt{6}}{551636}, \right. \\
&\quad \left. \frac{-844554132}{47026969}, \frac{8444996352}{302158619.0}, \frac{-2509602342}{877790785}, \frac{-28388795297996250}{3199510091356783}, \right. \\
&\quad \left. \frac{226716250}{18341897}, \frac{1371316744}{2131383595} \right]
\end{aligned}$$

Váhy jednotlivých kroků vystupující ve finálním vzorci pro nalezení v^{n+1} jsou

$$\begin{aligned}
b_i &= \left[\frac{104257}{1920240}, 0, 0, 0, 0, \frac{3399327}{763840}, \frac{66578432}{35198415}, \frac{-1674902723}{288716400}, \right. \\
&\quad \left. \frac{54980371265625}{176692375811392}, \frac{-734375}{4826304}, \frac{171414593}{851261400}, \frac{137909}{3084480} \right]
\end{aligned}$$

Výpočet koeficientů této a dalších RK metod vyšších řádů pomocí programu MAPLE lze nalézt na internetové stránce [13].