Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ivan Héda

Metoda Greenovy funkce pro okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2012

Na tomto místě bych velice rád poděkoval docentu Mirkovi Rokytovi, vedoucímu mé práce, za cenné připomínky, velice vstřícný přístup a čas, který mi věnoval.

Zároveň bych rád vyjádřil vděčnost své rodině za podporu, které se mi z její strany dostává.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 1. srpna 2012 Ivan Héda

Název práce: Metoda Greenovy funkce pro okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice

Autor: Ivan Héda

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Hlavním cílem této práce je shrnutí základních poznatků týkajících se metody řešení okrajových úloh pro lineární diferenciální rovnice využívající Greenových funkcí, které budou definovány a za nepříliš silných předpokladů i jednoznačně zkonstruovány. Tato metoda je v první řadě odvozena pro řešení úloh s lineárními homogenními podmínkami, nicméně v práci ukážeme, že metodu lze bez dalších dodatečných předpokladů využít i pro řešení problémů s nehomogenními lineárními okrajovými podmínkami. Jako hlavní důsledek tak dostaneme existenci a jednoznačnost řešení pro relativně širokou třídu lineárních okrajových úloh.

Klíčová slova: okrajové úlohy, obyčejné diferenciální rovnice, Greenova funkce

Title: Method of Green function for boundary value problems for ODEs

Author: Ivan Héda

Department: Department of mathematical analysis

Supervisor: doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc.

Abstract: The main aim of this work is to summarize the basic knowledge of method which is using Green's functions for solving boundary value problems for linear differential equations. These functions will be defined and, with some not very strong presumptions, uniquely constructed. This method is primarily derived for solving problems with homogenous boundary conditions. However it will be shown that there is no more presumtions needed to use this method to solve problems with non-homogenous linear boundary conditions. As a main consequence of preceding existence and uniqueness of solution for relatively wide class of linear boundary problems will be provided.

Keywords: boundary value problems, ordinary differential equations, Green function

Obsah

Úvod

Kořeny teorie, které se budeme věnovat v této práci, sahají až do roku 1828, kdy Nottinghamský mlynář a matematik samouk George Green (1793 - 1841) publikoval práci nazvanou *An essay on the Application of Mathematical to the Theories of Electricity and Magnetism.* V této práci byla mimo jiné odvozena i slavná Greenova věta a spolu s Greenovými funkcemi byla aplikována na problémy elektrostatiky.

Green vydal esej na vlastní náklady, poněvadž se obával odmítnutí ze strany časopisů pro svou nedostatečnou kvalifikaci. Práce se nesetkala s velkým úspěchem. Hlavním důvodem bylo zřejmě to, že většinu z prodaných výtisků koupili majetnější Nottinghamští občané, kteří ale vesměs nemohli tématu práce rozumět.

Výjimkou byl Edward Bromhead z nedalekého Lincolnu, absolvent Univerzity Glasgow a poté Univerzity v Cambridge, který ohromen Greenovou prací mu ihned nabídl pomoc s publikováním dalších listů. Na tuto nabídku však Green nějakou dobu nereagoval. Považoval ji pouze za zdvořilost ze strany bohatého a vlivného Bromheada. Nakonec se však k odpovědi Green odhodlal, ale až po necelých dvou letech od obdržení nabídky. Díky Bromheadovi tak měl v roce 1833 možnost publikovat první článek v časopisu a dokonce, díky Bromheadově pomoci, v roce 1835 ve věku 42 let nastoupil na vysněnou Univerzitu v Cambridge, kterou dokončil v roce 1839. Bohužel krátce na to Green vážně onemocněl a vrátil se do Nottinghamu, kde na jaře roku 1841 umírá.

Na počátku čtyřicátých let na Greenovu práci narazil William Thomson, později známý jako Lord Kelvin, jehož přičiněním byla původní esej publikována v časopise *Crelle's Journal.* Nutno podotknout, že Green některými svými objevy předběhl velikány jako Josepha Liouvilla nebo Charlese Sturma, kteří některé jeho výsledky „znovuobjevili“ celých 17 let po první Greenově publikaci.

Tato bakalářská práce, jenž vychází zejména z šesté kapitoly knihy [3], se bude věnovat využití Greenových funkcí pro řešení okrajových úloh pro obyčejné diferenciální rovnice.

V úvodní kapitole definujeme problémy, kterými se budeme zabývat. Posléze se pomocí jisté analogie s konečně-rozměrnou lineární rovnicí pokusíme ukázat, jaká elementární myšlenka stojí za metodou využívající Greenovy funkce, což následně bude demonstrováno na snadném příkladu.

Druhá kapitola zformalizuje úvahy z kapitoly první. Dokážeme základní věty – zejména větu o řešení pomocí Greenovy funkce a velice důležitou větu o existenci a jednoznačnosti Greenovy funkce. Tato část se bude týkat problému s homogenními okrajovými podmínkami, který bude záhy formulován.

Problému s nehomogenními okrajovými podmínkami, je pak věnována poslední kapitola.

1. Základní myšlenka

Úvodem poznamenejme, že značná část této kapitoly vychází z poznámek [5] profesora Petera Olvera, které vznikly k jeho přednášce.

1.1 Formulace úlohy

Definice 1.1. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $-\infty < a < b < \infty$ a l je diferenciální[1] operátor tvaru

$$l(y) = p_n y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + p_0 y, \tag{1.1}$$

kde $p_k \in \mathcal{C}([a,b])$ pro $k = 0, \ldots, n$, p_n je nenulová na intervalu $[a,b]$.

Dále mějme zadánu sadu lineárně nezávislých funkcionálů $\Phi_j, j = 1, \ldots, n$ tvaru

$$\Phi_j(y) = \sum_{k=1}^{n} \left[\alpha_{jk} y^{(k-1)}(a) + \beta_{jk} y^{(k-1)}(b) \right], \tag{1.2}$$

kde $\alpha_{jk}, \beta_{jk} \in \mathbb{R}$, $j, k = 1, \ldots, n$. Nechť dále $f \in \mathcal{C}([a,b])$ je zadaná funkce a $0 \neq \vec{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)^T \in \mathbb{R}^n$ zadaný vektor.

Potom *úlohou s homogenními okrajovými podmínkami* budeme rozumět diferenciální rovnici s okrajovými podmínkami tvaru

$$l(y) = f, \tag{1.3}$$
$$\Phi_j(y) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Úlohou s nehomogenními okrajovými podmínkami budeme rozumět stejnou diferenciální rovnici, ovšem okrajové podmínky budou tvaru

$$\Phi_j(y) = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Řešení diferenciální rovnice (1.3) budeme uvažovat v klasickém smyslu, tj. funkce y je řešením dané rovnice pokud je rovnost splněna v každém bodu otevřeného intervalu (a,b).

Poznámka 1.2. Ukažme, že lineární nezávislost funkcionálů Φ_j je ekvivalentní lineární nezávislosti vektorů $\tilde{\Phi}_j = (\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jn}, \beta_{j1}, \ldots, \beta_{jn}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Předpokládejme, že $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ je lineárně *závislá* množina funkcionálů. Podle definice lineární nezávislosti tedy existuje nenulová n-tice $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ taková, že $\Psi := \sum_{j=1}^n s_j \Phi_j$ je nulový funkcionál, tedy $\Psi(y) = \sum_{j=1}^n s_j \Phi_j(y) = 0$ pro každé $y \in \mathcal{C}^n([a,b])$.

Po dosazení za Φ_j (a jednoduché úpravě) dostáváme předchozí rovnost ve tvaru

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \left[y^{(k-1)}(a) \sum_{j=1}^{n} s_j \alpha_{jk} + y^{(k-1)}(b) \sum_{j=1}^{n} s_j \beta_{jk} \right].$$

Nyní uvažme funkce, definované jako $\frac{(x-a)^{l-1}}{(l-1)!}, l = 1, \ldots, n$, na nějakém (pravém) okolí bodu a, konstantně nulové na nějakém (levém) okolí bodu b a uvnitř celého

[1] Derivace v krajních bodech intervalu budeme v celém textu uvažovat jednostranné.

intervalu dostatečně hladké. Dosazením těchto funkcí do poslední rovnosti dostaneme $\sum_{j=1}^{n} s_j \alpha_{jl} = 0$ pro každé l. Stejně bychom to udělali pro bod b. Dostáváme tak, vektorově zapsáno, $\sum_{j=1}^{n} s_j(\alpha_{j1}, \ldots, \beta_{jn}) = \sum_{j=1}^{n} s_j \hat{\Phi}_j = 0$ a tedy vektory $\tilde{\Phi}_j, j = 1, \ldots, n$ jsou lineárně závislé. Obrácená implikace je zřejmá.

1.2 Myšlenka, motivace

Na okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice můžeme v určitém smyslu nahlížet jako na nekonečně-dimenzionální verzi systémů m lineárních rovnic pro m neznámých. Výhodou tohoto přístupu je nejen to, že konečně-dimenzionální lineární algebra poskytne náhled do struktury problému, ale také to, že získáme určitý návod na postup při řešení okrajových úloh, ze kterého vychází právě metoda *Greenovy funkce.*

Nechť tedy $m \in \mathbb{N}$. Zabývejme se chvíli systémem m rovnic o m neznámých. Zapsáno maticově, máme rovnici ve tvaru

$$\mathbf{A}\vec{u} = \vec{g}. \tag{1.6}$$

Předpokládejme, že $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je regulární. Označme standardní bázové vektory prostoru $\mathbb{R}^m$ jako

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots \qquad \vec{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Díky regularitě matice $\mathbf{A}$ máme zaručenu existenci *jednoznačného* řešení $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ pro libovolné $\vec{g} \in \mathbb{R}^m$. Tedy i pro vektory $\vec{e}_j, j = 1, \ldots, m$. Označme $\vec{u}_j$ řešení rovnice $\mathbf{A}\vec{u} = \vec{e}_j$. Vezměme si nyní libovolný vektor $\vec{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$. Ten je zřejmě možné zapsat ve tvaru

$$\vec{g} = \sum_{j=1}^{m} g_j \vec{e}_j. \tag{1.7}$$

Pak řešením (1.6) je, díky linearitě problému,

$$u = \sum_{j=1}^{m} g_j \vec{u}_j. \tag{1.8}$$

Skutečně,

$$\mathbf{A}\vec{u} = \mathbf{A}\left(\sum_{j=1}^{m} g_j \vec{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} g_j \mathbf{A}\vec{u}_j = \sum_{j=1}^{m} g_j \vec{e}_j = \vec{g}.$$

Řešit úlohu (1.6) tímto způsobem by bylo výhodné zejména pokud bychom potřebovali nalézt řešení pro více různých pravých stran. Přitom nalezení vektorů $\vec{u}_j$ je ekvivalentní nalezení inverzní matice k matici $\mathbf{A}$, protože vektory $\vec{u}_j$ zřejmě tvoří její sloupce.

Ve fyzice taková soustava může vyjadřovat například rovnici rovnováhy. Představme si například řetěz kuliček spojených pružinami. Nechť je tento řetěz napnut mezi dvěma zdmi. My bychom mohli na jednotlivé kuličky působit silou ve směru nahoru nebo dolů. Zatlačením na jednu z kuliček, bychom však samozřejmě vychýlili i kuličky ostatní. Právě j-tá složka pravé strany rovnice by vyjadřovala silové působení na j-tou kuličku. Jednotlivé složky řešení by vyjadřovaly vychýlení při působení dané síly, přičemž matice $\mathbf{A}$ by nějakým způsobem tento systém charakterizovala. My bychom postupovali tak, že bychom zjistili, jak se jednotlivé kuličky vychýlí při působení jednotkové síly, reprezentované vektory $\vec{e}_j$, na každou z kuliček. Vychýlení při působení nějaké složitější síly bychom pak spočítali jako součet příslušně vynásobených dílčích vychýlení.

Našim cílem nyní bude tuto jednoduchou myšlenku rozšířit na okrajové úlohy pro diferenciální rovnice. Začněme příkladem, který je v jistém smyslu obdobný s příkladem předchozím – taky vyjadřuje rovnici pro rovnováhu, kde pravá strana znázorňuje vnější silové působení.

Představme si vodorovnou poličku, kterou budeme reprezentovat intervalem $[a, b]$. Na tuto poličku bychom v bodě $\xi \in (a, b)$ položili velmi úzkou knížku, která by na ni působila svou, řekněme jednotkovou tíhou. Zjistili bychom, jakou odezvu má na toto zatížení polička. Idea je taková, že kdybychom znali odezvu poličky na jednotkové zatížení v každém bodě intervalu (a, b), potom bychom, při zarovnání poličky knížkami takovém, že v bodě $x \in (a, b)$ by stála knížka s tíhou $f(x)$, mohli spočítat odezvu poličky na toto složitější zatížení jako „lineární kombinaci“ jednotlivých odezev – obdobně jako v předchozím příkladu.

Problém je však v tom, že bychom potřebovali, aby naše testovací kniha měla *nulovou* šířku. To by však znamenalo, že její objem a tedy i tíha jsou nulové. My bychom však potřebovali, aby její tíha byla jednotková.

1.3 Greenova funkce

Uvědomme si formálněji, v kontextu příkladu z konce předchozí podkapitoly, co vlastně požadujeme. Chceme zjistit, jak polička reaguje na zatížení v jediném bodě $\xi \in (a, b)$. To znamená, že funkce na pravé straně, znázorňující vnější silové působení, působí v jediném bodě ξ a jinde je nulová. Tedy

$$g_\xi(x) = 0 \quad \text{pro } x \neq \xi. \tag{1.9}$$

Zároveň ale požadujeme, aby celková vnější síla měla velikost jedna, což můžeme vyjádřit integrálem

$$\int_a^b g_\xi(x) \, \mathrm{d}x = 1. \tag{1.10}$$

Tyto požadavky jsou však neslučitelné. Funkce, která je nulová všude kromě jednoho bodu je vzhledem k *Lebesgueově* míře nerozeznatelná od nulové funkce, jejíž integrál je roven nule.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $0 \in (a, b)$. Volme $\gamma > 0$ malé tak, aby otevřené okolí $U(0, \gamma) \subset [a, b]$. Definujme funkci na intervalu $[a, b]$ následujícím předpisem

$$\delta_\gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}\Big(\cos\left(\frac{\pi}{\gamma}x\right) + 1\Big), & x \in (-\gamma, \gamma), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1.11}$$

Takto definovaná funkce je spojitá na intervalu $[a,b]$ a dle definice je nenulová pouze na γ-okolí bodu 0. Kdybychom ji chtěli nenulovou na okolí libovolného $\xi \in (a,b)$, stačilo by definovat $\delta_\gamma^\xi(x) = \delta_\gamma(x-\xi)$. Je ovšem potřeba dát pozor, aby hodnota γ nebyla moc velká. Pokud by tomu tak bylo, tak ji jednoduše zmenšíme na vhodnou velikost. Platí

$$\begin{aligned}\int_a^b \delta_\gamma(x)\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma} \cos\left(\frac{\pi}{\gamma}x\right) + 1\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{\gamma}x\right) + \frac{\pi}{\gamma}x\right]_{-\gamma}^{\gamma} = 1. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Uvažme nyní posloupnost funkcí $\{\delta_{\frac{1}{n}}\}_{n=n_0}^{\infty}$, kde n_0 je voleno tak, aby $\frac{1}{n_0} < \gamma$. Potom platí pro $x \in [a,b]$ pevné

$$\lim_{n\to\infty} \delta_{\frac{1}{n}}(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Přitom ale

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \delta_{\frac{1}{n}}(x)\ \mathrm{d}x = 1. \tag{1.14}$$

Funkce $\delta_{\frac{1}{n}}$ tedy jistým způsobem přibližují „funkci“ g ze začátku této podkapitoly.

Navíc pro každou $f \in \mathcal{C}([a,b])$ a každé $x \in (a,b)$ platí

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \delta_{\frac{1}{n}}(x-\xi) f(\xi)\ \mathrm{d}\xi, \tag{1.15}$$

Skutečně. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom díky spojitosti f v bodě x existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $\xi \in B\big(x, \frac{1}{n_\varepsilon}\big)$ platí $\big|f(x) - f(\xi)\big| < \varepsilon$. Pak pro $n > n_\varepsilon$

$$\int_a^b \delta_{\frac{1}{n}}(x-\xi) f(\xi)\ \mathrm{d}\xi \le \max_{\xi \in B(x, \frac{1}{n_\varepsilon})} f(\xi) \int_a^b \delta_{\frac{1}{n}}(x-\xi)\ \mathrm{d}\xi \le f(x) + \varepsilon. \tag{1.16}$$

Podobně bychom mohli postupovat i pro minimum. Odtud pak dostáváme (1.15).

Příklad 1.3. Uvažujme diferenciální rovnici s okrajovými podmínkami

$$-\alpha y''(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1.17}$$
$$y(0) = 0, \tag{1.18}$$
$$y(1) = 0, \tag{1.19}$$

kde $\alpha > 0$ je kladná konstanta a f je funkce spojitá na intervalu $[a,b]$. Tato rovnice zjednodušeně modeluje onu jednorozměrnou „poličku“, pevně ukotvenou v bodech 0 a 1, konstanta α vyjadřuje její tuhost.

Ideou bylo zjistit její odezvu pro jednotkové zatížení v jednotlivých bodech. To ovšem nemůžeme spočítat přímo, protože, jak jsme si výše uvědomili, nemáme funkci takovou, kterou bychom mohli vhodně reprezentovat požadované zatížení. Zaměřme se místo toho na následující aproximační úlohu.

Volme $\xi \in (0,1)$, k němu nalezněme $n_\xi \in \mathbb{N}$, aby $U\big(\xi, \frac{1}{n_\xi}\big) \subset [0,1]$. Potom pro $n \geq n_\xi$ řešme

$$-\alpha y''_{n,\xi}(x) = \delta^{\xi}_{\frac{1}{n}}(x) = \delta_{\frac{1}{n}}(x-\xi), \tag{1.20}$$

s okrajovými podmínkami (1.18) a (1.19).

Přímou integrací, s použitím *Základní věty integrálního počtu*, jejíž přesné znění a důkaz můžeme nalézt například v [7, str. 381], dostáváme spojitou funkci

$$\begin{aligned} y'_{n,\xi}(x) &= c_1 + \int_0^x \delta_{\frac{1}{n}}(t-\xi)\,\mathrm{d}t \\ &= c_1 + \begin{cases} 0, & x \in [0, \xi - \frac{1}{n}), \\ -\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{\pi}\sin\big(n\pi(t-\xi)\big) + n(t-\xi) + 1\right), & x \in [\xi - \frac{1}{n}, \xi + \frac{1}{n}], \\ -\frac{1}{\alpha}, & x \in (\xi + \frac{1}{n}, 1], \end{cases} \end{aligned} \tag{1.21}$$

kde $c_1 \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta.

Poznámka 1.4. Povšimněme si, jak se $y'_{n,\xi}$ bodově chová pro $n \to \infty$. Na konstantu c_1 v této poznámce zapomeňme. Definujme

$$h_\xi(x) = \lim_{n\to\infty} y'_{n,\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,\xi), \\ -\frac{1}{2\alpha}, & x = \xi, \\ -\frac{1}{\alpha}, & x \in (\xi, 1]. \end{cases}$$

Pro funkci h_ξ platí

$$\lim_{x\to\xi^+} h_\xi(x) - \lim_{x\to\xi^-} h_\xi(x) = -\frac{1}{\alpha} - 0 = -\frac{1}{\alpha},$$

má tedy v bodě ξ skok o velikosti $-\frac{1}{\alpha}$. Tato funkce připomíná *Heavisideovu* skokovou funkci, která je rovna 0 pro $x < 0$ a 1 pro $x > 0$. Není bez zajímavosti, že ve smyslu *distribucí* je *Diracova distribuce* derivací Heavisideovy funkce. Diracova distribuce by navíc v distributivním smyslu byla limitou regulárních distribucí indukovaných funkcemi $\delta_{\frac{1}{n}}$.

Opětovnou integrací, s použitím téže věty, dostáváme spojitou

$$y_{n,\xi}(x) = c_2 + c_1 x + \begin{cases} 0, & x \in [0, \xi - \frac{1}{n}), \\ \frac{\cos(n\pi(x-\xi))}{2n\alpha\pi^2} - \frac{n}{4\alpha}\left((x-\xi) + \frac{1}{n}\right)^2, & x \in [\xi - \frac{1}{n}, \xi + \frac{1}{n}], \\ -\frac{1}{\alpha}(x-\xi), & x \in (\xi + \frac{1}{n}, 1], \end{cases} \tag{1.22}$$

kde $c_2 \in \mathbb{R}$ je druhá integrační konstanta.

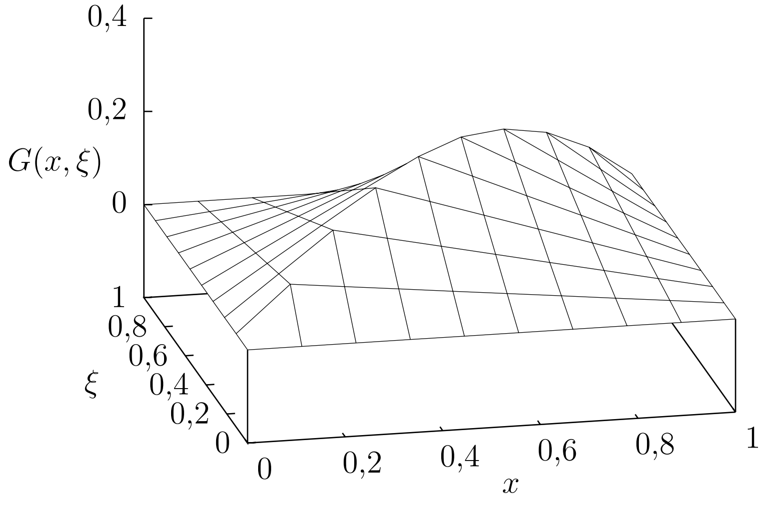
Dále musí být splněny okrajové podmínky (1.18) a (1.19), tedy

$$0 = y_\xi(0) = c_2 + 0 + 0 = c_2, \tag{1.23}$$

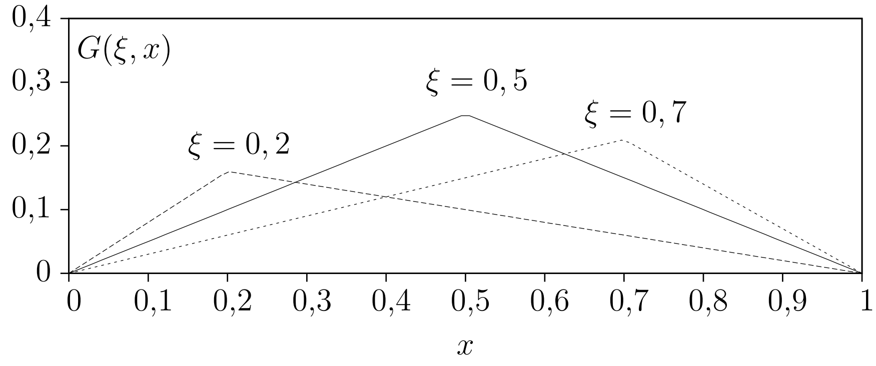
$$0 = y_\xi(1) = c_2 + c_1 - \frac{1}{\alpha}(1-\xi) = c_1 - \frac{1}{\alpha}(1-\xi), \tag{1.24}$$

odkud

$$c_2 = 0, \qquad c_1 = \frac{1}{\alpha}(1-\xi). \tag{1.25}$$



Obrázek 1.1: Graf funkce $G(x,\xi)$.



Obrázek 1.2: Řez grafem $G(x,\xi)$ pro vybrané hodnoty proměnné ξ.

Našli jsme tedy řešení pro každé $\xi \in (a,b), n \geq n_\xi$, splňující okrajové podmínky. Podívejme se jak se řešení bodově chová pro $n \to \infty$. Počítejme

$$\lim_{n\to\infty} y_{n,\xi}(x) = \frac{(1-\xi)x}{\alpha} + \begin{cases} 0, & x \in [0,\xi), \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\alpha\pi^2} - \frac{1}{4n\alpha} = 0, & x = \xi, \\ -\frac{1}{\alpha}(x-\xi), & x \in (\xi, 1]. \end{cases} \tag{1.26}$$

Definujme funkci $G : [0,1] \times (0,1) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$G(x,\xi) = \lim_{n\to\infty} y_{n,\xi}(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-\xi)x}{\alpha}, & x \leq \xi, \\ \dfrac{\xi(1-x)}{\alpha}, & x \geq \xi. \end{cases} \tag{1.27}$$

Pro lepší představu je graf (resp. řez grafu) této funkce znázorněn na obrázku 1.1 (resp. 1.2). Tato funkce je zřejmě spojitá na svém definičním oboru.

Dokonce není problém ji spojitě dodefinovat na $[0,1]^2$. Uvažujme ji tedy definovanou a spojitou na této kompaktní množině. Potom je G určitě omezená.

Inspirováni jistou analogií mezi vzorci (1.7) a (1.15) definujme, podobně jako ve vzorci (1.8), funkci

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 y_{n,\xi}(x) f(\xi)\ \mathrm{d}\xi. \tag{1.28}$$

Integrand je stejně omezený pro každé x a tedy existuje integrovatelná majoranta. Tedy díky *Lebesgueově větě* [6, 1.34] můžeme přehodit limitu a integrál a podle předpisu (1.27) dostáváme

$$y(x) = \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi)\ \mathrm{d}\xi. \tag{1.29}$$

Ověřme, že tato funkce opravdu řeší rovnici (1.17). To můžeme udělat jednoduše dosazením do zadání. Při derivování ale nemůžeme zaměnit derivaci a integrál, protože funkce G má v bodě (x,x) „hrot“ a tedy derivace v tomto bodě neexistuje. To však obejdeme vhodným rozdělením na dva integrály

$$y(x) = \int_0^x G(x,\xi) f(\xi)\ \mathrm{d}\xi + \int_x^1 G(x,\xi) f(\xi)\ \mathrm{d}\xi. \tag{1.30}$$

Tyto integrály ale mají meze závislé na proměnné x a tedy k výpočtu derivace funkce y budeme nuceni využít větu 2.3, která bude formulována a dokázána v následující kapitole. Počítejme

$$\begin{aligned} \alpha y'(x) &= (1-x)xf(x) - \int_0^x \xi f(\xi)\ \mathrm{d}\xi - (1-x)xf(x) - \int_x^1 (1-\xi) f(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &= -\int_0^x \xi f(\xi)\ \mathrm{d}\xi - \int_x^1 (1-\xi) f(\xi)\ \mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{1.31}$$

$$-\alpha y''(x) = xf(x) + (1-x)f(x) = f(x), \tag{1.32}$$

což jsme chtěli. Zbývá ověřit, že jsou splněny i okrajové podmínky. To je však zřejmé například z (1.30).

Poznamenejme, že právě zkonstruovanou funkci G budeme nazývat *Greenovou funkcí* úlohy (1.17) - (1.19) a shrňme, závěrem této kapitoly, její klíčové vlastnosti:

(i) $G : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá (v našem případě spojitě dodefinovaná) na svém definičním oboru.

(ii) Pro $\xi \in (0,1)$ pevné má první derivace $\frac{\partial G}{\partial x}$ skok v bodě (ξ,ξ) o velikosti $-\frac{1}{\alpha}$.

(iii) G splňuje okrajové podmínky pro každé $\xi \in [0,1]$.

(iv) $G(x,\xi)$ řeší homogenní rovnici $-\alpha y'' = 0$ vzhledem k proměnné x pro každé ξ pevné, na intervalech $(0,\xi)$ a $(\xi,1)$. To plyne z toho, že funkce je definována jako limita určité posloupnosti funkcí a pro každé $x \neq \xi$ se od nějakého n_0 na okolí x nemění, přičemž na tomto okolí řeší homogenní rovnici.

V další kapitole ukážeme, že právě tyto čtyři vlastnosti, zobecníme-li je, Greenovu funkci úlohy (1.3) - (1.4) charakterizují.

2. Úloha s homogenními okrajovými podmínkami

2.1 O řešení pomocí Greenovy funkce

Definice 2.1. Nechť je dán diferenciální operátor l tvaru (1.1) pro $n \in \mathbb{N}$ a nechť jsou zadány homogenní okrajové podmínky $\Phi_j(y) = 0, j = 1, \dots, n$ tvaru (1.2). Dále uvažme množiny $\Delta_1 = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x \in [a, b], y \in [a, x)\big\}$ a $\Delta_2 = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x \in [a, b], y \in (x, b]\big\}$. Funkci $G(x, \xi)$ nazveme *Greenovou funkcí příslušnou operátoru l a okrajovým podmínkám Φ_j*, jestliže splňuje

(i) $n = 1$: $G, \frac{\partial G}{\partial x} \in \mathcal{C}(\Delta_1) \cap \mathcal{C}(\Delta_2)$, a tyto funkce se dají spojitě rozšířit na $\overline{\Delta_1}$ a $\overline{\Delta_2}$,

$n \geq 2$: $G, \frac{\partial G}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-2} G}{\partial x^{n-2}} \in \mathcal{C}([a, b]^2)$, $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial^{n} G}{\partial x^{n}} \in \mathcal{C}(\Delta_1) \cap \mathcal{C}(\Delta_2)$, a poslední dvě jmenované funkce, se dají spojitě rozšířit na $\overline{\Delta_1}$ a $\overline{\Delta_2}$,

(ii) pro $\xi \in (a, b)$ platí[1]

$n = 1$: $G(\xi+, \xi) - G(\xi-, \xi) = \frac{1}{p_1(\xi)}$,

$n \geq 2$: $\frac{\partial^q G}{\partial x^q}(\xi+, \xi) - \frac{\partial^q G}{\partial x^q}(\xi-, \xi) = \begin{cases} 0, & q = 0, 1, \dots, n-2, \\ \frac{1}{p_n(\xi)}, & q = n-1, \end{cases}$

(iii) pro každé $\xi \in (a, b)$ platí $l\big(G(\cdot, \xi)\big) = 0$ na intervalech (a, ξ) a (ξ, b),

(iv) platí $\Phi_j\big(G(\cdot, \xi)\big) = 0$ pro každé $j = 1, \dots, n,\ \xi \in (a, b)$.

V tomto okamžiku můžeme zformulovat větu ukazující užitečnost Greenovy funkce. Tato věta bude říkat, jaký tvar má řešení problému (1.3) s homogenními okrajovými podmínkami (1.4) pro zadanou spojitou pravou stranu, známe-li Greenovu funkci příslušnou operátoru l a okrajovým podmínkám Φ_j.

Věta 2.2 (O řešení pomocí Greenovy funkce)**.** *Nechť existuje Greenova funkce $G(x, \xi)$ příslušná operátoru l a homogenním okrajovým podmínkám Φ_j, $j \leq n$. Dále ať $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Potom funkce*

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) \, \mathrm{d}\xi, \quad x \in [a, b] \tag{2.1}$$

je řešením $l(y) = f, \Phi_j(y) = 0, j = 1, \dots, n$.

Předtím, než přistoupíme k důkazu tohoto tvrzení, formulujme větu o derivování integrálu podle meze a parametru, kterou v tomto důkazu použijeme.

Věta 2.3 (Derivace integrálu podle meze a parametru)**.** *Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^2$ taková, že $\Omega \supseteq K = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x \in [a, b], y \in [\alpha, \beta(x)]\big\}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}, \beta(x) \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Nechť dále $g(x, \xi)$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \xi) \in \mathcal{C}(\Omega)$. Potom pro*

$$h(x) = \int_\alpha^{\beta(x)} g(x, \xi) \, \mathrm{d}\xi, \quad x \in [a, b] \tag{2.2}$$

[1] Symbolikou $f(x+)$ pro stručnost zápisu rozumíme $\lim_{z \to x^+} f(z)$. Obdobně pro $f(x-)$.

platí

$$h'(x) = g\big(x, \beta(x)\big)\beta'(x) + \int_{\alpha}^{\beta(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x, \xi)\ \mathrm{d}\xi, \tag{2.3}$$

přičemž derivace v krajních bodech daného intervalu uvažujeme jednostranné.

Důkaz. Volme $x_0 \in (a, b)$. Platí

$$\begin{aligned}
h'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\int_{\alpha}^{\beta(x_0+h)} g(x_0 + h, \xi)\ \mathrm{d}\xi - \int_{\alpha}^{\beta(x_0)} g(x_0, \xi)\ \mathrm{d}\xi \right] \\
&= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\beta(x_0)}^{\beta(x_0+h)} g(x_0 + h, \xi)\ \mathrm{d}\xi}_{\mathrm{I}} \\
&\quad + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\int_{\alpha}^{\beta(x_0)} g(x_0 + h, \xi)\ \mathrm{d}\xi - \int_{\alpha}^{\beta(x_0)} g(x_0, \xi)\ \mathrm{d}\xi \right]}_{\mathrm{II}},
\end{aligned}$$

má-li samozřejmě pravá strana smysl. Následující úvahy ukáží, že tomu tak je.

Podívejme se nejprve na integrál ve výrazu I. Volme h dostatečně malé. Podle věty *O střední hodnotě pro integrál* [7, str.443], existuje[2] $\xi_h \in \big[\beta(x_0), \beta(x_0 + h)\big]$ takové, že

$$\int_{\beta(x_0)}^{\beta(x_0+h)} g(x_0 + h, \xi)\ \mathrm{d}\xi = g(x_0 + h, \xi_h)\big(\beta(x_0 + h) - \beta(x_0)\big),$$

a tedy platí

$$\mathrm{I} = \lim_{h\to 0} g(x_0 + h, \xi_h) \frac{\beta(x_0 + h) - \beta(x_0)}{h} = g\big(x_0, \beta(x_0)\big)\beta'(x_0),$$

díky spojitosti funkce g a existenci derivace funkce β v bodě x_0.

Dále se zaměřme na výraz II. Povšimněme si, že meze integrálů v tomto výrazu jsou pevné. Díky tomu, spolu s předpokladem spojitosti funkcí g a $\frac{\partial g}{\partial x}$ na množině Ω, můžeme použít větu *o záměně derivace a integrálu* [4, str. 254], čímž dostaneme

$$\mathrm{II} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\alpha}^{\beta(x_0)} g(x_0, \xi)\ \mathrm{d}\xi = \int_{\alpha}^{\beta(x_0)} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, \xi)\ \mathrm{d}\xi.$$

Pro krajní body intervalu $[a, b]$ můžeme celý postup zopakovat, jen je potřeba vhodně uvažovat jednostranné limity.

Zbývá si uvědomit, že díky libovolnosti volby x_0 můžeme přeznačit x_0 na x, čímž dostaneme tvrzení věty. □

Důkaz věty 2.2. Důkaz této věty provedeme přímým výpočtem. Pišme

$$y(x) = \int_a^x G(x, \xi) f(\xi)\ \mathrm{d}\xi + \int_x^b G(x, \xi) f(\xi)\ \mathrm{d}\xi.$$

[2] Bez újmy na obecnosti předpokládejme $\beta(x_0 + h) \geq \beta(x_0)$.

Platí, že $F(x,\xi) = G(x,\xi)f(\xi)$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x,\xi) = \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi)f(\xi)$ jsou funkce spojité (resp. spojitě dodefinovatelné) na kompaktních trojúhelnících $\overline{\Delta_1} = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x \in [a,b], y \in [a,x]\big\}$ a $\overline{\Delta_2} = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x \in [a,b], y \in [x,b]\big\}$ podle předpokladu (i) z definice Greenovy funkce. Díky tomu můžeme použít větu 2.3 k derivaci funkce y. Potom

$$\begin{aligned}
y'(x) = G(x,x-)f(x) + \int_a^x \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\
- G(x,x+)f(x) + \int_x^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\
= \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi + f(x)\big[G(x,x-) - G(x,x+)\big]
\end{aligned}$$

V případě, že $n = 1$, je člen v hranaté závorce roven $\frac{1}{p_1(x)}$ díky předpokladům (i) a (ii) z definice Greenovy funkce. V případě, že $n \geq 2$ je ze stejného důvodu člen v hranaté závorce roven nule a s derivováním můžeme obdobně pokračovat. Pro $k = 1, \ldots, n-1$ potom dostáváme

$$y^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,\xi)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi$$

a pro n-tou derivaci y platí

$$\begin{aligned}
y^{(n)}(x) &= \int_a^b \frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x,\xi)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi + f(x)\left[\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^n}(x,x-) - \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^n}(x,x+)\right] \\
&= \int_a^b \frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x,\xi)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi + \frac{f(x)}{p_n(x)}.
\end{aligned}$$

Po dosazení do l potom dostáváme

$$\begin{aligned}
l(y)(x) &= p_n(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi + \ldots + p_0(x)\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\
&= \int_a^b \underbrace{l\big(G(x,\xi)\big)}_{0 \text{ s.v.}} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi + p_n(x)\frac{f(x)}{p_n(x)} = f(x).
\end{aligned}$$

Zbývá ověřit, že y splňuje okrajové podmínky. Volme $j \in \{1,\ldots,n\}$. Dosazením zjistíme, že platí

$$\begin{aligned}
\Phi_j(y) &= \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\int_a^b G(a,\xi)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi + \beta_{jk}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\int_a^b G(b,\xi)f(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\
&= \int_a^b f(\xi)\left[\sum_{k=1}^n \alpha_{jk}\frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^{k-1}}(a,\xi) + \beta_{jk}\frac{\partial^{k-1} G}{\partial x^{k-1}}(b,\xi)\right]\ \mathrm{d}\xi \\
&= \int_a^b f(\xi)\Phi_j\big(G(\cdot,\xi)\big)\mathrm{d}\xi = 0,
\end{aligned}$$

což jsme chtěli. □

2.2 Existence Greenovy funkce

Z předchozí části plyne, že Greenova funkce má prakticky využitelné vlastnosti. Není však vůbec zřejmé, zda vůbec existuje. Pokud ano, tak jak lze takovou funkci pro zadaný operátor a okrajové podmínky nalézt. V případě, že bychom ji měli, má smysl zabývat se otázkou, zda takových funkcí není více.

Právě problémem existence a jednoznačnosti Greenovy funkce se budeme zabývat v této podkapitole.

Označme $H = \{y \in \mathcal{C}^n([a,b]), \Phi_j(y) = 0, j = 1,\dots,n\}$ množinu funkcí splňujících okrajové podmínky. Zřejmě platí, že H je lineární podprostor prostoru $\mathcal{C}^n([a,b])$.

Definujeme-li operátor L jako restrikci l na H, potom se úloha s homogenními okrajovými podmínkami redukuje na operátorový problém

$$Ly = f. \tag{2.4}$$

Nechť L je prosté zobrazení. Kdyby Greenova funkce existovala, znamenalo by to díky větě 2.2, že L je i zobrazení na $\mathcal{C}([a,b])$ a tedy bychom měli zaručenu existenci inverzního operátoru L^{-1} definovaného na celém $\mathcal{C}([a,b])$. Operátor L^{-1} by navíc byl zřejmým způsobem reprezentován právě Greenovou funkcí, která by pak nutně (ne zcela triviálně) musela být jednoznačná. Tato úvaha je precizována větou 2.5, ke které se záhy dostaneme.

Než tomu tak bude, uvažme fundamentální systém $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ rovnice $l(y) = 0$. Ten existuje a každé y_k je definováno na celém intervalu (a,b) [1, str. 193]. Definujme matici

$$\mathrm{M} = \left(\Phi_j(y_k)\right)_{j,k=1}^n = \begin{pmatrix} \Phi_1(y_1) & \Phi_1(y_2) & \dots & \Phi_1(y_n) \\ \Phi_2(y_1) & \Phi_2(y_2) & \dots & \Phi_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_n(y_1) & \Phi_n(y_2) & \dots & \Phi_n(y_n) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

a obdobně matice

$$\mathrm{M}^a = \left(\Phi_j^a(y_k)\right)_{j,k=1}^n, \qquad \mathrm{M}^b = \left(\Phi_j^b(y_k)\right)_{j,k=1}^n, \tag{2.6}$$

kde

$$\Phi_j^a(y) = \sum_{l=1}^n \left[\alpha_{jk} y^{(k-1)}(a)\right], \qquad \Phi_j^b(y) = \sum_{l=1}^n \left[\beta_{jk} y^{(k-1)}(b)\right], \tag{2.7}$$

jsou „části“ funkcionálů Φ_j, působící vždy na jedné ze stran daného intervalu. Zřejmě platí

$$\Phi_j = \Phi_j^a + \Phi_j^b, \quad j = 1,\dots,n. \tag{2.8}$$

Výše uvedené matice nejsou zřejmě definovány jednoznačně – záleží na volbě fundamentálního systému.

Uvědomme si však, že jsou definovány korektně, máme-li pevně zvolený fundamentální systém. Tento fakt plyne ze spojitosti funkcí $p_1, \dots, p_n$ na *uzavřeném* intervalu $[a, b]$, díky čemuž můžeme tyto funkce spojitě rozšířit na otevřený interval $(a - \delta, b + \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. Každé řešení rovnice $l(y) = 0$ je pak možné prodloužit na celý tento interval [1, str. 193]. Proto jsou všechny hodnoty matice M (resp. $\mathrm{M}^a, \mathrm{M}^b$) nutně konečná reálná čísla.

Následující lemma dává do kontextu matici M a úvahu ze začátku této podkapitoly.

Lemma 2.4. *Nechť $l, L, \mathrm{M}, \Phi_j, j = 1, \dots, n$ jsou jako v předchozím textu. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) matice M je regulární pro každý fundamentální systém rovnice $l(y) = 0$,

(ii) úloha $l(y) = 0, \Phi_j(y) = 0, j = 1, \dots, n$ má pouze triviální řešení,

(iii) $\ker L = \{0\}$, tj. operátor L je prostý,

(iv) $0 \notin \sigma_p(L)$, kde $\sigma_p(L)$ značí bodové spektrum operátoru L.

Důkaz. (ii) $\Rightarrow$ (i) Nechť $\{y_1, \dots, y_n\}$ je fundamentální systém rovnice. Podle předpokladu neexistuje $0 \neq y$ splňující homogenní okrajové podmínky takové, že $l(y) = 0$. Neboli – když zvolíme libovolné $0 \neq \vec{\gamma} = \big(\gamma_1, \dots, \gamma_n\big)^T \in \mathbb{R}^n$ a definujeme funkci

$$y = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k,$$

tak existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $\Phi_j(y) \neq 0$. Dále díky linearitě funkcionálu Φ_j můžeme psát

$$0 \neq \Phi_j(y) = \Phi_j\left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Phi_j(y_k).$$

A odtud dostáváme

$$\mathrm{M}\vec{\gamma} \neq 0,$$

pro každé nenulové $\vec{\gamma}$. Tedy matice M je nutně regulární.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Nechť y řeší $l(y) = 0, \Phi_j(y) = 0, j = 1, \dots, n$ a $\{y_1, \dots, y_n\}$ je nějaký fundamentální systém $l(y) = 0$. Funkci y potom můžeme zapsat ve tvaru

$$y = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k,$$

kde, $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Máme tedy

$$0 = \Phi_j(y) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Phi_j(y_k),$$

neboli

$$\mathrm{M}\vec{\gamma} = 0.$$

Podle předpokladu je ale M regulární a tedy $\vec{\gamma} = 0$.
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii), (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) Zřejmé. $\square$

Věta 2.5 (Existence a jednoznačnost Greenovy funkce)**.** *Nechť* $l, \Phi_j, j = 1, \dots, n,$ L *jsou jako v předchozím textu a platí* $\ker L = \{0\}$. *Potom existuje právě jedna Greenova funkce příslušná operátoru* l *a homogenním okrajovým podmínkám* $\Phi_j, j = 1, \dots, n$.

Důkaz. Nechť $\{y_1, \dots, y_n\}$ je fundamentální systém rovnice $l(y) = 0$. Definujme funkci

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n u_k(\xi) y_k(x), & x < \xi, \\ \sum_{k=1}^n v_k(\xi) y_k(x), & x > \xi, \end{cases} \tag{2.9}$$

pro nějaká $u_k(\xi), v_k(\xi), k = 1, \dots, n$, která dopočítáme později. Takto definovaná funkce zřejmě splňuje požadavek (iii) z definice 2.1.

Pro splnění požadavku (ii) musí platit pro každé $\xi \in (a,b)$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\xi^+} \sum_{k=1}^n v_k(\xi) y_k^{(q)}(x) - \lim_{x\to\xi^-} \sum_{k=1}^n u_k(\xi) y_k^{(q)}(x) = \\ &\quad = \sum_{k=1}^n \big[v_k(\xi) - u_k(\xi)\big] y_k^{(q)}(\xi) = \begin{cases} 0, & q = 0, 1, \dots, n-2, \\ \frac{1}{p_n(\xi)}, & q = n-1, \end{cases} \end{aligned} \tag{2.10}$$

kde jsme využili toho, že y_k mají spojité derivace až do řádu n.

Označme $w_k(\xi) = v_k(\xi) - u_k(\xi)$. Potom (2.10) můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\mathrm{W}(\xi)\vec{w}(\xi) = \begin{pmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & \dots & y_n(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & \dots & y_n'(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(\xi) & y_2^{(n-1)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-1)}(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(\xi) \\ w_2(\xi) \\ \vdots \\ w_n(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{p_n(\xi)} \end{pmatrix}.$$

Matice W je Wronského maticí funkcí $y_1, \dots, y_n$ a díky jejich lineární nezávislosti platí, že $\det \mathrm{W}(\xi) \neq 0$ pro každé $\xi \in (a,b)$ [1, str. 194]. Díky tomu je vektor $\vec{w}(\xi) = \big(w_1(\xi), \dots, w_n(\xi)\big)^T$ určen jednoznačně pro každé ξ.

Dále z podmínky (iv), musí pro každé $j = 1, \dots, n$ a každé $\xi \in (a,b)$ platit

$$0 = \Phi_j\big(G(\cdot,\xi)\big) = \sum_{k=1}^n \big[u_k(\xi)\Phi_j^a(y_k) + v_k(\xi)\Phi_j^b(y_k)\big],$$

což můžeme přepsat do tvaru

$$0 = \mathrm{M}^a\vec{u}(\xi) + \mathrm{M}^b\vec{v}(\xi), \tag{2.11}$$

kde $\vec{u}(\xi) = \big(u_1(\xi), \dots, u_n(\xi)\big)^T, \vec{v}(\xi) = \big(v_1(\xi), \dots, v_n(\xi)\big)^T$.
Dále počítejme

$$0 = \mathrm{M}^a\big(\vec{v}(\xi) - \vec{w}(\xi)\big) + \mathrm{M}^b\vec{v}(\xi) = -\mathrm{M}^a\vec{w}(\xi) + \mathrm{M}\vec{v}(\xi), \text{ resp.} \tag{2.12}$$

$$0 = \mathrm{M}^a\vec{u}(\xi) + \mathrm{M}\big(\vec{u}(\xi) + \vec{v}(\xi)\big) = \mathrm{M}^b\vec{w}(\xi) + \mathrm{M}\vec{u}(\xi). \tag{2.13}$$

Podle lemmatu 2.4 máme, že matice M je regulární a tedy dostáváme jednoznačně určené

$$\vec{v}(\xi) = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{M}^a\vec{w}(\xi), \text{ resp.} \tag{2.14}$$

$$\vec{u}(\xi) = -\mathrm{M}^{-1}\mathrm{M}^b\vec{w}(\xi). \tag{2.15}$$

Odtud také plyne, že funkce $\vec{u}, \vec{v}$ jsou spojité na intervalu (a, b). Je tomu tak, protože

$$\vec{w}(\xi) = \mathrm{W}^{-1}(\xi)\big(0, \dots, 0, p_n^{-1}(\xi)\big)^T, \tag{2.16}$$

přičemž matice W sestává z funkcí spojitých na intervalu (a, b), inverze matice je spojitá a p_n^{-1} je rovněž spojitá na (a, b), díky nenulovosti a spojitosti p_n.

Pro dokončení konstrukce a tím i důkazu existence Greenovy funkce zbývá ověřit, že výsledná funkce splňuje podmínku (i). Zde použijeme stejný argument jako když jsme si uvědomovali korektnost matic M na straně 13. Díky tomu existují limity

$$\lim_{\xi \to a^+} \mathrm{W}(\xi), \quad \text{resp.} \lim_{\xi \to b^-} \mathrm{W}(\xi),$$

a tedy i limity

$$\lim_{\xi \to a^+} \vec{u}(\xi), \quad \text{resp.} \lim_{\xi \to b^-} \vec{v}(\xi).$$

Pro důkaz jednoznačnosti předpokládejme, že G_1 a G_2 jsou Greenovy funkce příslušné dané úloze. Volme $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Potom podle věty 2.2 dostáváme, že funkce

$$y_1(x) = \int_a^b G_1(x, \xi) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \quad x \in [a, b] \tag{2.17}$$

$$y_2(x) = \int_a^b G_2(x, \xi) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \quad x \in [a, b] \tag{2.18}$$

řeší úlohu $L(y) = f$. Pro jejich rozdíl $z = y_1 - y_2$ platí

$$L(z) = L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = f - f = 0. \tag{2.19}$$

Z bodu (ii) lemmatu 2.4 tak dostáváme, že z je nutně nulová funkce, tedy

$$0 = y_1(x) - y_2(x) = \int_a^b \Big[G_1(x, \xi) - G_2(x, \xi)\Big] f(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \quad x \in [a, b]. \tag{2.20}$$

Rovnost výše platí pro libovolnou spojitou funkci f. Není těžké si rozmyslet, že člen v hranaté závorce je proto nutně roven nule skoro všude. Nicméně G_1, G_2 jsou spojité na svých definičních oborech a tedy na nich platí $G_1 = G_2$.

□

Poznámka 2.6. Uvědomme si, že v předchozím důkazu jsme podmínku (i) pouze ověřili pro již zkonstruovanou funkci. Ke konstrukci jsme ji tedy přímo nepotřebovali. Z tohoto důvodu by bylo možné tento bod v definici zjednodušit a psát pouze

(i)* Definiční obor Greenovy funkce je $[a, b]^2$ pro $n \geq 2$ a $\Delta_1 \cup \Delta_2$ pro $n = 1$,

čímž by se nám ale zkomplikoval důkaz věty 2.2, poněvadž v něm počítáme limitu z jiného směru, než je v bodě (ii) definováno a bylo by třeba ukázat, že tyto limity jsou shodné.

Poznámka 2.7. Ukažme nezávislost na volbě fundamentálního systému. Nechť $\vec{y}_1 = (y_1, \dots, y_n)^T$ a $\tilde{\vec{y}} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)^T$ jsou fundamentální systémy. Zřejmě můžeme psát $\tilde{y}_k = \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} y_j$, $k = 1, \dots, n$, neboli

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Označme matici výše jako Γ. Ta je nutně regulární, jinak by množina funkcí $\{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n\}$ byla lineárně závislá, tudíž by to nebyla báze prostoru řešení. Je snadné si rozmyslet, že

$$\tilde{\mathrm{M}} = \mathrm{M}\Gamma^T, \quad \tilde{\mathrm{M}}^a = \mathrm{M}^a\Gamma^T, \quad \tilde{\mathrm{M}}^b = \mathrm{M}^b\Gamma^T, \quad \tilde{\mathrm{W}} = \mathrm{W}\Gamma^T.$$

Z předcházejícího důkazu dostáváme

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{u}}(\xi) &= -\tilde{\mathrm{M}}^{-1}\tilde{\mathrm{M}}^b\tilde{\vec{w}}(\xi) = -\Gamma^{-T}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{M}^b\mathrm{W}^{-1}(\xi)\vec{p}(\xi), \text{ resp.} \\ \tilde{\vec{v}}(\xi) &= \tilde{\mathrm{M}}^{-1}\tilde{\mathrm{M}}^a\tilde{\vec{w}}(\xi) = \Gamma^{-T}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{M}^a\mathrm{W}^{-1}(\xi)\vec{p}(\xi), \end{aligned}$$

kde $\vec{p}(\xi) = \big(0, \dots, 0, p_n^{-1}(\xi)\big)^T$.

Dostáváme tedy

$$\tilde{G}(x,\xi) = \begin{Bmatrix} \sum_{j,k=1}^n \tilde{u}_k(\xi)\gamma_{kj}y_j(x) = \vec{y}.\Gamma^T\tilde{\vec{u}} = \vec{y}.\vec{u}, & x < \xi \\ \sum_{j,k=1}^n \tilde{v}_k(\xi)\gamma_{kj}y_j(x) = \vec{y}.\Gamma^T\tilde{\vec{v}} = \vec{y}.\vec{v}, & x > \xi \end{Bmatrix} = G(x,\xi),$$

kde operace „.“ značí formální skalární součin.

Poznámka 2.8. Rozmysleme si ještě, co by nastalo v případě, kdybychom v předchozí větě uvažovali netriviální jádro. Celý důkaz bychom mohli sledovat až k rovnostem (2.12) a (2.13). Matice M by zde však nebyla invertovatelná. Nicméně to ještě nevylučuje existenci funkcí $\vec{u}$, $\vec{v}$ takových, že tuto rovnost splňují. V některých případech by se nám mohlo povést takové funkce nalézt a tím dostat Greenovu funkci. Ta by však nebyla jednoznačná. A samozřejmě by tím pádem nebylo jednoznačné ani řešení — vždy bychom k němu mohli přičíst nějaký prvek jádra.

3. Úloha s nehomogenními okrajovými podmínkami

3.1 Existence řešení

V této části využijeme linearity diferenciálního operátoru a okrajových podmínek a úlohu (1.3) s okrajovými podmínkami (1.5) rozdělíme na dvě podúlohy, a to na

(a) nehomogenní rovnici s homogenní okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} l(y) &= f, \\ \Phi_j(y) &= 0, \quad j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

(b) homogenní rovnici s nehomogenními okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} l(y) &= 0, \\ \Phi_j(y) &= \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Podaří-li se nám najít řešení y_{a} úlohy (a) a řešení y_{b} úlohy (b), tak potom pro jejich součet dostaneme

$$\begin{aligned} &l(y_{\mathrm{a}} + y_{\mathrm{b}}) = l(y_{\mathrm{a}}) + l(y_{\mathrm{b}}) = 0 + f = f, \\ &\Phi_j(y_{\mathrm{a}} + y_{\mathrm{b}}) = \Phi_j(y_{\mathrm{a}}) + \Phi_j(y_{\mathrm{b}}) = 0 + \varphi_j = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Úloze (a) jsme se věnovali v předchozí kapitole, zbývá se tedy podrobněji podívat na problém (b).

Víme, že všechna řešení rovnice $l(y) = 0$ tvoří n-dimenzionální lineární podprostor prostoru $\mathcal{C}^n([a, b])$. Nechť tedy $\{y_1, \ldots, y_n\}$ je fundamentální systém. Obecné řešení rovnice pak můžeme psát jako lineární kombinaci prvků fundamentálního systému, tedy ve tvaru

$$y = \sum_{l=1}^{n} \psi_l y_l, \tag{3.1}$$

kde $(\psi_1, ..., \psi_n) \in \mathbb{R}^n$. Dosazením funkce y do okrajových podmínek dostaneme

$$\begin{aligned} \Phi_j(y) &= \sum_{k=1}^{n} \left[\alpha_{jk} \left(\sum_{l=1}^{n} \psi_l y_l \right)^{(k-1)} (a) + \beta_{jk} \left(\sum_{l=1}^{n} \psi_l y_l \right)^{(k-1)} (b) \right] \\ &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\alpha_{jk} y_l^{(k-1)}(a) + \beta_{jk} y_l^{(k-1)}(b) \right] \psi_l = \varphi_j, \end{aligned}$$

neboli – zapsáno maticově –

$$\vec{\Phi}(y) = \big(\mathrm{AW}(a) + \mathrm{BW}(b)\big)\vec{\psi} = \vec{\varphi}, \tag{3.2}$$

kde

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

a matice $\mathrm{W}(a), \mathrm{W}(b) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou Wronského maticemi v bodech a a b, čímž myslíme limity

$$\mathrm{W}(a) = \lim_{x \to a^+} W(x), \qquad \mathrm{W}(b) = \lim_{x \to b^-} W(x),$$

které, jak jsme si ujasnili na konci důkazu věty 2.5, existují. Rovnici (3.2) zřejmě můžeme přepsat do tvaru

$$\vec{\Phi}(y) = (\mathrm{M}^a + \mathrm{M}^b)\vec{\psi} = \mathrm{M}\vec{\psi} = \vec{\varphi}. \tag{3.3}$$

Následující věta shrnuje na základě předcházejících úvah tvar řešení pro úlohu s nehomogenními okrajovými podmínkami.

Věta 3.1 (Řesení úlohy s nehomogenními okrajovými podmínkami)**.** *Nechť l, $\Phi_j, j = 1, \dots, n$ jsou jako v předchozím. Dále buď $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ fundamentální systém rovnice $l(y) = 0$. Nechť matice* M *z předpisu* (2.5) *je regulární. Potom pro každé $f \in \mathcal{C}([a, b])$ a každé $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jedno řešení úlohy*

$$\begin{aligned} l(y) &= f \\ \Phi_j(y) &= \varphi_j, \; j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

a to je tvaru

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) \, \mathrm{d}\xi + \sum_{k=1}^n \psi_k y_k(x), \tag{3.4}$$

kde $\vec{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T = \mathrm{M}^{-1}\vec{\varphi}$.

Důkaz. Plyne z lemmatu 2.4, vět 2.2, 2.5 a předchozího pozorování. □

Příklad 3.2. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{C}([0, \frac{\pi}{2}])$. Uvažujme diferenciální rovnici a okrajové podmínky

$$y''(x) + y(x) = f(x), \tag{3.5}$$

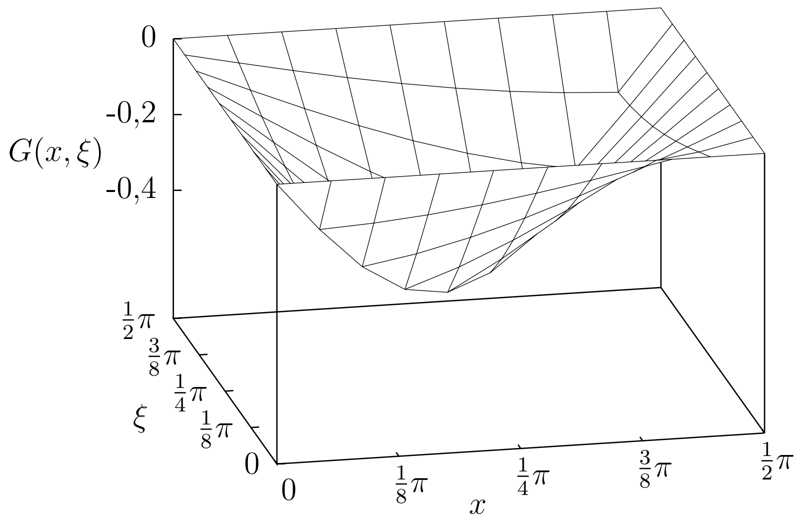
$$\Phi_1(y) = y(0) = a, \tag{3.6}$$

$$\Phi_2(y) = y(\tfrac{\pi}{2}) = b \tag{3.7}$$

a řešme tento problém metodou Greenovy funkce.

Snadno zjistíme, že kořeny charakteristického polynomu rovnice $y'' + y = 0$ jsou $\pm i$ a tedy fundamentální systém tvoří například funkce $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$. Wronského matice funkcí fundamentálního systému tedy je

$$\mathrm{W}(\xi) = \begin{pmatrix} \cos \xi & \sin \xi \\ -\sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$



Obrázek 3.1: Greenova funkce

Zřejmě dále platí $\Phi_1 = \Phi_1^a, \Phi_2 = \Phi_2^b$, a tedy máme

$$\mathrm{M}^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Matice M je regulární. Z věty 3.1 proto plyne existence právě jednoho řešení pro tuto úlohu.

Podle vzorců (2.14), (2.15) a (2.16) z důkazu věty 2.5 máme

$$\vec{u}(\xi) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\xi & -\sin\xi \\ \sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\xi \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

$$\vec{v}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\xi & -\sin\xi \\ \sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\xi \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

a Greenova funkce má tedy podle vzorce (2.9) tvar

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\sin x \cos\xi, & x \le \xi, \\ -\cos x \sin\xi, & x \ge \xi. \end{cases} \tag{3.12}$$

Po dosazení do (2.1) dostáváme řešení úlohy[1] (a) ve tvaru

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{a}}(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,\xi) f_t(\xi)\ \mathrm{d}\xi \\ &= -\cos x \int_0^x f(\xi)\sin\xi \mathrm{d}\xi - \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(\xi)\cos\xi \mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{3.13}$$

[1] S využitím označení podúloh ze začátku této kapitoly.

Pro vyřešení úlohy (b) s nehomogenními okrajovými podmínkami pak stačí spočítat

$$\vec{\psi} = \mathrm{M}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Máme tedy

$$y_{\mathrm{b}}(x) = a \cos x + b \sin x. \tag{3.14}$$

Celkovým řešením úlohy (3.5) - (3.7) je součet funkcí y_{a} a y_{b}, tedy funkce

$$y(x) = \cos x \left(a - \int_0^x f(\xi) \sin \xi \mathrm{d}\xi \right) + \sin x \left(b - \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(\xi) \cos \xi \mathrm{d}\xi \right). \tag{3.15}$$

Příklad 3.3. Nechť $t \in \mathbb{R}$. Uvažujme úlohu

$$y''(x) + y(x) = tx, \tag{3.16}$$
$$\Phi_1(y) = y(0) = 1, \tag{3.17}$$
$$\Phi_2(y) = y(\tfrac{\pi}{2}) = 1. \tag{3.18}$$

Podle předchozího příkladu má tato úloha jednoznačné řešení, které je definováno výrazem (3.15). Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} y_t(x) &= \cos x \left(1 - t \int_0^x \xi \sin \xi \ \mathrm{d}\xi \right) + \sin x \left(1 - t \int_x^{\frac{\pi}{2}} \xi \cos \xi \ \mathrm{d}\xi \right) \\ &= \cos x + \sin x + tx - \tfrac{\pi}{2} t \sin x. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Na obrázku 3.2 jsou znázorněna řešení pro vybrané hodnoty parametru t.

Příklad 3.4. Nechť $f \in C([0, \pi])$ a úloha je zadaná jako (3.5) - (3.7), s rozdílem, že Φ_2 působí v bodě π, tj. $\Phi_2(y) = y(\pi)$. Tím se nám změní matice $\mathrm{M}, \mathrm{M}^a, \mathrm{M}^b$. Máme tak

$$\mathrm{M}^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Matice M zde *není* regulární. Proto v případě, že řešení úlohy existuje, není jednoznačné. Mohli bychom k němu přičíst libovolný násobek funkce $\sin x$, která řeší homogenní rovnici a zároveň splňuje homogenní okrajové podmínky.

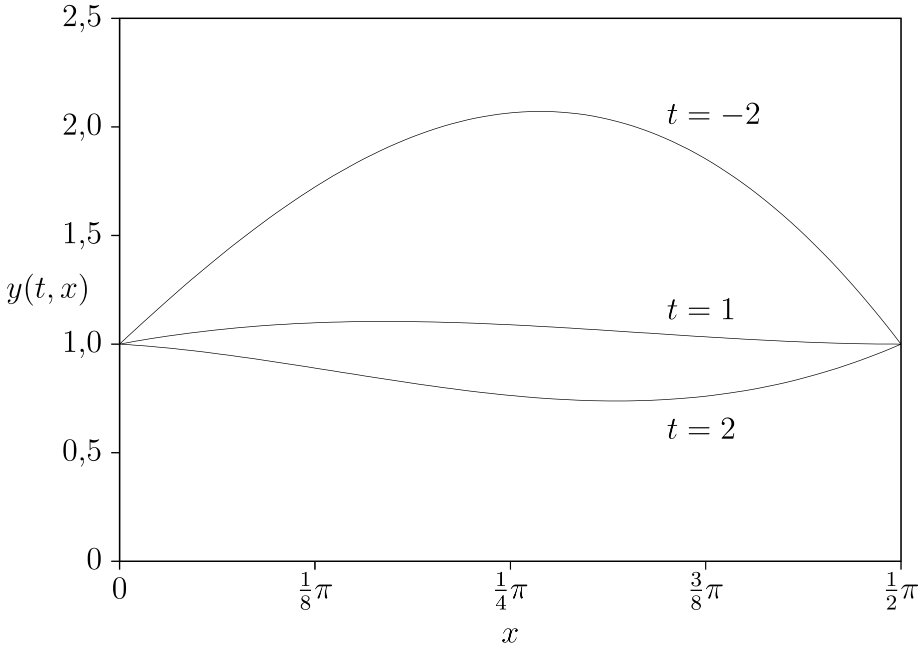
Ve smyslu poznámky 2.8 řešme rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\xi) \\ u_2(\xi) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

Ta však snadnou úpravou vede na rovnost

$$0 = u_1(\xi) = \sin \xi, \quad \xi \in [0, \pi], \tag{3.22}$$

která ale zřejmě není splněna. Proto se nám takto Greenovu funkci spočítat nepodaří.



Obrázek 3.2: Řešení úlohy (3.16) - (3.18) pro vybrané hodnoty parametru t.

Dále, vezměme například $f(x) = e^x$. Obecné řešení rovnice (3.5) na intervalu $(0, \pi)$ s touto pravou stranou má tvar

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + A\cos x + B\sin x, \tag{3.23}$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$. Dosazením do okrajových podmínek dostáváme

$$\Phi_1(y) = \frac{1}{2} + A, \tag{3.24}$$

$$\Phi_2(y) = \frac{1}{2}e^\pi - A. \tag{3.25}$$

Tyto výrazy ovšem nemohou být současně rovny nule. Odtud plyne, že Greenova funkce pro tuto úlohu neexistuje, jelikož bychom dostali spor s větou 2.2.

3.2 Spojitá závislost řešení na datech

Daty úlohy budeme rozumět funkci $f \in \mathcal{C}([a,b])$ a vektor $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)^T \in \mathbb{R}^n$. To znamená, že zadání, tj. operátor l a funkcionály $\Phi_j, j = 1, \ldots, n$, budeme uvažovat pevné.

Definujme množinu $B = \mathcal{C}([a,b]) \times \mathbb{R}^n$. B je zřejmě lineárním prostorem, na kterém zavedeme normu

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|_B : & B & \to & \mathbb{R} \\ & (f, \vec{\varphi}) & \mapsto & \max\left\{\|f\|_{\sup}, \|\vec{\varphi}\|_{\max}\right\}. \end{array} \tag{3.26}$$

Je snadné ověřit, že $\|\cdot\|_B$ je skutečně norma. Spojitá závislost na datech je pak důsledkem věty 3.1.

Skutečně, jsou-li $(f_1, \vec{\varphi}_1), (f_2, \vec{\varphi}_2) \in B$ dvě sady dat a z_1, z_2 odpovídající řešení, pak

$$\begin{aligned}
\|z_1 - z_2\|_{\sup} &= \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^b G(x,\xi) f_1(\xi)\ \mathrm{d}\xi + \sum_{k=1}^n \psi_{1,k} y_k(x) \right. \\
&\qquad \left. - \int_a^b G(x,\xi) f_2(\xi)\ \mathrm{d}\xi - \sum_{k=1}^n \psi_{2,k} y_k(x) \right| \\
&\le \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^b G(x,\xi) \big[f_1(\xi) - f_2(\xi) \big]\ \mathrm{d}\xi \right| \\
&\qquad + \sup_{x\in[a,b]} \left| \sum_{k=1}^n \big[\psi_{1,k} - \psi_{2,k} \big] y_k(x) \right| \\
&\le K_1 \big\| f_1 - f_2 \big\|_{\sup} + K_2 \big\| \vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_2 \big\|_{\max} \\
&\le (K_1 + K_2) \, \big\| (f_1, \vec{\varphi}_1) - (f_2, \vec{\varphi}_2) \big\|_B,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

kde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ jsou kladné konstanty takové, že

$$\begin{aligned}
K_1 &\ge \big\| G \big\|_{\sup} |b - a|, \\
K_2 &\ge n \max_{k\le n} \big\| y_k \big\|_{\sup} \big\| \mathrm{M}^{-1} \big\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Závěr

Na předcházejících stránkách jsme demonstrovali využití Greenových funkcí při řešení jistého typu okrajových úloh pro obyčejné lineární diferenciální rovnice. Při tom jsme, mimo jiné, dokázali, za relativně slabých předpokladů, existenci a jednoznačnost řešení pro tyto úlohy. Nicméně v prezentovaném postupu je skryta jistá nemalá nepříjemnost.

Vzpomeňme si například na důkaz věty 2.5. Ten nám v podstatě dává přímý návod, jak pro zadaný problém „vyrobit“ Greenovu funkci. Hned v prvním kroku ale uvažujeme *fundamentální systém* rovnice $l(y) = 0$, o kterém ale víme pouze to, že existuje. Obecně však pro $n \geq 2$ neexistuje algoritmus, kterým bychom fundamentální systém dokázali nalézt. Výjimku tvoří například případ, kdy funkce $p_1, \ldots, p_n$ jsou konstantní na zadaném intervalu. V tomto případě algoritmus pro nalezení fundamentálního systému máme, nicméně ani tady se to neobejde bez komplikací — je potřeba spočítat kořeny charakteristického polynomu homogenní diferenciální rovnice $l(y) = 0$, což je ovšem obecně pro rovnice vyšších řádů problematické.

Tímto nedostatkem použitelnost metody značně klesá. Na druhou stranu v případě, že k dané homogenní rovnici fundamentální systém máme a pravá strana je „rozumná“, dostáváme do ruk elegantní, přímočarý nástroj pro řešení okrajových úloh. Zejména tehdy, potřebujeme-li řešení spočítat pro více pravých stran, což rozhodně není neobvyklé.

Literatura

[1] ARNOL'D, Vladimir Igorevič: *Ordinary differential equations.* Cambridge: MIT Press, 1973, ISBN 0-262-01037-2.

[2] CHALLIS, Lawrie; SHEARD, Fred: Green of Green Functions. 2003, URL `http://caos.fs.usb.ve/~srojas/Teaching/USB/Grad/EandM_I/Green_PhysToday1203.pdf`.

[3] ČÍHÁK, Pavel a kol.: *Matematická analýza pro fyziky (V).* 2. vydání, Praha: Matfyzpress, 2003, ISBN 80-86732-12-6.

[4] KAPLAN, Wilfred: *Advanced Calculus.* 5. vydání, Boston: Addison-Wesley, 2003, ISBN 0-321-18968-x.

[5] OLVER, Peter J.: Math 5588 Lecture Notes. 2012, URL `http://www.math.umn.edu/~olver/pdn.html`.

[6] RUDIN, Walter: *Real and complex analysis.* 3. vydání, New York: McGraw-Hill, 1987, ISBN 0-07-100276-6.

[7] STEWART, James: *Calculus Early Transcendentals.* 6. vydání, Thomson Learning, Inc., 2008, ISBN 0-495-01166-5.