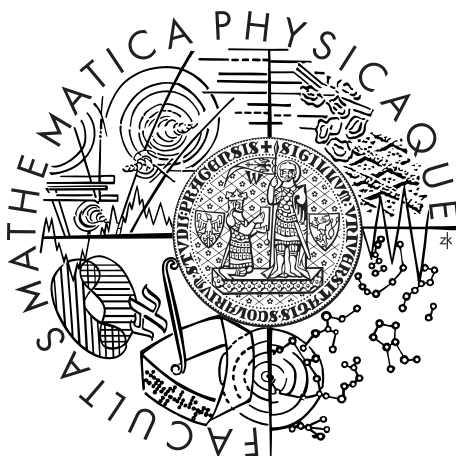


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jan Luber

## Sudé triangulace a komutativní grupy

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Aleš Drápal, CSc., DSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2012

Děkuji mnohokrát panu profesorovi Alešovi Drápalovi za trpělivé vysvětlování, objasnění spousty věcí tolik cenných pro vypracování této práce a také za milý, vstřícný a přátelský přístup ke mě. Rád bych také poděkoval bratrovi Tomášovi a svým spolužákům za inspirativní myšlenky, především pak těm, kteří se účastnili semináře věnovaném latinským záměnám. Děkuji své rodině a kamarádům.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Sudé triangulace a komutativní grupy

Autor: Jan Luber

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Aleš Drápal, CSc., DSc.

Abstrakt: Tato práce se zabývá latinskými záměnami a z nich zkonstruovanými triangulacemi. Nejprve uvádíme potřebné definice, vlastnosti latinských záměn, podrobnou konstrukci triangulace a především pak možnosti vnoření latinských záměn do abelovských grup. Tyto grupy jsou určeny definujícími relacemi zadanými na vrcholech triangulace. Poté se věnujeme jednomu typu 3-homogenních latinských záměn, které odpovídají toroidálním triangulacím, jejichž každý vrchol je stupně šest. Pro grupy vyjádříme matici definujících relací a spočteme jim beztorzní hodnotu. V případě jednoduchých triangulací uvedeme explicitní popis grup a pomocí modulární aritmetiky získáme i pro složitější triangulace jejich částečný popis.

Klíčová slova: latinská záměna, eulerovská triangulace, abelovská grupa

Title: Even triangulations and commutative groups

Author: Jan Luber

Department: Department of Algebra

Supervisor: prof. RNDr. Aleš Drápal, CSc., DSc.

Abstract: This thesis takes interest in latin bitrades and triangulations constructed from them. Firstly, we introduce needed definitions, properties of the latin bitrades, detailed construction of the triangulation and mainly possibility of embedding latin bitrades into abelian groups. These groups are determined by the relations defined on vertices of the triangulation. Then we get concerned with a particular kind of 3-homogeneous latin bitrades which correspond to toroidal triangulation whose each vertex has degree six. For these groups we express relation matrix and complement to their torsion ranks. In case of simple triangulations we present explicit description of the groups and with modular arithmetic we get partial description even for more complex triangulations.

Keywords: latin bitrade, eulerian triangulation, abelian group

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Latinské záměny, triangulace a abelovské grupy</b>	<b>3</b>
1.1 Latinské záměny a jejich souvislost s triangulací . . . . .	3
1.2 Vnořování do abelovských grup . . . . .	10
1.3 Smithova normální forma . . . . .	14
<b>2 3-homogenní latinské záměny</b>	<b>16</b>
2.1 Triangulace toru stupně šest . . . . .	16
2.2 Definující relace grupy $\mathbf{G}(n, r, s)$ . . . . .	18
2.3 Beztorzní hodnota grupy $\mathbf{G}(n, r, s)$ . . . . .	20
<b>3 Příklady triangulací</b>	<b>23</b>
3.1 Jednoduché posloupnosti triangulací . . . . .	23
3.2 Modulární aritmetika . . . . .	28
<b>Závěr</b>	<b>31</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>32</b>
<b>4 Apendix</b>	<b>33</b>
4.1 $\mathbf{H}(3, r, s)$ . . . . .	33
4.2 $\mathbf{H}(6, r, s)$ . . . . .	33
4.3 $\mathbf{H}(9, r, s)$ . . . . .	35
4.4 Grupy maximálního torzního ranku . . . . .	36

# Úvod

Cílem práce je zkoumat souvislosti latinských záměn a abelovských grup v případě 3-homogenních latinských záměn. Latinskou záměnu  $T$  lze popsat jako dvojici parciálních latinských čtverců, řekněme  $T_1$  a  $T_2$ . Obecně je možné z každé latinské záměny  $T$  odvodit konečnou abelovskou grupu  $\mathbf{H}(T)$ , určenou definujícími relacemi, které vyjadřují strukturu jednoho z členů latinské záměny. Je-li  $\mathbf{H}(T)$  určena  $T_1$ , řekněme, že latinskou záměnu  $T$  lze vnořit do  $\mathbf{H}(T)$ , pokud  $T_1$  lze jako parciální latinský čtverec nalézt jako podtabulku v tabulce sčítání grupy  $\mathbf{H}(T)$ .

Původním přínosem této práce je výpočet  $\mathbf{H}(T)$  pro jeden typ 3-homogenních latinských záměn a odvození, že v tomto případě lze záměnu  $T$  do  $\mathbf{H}(T)$  vnořit.

Struktura práce je následující. V kapitole 1 je definována latinská záměna. Na tento pojem je pro čtenářovu lepší srozumitelnost nahlíženo také více možnými způsoby. Je ukázána konstrukce černobílé triangulace z latinské záměny. Definuje se zde dále 3-homogenní latinská záměna a je ukázáno, že je toroidální. V této kapitole je dále popsáno, jak vnořit latinskou záměnu do grupy  $\mathbf{H}(T)$  včetně názorného příkladu. Grupu  $\mathbf{H}(T)$  popisujeme konečnou prezentací, proto zmíníme užitečnou Smithovu normální formu.

V kapitole 2 pracujeme již výhradně s 3-homogenními latinskými záměnami. Z nich zkonstruujeme triangulaci toru, jejíž každý vrchol je stupně šest. Dále podrobně popíšeme a zjednodušíme definující relace grupy  $\mathbf{G}(T)$ , jejíž torzní část je právě grupa  $\mathbf{H}(T)$ . Nakonec kapitoly ukážeme, že beztorzní hodnota grupy  $\mathbf{G}(T)$  je dva.

Podrobný výpočet jednoho typu  $\mathbf{H}(T)$  je uveden v kapitole 3. Pro některé typy složitějších latinských záměn je pak pomocí výpočtu modulo jisté prvočíslo přímo odvozen fragment grupy  $\mathbf{H}(T)$ .

# 1. Latinské záměny, triangulace a abelovské grupy

## 1.1 Latinské záměny a jejich souvislost s triangulací

*Latinský čtverec* obvykle znamená čtvercovou tabulku  $n \times n$ , plně zaplněnou čísly  $1, \dots, n$  tak, že v každém řádku a v každém sloupci tabulky se každé číslo nachází právě jednou. Pro naše účely však bude vhodnější mírně obecnější představa latinského čtverce jako tabulky  $n \times n$ , plně zaplněné symboly  $\{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ , jejíž řádky jsou indexovány prvky množiny  $R = \{r_0, r_1, \dots, r_{n-1}\}$ , sloupce  $C = \{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\}$  a pro množinu symbolů  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$  platí, že každý symbol se vyskytne právě jednou v každém řádku a v každém sloupci.

Na latinský čtverec můžeme proto nahlížet jako na zobrazení  $l: R \times C \rightarrow S$ , pro které platí:

- $\forall s \in S \quad \forall r \in R \quad \exists! c \in C : l(r, c) = s,$
- $\forall s \in S \quad \forall c \in C \quad \exists! r \in R : l(r, c) = s.$

Alternativně lze latinský čtverec definovat také následujícím způsobem. Z formálních důvodů obě definice odlišíme, takže v druhém případě budeme místo o latinském čtverci mluvit o *latinském designu*:

**Definice 1.** *Latinský design  $L$  je množina trojic  $(a_1, a_2, a_3) \in A_1 \times A_2 \times A_3$ , kde pro libovolná přirozená  $i$  a  $j$ ,  $1 \leq i < j \leq 3$ , každá dvojice  $(b, c) \in A_i \times A_j$  určuje právě jednu trojici  $(a_1, a_2, a_3) \in L$  takovou, že  $a_i = b$  a  $a_j = c$ .*

Množiny  $A_1, A_2, A_3$  odpovídají po řadě množinám  $R, C, S$ .

V dalším budeme pracovat s ještě o něco obecnějším pojmem než je latinský čtverec. Bude se jednat o částečně zaplněnou neprázdnou tabulku s podobnou podmínkou jako u latinského čtverce: *Parciální latinský čtverec* je tabulka  $n \times m$  zaplněná, ne nutně plně, symboly z množiny  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_k\}$ , pro kterou platí, že všechny symboly  $s \in S$  se vyskytují nanejvýše jednou v každém řádku  $r \in R = \{r_0, r_1, \dots, r_{n-1}\}$  a v každém sloupci  $c \in C = \{c_0, c_1, \dots, c_{m-1}\}$ , všechny řádky a sloupce jsou neprázdné a každý symbol se vyskytne v tabulce aspoň jednou.

Na parciální latinský čtverec se můžeme dívat jako na částečné zobrazení  $p: R \times C \rightarrow S$ , jež má tyto vlastnosti:

- $\forall s \in S \quad \forall r \in R \quad \exists$  nanejvýše jedno  $c \in C : p(r, c) = s,$
- $\forall s \in S \quad \forall c \in C \quad \exists$  nanejvýše jedno  $r \in R : p(r, c) = s,$
- $\forall r \in R \quad \exists c \in C : p(r, c)$  je definováno,
- $\forall c \in C \quad \exists r \in R : p(r, c)$  je definováno,
- $\forall s \in S \quad \exists (r, c) \in R \times C : p(r, c) = s.$

Podobně jako u latinského designu definujeme *parciální latinský design* jakožto množinu trojic. Tuto definici budeme dále užívat:

**Definice 2.** *Parciální latinský design  $P$  je neprázdná množina trojic  $(a_1, a_2, a_3) \in A_1 \times A_2 \times A_3$ , kde pro libovolná přirozená  $i$  a  $j$ ,  $1 \leq i < j \leq 3$ , každá dvojice  $(b, c) \in A_i \times A_j$  určuje nanejvýše jednu trojici  $(a_1, a_2, a_3) \in P$  takovou, že  $a_i = b$  a  $a_j = c$ . Pro každé  $i \in \{1, 2, 3\}$  a každé  $b \in A_i$  existuje taková trojice  $(a_1, a_2, a_3) \in P$ , že  $b = a_i$ .*

Množiny  $A_1, A_2, A_3$  odpovídají po řadě množinám  $R, C, S$ .

**Příklad.** *Níže zobrazený parciální latinský čtverec  $3 \times 4$  odpovídá parciálnímu latinskému designu*

$$P = \{(r_0, c_0, s_0), (r_0, c_1, s_1), (r_0, c_2, s_2), (r_1, c_3, s_3), (r_2, c_0, s_1), (r_2, c_1, s_0)\}.$$

*Všimněme si, že parciální latinský čtverec  $P$  znázorněný tabulkou 1.1 nejde doplnit na latinský čtverec  $4 \times 4$ , protože pozici  $(r_0, c_3)$  nelze zaplnit žádným symbolem. Naopak ale libovolná podmnožina latinského čtverce je parciálním latinským čtvercem.*

	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
$r_0$	$s_0$	$s_1$	$s_2$	
$r_1$				$s_3$
$r_2$	$s_1$	$s_0$		

Tabulka 1.1: Příklad parciálního latinského čtverce  $3 \times 4$

*Latinskou záměnu můžeme v řeči tabulek definovat jako dvojici parciálních latinských čtverců  $T_1$  a  $T_2$ , které splňují:*

- Množina zaplněných políček  $T_1$  a  $T_2$  je stejná,
- pro každé políčko z  $T_1$  platí, že na odpovídajícím políčku v  $T_2$  je jiný symbol,
- každý řádek (resp. sloupec) parciálního latinského čtverce  $T_1$  obsahuje stejnou množinu symbolů jako jemu odpovídající řádek (resp. sloupec) v  $T_2$ .

Z formálních důvodů však bude pro naše účely vhodnější následující definice:

**Definice 3.** *Latinská záměna  $T = (T_1, T_2)$  je dvojice dvou neprázdných parciálních latinských designů  $T_1 \subset A_1 \times A_2 \times A_3$  a  $T_2 \subset A_1 \times A_2 \times A_3$ , jež mají tyto vlastnosti:*

- množiny  $T_1$  a  $T_2$  jsou disjunktní,
- pro libovolná přirozená  $i$  a  $j$ ,  $1 \leq i < j \leq 3$ , každá dvojice  $(b, c) \in A_i \times A_j$  určuje právě jednu trojici  $(a'_1, a'_2, a'_3) \in T_2$  takovou, že  $a'_i = b$  a  $a'_j = c$ ,
- pro libovolná přirozená  $i$  a  $j$ ,  $1 \leq i < j \leq 3$ , každá dvojice  $(b', c') \in A_i \times A_j$  určuje právě jednu trojici  $(a_1, a_2, a_3) \in T_1$  takovou, že  $a_i = b'$  a  $a_j = c'$ .

Množiny  $A_1, A_2, A_3$  odpovídají po řadě množinám  $R, C, S$ .



**Příklad.** Latinskou záměnu  $(T_1, T_2)$  vyjádřenou tabulkami 1.2 pomocí parciálních latinských designů popíšeme jako:

$$(T_1, T_2) = \left( \{(r_0, c_0, s_0), (r_0, c_1, s_1), (r_1, c_0, s_1), (r_1, c_1, s_2), (r_1, c_2, s_3), (r_1, c_3, s_2), (r_2, c_2, s_2), (r_2, c_3, s_3)\}, \{(r_0, c_0, s_1), (r_0, c_1, s_0), (r_1, c_0, s_0), (r_1, c_1, s_1), (r_1, c_2, s_2), (r_1, c_3, s_3), (r_2, c_2, s_3), (r_2, c_3, s_2)\} \right)$$

		$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
$r_0$		$s_0$	$s_1$		
$r_1$		$s_1$	$s_0$	$s_3$	$s_2$
$r_2$				$s_2$	$s_3$

		$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
$r_0$		$s_1$	$s_0$		
$r_1$		$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$
$r_2$				$s_3$	$s_2$

Tabulka 1.2: Příklad latinské záměny  $(T_1, T_2)$

Dále ještě definujeme latinské záměny určitých vlastností:

**Definice 4.** Řekneme, že latinská záměna  $(T_1, T_2)$  je nerozložitelná, jestliže neexistují dvě latinské záměny  $(U, U')$  a  $(V, V')$  takové, že  $U \cap V = \emptyset = U' \cap V'$ ,  $T_1 = U \cup V$  a  $T_2 = U' \cup V'$ .

**Definice 5.** Řekneme, že latinská záměna  $(T_1, T_2)$  je separovaná, jestliže pro každé  $i \in \{1, 2, 3\}$  a každé  $b \in A_i$  není možné množiny  $B = \{(a_1, a_2, a_3) \in T_1, a_i = b\}$  a  $B' = \{(a_1, a_2, a_3) \in T_2, a_i = b\}$  vyjádřit jako sjednocení neprázdných množin tak, že  $B = B_1 \cup B_2$ ,  $B' = B'_1 \cup B'_2$ ,  $B_1 \cap B_2 = \emptyset = B'_1 \cap B'_2$  a že pro množiny  $C_j$  a  $C'_j$ , které vzniknou pro  $j \in \{1, 2\}$  po řadě z  $B_j$  a  $B'_j$  tak, že se symbol  $b$  nahradí symbolem  $b_j$ , kde  $b_j \notin A_i$ ,  $b_1 \neq b_2$ , platí, že  $((T_1 \setminus B) \cup C_1 \cup C_2, (T_2 \setminus B') \cup C'_1 \cup C'_2)$  bude latinská záměna.

Pojem separovanosti osvětlíme v řeči tabulek. Latinskou záměnu  $(T_1, T_2)$  nazveme řádkově separovanou, pokud neexistuje latinská záměna  $(A_1, A_2)$ , která by obsahovala řádky  $r_1$  a  $r_2$ , jež nemají zaplněná žádná dvě políčka ve stejném sloupci, a jejichž spojením do jednoho řádku vznikne latinská záměna  $(T_1, T_2)$ . Podobně je to se separovaností sloupců a symbolů.  $(T_1, T_2)$  je pak separovaná, pokud je řádkově, sloupcově a symbolově separovaná.

**Příklad.** Latinská záměna  $(T_1, T_2)$  zobrazená tabulkami 1.3 není separovaná, protože řádek  $r_0$  se dá rozdělit na dva řádky. Latinská záměna  $(A_1, A_2)$ , vzniklá rozdělením řádku  $r_0$  na dva řádky, pak už je separovaná.

		$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$r_0$			$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$
$r_1$		$s_4$	$s_2$	$s_3$		
$r_2$		$s_3$	$s_4$	$s_2$	$s_0$	$s_1$

		$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$r_0$			$s_2$	$s_3$	$s_0$	$s_1$
$r_1$		$s_3$	$s_4$	$s_2$		
$r_2$		$s_4$	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$

Tabulka 1.3: Příklad latinské záměny  $(T_1, T_2)$ , která není separovaná

		$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$\Delta$			$s_0$		$s_2$	
$\blacktriangle$				$s_1$		$s_3$
$r_1$	$s_4$	$s_2$	$s_3$			
$r_2$	$s_3$	$s_4$	$s_2$	$s_0$	$s_1$	

		$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$\Delta$			$s_2$		$s_0$	
$\blacktriangle$				$s_3$		$s_1$
$r_1$	$s_3$	$s_4$	$s_2$			
$r_2$	$s_4$	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	

Tabulka 1.4: Příklad separované latinské záměny  $(A_1, A_2)$

**Definice 6.** Necht  $G$  je graf. Trojúhelníkem v grafu  $G$  budeme rozumět každou tříbodovou množinu jeho vrcholů  $\{x, y, z\}$  takovou, že  $\{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}$  jsou hrany grafu  $G$ .

**Definice 7.** Mějme souvislý graf  $G$  a mějme nějakou množinu jeho trojúhelníků  $T$ . Dvojici  $(T, G)$  nazveme kombinatorickou triangulovanou 2-varietou, jestliže jsou splněny tyto tři podmínky:

1. každá hrana grafu  $G$  leží právě ve dvou trojúhelnících z  $T$ ;
2. každé dva trojúhelníky z  $T$  mají nejvýše jednu společnou hranu;
3. pro každý vrchol  $v$  v grafu  $G$  lze uspořádat všechny vrcholy spojené hranou s vrcholem  $v$  do posloupnosti  $u_0, \dots, u_{n-1}$  tak, že  $\{u_i, u_{i+1}, v\}, 0 \leq i \leq n-1$  jsou právě všechny trojúhelníky z  $T$  obsahující vrchol  $v$  (klademe  $u_n = u_0$ ).

Třetí vlastnosti se někdy říká, že trojúhelníky vytvářejí kolem vrcholu  $v$  rotační schéma.

**Definice 8.** Duální graf  $G^*$  kombinatorické triangulované 2-variety  $(T, G)$  je graf, jehož vrcholy jsou trojúhelníky z  $T$  a jehož hrany jsou neuspořádané dvojice trojúhelníků, které mají společnou hranu.

**Definice 9.** Orientovaný graf  $G$  je dvojice  $(V, E)$ , kde  $V$  je množina vrcholů a  $E \subset V \times V$  je množina hran. Cesta z vrcholu  $x$  do vrcholu  $y$  v orientovaném grafu  $G$  je posloupnost vrcholů  $(x = v_0, v_1, \dots, v_n = y)$  taková, že pro každé  $i = 0, 1, \dots, n-1$  je  $(v_i, v_{i+1})$  hranou grafu  $G$ . Cyklus v orientovaném grafu  $G$  je orientovaná cesta pro kterou platí, že  $v_0 = v_n$ , přičemž vrchol  $v_0$  je obsažen v posloupnosti právě dvakrát a všechny ostatní vrcholy posloupnosti jsou obsaženy nejvýše jednou.

Poznamenejme, že hrany orientovaného grafu  $G$  jsou uspořádané dvojice vrcholů. Dvojice  $(v, u)$  je hrana, která začíná ve vrcholu  $v$  a končí ve vrcholu  $u$ .

**Značení.** Necht  $x, y, z$  jsou po dvou různé vrcholy grafu  $G$ . Permutaci  $\pi$  takovou, že  $\pi(x) = y, \pi(y) = z, \pi(z) = x$  a  $\pi(u) = u$  pro každý další vrchol  $u \in G$ , značíme jako  $(x y z)$ .

**Definice 10.** Řekneme, že kombinatorická triangulovaná 2-variety  $(T, G)$  je orientovatelná, jestliže existuje zobrazení  $\sigma: T \rightarrow S(V)$ , kde  $S(V)$  je množina permutací vrcholů  $V$  grafu  $G$ , takové, že pro každé  $t = \{x, y, z\} \in T$  je  $\sigma(t) \in \{(x y z), (x z y)\}$  a platí, že pro každou hranu  $\{e, f\}$  grafu  $G$  lze najít  $p, q \in T$  taková, že  $\sigma(p)(e) = f$  a  $\sigma(q)(f) = e$ .

**Lemma.** *Je-li duální graf  $G^*$  kombinatorické triangulované 2-variety  $(T, G)$  bipartitní, pak je kombinatorická triangulovaná 2-varieta  $(T, G)$  orientovatelná.*

*Důkaz.* V duálním grafu  $G^*$  zvolíme nějakou kostru  $K$  a nějaký její vrchol  $W$ . Kostru  $K$  můžeme zjevně orientovat tak, že pro každý vrchol  $V$  grafu  $G^*$  existuje jediná orientovaná cesta z  $W$  do  $V$ .

Pro každý trojúhelník  $U$  z grafu  $G$  zvolme orientaci tak, že u  $W$  ji vybereme náhodně a pro každou hranu  $(U, V)$  orientované kostry  $K$  odvodíme z orientace  $(x y z)$  trojúhelníku  $U = \{x, y, z\}$  orientaci  $(y x z')$  trojúhelníku  $V = \{x, y, z'\}$ , kde  $\{x, y\}$  je jejich společná hrana. Tím získáme orientaci každého trojúhelníku.

Pokud by nešlo o orientaci ve smyslu Definice 10, tak musí existovat dvojice trojúhelníků  $\{U, V\}$  taková, že mají společnou hranu  $\{a, b\}$ , přičemž  $U$  má vybranou orientaci  $(a b c)$  a  $V$  má vybranou orientaci  $(a b c')$ , kde  $U = \{a, b, c\}$ ,  $V = \{a, b, c'\}$ . Díky volbě orientace nemůže být hrana  $\{U, V\}$  hranou kostry  $K$ . Existuje tedy cyklus  $(U_0 = U, U_1 = V, U_2, \dots, U_n)$  takový, že  $(U_i, U_{i+1})$  je hrana kostry  $K$  pro  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Položme  $U_i = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , přičemž  $U_0 = \{x_{-1} = x_{n-1}, x_0 = x_n, x_1 = x_{n+1}\} = U_n$  a pro  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  nechť je společná hrana  $U_i$  a  $U_{i+1}$  hrana  $\{x_i, x_{i+1}\}$ . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že orientace  $U_i = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$  je pro lichá  $i$  rovna  $(x_{i-1} x_i x_{i+1})$  a pro sudá  $i > 0$  rovna  $(x_{i+1} x_i x_{i-1})$ . Protože graf  $G^*$  je bipartitní, musí být číslo  $n$  sudé. To znamená, že  $U_0 = U_n$  má orientaci  $(x_1 x_0 x_{-1})$ , zatímco  $U_1$  má orientaci  $(x_0 x_1 x_2)$ . Vidíme, že společná hrana  $U$  a  $V$  má v každém z trojúhelníků opačnou orientaci a to je spor s naším předpokladem. Kombinatorická triangulovaná 2-varieta  $(T, G)$  je tedy nutně orientovatelná.  $\square$

**Definice 11.** *Orientovatelnou kombinatorickou triangulovanou 2-varieta  $(T, G)$  nazveme kombinatorickým triangulovaným povrchem  $K$ , zkráceně mu budeme říkat jen triangulace.*

**Definice 12.** *Nechť  $(T, G)$  je triangulace. Je-li  $T = B \cup W$  bipartitní rozdělení trojúhelníků  $T$ , pak množinu  $B$  nazveme černými trojúhelníky a množinu  $W$  bílými trojúhelníky. Triangulaci  $(T, G)$  pak budeme nazývat černobílou triangulací.*

**Důsledek.** *Graf  $G^*$  kombinatorické triangulované 2-variety  $(T, G)$  je bipartitní právě tehdy, když  $(T, G)$  je černobílá triangulace.*

Nyní odvodíme z latinské záměny černobílou triangulaci povrchu.

**Tvrzení.** *Mějme dānu nerozložitelnou separovanou latinskou zāměnu  $(T_1, T_2)$ , kde  $T_1 \subset A_1 \times A_2 \times A_3$ ,  $T_2 \subset A_1 \times A_2 \times A_3$  a množiny  $A_1, A_2, A_3$  jsou po dvou disjunktní. Definujme graf  $G$  tak, že*

- množina jeho vrcholů je  $\{a_1, a_2, a_3; (a_1, a_2, a_3) \in T_1\}$ ,
- množina jeho hran je  $\{\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_3, a_1\}; (a_1, a_2, a_3) \in T_1\}$ .

*V grafu  $G$  definujme dvě množiny trojúhelníků  $B = \{\{a_1, a_2, a_3\}; (a_1, a_2, a_3) \in T_1\}$  a  $W = \{\{a_1, a_2, a_3\}; (a_1, a_2, a_3) \in T_2\}$ . Potom  $(B \cup W, G)$  je černobílá triangulace.*

*Důkaz.* Pokud by graf  $G$  nebyl souvislý a sklādal by se z  $k$  navzájem disjunktních komponent souvislosti  $U_1, U_2, \dots, U_k$ , potom by existovaly dvě latinské zāměny  $(\bigcup_{i=1}^{k-1} U_i, \bigcup_{i=1}^{k-1} U'_i)$  a  $(U_k, U'_k)$  takové, že  $(\bigcup_{i=1}^{k-1} U_i) \cap U_k = \emptyset = (\bigcup_{i=1}^{k-1} U'_i) \cap U'_k$ ,

$T_1 = \bigcup_{i=1}^{k-1} U_i \cup U_k$  a  $T_2 = \bigcup_{i=1}^{k-1} U'_i \cup U'_k$ .  $(T_1, T_2)$  by nebyla nerozložitelná, což je spor s předpokladem tvrzení a  $G$  je tedy souvislý.

Položme  $A = B \cup W$ . Budeme ověřovat, že dvojice  $(A, G)$  má vlastnosti triangulace.

Z definice parciálního designu víme, že každá dvojice  $(b, c) \in A_i \times A_j$  pro libovolná  $i, j, 1 \leq i < j \leq 3$ , tedy hrana grafu  $G$ , určuje právě jednu trojici v  $T_1$ , tedy trojúhelník z  $B$ . Z definice latinské záměny určuje dvojice  $(b, c)$  právě jednu trojici v  $T_2$ , tedy jeden trojúhelník ve  $W$ . Navíc  $T_1$  a  $T_2$  jsou disjunktní, proto také  $B$  a  $W$  jsou disjunktní. Každá hrana grafu  $G$  tak leží právě ve dvou trojúhelnících z  $A$ .

Mějme libovolné dva různé trojúhelníky  $a = \{a_1, a_2, a_3\} \in A$  a  $b = \{b_1, b_2, b_3\} \in A$ . Pokud  $a_i \neq b_i$  pro všechna  $i \in \{1, 2, 3\}$ , pak trojúhelníky  $a$  a  $b$  nemají z definice grafu  $G$  žádnou společnou hranu. Pokud  $a_i = b_i$  pro právě jedno  $i \in \{1, 2, 3\}$ , pak trojúhelníky  $a$  a  $b$  nemají rovněž žádnou společnou hranu, jen společný jeden vrchol. Pokud  $a_i = b_i$  pro právě dvě  $i \in \{1, 2, 3\}$ , pak mají trojúhelníky  $a$  a  $b$  právě jednu společnou hranu. Každé dva trojúhelníky z  $A$  tak mají nejvýše jednu společnou hranu.

Nechť existuje vrchol  $v$  grafu  $G$ , ke kterému nejdu uspořádat vrcholy spojené hranou s vrcholem  $v$  do jedné posloupnosti  $u_0, \dots, u_{n-1}$  tak, že  $\{u_i, u_{i+1}, v\}, 0 \leq i \leq n-1$  jsou právě všechny trojúhelníky z  $A$  obsahující vrchol  $v$ , kde klademe  $u_n = u_0$ . Nechť vrcholy spojené hranou s vrcholem  $v$  jdou uspořádat nejprve do dvou posloupností  $u_0, \dots, u_{k-1}$  a  $u_k, \dots, u_{n-1}$  tak, že  $\{u_i, u_{i+1}, v\}, 0 \leq i \leq k-1$ , kde  $u_k = u_0$ , a  $\{u_i, u_{i+1}, v\}, k \leq i \leq n-1$ , kde  $u_n = u_k$ , jsou právě všechny trojúhelníky z  $A$  obsahující vrchol  $v$ . Potom ale existuje  $i \in \{1, 2, 3\}$  a  $v \in A_i$  takové, že je možné množiny  $S = \{(a_1, a_2, a_3) \in T_1, a_i = v\}$  a  $S' = \{(a_1, a_2, a_3) \in T_2, a_i = v\}$  vyjádřit jako sjednocení neprázdných množin tak, že  $S = U_1 \cup U_2, S' = U'_1 \cup U'_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset = U'_1 \cap U'_2$ , kde

- $U_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in T_1, a_i = v, a_j \in \{u_0, \dots, u_{k-1}\}, j \in \{1, 2, 3\}, j \neq i\}$ ,
- $U'_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in T_2, a_i = v, a_j \in \{u_0, \dots, u_{k-1}\}, j \in \{1, 2, 3\}, j \neq i\}$ ,
- $U_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in T_1, a_i = v, a_j \in \{u_k, \dots, u_{n-1}\}, j \in \{1, 2, 3\}, j \neq i\}$ ,
- $U'_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in T_2, a_i = v, a_j \in \{u_k, \dots, u_{n-1}\}, j \in \{1, 2, 3\}, j \neq i\}$ .

A pro  $c_1, c_2 \notin A_i, c_1 \neq c_2$  a množiny

- $C_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in T_1, a_i = c_1, a_j \in \{u_0, \dots, u_{k-1}\}, j \in \{1, 2, 3\}, j \neq i\}$ ,
- $C'_1 = \{(a_1, a_2, a_3) \in T_2, a_i = c_1, a_j \in \{u_0, \dots, u_{k-1}\}, j \in \{1, 2, 3\}, j \neq i\}$ ,
- $C_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in T_1, a_i = c_2, a_j \in \{u_k, \dots, u_{n-1}\}, j \in \{1, 2, 3\}, j \neq i\}$ ,
- $C'_2 = \{(a_1, a_2, a_3) \in T_2, a_i = c_2, a_j \in \{u_k, \dots, u_{n-1}\}, j \in \{1, 2, 3\}, j \neq i\}$ ,

platí, že  $((T_1 \setminus S) \cup C_1 \cup C_2, (T_2 \setminus S') \cup C'_1 \cup C'_2)$  je latinská záměna. To je však spor se separovaností latinské záměny  $(T_1, T_2)$ . Podobně lze postupovat v případech, kdy vrcholy spojené hranou s vrcholem  $v$  jdou uspořádat do více než dvou takových posloupností vytvářející trojúhelníky s vrcholem  $v$ . Tedy platí, že pro každý vrchol  $v$  grafu  $G$  lze uspořádat všechny vrcholy spojené hranou s vrcholem  $v$  do

posloupnosti  $u_0, \dots, u_{n-1}$  tak, že  $\{u_i, u_{i+1}, v\}, 0 \leq i \leq n-1$  jsou právě všechny trojúhelníky z  $A$  obsahující vrchol  $v$ , kde klademe  $u_n = u_0$ .

Mějme libovolný trojúhelník z  $B$ . Protože každá jeho hrana leží z definice latinské záměny zároveň ještě v právě jednom trojúhelníku z  $W$  a naopak, sousedí spolu hranově trojúhelníky z  $B$  jen s trojúhelníky z  $W$ . Proto je duální graf  $G^*$  grafu  $G$  bipartitní. Pak  $(A, G)$  je podle lemmatu orientovatelná a trojúhelníky z  $B$  můžeme obarvit černě a trojúhelníky z  $W$  bíle. Dostáváme tak černobílou triangulaci  $(A, G)$ .  $\square$

Množinu vrcholů  $V$  grafu  $G$  můžeme zapsat jako disjunktí sjednocení  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = V$ .

**Eulerova formule.** *Kombinatorický triangulovaný povrch  $K$  je zvláštním případem kombinatorických polyedrů viz například [1]. Pro každý polyedr je možné definovat topologický rod  $g$  a Eulerovu charakteristiku  $\chi$ . Pro Eulerovu charakteristiku  $\chi(K)$  platí*

$$\chi(K) = v - e + f,$$

kde  $v, e, f$  je po řadě počet vrcholů, hran a trojúhelníků triangulace  $K$ . Topologický rod  $g$  je pak roven

$$g = \frac{2 - \chi(K)}{2}.$$

Topologický rod  $g$  lze neformálně popsat tak, že odpovídá počtu držadel (uší), které povrch vytváří. Pokud je triangulace rodu jedna, tedy povrch tvoří jedno držadlo, mluvíme o *toroidální triangulaci*. Pokud je rodu nula, pak mluvíme o *sférické triangulaci*. Rodem latinské záměny rozumíme rod triangulace odvozené z dané latinské záměny.

**Lemma.** *Topologický rod triangulace  $K$  odvozené z latinské záměny  $(T_1, T_2)$ , kde  $T_1 \subset A_1 \times A_2 \times A_3$ ,  $T_2 \subset A_1 \times A_2 \times A_3$ , je roven*

$$g = \frac{2 + |T_1| - |A_1| - |A_2| - |A_3|}{2}.$$

*Důkaz.* Nejprve vyjádříme počet vrcholů, hran a trojúhelníků triangulace  $K$ , zkonstruované z latinské záměny  $(T_1, T_2)$ . Z tvrzení výše máme, že  $v = |A_1| + |A_2| + |A_3|$ . Z definice grafu  $G$  a z toho, že každý trojúhelník má právě tři hrany plyne, že  $e = 3|B|$ . Trojúhelníky na  $G$  jsme pak definovali jako  $B \cup W$ , proto  $f = |B| + |W|$ . Ve výpočtu ještě využijeme, že  $|T_1| = |T_2| = |B| = |W|$ , což plyne přímo z definice latinské záměny a definic množin trojúhelníků  $B$  a  $W$ .

Pomocí Eulerovy formule spočítáme topologický rod  $g$  pro triangulaci  $K$ :

$$\begin{aligned} g &= \frac{2 - \chi(K)}{2} = \frac{2 - v + e - f}{2} = \frac{2 - |A_1| - |A_2| - |A_3| + 3|T_1| - |T_1| - |T_2|}{2} = \\ &= \frac{2 + |T_1| - |A_1| - |A_2| - |A_3|}{2} \end{aligned}$$

$\square$

**Definice 13.** *Latinskou záměnu  $(T_1, T_2)$ , kde  $T_1 \subset A_1 \times A_2 \times A_3$ ,  $T_2 \subset A_1 \times A_2 \times A_3$  a množiny  $A_1, A_2, A_3$  jsou po dvou disjunktí, složenou z takových trojic, že každý prvek z množiny  $A_1, A_2$  a  $A_3$  se vyskytne právě třikrát v trojicích v  $T_1$  (resp. v trojicích v  $T_2$ ), nazveme 3-homogenní.*

Poznamenejme, že každá 3-homogenní latinská záměna je separovaná, ale nemusí být nerozložitelná.

**Lemma.** *Každá nerozložitelná 3-homogenní latinská záměna  $(T_1, T_2)$  má topologický rod rovný jedné.*

*Důkaz.* Pro každou 3-homogenní latinskou záměnu  $(T_1, T_2)$  z její definice platí, že  $|T_1| = 3|A_1| = 3|A_2| = 3|A_3|$ , tedy  $|A_1| = |A_2| = |A_3|$ . Z předchozího lemmatu dostáváme, že její topologický rod je

$$g = \frac{2 + 3|A_1| - |A_1| - |A_1| - |A_1|}{2} = 1.$$

□

Nerozložitelné 3-homogenní latinské záměny jsou tedy toroidální. Podrobněji jsou popsány v [6]. Podle článku [7], který užívá výsledků z článků [8] a [9], odpovídají 3-homogenní latinské záměny triangulacím toru stupně šest. Tato triangulace bude dále hlavním objektem našeho zájmu.

Jelikož latinským čtvercům odpovídají tabulky operací pro kvazigrupy, nabízí se otázka, zda toroidální latinskou záměnu lze vnořit do vhodné abelovské grupy.

## 1.2 Vnořování do abelovských grup

Pro další práci s triangulacemi budeme potřebovat několik pojmů z elementární teorie grup.

Mějme grupu  $G$  a množinu  $B \subseteq G$ . Zápisem  $\langle B \rangle$  rozumíme nejmenší podgrupu  $G$ , která obsahuje  $B$ . Je-li  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$  konečná, píšeme místo  $\langle B \rangle$  též  $\langle b_1, b_2, \dots, b_k \rangle$ .

**Definice 14.** *Podmnožina  $B$  abelovské grupy  $G$  se nazývá volná báze, jestliže pro každé zobrazení  $\varphi: B \rightarrow H$ , kde  $H$  je abelovská grupa, existuje právě jeden homomorfismus  $\psi: G \rightarrow H$ , který rozšiřuje  $\varphi$ .*

Potom platí, že  $\langle B \rangle = G$ . To jest, že  $B$  generuje  $G$ , viz například [2].

**Definice 15.** *Volná abelovská grupa  $F$  je abelovská grupa, ve které existuje volná báze  $B \subseteq F$ .*

Pro každý prvek volné abelovské grupy  $F$  podle [2] platí, že jej lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci s celočíselnými koeficienty prvků báze  $B$ . Volnou abelovskou grupu  $F$  pak lze ztotožnit se všemi formálními součty  $\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i, \lambda_i \in \mathbb{Z}, b_i \in B\}$ , kde může existovat  $k \in \mathbb{Z}$  takové, že  $\lambda_i = 0 \ \forall i \geq k$ .

Nechť  $G$  je abelovská grupa a ať  $F(B)$  značí volnou abelovskou grupu s volnou bází  $B$ . Je-li grupa  $G$  generovaná  $B$  a obsahuje-li grupa  $G$  podmnožinu  $R \subseteq F(B)$ , pak existuje právě jeden epimorfismus

$$\begin{aligned} \psi: F(B)/N &\rightarrow G \\ x + N &\mapsto x, \end{aligned}$$

kde  $N$  je nejmenší podgrupa  $F(B)$ , která obsahuje  $R$ . Grupu  $G$  pak můžeme prezentovat jako dvojici  $(B; R)$ .

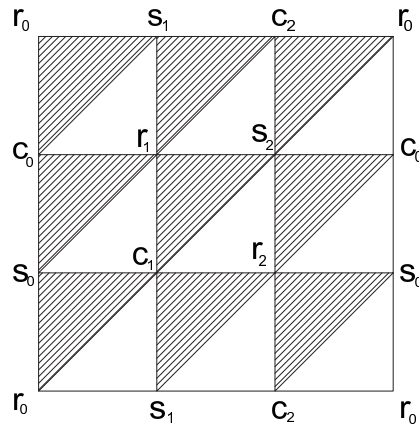
Je zvykem prvky množiny  $R$  zapisovat rovnostmi, takže například prvek  $u - v \in R$  zapisujeme jako rovnost  $u = v$ . Nechť je dána prezentace  $(B; u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_k = v_k)$ , kde  $u_i$  a  $v_i, 1 \leq i \leq k$  jsou celočíselné kombinace prvků  $B$ , pak množina definujících relací  $R$  je rovna  $\{u_i = v_i; 1 \leq i \leq k\}$  a  $G \cong F(B)/N$ , kde  $N = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_k - v_k \rangle$ .

Uveďme nyní příklad, ze kterého nahlédneme způsob odvozování abelovských grup z černobílých triangulací.

**Příklad.** Mějme 3-homogenní latinskou záměnu

$$(T_1, T_2) = \left( \{ (r_0, c_0, s_1), (r_1, c_0, s_0), (r_0, c_1, s_0), (r_1, c_2, s_1), (r_1, c_1, s_2), (r_2, c_1, s_1), \right. \\ (r_0, c_2, s_2), (r_2, c_0, s_2), (r_2, c_2, s_0) \}, \{ (r_1, c_0, s_1), (r_1, c_1, s_0), (r_0, c_1, s_1), \\ (r_1, c_2, s_2), (r_2, c_1, s_2), (r_2, c_2, s_1), (r_0, c_0, s_2), (r_2, c_0, s_0), (r_0, c_2, s_0) \} \right).$$

Z ní zkonstruujeme pomocí tvrzení z předchozí podkapitoly toroidální triangulaci, která po převedení do roviny vypadá jako na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Toroidální triangulace odvozená z 3-homogenní latinské záměny  $(T_1, T_2)$

Vrcholy triangulace chápeme jako generátory abelovské grupy  $G$ . Definující relace vytvořme tak, že pokud je  $\{a_1, a_2, a_3\}$  černý trojúhelník, pak  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ . Tedy definující relace lze vytvořit tak, že všechny hodnoty  $r_i, c_i, s_i, i \in \{1, 2\}$  lze vyjádřit jako lineární kombinace  $r_0, c_0, s_0$ . Počítejme:

$$\begin{aligned} s_1 &= -r_0 - c_0, r_1 = -c_0 - s_0, c_1 = -s_0 - r_0, \\ c_2 &= -s_1 - r_1 = r_0 + 2c_0 + s_0, s_2 = -r_1 - c_1 = r_0 + 2s_0 + c_0, r_2 = -c_1 - s_1 = \\ &= s_0 + 2r_0 + c_0. \end{aligned}$$

Pro poslední tři trojúhelníky musí platit:

$$\begin{aligned} r_0 + c_2 + s_2 &= 0 \\ r_2 + c_0 + s_2 &= 0 \\ r_2 + c_2 + s_0 &= 0 \end{aligned}$$

Po dosazení za výše vyjádřené hodnoty  $r_2, c_2, s_2$  dostáváme:

$$3r_0 + 3c_0 + 3s_0 = 0$$

$$3r_0 + 3c_0 + 3s_0 = 0$$

$$3r_0 + 3c_0 + 3s_0 = 0$$

Položme  $s'_0 = r_0 + c_0 + s_0$ . Grupu  $G$  lze tedy vyjádřit prezentací  $\langle s'_0, r_0, c_0; 3s'_0 = 0 \rangle$ . Podgrupa  $N$  je tedy rovna lineární kombinaci  $\lambda_1 s'_0 + \lambda_2 r_0 + \lambda_3 c_0$ , kde  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  a 3 dělí  $\lambda_1$ . Zobrazení  $F(s'_0, r_0, c_0) \rightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , které posílá  $\lambda_1 s'_0 + \lambda_2 r_0 + \lambda_3 c_0$  na  $(\lambda_1 \bmod 3, \lambda_2, \lambda_3)$  je zřejmě surjektivní homomorfismus, jehož jádro je rovno  $N$ . Podle 1. věty o isomorfismu je tedy  $F(s'_0, r_0, c_0)/N \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Máme tak  $G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Na závěr příkladu poznamenejme, že  $(T_1, T_2)$  je co do mohutnosti nejmenší 3-homogenní latinská záměna. Což odpovídá nejmenší možné triangulaci toru z hlediska počtu trojúhelníků (více viz v podkapitole 2.1 a v [5]).

**Značení.** Mějme latinskou záměnu  $T = (T_1, T_2), T_1, T_2 \subset A_1 \times A_2 \times A_3$ . Označme  $\mathbf{G}(T)$  jako abelovskou grupu zadanou prezentací  $(V; T^\blacktriangle)$ , kde  $V = A_1 \cup A_2 \cup A_3$  a  $T^\blacktriangle = \{a_1 + a_2 + a_3 = 0; (a_1, a_2, a_3) \in T_1\}$ . Nechť pro každé  $a = (r, c, s) \in T_1$  označme  $\mathbf{H}(T, a)$  jako abelovskou grupu zadanou prezentací  $(V; T^\blacktriangle, r = 0, c = 0)$ .

Lze dokázat, viz článek [3], že nezávisle na volbě  $a \in T_1$  platí:

$$\mathbf{G}(T) \cong \mathbf{H}(T, a) \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

kde  $\mathbf{H}(T, a)$  je konečná grupa.

Ať  $(V; R)$  je prezentace grupy  $\mathbf{H}(T, a)$  a ať  $N = \langle R \rangle$ . Volba  $R$  byla učiněna tak, že pro  $a = (r, c, s)$  platí  $r \in N, c \in N, s \in N$ . Ztotožníme-li, jak se často při práci s prezentacemi děje, symbol  $r$  s prvkem grupy  $r + N$ , bude  $r = 0 = c = s$ . Na  $\mathbf{H}(T, a)$  můžeme nahlížet také jako na faktor  $\mathbf{G}(T)$ , který vznikne právě tak, že položíme  $r = 0 = c$ . Díky vlastnostem abelovských grup platí, že tento faktor je současně podgrupou  $\mathbf{G}(T)$ , jak vyjadřuje vztah  $\mathbf{G}(T) \cong \mathbf{H}(T, a) \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

**Definice 16.** Řekneme, že latinskou záměnu  $T = (T_1, T_2), T_1, T_2 \subset A_1 \times A_2 \times A_3$  lze vnořit do abelovské grupy  $\mathbf{G}(T)$ , jestliže existuje trojice zobrazení  $\varphi_i: A_i \rightarrow \mathbf{G}(T), i \in \{1, 2, 3\}$ , takové, že  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  jsou injektivní a kdykoliv  $(a_1, a_2, a_3) \in T_1$  tak platí, že  $\varphi_1(a_1) + \varphi_2(a_2) + \varphi_3(a_3) = 0$ .

Lze snadno dokázat, viz [3], že  $T$  lze vnořit do abelovské grupy právě tehdy, když nezávisle na volbě  $a \in T_1$  platí  $r_1 + N \neq r_2 + N$ , kdykoliv  $r_1, r_2 \in A_i, i \in \{1, 2, 3\}$  a  $r_1 \neq r_2$ . Zde  $N$  značí  $\langle R \rangle$ , kde  $(V; R)$  je prezentace grupy  $\mathbf{H}(T, a)$ . Protože typ isomorfismu nezávisí na volbě  $a \in T_1$ , budeme grupu  $\mathbf{H}(T, a)$  dále značit jen jako  $\mathbf{H}(T)$ , kde  $a$  bude zřejmé z kontextu.

Je-li  $(a_1, a_2, a_3) \in T_1$  a  $(b_1, b_2, b_3) \in T_1$  a je-li  $\mathbf{H}(T)$  zadána prezentací  $(V; R)$ , kde  $N = \langle R \rangle$ , tak obecně pro  $a_i \neq b_i, i \in \{1, 2, 3\}$  může být  $a_i + N = b_i + N$ . Jestliže však  $a_i + N \neq b_i + N$  pro libovolná  $(a_1, a_2, a_3) \in T_1, (b_1, b_2, b_3) \in T_1, a_i \neq b_i$ , můžeme říci, že latinskou záměnu  $T$  lze vnořit do abelovské grupy  $\mathbf{H}(T)$ . To znamená, že pokud se na  $T_1$  díváme jako na tabulku, tak tuto tabulku lze nalézt jako podtabulku tabulky sčítání dané abelovské grupy.



**Příklad.** Mějme 3-homogenní latinskou záměnu  $(T_1, T_2)$  z výše uvedeného příkladu, na kterou se lze dívat jako na dvě tabulky 1.5. Položme  $a = (r_0, c_0, s_1) =$

$$T_1 = \begin{array}{c} \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline c_0 & c_1 & c_2 \\ \hline s_1 & s_0 & s_2 \\ \hline s_0 & s_2 & s_1 \\ \hline s_2 & s_1 & s_0 \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{c} \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline c_0 & c_1 & c_2 \\ \hline s_2 & s_1 & s_0 \\ \hline s_1 & s_0 & s_2 \\ \hline s_0 & s_2 & s_1 \\ \hline \end{array}$$

Tabulka 1.5: 3-homogenní latinská záměna  $(T_1, T_2)$

$(0, 0, 0)$ . Definiující relace grupy  $\mathbf{H}(T)$  vytvořme stejně jako v předchozím příkladu tak, že všechny proměnné vyjádříme pomocí relací  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ , pokud  $(a_1, a_2, a_3) \in T_1$ , jako lineární kombinace  $s_0$ . Počítejme:  $r_1 = -c_0 - s_0 = -s_0$ ,  $c_1 = -r_0 - s_0 = -s_0$ ,  $s_2 = -r_1 - c_1 = 2s_0$ ,  $r_2 = -c_0 - s_2 = -2s_0$ ,  $c_2 = -r_0 - s_2 = -2s_0$ . Potom tabulka pro  $T_1$  vypadá jako na obrázku 3.2. Tabulka odpovídá tabulce sčítání v abelovské grupě  $\mathbb{Z}_3$ .

$$T_1 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ -s_0 \\ -2s_0 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & -s_0 & -2s_0 \\ \hline 0 & s_0 & 2s_0 \\ \hline s_0 & 2s_0 & 0 \\ \hline 2s_0 & 0 & s_0 \\ \hline \end{array}$$

Tabulka 1.6: Tabulka  $T_1$ , která odpovídá tabulce sčítání v  $\mathbb{Z}_3$

Není pravda, že každou latinskou záměnu lze do nějaké netriviální abelovské grupy vnořit.

**Příklad.** Jako příklad latinské záměny, kterou nelze vnořit do netriviální abelovské grupy, uveďme příklad z článku [3], včetně stejného značení. Mějme latinskou záměnu  $(T_1, T_2)$ ,  $T_1, T_2 \subset A_1 \times A_2 \times A_3$  zobrazenou tabulkami 1.7, kde  $A_1 = \{e, x, y, z, t\}$ ,  $A_2 = \{f, a, b, c, d, g\}$ ,  $A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

$$T_1 = \begin{array}{c} \\ e \\ x \\ y \\ z \\ t \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline f & a & b & c & d & g \\ \hline 1 & & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 3 & 6 & 2 & 5 & & 7 \\ \hline 5 & & & & 1 & \\ \hline & & 4 & 2 & & \\ \hline 7 & 5 & 6 & 3 & & 2 \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{c} \\ e \\ x \\ y \\ z \\ t \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline f & a & b & c & d & g \\ \hline 3 & & 4 & 5 & 1 & \\ \hline 7 & 5 & 6 & 3 & & 2 \\ \hline 1 & & & & 5 & \\ \hline & & 2 & 4 & & \\ \hline 5 & 6 & 3 & 2 & & 7 \\ \hline \end{array}$$

Tabulka 1.7: Toroidální latinská záměna  $(T_1, T_2)$

Z lemmatu o topologickém rodu z podkapitoly 1.1 víme, že  $g = \frac{2+|T_1|-|A_1|-|A_2|-|A_3|}{2}$ . Z tabulky 1.7 ihned vidíme, že  $|T_1| = 18$ ,  $|A_1| = 5$ ,  $|A_2| = 6$ ,  $|A_3| = 7$ . Potom  $g = \frac{2+18-5-6-7}{2} = 1$ .  $(T_1, T_2)$  je tedy toroidální latinská záměna.

Položme  $(e, f, 1) = (0, 0, 0)$  a počítejme:  $b = e + b = x + f = x$ ,  $c = e + c = z + b = z + x$ ,  $d = e + d = y + f = y = x + c = 2x + z$ ,  $z + c = x + b = 2x$ . Z rovnosti  $c = z + x$  plyne, že  $2z + x = 2x$  a  $x = 2z$ ,  $t = x - c = -z$ ,  $g = t - x = -3z$ . Všechny generátory tak jsou lineární kombinací generátoru  $z$ :  $e = 0$ ,  $x = 2z$ ,  $y = 5z$ ,  $t = -z$ ,  $f = 0$ ,  $b = 2z$ ,  $c = 3z$ ,  $d = 5z$ ,  $g = -3z$ ,  $a = y - t = 6z$ . Z rovnosti

$z = t + b = x + a = 8z$  plyne, že  $7z = 0$ , a z rovnosti  $0 = e + f = d + y = 2y = 10z$  plyne  $10z = 0$ . Proto  $z = 0$  a grupa  $\mathbf{H}(T)$  je tak triviální.

Je ale pravda viz [3], že každou sférickou latinskou záměnu lze vnořit do abelovské grupy a jsou důvody, proč se domnívat, že každou 3-homogenní latinskou záměnu lze vnořit do vhodné abelovské grupy.

### 1.3 Smithova normální forma

V této podkapitole zmíníme metodu, která ze znalosti definujících relací pro volné abelovské grupy dovolí snadno odhalit její strukturu.

V předchozí podkapitole jsme definovali konečnou abelovskou grupu  $\mathbf{H}(T)$ , kde  $T = (T_1, T_2)$  je latinská záměna. Z teorie grup víme, že každou takovou grupu lze vyjádřit jako:

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_{d_i}, d_i \in \mathbb{N}, d_i \mid d_{i+1}, i \in 1, 2, \dots, n-1$$

Mějme prezentaci  $(V; R)$  abelovské grupy  $\mathbf{H}(T)$ . Definující relace  $R$  vyjádřeme pomocí tzv. *matice definujících relací*  $A = (a_{ij})_{l \times n}$ , kde  $l = |T_1|$ ,  $n = |V|$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$  odpovídá koeficientu u  $x_j \in V$  ve slově  $r_i \in R$ . (V tomto případě platí, že  $n = l$ .) Smithovu normální formu však popíšeme obecně pro  $n \neq l$ .)

**Příklad.** Mějme volnou abelovskou grupu  $F(\{x_1, x_2, x_3\})$  a na ní určené definující relace  $R = \{2x_1 + 2x_2 - 2x_3, 6x_1 - 6x_2 + 6x_3\}$ , což odpovídá grupě  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ , ve které platí rovnosti  $2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$  a  $6x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0$ , tj. grupě  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle / \langle 2x_1 + 2x_2 - 2x_3, 6x_1 - 6x_2 + 6x_3 \rangle$ , jejíž definující relace korespondují s maticí definujících relací

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ukažme nyní postup, který takové matice převádí na diagonální, které odpovídají stejné grupové prezentaci. Z nich už snáze vyčteme strukturu  $\mathbf{H}(T)$ .

**Definice 17.** Řekneme, že  $l \times n$  matice  $D$  je ve Smithově normální formě (zkráceně SNF), jestliže je  $D$  diagonální matice s takovými nezápornými celočíselnými koeficienty, že  $d_{i,i} \mid d_{i+1,i+1}$  pro všechna  $i < q$ , kde  $q \leq \min(l, n)$  a  $d_{q+1,q+1} = 0, \dots, d_{\min(l,n), \min(l,n)} = 0$ , pokud jsou tyto prvky definovány.

**Tvrzení.** Nechť  $A$  je nenulová  $l \times n$  matice s koeficienty v  $\mathbb{Z}$ . Potom existuje právě jedna matice  $D$  ve Smithově normální formě taková, že  $D = PAQ$ , kde  $P_{l \times l}$  a  $Q_{n \times n}$  jsou invertibilní nad  $\mathbb{Z}$ .

**Značení.** Takovou matici  $D$  pak označujeme jako Smithovu normální formu matice  $A$ .

Položme  $d_{i,i} = d_i$ . Pokud je  $n > l$ , potom tvrzení lze zapsat jako

$$PAQ = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & d_q & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

kde  $d_i \mid d_{i+1}$  pro všechna  $i < q$ .

Ekvivalentně lze říci viz [4], že pokud je  $A$  matice definujících relací  $R$ , pak pro grupu  $G$  prezentovanou dvojicí  $(V; R)$  platí:

$$G \cong \mathbb{Z}^{\min(n,l)-q} \oplus \bigoplus_{i=1}^q \mathbb{Z}_{d_i}, d_i \in \mathbb{N}, d_i \mid d_{i+1}, i < q.$$

Smithův algoritmus, který danou matici  $A$  převádí na její Smithovu normální formu, používá úpravy, které nemění prezentaci grupy. Jsou to tyto tři řádkové (resp. sloupcové) úpravy:

- vynásobení řádku (resp. sloupce)  $-1$ ,
- záměna dvou řádků (resp. sloupců),
- přičtení celočíselného násobku jednoho řádku (resp. sloupce) k jinému řádku (resp. sloupci).

Algoritmus a jeho správnost, viz [4], zde nebudeme popisovat. Za povšimnutí však stojí, že pokud předpokládáme  $A$  čtvercovou, tak se použitými úpravami nezmění absolutní hodnota determinantu, tj.  $|\det A| = |\det PAQ|$ . Protože matice  $P$  a  $Q$  jsou invertibilní, je násobení těmito maticemi grupovým isomorfismem mezi grupou odpovídající prezentaci sdružené s maticí definujících relací  $A$  a grupou odpovídající prezentaci sdružené s maticí definujících relací  $D$ .

**Lemma.** *Mějme grupu  $G$  prezentovanou  $n$  generátory a definujícími relacemi odpovídající čtvercové regulární matici definujících relací  $A$  s celočíselnými koeficienty. Pokud je  $G$  konečná, potom je její řád roven  $|\det A|$ .*

**Definice 18.** *Nechť  $A$  je matice definujících relací prezentující grupu  $G$ , matice  $D$  nechť je její Smithova normální forma. Počet prvků na diagonále matice  $D$ , které jsou různé od  $0, 1, -1$ , nazveme torzním rankem grupy  $G$ .*

Torzní podgrupa odpovídající prezentaci s maticí definujících relací  $A$  je tedy isomorfní direktnímu součinu  $\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}_{d_i}$ , kde  $k$  je torzní rank grupy příslušné matici  $A$ . Takže řád torzní podgrupy je roven součinu prvků  $d_i, i = 1, \dots, q$  na diagonále  $D$ . Pokud navíc nejsou na diagonále  $D$  nuly, je řád grupy roven  $|\det D| = |\det A|$ .

**Příklad.** *Na závěr této kapitoly spočtěme Smithovu normální formu matice z výše uvedeného příkladu:*

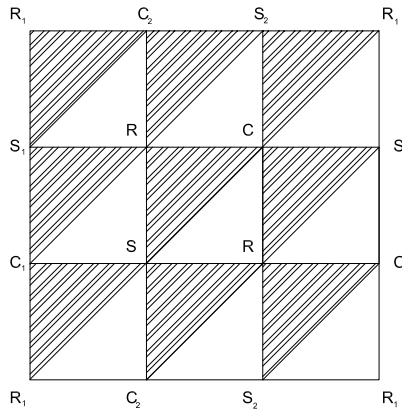
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 12 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2. 3-homogenní latinské záměny

### 2.1 Triangulace toru stupně šest

Z článku [6] víme, že 3-homogenní latinské záměny vznikají z triangulací toru stupně šest. V této podkapitole zkonstruujeme právě takové triangulace toru, avšak jiným způsobem než v první kapitole.

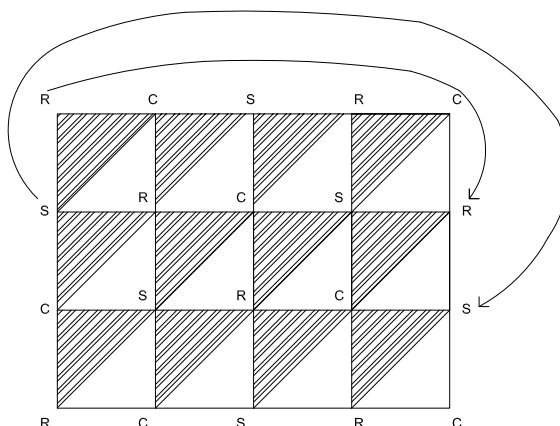
Mějme dānu nerozložitelnou 3-homogenní latinskou zāměnu  $T = (T_1, T_2), T_1, T_2 \subset A_1 \times A_2 \times A_3$ . Z nı odvodme ěernobı́lou triangulaci. Vı́me, že tato triangulace je toroidālnı́ a že kaĹdı́ vrchol je stupně šest. Převedme ji do roviny. Dostaneme tak obdělnı́kovou triangulovanou plochu. Z těto plochy budeme zpětně konstruovat triangulaci toru. Ćınıme tak ěistě z formālnı́ch dŭvodŭ, protože snadněji vyjādřı́me definujıcı relace grupy  $\mathbf{G}(T)$ . Aby tato plocha opravdu představovala triangulaci toru, je nutné slepit (ztotoĹnit) protilehlě strany. Slepění musı́ bŭt zřejmě provedeno tak, aby vrchol z množiny  $A_i$  pro pevně  $i \in \{1, 2, 3\}$  byl ztotoĹněn s vrcholem ze stejně množiny  $A_i$ , jak vidı́me na obrāzku 2.1.



Obrāzek 2.1: Stejně oznaěeně vrcholy se ztotoĹnı́. Vrcholy majıcı v oznaěenı́  $R, C, S$  nāleĹejı́ po řadě do množin  $A_1, A_2, A_3$ .

Oznaěme dělku strany obdělnı́ka jako poěet hran, kterě tvořı́ stranu. Diskutujeme nynı́ pro jakě parametry (dělky stran) obdělnı́kově triangulace jsme schopni vytvořıt toroidālnı́ triangulaci. Protože kaĹdı́ trojŭhelnı́k (bı́lŭ i ěernŭ) je tvořen třemi vrcholy, jeĹ kaĹdŭ z nich nāleĹı́ do rŭzně množiny z množin  $A_i, i \in \{1, 2, 3\}$ , musı́ bŭt jedna strana k vytvořenı́ vālcově plochy dělitelnā třemi, aby byl vrchol na jednom konci strany obdělnı́ka stejně povahy (rozumı́me tım nāleĹenı́ do stejně množiny z  $A_i, i \in \{1, 2, 3\}$ ) jako vrchol na druhěm konci těto strany. Tuto stranu, jeĹıĹ dělka je dělitelnā třemi, oznaěme jako  $n$ . Druhou stranu oznaěme  $r$ . Aby se jednalo o triangulaci toru, musı́ bŭt dělka strany  $r$  větší nebo rovna třemi viz [5] (kdyby dělka strany  $r$  byla dva, byly by dvě rŭzně hrany stejně oznaěeny). Slepěnım stran dělky  $n$  vznikne vālcovā plocha, jeĹıĹ konce slepı́me, aby si sobě odpovı́daly vrcholy stejně povahy. Tedy pokud bude takě strana  $r$  nāsobkem třı́, mŭžeme odpovı́dajıcı vrcholy standartně slepit k vytvořenı́ toru. Pokud ale nebude strana  $r$  nāsobkem třı́, jak vidı́me napřıkklad na obrāzku 2.2, budeme tedy mıt na konci strany naproti sobě vrcholy nestejně povahy, pokroutı́me vālcovou

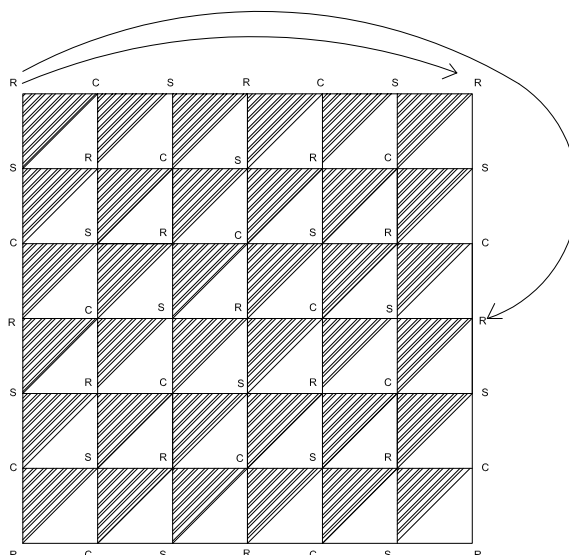
plochu tak, aby se vrcholy ztotožnily s vrcholy stejné povahy. Takto pokroucené triangulace jsou ve smyslu definice topologického rodu také toroidální.



Obrázek 2.2: Skrut jedna, šipky označují, jaké vrcholy se spolu ztotožní. Vrcholy značené  $R, C, S$  náležejí po řadě do množin  $A_1, A_2, A_3$ .

Výše popsané lepení válcové plochy můžeme provést tolika způsoby, kolik máme možností v počtu vrcholů stejné povahy na koncích plochy, jak vidno z obrázku 2.3, tj.  $n/3$  možností (včetně nekrouivé možnosti). Poznamenejme, že tak nemusíme dostat triangulaci odpovídající původní latinské záměně  $T$ . Dále označme  $s$  jako parametr skrutu, tedy číslo uvádějící o jaký počet hran se válcová plocha kroutí. Vychází nám, že  $s \equiv r \pmod{3 + 3k}, k = 0, 1, \dots, \frac{n-3}{3}$ .

**Značení.** Toroidální triangulace jsou tak zadány těmito třemi parametry:  $n, r, s \in \mathbb{N}; 3 \mid n \forall n, r \geq 3, s \equiv r \pmod{3 + 3k}, k = 0, 1, \dots, \frac{n-3}{3}$ . Dále takové triangulace označujeme jako trojice  $(n, r, s)$ .



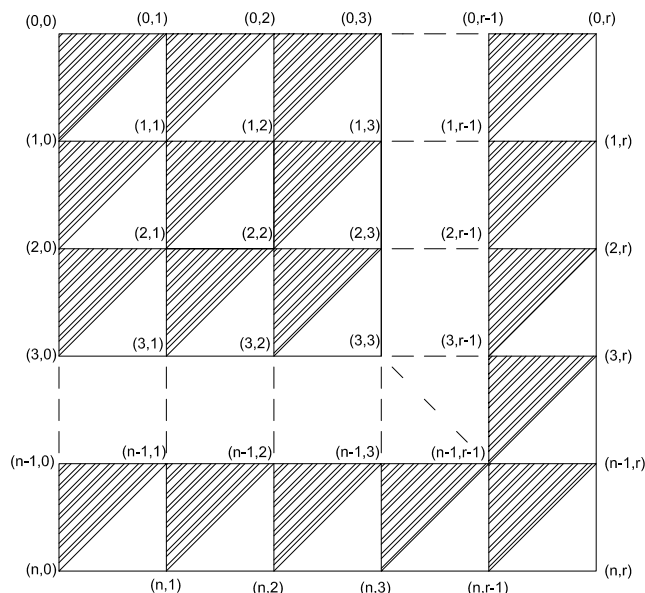
Obrázek 2.3: Dvě možná spleení se skrutem nula odpovídající triangulaci  $(6, 6, 0)$  a se skrutem tři odpovídající triangulaci  $(6, 6, 3)$ .

O toroidální triangulaci  $(n, r, s)$  tak také můžeme říci, že ji lze vnořit do grupy  $\mathbf{G}(T)$  (resp.  $\mathbf{H}(T)$ ). Dále tyto grupy označujeme také jako  $\mathbf{G}(n, r, s)$  a  $\mathbf{H}(n, r, s)$ .

## 2.2 Definující relace grupy $\mathbf{G}(n, r, s)$

Zde vyjádříme definující relace grupy  $\mathbf{G}(T)$  ( $\mathbf{G}(n, r, s)$ ), do níž lze vnořit toroidální triangulaci  $(n, r, s)$  zkonstruovanou z 3-homogenní latinské záměny  $T$ , jako lineární kombinace  $n$  různých generátorů.

Mějme triangulaci  $(n, r, s)$  a označme její vrcholy jako na obrázku 2.4, kde



Obrázek 2.4: Triangulace  $(n, r, s)$

vrcholy  $(0, j), j = 0, 1, \dots, r$  ztotožňujeme po řadě s vrcholy  $(n, j), j = 0, 1, \dots, r$  tak, aby vznikla válcová plocha.

Budeme pracovat v grupě  $\mathbf{G}(T)$ . Přejít ke grupě  $\mathbf{H}(T)$  je možné učinit až na závěr tak, že se vhodné dva prvky grupy  $\mathbf{G}(T)$  položí rovny nule. Grupa  $\mathbf{G}(T)$  je dána prezentací  $(V; R)$ , kde prvky  $V$  jsou všechny vrcholy  $(i, j)$ , kde  $0 \leq i < n, 0 \leq j < r$ . Relace  $R$  lze pak formálně zapsat jako  $(i, j) + (i+1, j) + (i, j+1) = 0$ , kde je ovšem  $+$  třeba chápat jako součet v dané volné grupě (nikoliv v  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ). Zdůrazněme, že prvky  $(i+1, j), (i, j+1)$  již nemusí ležet v množině  $V$  (může totiž být  $i+1 = n$  a  $j+1 = r$ ) a že v takovém případě je potřeba ztotožnění dané použitou triangulací.

Položme  $N = \langle R \rangle$ . Prvek  $(i, j) + N$  budeme značit  $[i, j]$ . V grupě  $\mathbf{G}(T)$  tedy platí  $[i, j] + [i+1, j] + [i, j+1] = 0$ , kde je opět zapotřebí použít vhodné ztotožnění pro případy, kdy  $i+1 = n$  a  $j+1 = r$ . Pro každé  $j, 0 \leq j < r$ , bude  $w_j$  značit sloupcový vektor

$$\begin{pmatrix} [0, j] \\ [1, j] \\ \vdots \\ [n-1, j] \end{pmatrix}.$$

Nyní všechny prvky ze sloupce  $w_1$  vyjádříme z prvků ze sloupce  $w_0$ :  $[0, 1] = -[0, 0] - [1, 0]$ ,  $[1, 1] = -[1, 0] - [2, 0]$ ,  $[2, 1] = -[2, 0] - [3, 0]$ , ...,  $[n-1, 1] = -[n-1, 0] - [n, 0] = -[n-1] - [0, 0]$ ,  $[n, 1] = [0, 1]$ . Maticově zapsáno jako:

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & -1 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot w_0$$

Označme tuto  $n \times n$  matici jako  $W$ , tj.  $w_1 = W \cdot w_0$ . Stejně tak  $w_2 = W \cdot w_1 = W^2 \cdot w_0$  a  $w_j = W^j \cdot w_0, j = 0, 1, \dots, r$ . Všechny prvky jsme tak vyjádřili jako lineární kombinace prvků  $[0, 0], [1, 0], \dots, [n-1, 0]$ , jež tvoří nultý sloupec  $w_0$ .

Při lepení konců válcové plochy ztotožňujeme prvky  $[i, 0], i = 0, 1, \dots, n-1$  z nultého sloupce  $w_0$  s prvky  $[(i+s) \bmod n, r], i = 0, 1, \dots, n-1$  z  $r$ -tého sloupce  $w_r$ . Proto definujeme pomocnou permutační  $n \times n$  matici  $S$ , jejíž  $s$ -tá mocnina určuje skroucení se skrutenem  $s$ :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

Působením  $S^s$  na vektor se totiž prvky vektoru „posunují nahoru mod  $n$ “ právě o  $s$  hran. Potom dostáváme, že

$$S^s W^r w_0 = w_0.$$

Tedy můžeme formulovat tvrzení dávající nám tvar definujících relací.

**Tvrzení.** *Mějme triangulaci  $(n, r, s)$ . Potom matice definujících relací grupy  $\mathbf{G}(n, r, s)$ , do níž lze vnořit triangulaci  $(n, r, s)$ , je rovna*

$$(W^r - S^{-s}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & -1 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & & 0 & -1 \end{pmatrix}^r - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}^{-s},$$

kde  $W, S$  jsou matice  $n \times n$ .

Rozepišme ještě pro názornost prvky z druhého sloupce  $w_2$ :  $[0, 2] = -[0, 1] - [1, 1] = [0, 0] + 2[1, 0] + [2, 0], [i, 2] = [i, 0] + 2[i+1, 0] + [i+2, 0], i = 0, 1, \dots, n-2, [n-1, 2] = -[n-1, 1] - [0, 1] = [n-1, 0] + 2[0, 0] + [1, 0]$ . Obecně libovolný prvek  $[i, j]$  daný triangulací vyjádříme snadno pomocí indukce jako lineární kombinaci prvků z nultého sloupce  $w_0$ :

$$[i, j] = (-1)^j \cdot \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} [(i+k) \bmod n, 0].$$

Ztotožněním prvků  $[i, 0]$  s prvky  $[(i + s) \bmod n, r], i = 0, 1, \dots, n - 1$  dostaneme definující relace grupy  $\mathbf{G}(T)$  vyjádřené jako:

$$[(i + s) \bmod n, r] = (-1)^r \cdot \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} [(i + s + k) \bmod n, 0] = [i, 0],$$

kde  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ . Maticový zápis se však zdá být šikvnější.

Maticy definujících relací grupy  $\mathbf{G}(n, r, s)$  spolu se Smithovým algoritmem nám dávají úplný popis těchto grup (resp.  $\mathbf{H}(n, r, s)$ ).

## 2.3 Beztorzní hodnota grupy $\mathbf{G}(n, r, s)$

V této podkapitole dokážeme jiným způsobem, avšak jen pro případ 3-homogenní latinské záměny  $T$  (resp. triangulace  $(n, r, s)$  z ní odvozené), jeden z výsledků článku [3].

**Tvrzení.** *Beztorzní hodnota grupy  $\mathbf{G}(n, r, s)$  je rovna dvěma.*

*Důkaz.* Z předchozí podkapitoly 2.2 víme, že matice definujících relací pro grupu  $\mathbf{G}(n, r, s)$  je  $(W^r - S^{-s})$ . Chceme určit její hodnotu. Proto nejprve spočítáme vlastní čísla matic  $W$  a  $S$ . Jednoduchým výpočtem spočítáme charakteristický polynom matice  $W$ :

$$\det(W - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda & -1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & -1 - \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \dots & & 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (-1 - \lambda)^n - 1.$$

$E$  značí jednotkovou matici. Vlastní čísla matice  $W$  jsou pak tvaru  $-1 - \sqrt[n]{1}$ , kde  $\sqrt[n]{1}$  značí  $n$ -té odmocniny z jedné. Položíme-li  $\xi = \exp(\frac{2\pi}{n}i)$ , jsou to právě všechny hodnoty  $-1 - \xi^k, k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Charakteristický polynom matice  $S$  je:

$$\det(S - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & & & & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^n + (-1)^{n+1}.$$

Vlastní čísla matice  $S$  jsou  $\xi^k, k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Definujme pomocnou transformační matici  $T = (\xi^{ij})_{n \times n}, i, j = 0, 1, \dots, n - 1$ . Označíme-li ještě  $\bar{T} = (\xi^{-ij})_{n \times n}$ , pak  $T \cdot \bar{T} = \bar{T} \cdot T = nE$  a  $T^{-1} = \frac{1}{n}\bar{T}$ . Matici  $T$  použijeme k diagonalizaci matic  $W$  a  $S$ ; snáze pak určíme hodnotu  $W^r - S^{-s}$ .



Diagonalizujeme:

$$\begin{aligned} W \cdot T &= -T \cdot \text{diag}(1 + \xi^0, 1 + \xi, 1 + \xi^2, \dots, 1 + \xi^{n-1}), \\ T^{-1}WT &= -\text{diag}(1 + \xi^0, 1 + \xi, 1 + \xi^2, \dots, 1 + \xi^{n-1}), \\ TWT^{-1} &= -\text{diag}(1 + \xi^0, 1 + \xi^{n-1}, 1 + \xi^{n-2}, \dots, 1 + \xi), \end{aligned}$$

Podobně pro matici  $S$  dostaneme:

$$T^{-1}ST = \text{diag}(\xi^0, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}).$$

Zajímá nás hodnota matice  $T^{-1}(W^r - S^{-s})T$ , což je ekvivalentní hodnotě matice  $(W^r - S^{-s})$ . Zřejmě platí rovnost:

$$\begin{aligned} T^{-1}(W^r - S^{-s})T &= (T^{-1}WT)^r - (T^{-1}ST)^{-s} = \\ &= (-1)^r \text{diag}\left((1+1)^r, (1+\xi)^r, (1+\xi^2)^r, \dots, (1+\xi^{n-1})^r\right) - \\ &- \text{diag}\left(1^{-s}, \xi^{-s}, (\xi^2)^{-s}, \dots, (\xi^{n-1})^{-s}\right) = \\ &= \text{diag}\left((-1)^r(1+1)^r - 1^{-s}, (-1)^r(1+\xi)^r - \xi^{-s}, \dots, (-1)^r(1+\xi^{n-1})^r - (\xi^{n-1})^{-s}\right). \end{aligned}$$

Vyšetřujeme tedy, zda někdy může nastat rovnost

$$(-1)^r(1 + \xi^k)^r = (\xi^k)^{-s} \quad (2.1)$$

pro nějaká  $r, s; k = 0, 1, \dots, n-1$ . Pokud rovnost nenastane, bude mít matice  $(W^r - S^{-s})$  plnou hodnotu.

Protože absolutní hodnota pravé strany rovnice 2.1 je rovna jedné, musí také platit podmínka na absolutní hodnotu levé strany:

$$|1 + \xi^k| = 1. \quad (2.2)$$

Tedy  $|1 + \exp(\frac{2\pi}{n}ki)| = |\exp(\frac{\pi}{n}ik)\left(\exp(-\frac{\pi}{n}ki) + \exp(\frac{\pi}{n}ki)\right)| = |2 \cos(\frac{\pi}{n}k)| = 1$ . Potom  $|\cos(\frac{\pi}{n}k)| = \frac{1}{2}$ . Tedy pro argument  $\xi^k$  jsou možné hodnoty  $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ . Podmínku 2.2 však splňují pouze argumenty  $\frac{2\pi}{3}$  a  $\frac{4\pi}{3}$ . Aby taková možnost nastala, je třeba ověřit zda je pro nějaké  $k$  splněna rovnost  $\frac{2\pi}{n}k = \frac{2\pi}{3}$ , tedy  $k = \frac{n}{3}$ . Protože však  $3 \mid n \forall n$ , takové celé  $k$  menší než  $n$  existuje. Označme onu odpovídající  $n$ -tou odmocninou z jedné jako  $\tilde{\xi}^k$ . Podobně pro  $k = \frac{2n}{3}$  a označme druhou uvažovanou odmocninou jako  $\overline{\tilde{\xi}^k}$ .

Zbývá ověřit splnění rovnosti 2.1 pro  $k = \frac{n}{3}$  a  $k = \frac{2n}{3}$ . Přepišme odmocninu  $\tilde{\xi}^k$  a číslo  $-1$  do exponenciálního tvaru, využijme, že platí rovnost  $1 + \exp(\frac{2\pi}{3}i) = \exp(\frac{\pi}{3}i)$ , základních vlastností exponenciály a upravujeme:

$$\begin{aligned} \exp(-\pi ir) \exp(\frac{\pi}{3}ir) &= \exp(\frac{2\pi}{3}i(-s)) \\ \exp(-\frac{2\pi}{3}ir) &= \exp(-\frac{2\pi}{3}is) \end{aligned}$$

Porovnáním argumentů máme, že:

$$\begin{aligned} -\frac{2\pi}{3}ir &= -\frac{2\pi}{3}is + 2\alpha\pi i, \quad \alpha \in \mathbb{Z} \\ s &= r + 3\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z} \\ s &\equiv r \pmod{3} \end{aligned}$$

Tato podmínka je vždy splněna, neboť se shoduje s podmínkou z konstrukce triangulace toru. Tedy všechny rovnice nad ní jsou platné včetně rovnice 2.1 pro  $\tilde{\xi}^k, k = \frac{n}{3}$  a podobný výpočet provedeme i pro  $\overline{\xi}^k, k = \frac{2n}{3}$ , který nám rovněž dá platnost rovnice 2.1. Tato rovnice je tak vždy splněna právě pro dvě hodnoty  $k$ . Na diagonále matice  $T^{-1}(W^r - S^{-s})T$  jsou tedy dvě nuly a hodnota matice  $T^{-1}(W^r - S^{-s})T$  je  $n - 2$ . Proto také hodnota matice  $(W^r - S^{-s})$  je rovna  $n - 2$ , tedy beztorzní hodnota grupy  $\mathbf{G}(n, r, s)$  je rovna dvěma.  $\square$

Spolu s poznatky z podkapitoly 1.3 o Smithově normální formě jsme dokázali tvrzení:

**Tvrzení.**  $\mathbf{G}(n, r, s) \cong \mathbf{H}(n, r, s) \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , kde  $\mathbf{H}(n, r, s)$  je konečná grupa.

## 3. Příklady triangulací

### 3.1 Jednoduché posloupnosti triangulací

Nejjednoduššími posloupnostmi triangulací jsou tři třídy posloupností  $\{(3, r, s)\}_{k \geq 1}$  pro pevně zvolené  $s \in \{0, 1, 2\}$ , kde podle podkapitoly 2.1 platí  $r = 3k + s$ . Ukážeme, že grupy  $\mathbf{H}(3, r, s)$  jsou cyklické a spočteme rekurzivní i explicitní vzorec pro jejich řády.

**Lemma.** *Pro každé  $\alpha \in \mathbb{Z}$  a  $r \in \mathbb{N}$  existuje  $\tilde{\alpha} \in \mathbb{Z}$  takové, že*

$$W^r \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} + S^{-r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde  $W = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  a  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  jsou matice definované v podkapitole 2.2 pro  $n = 3$ .

*Důkaz.* Lemma dokážeme indukcí podle  $r$ . Pro  $r = 1$  máme:

$$\begin{aligned} W \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha + 1 \end{pmatrix} &= (-E - S) \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ -2\alpha - 1 \\ -2\alpha - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} + 1 \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} + S^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde  $E$  značí jednotkovou matici. Předpokládejme, že platí:

$$W^{r-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} + S^{-(r-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

S využitím indukčního předpokladu počítejme:

$$\begin{aligned} W^r \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha + 1 \end{pmatrix} &= W \left( \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} + S^{-r+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} + WS^{-r+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} + S^{-r+1} \left( \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix} + S^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} a + b \\ a + b \\ a + b \end{pmatrix} + S^{-r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} + S^{-r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde  $a, b, c$  jsou nějaká celá čísla. □

Poznamenejme, že matice  $S^r$ ,  $r \in \mathbb{N}$  jsou po řadě rovny maticím

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

v závislosti na hodnotě  $r \bmod 3$ .

Z podkapitoly 2.3 víme, že beztorzní hodnota  $\mathbf{G}(3, r, s)$  je dva. Tedy její torzní hodnota je jedna a grupa  $\mathbf{H}(3, r, s)$  je tak cyklická. Vyberme nějaký z jejích generátorů a označme ho  $x$ . Předpokládejme, že existuje  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , že

$$w_0 = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha x \\ (\alpha + 1)x \end{pmatrix}.$$

Dále takové typy vektorů budeme značit jako:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha + 1 \end{pmatrix} x.$$

**Lemma.** *Je-li  $w_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha + 1 \end{pmatrix} x$  nultý sloupec triangulace  $(3, r, s)$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , pak*

*existuje  $\tilde{\alpha} \in \mathbb{Z}$  takové, že  $w_r = W^r w_0 = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} x + S^{-r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x$  je  $r$ -tý sloupec triangulace a jediná definující relace grupy  $\mathbf{H}(3, r, s)$  je  $(\tilde{\alpha} - \alpha)x = 0$ .*

*Důkaz.* První část plyne z předchozího lemmatu. Z podkapitoly 2.2 víme, že definující relace grupy  $\mathbf{G}(3, r, s)$  jsou

$$W^r w_0 = S^{-s} w_0.$$

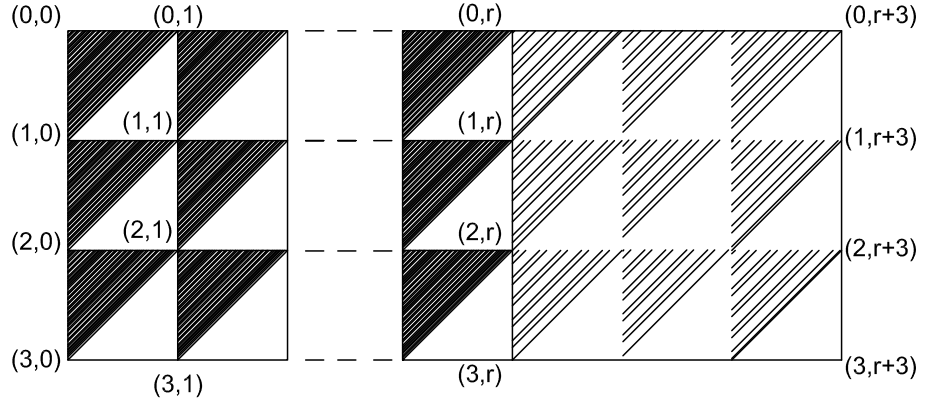
Rozepišme pravou stranu:

$$S^{-s} w_0 = S^{-s} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} x + S^{-s} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x.$$

Dostáváme tak rovnost:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} x + S^{-r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} x + S^{-s} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x \\ \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} x &= 0, \end{aligned}$$

protože  $S^{-s} = S^{-r}$ , neboť  $s \equiv r \pmod{3}$ . □



Obrázek 3.1: Triangulace  $(3, r, s)$  a její „prodloužení“ na triangulaci  $(3, r + 3, s)$

Označme vrcholy triangulace  $(3, r, s)$  (resp.  $(3, r + 3, s)$ ) jako na obrázku 3.1. Zvolme pevně  $s \in \{0, 1, 2\}$ . Mějme triangulaci  $(3, r, s)$ . Jako v předchozích příkladech v podkapitole 1.2 položme  $a = ([0, 0], [1, 0], [0, 1]) = (0, 0, 0)$  a dále položme  $x = [2, 0]$ . Protože nultý sloupec je

$$w_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x,$$

můžeme aplikovat výše uvedená lemmata pro  $\alpha = 0$ . Potom

$$w_r = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} x + S^{-r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x$$

a jediná definující relace grupy  $\mathbf{H}(3, r, s)$  je  $\tilde{\alpha}x = 0$ . Zřejmě  $\tilde{\alpha}$  závisí na  $k$  (resp.  $r$ ). Definujme  $a_k$  tak, že  $a_k$  je rovno  $\tilde{\alpha}$ , které obdržíme z prezentace grupy  $\mathbf{H}(3, r, s)$ , kde  $r = 3k + s$ . Prodlužme triangulaci  $(3, r, s)$  na následující triangulaci v posloupnosti  $\{(3, r, s)\}_{k \geq 1}$ , což je triangulace  $(3, r + 3, s)$ ,  $r = 3(k + 1) + s$  viz obrázek 3.1. Spočtěme její  $(r + 3)$ -tý sloupec z  $r$ -tého sloupce:

$$w_{r+3} = W^3 \left( \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} x + S^{-r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x \right) = \begin{pmatrix} -8\tilde{\alpha} - 3 \\ -8\tilde{\alpha} - 3 \\ -8\tilde{\alpha} - 3 \end{pmatrix} x + S^{-r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x$$

Definující relace grupy  $\mathbf{H}(3, r + 3, s)$  tak je podle lemmatu:

$$(-8\tilde{\alpha} - 3)x = 0$$

Tedy

$$(-8a_k - 3)x = 0 \tag{3.1}$$

Máme tak rekurzivní vyjádření  $a_{k+1} = -8a_k - 3$ ,  $k \geq 1$ , kde  $a_1$  spočteme pro různá  $s \in \{0, 1, 2\}$ . Nechť nejprve  $s = 0$  (což odpovídá příkladu z podkapitoly 1.2) pak  $r = 3$  a spočteme, že

$$w_3 = W^3 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x + S^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x \right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} x + S^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x.$$

Pro  $s = 1$  je  $r = 4$  a spočteme

$$w_4 = W^4 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x + S^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} x + S^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x.$$

Pro  $s = 2$  je  $r = 5$  a spočteme

$$w_5 = W^5 \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x + S^{-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x \right) = \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ -11 \end{pmatrix} x + S^{-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x.$$

Dostáváme tak:

$$a_1 = \begin{cases} -3 & \text{pokud } s = 0 \\ 5 & \text{pokud } s = 1 \\ -11 & \text{pokud } s = 2 \end{cases}$$

Čísla  $a_k$  jsme definovali tak, že  $a_k x = 0$  je definující relace grupy  $\mathbf{H}(3, r, s)$ . Tato grupa je tak nutně řádu  $|a_k| = o_k$ . Potom  $\{o_k\}_{k \geq 1} = \{|a_k|\}_{k \geq 1}$  je posloupnost řádů cyklických grup  $\mathbf{H}(3, r, s)$ ,  $r = 3k + s$ .

Indukcí snadno nahlédneme, že pro  $s \in \{0, 2\}$  je  $a_{2k} > 0, a_{2k+1} < 0, k \geq 0$  a pro  $s = 1$  je  $a_{2k} < 0, a_{2k+1} > 0$ . Tedy pro  $s \in \{0, 1, 2\}$  máme:

$$o_{k+1} = |a_{k+1}| = (-1)^{k+s+1} a_{k+1} = (-1)^{k+s+1} (-8a_k - 3), k \geq 1$$

Protože  $o_k = (-1)^{k+s} a_k$  dostáváme:

$$\begin{aligned} o_{k+1} &= (-1)^{k+s+1} (-8(-1)^{k+s} o_k - 3) \\ &= 8o_k + 3(-1)^{k+s}, k \geq 1, \end{aligned} \tag{3.2}$$

kde

$$o_1 = \begin{cases} 3 & \text{pokud } s = 0 \\ 5 & \text{pokud } s = 1 \\ 11 & \text{pokud } s = 2 \end{cases}$$

Což je ekvivalentní vyjádření:

$$o_{k+2} = 7o_{k+1} + 8o_k, k \geq 1,$$

kde

$$o_1 = \begin{cases} 3 & \text{pokud } s = 0 \\ 5 & \text{pokud } s = 1 \\ 11 & \text{pokud } s = 2 \end{cases}, \quad o_2 = \begin{cases} 21 & \text{pokud } s = 0 \\ 43 & \text{pokud } s = 1 \\ 85 & \text{pokud } s = 2 \end{cases},$$

kde  $o_2$  spočteme ze vztahu 3.2. Tato vyjádření jsou ekvivalentní explicitnímu vyjádření:

$$o_k = \begin{cases} \frac{1}{3}(8^k + (-1)^{k+1}) & \text{pokud } s = 0 \\ \frac{1}{3}(2 \cdot 8^k + (-1)^k) & \text{pokud } s = 1 \\ \frac{1}{3}(4 \cdot 8^k + (-1)^{k+1}) & \text{pokud } s = 2 \end{cases} \tag{3.3}$$

Uvažme nyní posloupnost triangulací  $\{(3, r, s)\}_{r \geq 3}$ , kde  $s$  dopočteme ze vztahu  $s \equiv r \pmod{3}$ . Oproti předchozím výpočtům tak nevolíme  $s$  pevně, je však určeno jednoznačně z hodnoty  $r$ . Mějme triangulaci  $(3, r, s)$  a prodlužme ji na následující triangulaci v dané posloupnosti, což je triangulace  $(3, r+1, s)$ . Podobným výpočtem jako výše (tedy opět s využitím lemat), spočtěme její  $(r+1)$ -ní sloupec z  $r$ -tého sloupce:

$$w_{r+1} = W \left( \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} x + S^{-r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x \right) = \begin{pmatrix} -2\tilde{\alpha} - 1 \\ -2\tilde{\alpha} - 1 \\ -2\tilde{\alpha} - 1 \end{pmatrix} x + S^{-(r+1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x$$

Definujme  $a_r$  rovno  $\tilde{\alpha}$  a počítejme zcela analogicky jako v předchozích výpočtech. Tedy již stručně:

$$a_{r+1} = -2a_r - 1, r \geq 3, a_3 = -3 \quad (3.4)$$

Grupa  $\mathbf{H}(3, r, s)$  je tak řádu  $|a_r| = o_r$ . Snadno pak nahlédneme, že  $o_r = (-1)^r a_r$  a

$$o_{r+1} = 2o_r + (-1)^r, r \geq 3, o_3 = 3$$

Ekvivalentně pak:

$$o_{r+2} = o_{r+1} + 2o_r, r \geq 3, o_3 = 3, o_4 = 5$$

Explicitní vyjádření tohoto vztahu uveďme jako tvrzení:

**Tvrzení.** *Mějme posloupnost grup  $\{\mathbf{H}(3, r, s)\}_{r \geq 3}$ . Potom posloupnost jejich řádů  $\{o_r\}_{r \geq 3}$  je dána rovnicí*

$$o_r = \frac{1}{3}(2^r + (-1)^{r+1}).$$

Toto vyjádření zřejmě koresponduje s vyjádřením 3.3, kde bereme v úvahu pevná  $s \in \{0, 1, 2\}$  a následující hodnotu  $r$  vždy o tři větší než předcházející hodnotu.

Mějme triangulaci  $(3, r, s)$  zkonstruovanou z 3-homogenní latinské záměny  $T = (T_1, T_2), T_1, T_2 \subset A_1 \times A_2 \times A_3$ . Označme  $j$ -tý sloupec triangulace jako  $t_j^T = ((j \bmod 3, j), ((1+j) \bmod 3, j), ((2+j) \bmod 3, j)), 0 \leq j < r$ . Nechť pro  $t_0^T$  platí, že vrchol  $(i, 0) \in A_{i+1}, i \in \{0, 1, 2\}$ . Na sloupcích triangulace tak můžeme nahlížet jako na prvky množiny  $A_1 \times A_2 \times A_3$  (pro lepší pochopení viz obrázek 2.3 v podkapitole 2.1). Definujme zobrazení  $\varphi: A_1 \times A_2 \times A_3 \rightarrow \mathbf{G}(3, r, s)$  předpisem

$$\left( (j \bmod 3, j), ((1+j) \bmod 3, j), ((2+j) \bmod 3, j) \right) \mapsto (a_j, a_j, a_j + 1), 0 \leq j < r,$$

kde  $a_{j+1} = -2a_j - 1, j \geq 0, a_0 = 0$ . Hodnoty  $a_1 = -1$  a  $a_2 = 1$  snadno spočteme z  $Ww_0$  (resp.  $W^2w_0$ ), pro  $j \geq 3$  máme rovnici 3.4. Z tvrzení uvedeného výše víme, že posloupnost  $\{o_j\}_{j \geq 3}$  je ostře rostoucí. Navíc platí, že  $a_j = (-1)^j o_j, 0 \leq j < r$ . Zobrazení  $\varphi$  je prosté a triangulaci  $(3, r, s)$  tedy lze vnořit do grupy  $\mathbf{G}(3, r, s)$ .

**Příklad.** *Mějme triangulaci  $(3, 5, 2)$  zkonstruovanou z 3-homogenní latinské záměny  $T = (T_1, T_2), T_1, T_2 \subset A_1 \times A_2 \times A_3$ . Množiny  $A_i, i \in \{1, 2, 3\}$  jsou tak tvaru  $A_1 = \{(j \bmod 3, j)\}, A_2 = \{((j+1) \bmod 3, j)\}, A_3 = \{((j+2) \bmod 3, j)\}, 0 \leq j < 5$ . Zobrazení vrcholy výše definovaným zobrazením  $\varphi$ . Potom tabulka pro  $T_1$*

	0	-1	1	-3	5	
0	0	1	6			
-1	1	2	0			
1		0	-2	2		
-3			2	6	-2	
5	6				-2	1

Tabulka 3.1: Tabulka pro parciální latinský čtverec  $T_1$

vypadá viz 3.1. Počítáme-li modulo 11, lze nalézt tabulku  $T_1$  jako fragment tabulky sčítání v abelovské grupě  $\mathbb{Z}_{11}$ . Zdůrazněme, že tabulkou sčítání nemyslíme standardně uvažovanou tabulku, kde po sečtení čísla v  $i$ -tém řádku s číslem v  $j$ -tém sloupci dostaneme na odpovídající pozici  $(i, j)$  jejich součet. V našem případě po sečtení všech příslušných tří čísel dostáváme nulu, tak jsme totiž definovali definující relace grupy  $\mathbf{G}(T)$ .

	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>
<b>2</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>
<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>6</b>
<b>7</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>
<b>8</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>
<b>9</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>
<b>10</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>

Tabulka 3.2: Tabulka  $T_1$  tučně vyznačená v tabulce sčítání v  $\mathbb{Z}_{11}$

## 3.2 Modulární aritmetika

V této části, aniž bychom užili Smithova algoritmu, pomocí modulární aritmetiky ukážeme příklad vnoření jistých triangulací.

Mějme triangulaci  $(n, r, s)$ , kde  $(r + 1)$  je prvočíslo, zkonstruovanou z latinské záměny  $T = (T_1, T_2)$ ,  $T_1, T_2 \subset A_1 \times A_2 \times A_3$ . Takové  $r \in \mathbb{N}$  jistě existuje a zřejmě je sudé. Víme, že definující relace grupy  $\mathbf{G}(n, r, s)$  jsou  $S^s W^r w_0 = w_0$ . Rozepišme



rovnice se stejným značením jako v podkapitole 2.2, kde využijme, že  $(-1)^r = 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} [(s+k) \bmod n, 0] &= [0, 0] \\ \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} [(1+s+k) \bmod n, 0] &= [1, 0] \\ \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} [(2+s+k) \bmod n, 0] &= [2, 0] \\ &\vdots \\ \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} [(n-1+s+k) \bmod n, 0] &= [n-1, 0] \end{aligned}$$

Prvky tvaru  $[l \bmod n, 0]$  dále označujeme jen jako  $[l, 0]$ , kde bereme  $l = l \bmod n$ . V dalším užitíme známého vzorce  $\binom{r}{k} + \binom{r}{k+1} = \binom{r+1}{k+1}$ . Počítejme modulo prvočíslo  $(r+1)$ :

$$\binom{r}{k} + \binom{r}{k+1} = 0 \pmod{r+1} \quad (3.5)$$

Sečteme nejprve nultou (relace (rovnice) číslujeme v souladu s proměnou na pravé straně relace) definující relaci s první relací:

$$\binom{r}{0} [s, 0] + \sum_{k=0}^{r-1} \left( \binom{r}{k} + \binom{r}{k+1} \right) [s+k+1, 0] + \binom{r}{r} [r+s+1, 0] = [0, 0] + [1, 0]$$

Použijme rovnosti 3.5, celá suma je tak rovna nule a dostáváme:

$$[s, 0] + [r+s+1, 0] = [0, 0] + [1, 0]$$

Nyní sečteme  $i$ -tou rovnicí s  $(i+1)$ -rovnici pro všechna  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , kde klademe  $n = 0$ . Počítejme opět modulo  $(r+1)$ , čímž všechny sumy podobně jako výše jsou rovny nule:

$$\begin{aligned} [s, 0] + [r+s+1, 0] &= [0, 0] + [1, 0] \\ [s+1, 0] + [r+s+2, 0] &= [1, 0] + [2, 0] \\ [s+2, 0] + [r+s+3, 0] &= [2, 0] + [3, 0] \\ &\vdots \\ [s+n-2, 0] + [r+s+n-1, 0] &= [n-2, 0] + [n-1, 0] \\ [s+n-1, 0] + [r+s, 0] &= [n-1, 0] + [0, 0] \end{aligned}$$

Sečteme všechny rovnice do jedné.  $r, s$  jsou konstanty a v první složce počítáme modulo  $n$  potom tedy máme, že:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=0}^{n-1} [i, 0] &= 2 \sum_{i=0}^{n-1} [i, 0] \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Dostáváme tak, že pokud počítáme modulo  $(r + 1)$ , pak jsou všechny definující relace grupy  $\mathbf{G}(n, r, s)$  (tedy i  $\mathbf{H}(n, r, s)$ ) splněny.

Mějme zobrazení  $\varphi: A_1 \cup A_2 \cup A_3 \rightarrow \mathbb{Z}_{r+1}$ . Zřejmě pro nějaká  $a, b \in A_i, a \neq b, i \in \{1, 2, 3\}$  může nastat, že  $\varphi(a) = \varphi(b)$ . Například pro triangulaci  $(3, 10, 1)$  a pro  $\varphi$  definované podobně jako v předchozí podkapitole 3.1:

$$(j \bmod 3, j) \mapsto a_j \bmod (10 + 1), 0 \leq j < 5$$

Pro  $j \in \{0, 5\}$  (z té samé podkapitoly víme, že  $a_5 = -11$ ) platí, že  $\varphi((0, 0)) = 0 = \varphi((2, 5))$ , přičemž  $(0, 0), (2, 5) \in A_1$ . Pokud tedy připustíme nahrazení více prvků z množiny  $A_i, i \in \{1, 2, 3\}$  jedním prvkem, čímž nemusí vzniknout separovaná latinská záměna, lze tabulku  $T_1$  nalézt jako fragment v tabulce sčítání pro grupu  $\mathbb{Z}_{r+1}$ .

Přímým důsledkem výše zjištěného je, že  $(r + 1) \mid |\mathbf{H}(n, r, s)|$ .

# Závěr

Jak je z textu i z příložených výpočtů patrné, explicitní popis grupy  $\mathbf{H}(T)$  je nesnadný. Je možné, že v obecném případě žádný vzorec, který by odpovídal velikosti grupy neexistuje. Pro některé speciální typy takové vzorce pravděpodobně existují. Například, zdá se, že pro grupy  $\mathbf{H}(6, r, s)$  to je  $|\mathbf{H}(6, r, s)| = \frac{1}{12} \left( 2^r + 6^r - (-3)^r - (-1)^r - (-3)^{\frac{r}{2}} (2^r + (-2)^r - (-1)^r - 1) \right)$ . Formální důkaz se mi však odvodit nepovedlo. Jako nadějnější se jeví hypotéza, že každou 3-homogenní latinskou záměnu  $T$  lze vnořit do abelovské grupy  $\mathbf{H}(T)$ .

Za úspěch této práce lze považovat redukci počtu  $n \cdot r$  definujících relací grupy  $\mathbf{G}(T)$  na  $n$  relací prostřednictvím matice  $(W^r - S^{-s})$  a explicitní popis grup  $\mathbf{H}(3, r, s)$ .

# Seznam použité literatury

- [1] PONTRYAGIN, L.S. *Foundations of Combinatorial Topology*. Graylock Press, Rochester, N.Y., 1952.
- [2] DRÁPAL, Aleš. *Teorie grup – základní aspekty*. Karolinum, Praha, 2009.
- [3] DRÁPAL, Aleš; HÄMÄLÄINEN, Carlo; KALA, Vítězslav. *Latin Bitrades, Dissections of Equilateral Triangles, and Abelian Groups*. *Journal of Combinatorial Designs* 18, 1-24, 2010.
- [4] COHEN, Henri. *A Course in Computational Algebraic Number Theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, fourth printing, 2000.
- [5] NASH, Charles; SEN, Siddhartha. *Topology and Geometry for Physicists*. Academic Press, London, third printing, 1987.
- [6] CAVENAGH, N.J.; DONOVAN, D.M.; DRÁPAL, A. *3-homogeneous Latin trades*. *Discrete Math.* 300, 57-70, 2005.
- [7] GRANNELL, M. J.; GRIGGS, T. S.; KNOR, M.. *Biembeddings of symmetric configurations and 3-homogeneous Latin trades*. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 49(3), 411–420, 2008.
- [8] ALTSHULER, A. *Construction and enumeration of regular maps on the torus*. *Discrete Math.* 115, 201–217, 1973.
- [9] NEGAMI, S. *Uniqueness and faithfulness of embedding of toroidal graphs*. *Discrete Math.* 44, 161–180, 1983.

## 4. Apendix

V tomto příloženém apendixu vypíšeme část několika posloupností, počítačově spočtených, grup  $\{\mathbf{H}(n, r, s)\}_{r \geq 3}$ , kde  $s \equiv r \pmod{3 + 3k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, \frac{n-3}{3}$ . Rovněž ukážeme některé vyzorované zajímavosti. Grupy počítáme v programu Gap prostou aplikací Smithova algoritmu na  $n \times n$  matici definujících relací  $(W^r - S^{-s})$ . Místo zápisu  $\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{d_q}$  budeme v tabulkách psát zkráceně jen  $d_1 \times d_2 \times \dots \times d_q$ . Příliš dlouhá čísla nahradíme symbolem \*.

### 4.1 $\mathbf{H}(3, r, s)$

Pro grupy  $\mathbf{H}(3, r, s)$  jsme úspěšně odvodili explicitní vzorec pro jejich řády  $o_r = \frac{1}{3}(2^r + (-1)^{r+1})$ .

$r$	$o_r$	$r$	$o_r$
3	3	22	1398101
4	5	23	2796203
5	11	24	5592405
6	21	25	11184811
7	43	26	22369621
8	85	27	44739243
9	171	28	89478485
10	341	29	178956971
11	683	30	357913941
12	1365	31	715827883
13	2731	32	1431655765
14	5461	33	2863311531
15	10923	34	5726623061
16	21845	35	11453246123
17	43691	36	22906492245
18	87381	37	45812984491
19	174763	38	91625968981
20	349525	39	183251937963
21	699051	40	366503875925

### 4.2 $\mathbf{H}(6, r, s)$

Označme  $o_r = |\mathbf{H}(6, r, s)|$ . Na základě níže zobrazených počítačových výsledků jsem zkoumal v posloupnosti  $\{o_r\}_{r \geq 3}$ , možnou lineární závislost  $o_r$  na předchozích členech. Hodnoty  $s$  uvažuji jen tvaru  $(r - 3) \pmod{6}$ . Experimentálně mi vyšla lineární závislost na osmi předchozích členech:

$$o_{r+8} = 4o_{r+7} + 2o_{r+6} + 36o_{r+5} + 183o_{r+4} - 216o_{r+3} + 72o_{r+2} - 864o_{r+1} - 1296o_r,$$

kde počáteční hodnoty jsou uvedeny níže v příložené tabulce. Tomuto vyjádření odpovídá explicitní vztah:

$$o_r = \frac{1}{12} \left( 2^r + 6^r - (-3)^r - (-1)^r - (-3)^{\frac{r}{2}} (2^r + (-2)^r - (-1)^r - 1) \right)$$

$r$	$s$	$\mathbf{H}(6, r, s)$	$ \mathbf{H}(6, r, s) $
3	0	21	21
4	1	$5 \times 5 \times 5$	125
5	2	671	671
6	3	$13 \times 273$	3549
7	4	23521	23521
8	5	$41 \times 3485$	142885
9	0	$19 \times 44289$	841491
10	1	$11 \times 121 \times 3751$	4992581
11	2	30248021	30248021
12	3	$5 \times 365 \times 99645$	181852125
13	4	1088524711	1088524711
14	5	$1093 \times 5968873$	6523978189
15	0	39183280521	39183280521
16	1	$17 \times 3281 \times 4216085$	235160573045
17	2	1410565726331	1410565726331
18	3	$9841 \times 859916421$	8462437499061
19	4	50780075233021	50780075233021
20	5	$25 \times 29525 \times 412789025$	304689899078125
21	0	$43 \times 42513490509357$	1828080091902351
22	1	$23 \times 88573 \times 5384086951$	10968348870751229
23	2	65810859767097521	65810859767097521
24	3	$265721 \times 1486019449005$	394866574009057605
25	4	2369190739770988771	2369190739770988771
26	5	$797161 \times 17832189445981$	14215125970947659941
27	0	$19 \times 4488992880277197159$	85290864725266746021
28	1	$145 \times 2391485 \times 1475768653105$	511745396618767584125
29	2	3070471112951650601591	3070471112951650601591
30	3	$11 \times 7174453 \times 233439704340843$	18422824058400014922669
31	4	110536959911839640930521	110536959911839640930521
32	5	$21523361 \times 30814043857826165$	663221789821825224540565
33	0	$67 \times 59392993364723226943833$	3979330555436456205236811
34	1	$64570081 \times 369768514905237941$	23875982958680921174643221
35	2	143255899983204514207283021	143255899983204514207283021
36	3	$365 \times 193710245 \times 12156773218820685$	859535404298925628382506125
37	4	5157212399282791443363470431	5157212399282791443363470431
38	5	$581130733 \times 53246666515763793073$	30943274342112369123372812509

### 4.3 $\mathbf{H}(9, r, s)$

Zkoumejme, zda grupy  $\mathbf{H}(9, r, 0)$  jsou maximálního torzního ranku. Zdá se, že grupy tohoto typu, které mají maximální torzní rank (jeho hodnota je sedm) jsou grupy tvaru  $\{\mathbf{H}(9, 9k, 0)\}_{k \geq 1}$ .

$r$	$\mathbf{H}(9, r, 0)$
9	$3 \times 3 \times 3 \times 9 \times 171 \times 171 \times 513$
18	$57 \times 57 \times 57 \times 171 \times 171 \times 6327 \times 9699291$
27	$9 \times 9 \times 9 \times 27 \times 513 \times 3454384509 \times *$
36	$2109 \times 2109 \times 2109 \times 6327 \times 50343939 \times 855846963 \times *$
45	$3 \times 3 \times 3 \times 9 \times 171 \times * \times *$
54	$171 \times 171 \times 171 \times 513 \times 513 \times * \times *$
63	$3 \times 6 \times 6 \times 18 \times 342 \times * \times *$
72	$153957 \times 153957 \times 153957 \times 461871 \times 855846963 \times * \times *$
81	$27 \times 27 \times 27 \times 81 \times 250857 \times * \times *$
90	$57 \times 57 \times 57 \times 171 \times 171 \times * \times *$
99	$3 \times 597 \times 597 \times 1791 \times 34029 \times * \times *$
108	$689643 \times 689643 \times 689643 \times 2068929 \times 151031817 \times * \times *$

Ostatní výsledky pro grupy  $\mathbf{H}(9, r, s)$ :

$r$	$s$	$\mathbf{H}(9, r, s)$	$ \mathbf{H}(9, r, s) $
3	0	171	171
	3	$3 \times 3 \times 3 \times 9$	243
	6	171	171
4	1	3515	3515
	4	3515	3515
	7	$17 \times 85$	1445
5	2	$71 \times 781$	55451
	5	44561	44561
	8	44561	44561
6	0	$19 \times 44289$	841491
	3	$19 \times 44289$	841491
	6	$3 \times 3 \times 57 \times 1197$	614061
7	1	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 142 \times 6106$	13872832
	4	12391009	12391009
	7	12391009	12391009
8	2	219480115	219480115
	5	$17 \times 1513 \times 7565$	194579365
	8	219480115	219480115
9	0	$3 \times 3 \times 3 \times 9 \times 171 \times 171 \times 513$	3645153819
	3	3454384509	3454384509
	6	3454384509	3454384509
10	1	59080711679	59080711679
	4	$12851 \times 4382191$	56315536541
	7	59080711679	59080711679

## 4.4 Grupy maximálního torzního ranku

Na základě výsledků se můžeme domnívat, že žádná z grup tvaru  $\mathbf{H}(6k, r, s)$ ,  $k \geq 1$  nemá maximální torzní rank.

Posloupnost grup  $\{\mathbf{H}(15, 30k, 0)\}_{k \geq 1}$  se zdají být jediné v třídě grup  $\mathbf{H}(15, r, 0)$ , jež jsou maximálního torzního ranku.

$r$	$\mathbf{H}(15, r, 0)$
30	$31 \times 124 \times 124 \times 124 \times 124 \times 620 \times 620 \times$ $\times 620 \times 6820 \times 416020 \times 137702620 \times 37317410020 \times 118333507173420$
60	$9455 \times 75640 \times 75640 \times 75640 \times 75640 \times 75640 \times 75640 \times 75640 \times$ $\times 832040 \times 150599240 \times 65849668289240 \times 8542517179522287287900200 \times *$
90	$31 \times 124 \times 124 \times 124 \times 124 \times 620 \times 620 \times 620 \times$ $\times 129580 \times 774004793980 \times 256195586807380 \times * \times *$
120	$312015 \times 4992240 \times 4992240 \times 4992240 \times 4992240 \times 4992240 \times$ $\times 4992240 \times 4992240 \times 65162715264240 \times 267604309240091786160 \times * \times * \times *$

Dalšími takovými vyzorovanými posloupnostmi jsou například  $\{\mathbf{H}(21, 42k, 0)\}_{k \geq 1}$  a  $\{\mathbf{H}(27, 27k, 0)\}_{k \geq 1}$ . Jde vidět, že u těchto grup  $n$  dělí  $r$ . V hodně případech se tato dělitelnost objevuje, ale například grupa  $\mathbf{H}(33, 99, 0)$  nemá maximální torzní rank.