Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ivana Cesneková

Řízení lineárních systémů

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jaroslav Milota CSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: MOM

Praha 2012

Na tomto mieste by som chcela veľmi poďakovať vedúcemu mojej bakalárskej práce doc. RNDr. Jaroslavovi Milotovi, CSc. za cenné pripomienky, rady, odborné vedenie práce a za zapožičanie potrebnej literatúry.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... Podpis autora

Název práce: Řízení lineárních systémů

Autor: Ivana Cesneková

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jaroslav Milota CSc., Katedra matematické analýzy, Matematicko-fyzikální fakulta, Sokolovská 83, Praha 8

Abstrakt: Cieľom tejto práce je nahliadnuť do teórie lineárnych systémov prostredníctvom populačného modela reprezentovaným parciálnou diferenciálnou rovnicou s okrajovou a počiatočnou podmienkou. Špeciálnu pozornoť venujeme silno spojitým semigrupám na Banachovom priestore. Za týmto účelom uvedieme pojem homogénneho a nehomogénneho Cauchyovho problému a riešime daný populačný model v tejto abstraktnej formulácii. Správanie systému riešime na základe vlastností spektrálnej a rezolventnej množiny. Obecne otázku kontrolovateľnosti obmedzíme na otázku uniformnej exponenciálnej stability a stabilizovateľnosti. Snahou tohto problému, je v prípade nestability systému pomocou zpätnej väzby zaručiť stabilitu systému.

Klíčová slova: kontrola, diferenciálne rovnice, stabilita, kontrolovateľnosť

Title:Control of linear systems

Author: Ivana Cesneková

Department: Katedra matematické analýzy

Supervisor: doc. RNDr. Jaroslav Milota CSc., Katedra matematické analýzy, Matematicko-fyzikální fakulta, Sokolovská 83, Praha 8

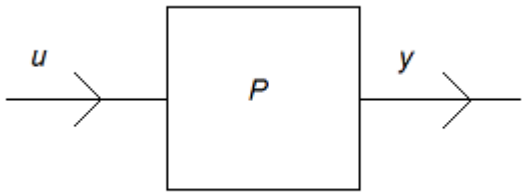
Abstract: The aim of this work is to look into the theory of linear systems via population model represented by partial differential equations with boundary and initial condition. Special attention is devoted to the strongly continuous semigroups on a complex Banach space. For this purpose, the notion of a homogeneous and inhomogeneous Cauchy problem is introduced and we solve our model in this abstract formulation. The system behaviour is based on properties of the resolvent set and spectrum. Controllability question limits to solve the uniformly exponentially stability and the exponentially stabilizability. The point of this problem is in the case of the unstability to show exponencially stability of the system by using feedback.

Keywords: control, differential equations, stability, controllability

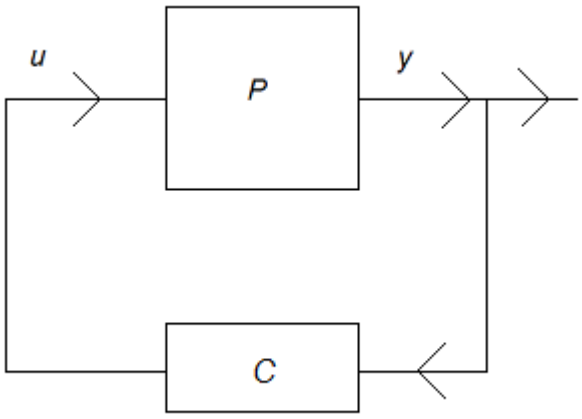
Obsah

Symbol	**Význam**
$\mathbb{R}$	množina reálnych čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexných čísel
$C([0,t],X)$	trieda spojitých funkcií z $[0,t]$ do X
$\mathbb{N}$	množina prirodzených čísel
$\Re$	reálna časť čísla
$\Im$	imaginárna časť čísla
$L^p(a,b)$	trieda Lebesguevsky merateľných funkcií s hodnotami v $\mathbb{C}$ a s $\int_a^b \lvert f\rvert^p \ dt < \infty$
$L^p(\Omega,X)$	trieda Lebesguevsky merateľných funkcií s hodnotami v X a s $\int_\Omega \lvert f\rvert^p \ dt < \infty$
$W^{1,p}(a,b)$	Sobolevov priestor rádu $(1,p)$ Bochnerovsky p-integrovateľných funkcií
$AC(a,b)$	priestor absolútne spojitých funkcií
$\mathfrak{L}(X)$	ohraničené lineárne operátory z X do X
ρ	$\rho(A)$, rezolventa množiny A
σ	$\sigma(A)$, spektrum množiny A
ω_0	$\omega_0(A)$, spektrálny rast množiny A
$*$	$B * g$, konvolúcia B s g
$\hat{}$	$\hat{f}$, Laplaceova transformácia f
$\lVert\cdot\rVert$	$\lVert x\rVert$, norma x
Rng	$Rng(A)$, obor hodnot A
Ker	$Ker(T)$, jadro T
rk	$rk(A)$, rank A
D	$D(A)$, definičný obor A
$\overline{D}$	$\overline{D(A)}$, uzáver $D(A)$
$\oplus$	$X^+ \oplus X^-$, direktný súčet X^+ a X^-

V teórii systémov uvažujeme modely, ktoré sú v kontakte s prostredím ako na obrázku:



kde P označuje študovaný model, ktorý reaguje na vstupné signály u a pozorujeme výstup y. Funkcia u sa taktiež nazýva kontrola. Teda prostredníctvom u môžme ovplyvňovať systém a pozorovať výstup y vopred určený. Obecne úlohou kontroly je nájsť vstup u, tak aby výstup y mal žiadané hodnoty. Nie vždy sa dá u explicitne vyrátať, preto sa zavádza pojem uzavretého systému ako systému zpätnej väzby:



kde P značí systém, ktorý kontrolujeme, C je kontrola. Predpokladáme, že vstupné a výstupné signály v uzloch sú rovnaké.

Teória kontroly je oblasť na rozhraní matematiky, fyziky a iných oblastí s cieľom popísať chovanie a kontrolovateľnosť daného systému. Existujú teda i rôzne spôsoby modelovania systémov. My sa budeme zaoberať abstraktnou formuláciou typu:

$$\begin{gathered}\frac{\partial x(t)}{\partial t} = Ax(t) + Bu(t), \;\; t \geq 0, \\ x(0) = x_0\end{gathered}$$

na komplexnom Banachovom priestore. V našom prípade, daného populačného modela, budeme riešiť nekonečnedimenzionálny systém. V reálnom prípade sa populácia správa nelineárne. Existuje veľa autorov zameraných na túto problematiku. My si však predstavíme lineárnu závislosť.

Pri danej úlohe parciálnej diferenciálnej rovnice, ktorú budeme riešiť, sa nám v jednotlivých kapitolách vyskytne niekoľko otázok, ktoré bude treba zodpovedať ako napríklad vhodná voľba priestoru a podobne.

Prvá časť tejto práce sa zameriava na zadefinovanie dôležitých pojmov z teórie semigrup a vlastností lineárnych operátorov.

V druhej časti si predstavíme populačný model v tvare parciálnej diferenciálnej rovnice s okrajovou a počiatočnou podmienkou, s ktorým naďalej budeme pracovať. Ukážeme si jeho analytické riešenie pomocou metody charakteristik, prevedieme si túto parciálnu diferenciálnu rovnicu na abstraktný Cauchyov problém, kde definujeme lineárny operátor A, popíšeme správanie rezolventnej množiny $\rho(A)$ a nakoniec ukážeme, že A generuje silno spojitú semigrupu S.

V tretej časti, za určitých predpokladov riešime otázku exponenciálnej stability semigrupy S a v prípade, že tieto predpoklady nebudú splnené budeme riešiť otázku exponenciálnej stabilizovateľnosti.

1. Semigrupy

Obecne dynamicky systém je zobrazenie $S(t),\ t \geq 0$ na množine X splňujúce:

$S(t+s) = S(t)S(s),\ \forall t,\ s \geq 0$
$S(0) = I$

a S je zobrazenie popisujúce zmenu stavu $x \in X$ v čase 0 do stavu $S(t)x$ v čase t. V lineárnom kontexte, stavový priestor X je vektorový priestor, S je lineárny operátor na X a nazývame ho operátorom semigrupy.

Avšak, v mnohých prípadoch je ťažké alebo až nemožné získať hodnotu $S(t),\ t \geq 0$. Tento problém rieši pochopenie infinitezimálnych zmien v nejakom danom čase.

Definícia 1. *Nech X je Banachov priestor. Funkcia $S : t \mapsto \mathfrak{L}(X)$, kde $t \in [0, \infty)$, ktorá spĺňa následujúce vlastnosti:*

$S(t+s) = S(t)\,S(s)$ *pre* $t, s \geq 0$
$S(0) = I$
$\|S(t)\,x - x\|_X = 0$ *pre* $t \to 0_+,\ \forall x \in X$

sa nazýva silno spojitá semigrupa (C_0 semigrupa).

Definícia 2. *Nech S je C_0 semigrupa. Lineárny operátor A definovaný ako:*

$$Ax = \underbrace{\lim_{t \to 0_+} \frac{1}{t}\,(S(t) - I)\,x}_{\frac{\partial +}{\partial t} S(t)x\big|_{t=0}}$$

ak limita existuje v X a S spĺňa vlastnosti z predchodzej definície a pre definičný obor $D(A)$ platí:

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0_+} \frac{S(t)x - x}{t} \right\}$$

sa nazýva infinitezimálnym generátorom C_0 semigrupy S.

Veta 1. *Nech S je silno spojitá semigrupa na Banachovom priestore X s infinitezimálnym generátorom A. Potom platí:*

- *pre* $x \in D(A), S(t)\,x \in D(A),\ \forall t \geq 0$
- $\frac{\partial}{\partial t}(S(t)\,x) = AS(t)\,x = S(t)\,Ax$, *pre* $x \in D(A),\ t > 0$
- $\frac{\partial^n}{\partial t^n}(S(t)\,x) = A^n S(t)\,x = S(t)\,A^n x$, *pre* $x \in D(A^n),\ t > 0$
- $S(t)\,x - x = \int_0^t S(s)\,Ax\,ds$, *pre* $x \in D(A)$
- $\int_0^t S(s)\,x\,ds \in D(A)$ *a* $A \int_0^t S(s)\,x\,ds = S(t)\,x - x,\ \forall x \in X$
- *A je uzavretý lineárny operátor*

- *$D(A)$ je hustý v X a $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ je hustý v X*

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v knihe [1].

□

Integrály v predchodzej vete sú v Bochnerovom zmysle (viz [1] strana 622).

Veta 2. *Pre každú C_0 semigrupu S existujú konštanty $M \geq 0$ a $\omega \in \mathbb{R}$, také že:*

$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$.

Dôkaz. Dôkaz sa nachádza v knihe [2] strana 40.

□

Veta 3. *Nech $S(t)$ je silno spojitá semigrupa s infinitezimálnym generátorom A. Ak pre $\omega_0(A) := inf_{t>0}(\frac{1}{t} log\, \|S(t)\|)$, $\Re\lambda > \omega_0(A)$ potom $\lambda \in \rho(A)$ a $\forall x \in X$ platí:*

a)$(\lambda I - A)^{-1}x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t)x\, dt$

a $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\Re\lambda - \omega_0(A)}$

b) $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda I - A)^{-1}x = x$, $\forall x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Dôkaz. Dôkaz môžme nájsť v knihe [1], strana 24.

□

1.1 Abstraktný Cauchy problém

Štandardná situácia, pri ktorej operátor semigrupy prirodzene vzniká sa nazýva abstraktný Cauchy problém. Nech X je Banachov priestor a $A : D(A) \subset X \mapsto X$ je lineárny operátor. Máme dané $x_0 \in X$. Abstraktný homogénny Cauchyov problém pozostáva z nájdenia riešenia $x(t)$ pre lineárny operátor A s počiatočnou podmienkou x_0 pre problém:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = Ax(t), \text{ pre } t \geq 0 \tag{1.1}$$

$$x(0) = x_0$$

kde riešením rozumieme funkciu x, takú že x je spojito diferencovateľná na $[0, \infty)$ a $x(t) \in D(A)$ a platí rovnica (1.1).

Ak S je C_0 semigrupa a A je jej generátor, potom riešením abstraktného homogénneho Cauhyovho problému s počiatočnou podmienkou x_0 je

$x(t) = S(t)x_0$, $\forall x_0 \in D(A)$

a toto riešenie je jednoznačné vďaka vete 1.

Ak pridáme kontrolu $f \in C([0, \tau], X)$ potom nám vznikne abstraktný nehomogénny Cauchyov problém, taktiež nazývaný ako abstraktná evolučná rovnica:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = Ax(t) + f(t), \; pre\; t \geq 0 \tag{1.2}$$

$$x(0) = x_0$$

Definícia 3. *Nech S je C_0 semigrupa a $f \in L^p([0,\tau], X])$ pre $p \geq 1$, $x_0 \in X$ potom*

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\, ds$$

je miernym riešením nehomogénneho Cauchyovho problému na $[0,\tau]$.

2. Úloha štandardného populačného modelu s vekovou štruktúrou

Uvažujeme štandardný populačný model s vekovou štruktúrou:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial x(t,a)}{\partial a} &= -\mu(a)x(t,a),\ t \geq 0,\ a \in [0,a^*) \\ x(t,0) &= \int_0^{a^*} \beta(a)x(t,a)\ da,\ t \geq 0 \\ x(0,a) &= x_0(a),\ a \in [0,a^*) \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde t je čas, a je vek a $x(t,a)$ značí hustotu populácie, a^* je maximálny vek jedinca. Merateľné funkcie závislé na veku $\mu = \mu(a)$ a $\beta = \beta(a)$ popisujú úmrtnosť a pôrodnosť populácie. Rovnica (2.1) je zložená z transportnej rovnice, ktorá vyjadruje stárnutie populácie a z pridaných prirodzených faktorov ako je pôrodnosť a úmrtnosť.

Zrejme pre funkcie pôrodnosti β a úmrtnosti μ môžme predpokladať, že sú nezáporné a pre funkciu pôrodnosti naviac platí prirodzene ohraničenosť. Ďalej predpokladajme, že jedinec sa dožije konečného veku a preto $\int_0^{a^*} \mu(a)\ da = \infty$, $\beta \in L^\infty(0,a^*),\ \mu \in L^1_{lok}([0,a^*))$.

Našou úlohou je prepísať parciálnu diferenciálnu rovnicu na abstraktný Cauchyov problém.

Najskôr je treba zvoliť vhodný priestor X, na ktorom uvažujeme $x(t,\cdot)$, pre fixovaný čas $t \in [0,\tau]$. Ihneď sa nám ponúka, na Banachovom priestore, prirodzenou cestou pracovať na $L^1(0,a^*)$ priestore, keďže $\forall t \in [0,\tau]$ chceme, aby celková populácia bolo konečné číslo. Teda z matematického hľadiska požadujeme, aby

$$\int_0^{a^*} x(t,a)\ da = \int_0^{a^*} |x(t,a)|\ da = \|x(t,\cdot)\|_{L^1(0.a^*)} < \infty,\ \forall t \geq 0$$

A teda $x(t,\cdot) \in X := L^1(0,a^*)$ Táto voľba prináša obecne v teorii kontrolovateľnosti niekoľko nevýhod. Tento priestor totiž nie je reflexívny a práca s nereflexívnymi priestormi nie je jednoduchá. Voľbou $X := L^2(0,a^*)$ už má priestor žiadané vlastnosti. My však v tejto práci reflexivitu nebudeme potrebovať a vystačíme s priestorom $X = L^1(0,a^*)$.

Majme teda priestor $X = L^1(0,a^*)$, potom môžme prepísať rovnicu (2.1) ako

$\frac{\partial x(t,a)}{\partial t} = Ax(t,a)$
$x(0,a) = x_0(a)$

kde $x_0 \in L^1(0,a^*)$ je dané a

$$Ax(t,a) = -\frac{\partial x(t,a)}{\partial a} - \mu(a)x(t,a) \tag{2.2}$$

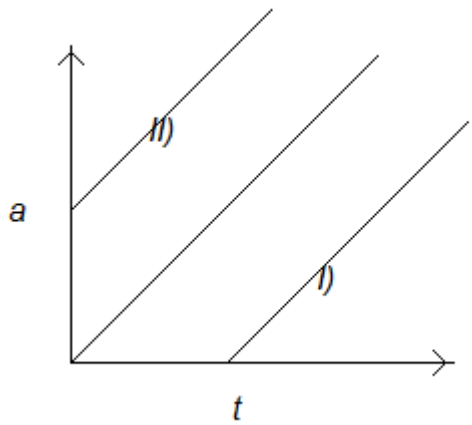
$D(A) =$
$$\left\{x(t,\cdot) \in X : x(t,\cdot) \in AC_{lok}([0,a^*)),\ Ax(t,\cdot) \in X,\ x(0,\cdot) = \int_0^{a^*} \beta(a)x(t,a)\ da\right\}$$

Definujme $x(t) := x(t,\cdot)$ a máme $\frac{\partial x(t)}{\partial t} = Ax(t),\ x(0) = x_0$. Ukážeme si na konci kapitoly, že hustý uzavretý lineárny operátor A generuje silno spojitú semigrupu $S(t)$, pre $t \geq 0$, takú že $(S(t)x_0)(a) = x(t,a)$, kde $x(t,a)$ je riešením populačnej rovnice (2.1).

Predpokladáme, že $a^* < \infty,\ x \in L^1(0,a^*)$, merateľné funkcie $\beta \in L^\infty(0,a^*)$, $\mu \in L^1_{lok}([0,a^*))$ sú nezáporné a $\displaystyle\int_0^{a^*} \mu(a)\ da = \infty$.

2.1 Analytické riešenie

V tejto podkapitole vyriešime (2.1) rovnicu pomocou metody charakteristik.



$I):\ a < t,\ a = t - s,\ s > 0$

$v(a) := x(a+s,a)$
$\frac{\partial v(a)}{\partial a} = \frac{\partial x(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial x(t,a)}{\partial a} = -\mu(a)v(a)$
$v(a) = v(0)exp\left\{-\int_0^a \mu(\xi)\ d\xi\right\} = x(t,a)$
$v(0) = x(s,0) = \int_0^{a^*} \beta(a)x(s,a)\ da$
$\pi(a) := exp\left\{-\int_0^a \mu(\xi)\ d\xi\right\}$
$x(t,a) = x(t-a,0)\pi(a)$
Pre funkciu π máme:

$\frac{\partial \pi(a)}{\partial a} = -\mu(a)\pi(a)$

z čoho nám vyplýva, že π je nerastúca a naviac definuje pravdepodobnosť, že jedinec sa dožije veku a.

$II):\ a > t:\ a = t + \sigma,\ \sigma > 0$

$w(t) := x(t, t+\sigma),\ w(0) = x(0, a-t) = x_0(a-t)$
$\frac{\partial w(t)}{\partial t} = \frac{\partial x(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial x(t,a)}{\partial a} = -\mu(t+\sigma)w(t)$
$w(t) = w(0)exp\left\{-\int_0^t \mu(s+\sigma)\ ds\right\} = x_0(a-t)exp\left\{-\int_{a-t}^a \mu(\xi)\ d\xi\right\}$
$x(t,a) = \frac{x_0(a-t)\pi(a)}{\pi(a-t)}$, pre $t \in [0, a]$

Z okrajovej podmienky dostávame:

$$x(t,0) = \int_0^{a^*} \beta(a)x(t,a)\ da = \int_0^t \beta(a)x(t,a)\ da + \int_t^{a^*} \beta(a)x(t,a)\ da,\ t \geq 0$$

Preto

$$x(t,0) = \int_0^t \beta(a)x(t-a,0)\pi(a)\ da + \int_t^{a^*} \frac{\beta(a)x_0(a-t)\pi(a)}{\pi(a-t)}\ da,\ t \geq 0 \tag{2.3}$$

Takúto rovnicu nazývame Lotkova integrálna rovnica.
Obecný tvar Lotkovej integrálnej rovnice má tvar:

$$B(t) = \int_0^t B(t-a)g(a)\ da + H(t) = (B * g)(t) + H(t),\ t \in [0, \infty)$$

teda máme:

$B(t) := x(t,0)$
$g(t) := \beta(t)\pi(t)$
$H(t) := \int_t^{a^*} \frac{\beta(t+a)x_0(a)\pi(t+a)}{\pi(a)}\ da$

A pre konvolúciu platí špeciálne odhad z následujúcej vety.

Veta 4. *Nech $B \in L^1([0,\infty))$ a $g \in L^p([0,\infty))$ sú funkcie z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$, potom $B * g \in L^p([0,\infty))$ a*

$\|B * g\|_p \leq \|B\|_1 \|g\|_p$, *pre* $1 \leq p \leq \infty$.

Dôkaz. V knihe [1] strana 638 nájdeme dôkaz.

□

2.2 Vlastnosti rezolventnej množiny

Veta 5. *Nech A je definované formuláciou (2.2) potom platí:*

$$\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \int_0^{a^*} \beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}\ da \neq 1$$

Dôkaz. Nech A je definované z (2.2). Chceme ukázať, že $\lambda \in \rho(A)$. Hľadáme funkciu $x \in D(A)$:

$(\lambda I - A)x(a) = g(a),\ \forall g \in X,\ x \in D(A)$

$\lambda x(a) - g(a) = \lambda x(a) - (\lambda I - A)x(a) = Ax(a) = -\frac{\partial x(a)}{\partial a} - \mu(a)x(a)$
$g(a) = \lambda x(a) + \frac{\partial x(a)}{\partial a} + \mu(a)x(a)$

Máme obyčajnú diferenciálnu rovnicu, ktorej nájdem nehomogénne riešenie. A ak riešenie existuje, potom $\lambda \in \rho(A)$.

Homogénne riešenie:

$$x_H(a) = e^{-\lambda a}\pi(a)x(0)$$

Partikulárne riešenie:

$$x_p(a) = e^{-\lambda a}\pi(a)\int_0^a \frac{g(s)}{e^{-\lambda s}\pi(s)}\,ds = \int_0^a e^{-\lambda(a-s)}\pi(a-s)g(s)\,ds$$

Teda máme:

$$x(a) = e^{-\lambda a}\pi(a)x(0) + \int_0^a e^{-\lambda(a-s)}\pi(a-s)g(s)\,ds$$

Vieme, že platí $x(0) = \displaystyle\int_0^{a^*} \beta(a)x(a)\,da$, preto:

$$x(0) = \int_0^{a^*} \beta(a)x(a)\,da =$$
$$\int_0^{a^*} \beta(a)e^{-\lambda a}\pi(a)x(0)\,da + \int_0^{a^*}\int_0^a e^{-\lambda(a-s)}\pi(a-s)g(s)\,ds\,da$$

Vyjadríme $x(0)$:

$$x(0) = \frac{\displaystyle\int_0^{a^*}\int_0^a e^{-\lambda(a-s)}\pi(a-s)g(s)\,ds\,da}{1-\displaystyle\int_0^{a^*} \beta(a)e^{-\lambda a}\pi(a)\,da}$$

A teda platí, že riešenie $(\lambda I - A)x(a) = g(a)$ existuje, ak platí $\displaystyle\int_0^{a^*} \beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}\,da \neq 1$. Preto ak $\displaystyle\int_0^{a^*} \beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}\,da \neq 1$ potom $\lambda \in \rho(A)$.

Zpätnú implikáciu dokážeme sporom:

Nech $\lambda \in \rho(A)$ a $\displaystyle\int_0^{a^*} \beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}\,da = 1$

potom pre riešenie $x(a)$ rovnice $(\lambda I - A)x(a) = g(a)$ platí:

$$x(0) = \int_0^{a*} \beta(a)x(a)\,da =$$
$$\underbrace{\int_0^{a*} \beta(a)e^{-\lambda a}\pi(a)x(0)\,da}_{=1x(0)} + \int_0^{a*}\int_0^a e^{-\lambda(a-s)}\pi(a-s)g(s)\,ds\,da$$

$$x(0) = x(0) + \int_0^{a*}\int_0^a e^{-\lambda(a-s)}\pi(a-s)g(s)\,ds\,da$$

Ale existuje g, také že daná rovnosť neplatí (napr. $g \equiv 1$). Preto

$(\lambda I - A)x(a) = g(a)$ nemá riešenie.

A dostaváme spor s tým, že $\lambda \in \rho(A)$.

$\square$

Veta 6. *Nech $\beta \neq 0$. Potom $\int_0^{a^*} \beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}\, da = 1$ má práve jeden reálny koreň r_0.(Tento reálny koreň sa nazýva malthusovský parameter.)*

Dôkaz. Označme $\phi(\lambda) := \int_0^{a^*} \beta(s)\pi(s)e^{-\lambda s}\, ds$.

$\lim_{\lambda\to-\infty} \phi(\lambda) = \infty$
$\lim_{\lambda\to\infty} \phi(\lambda) = 0$

Čo sme získali vďaka ohraničenosti a nezápornosti funkcií β a π, teda vďaka možnosti zameniť limitu a integrál:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \phi(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{a^*} \underbrace{\beta(s)e^{-\lambda s}}_{\text{má integrovateľnú majorantu } \beta(s)} \overbrace{\pi(s)}^{\leq \max_{s\in[0,a^*)} \pi(s)=1} ds \leq$$

$$\int_0^{a^*} \lim_{\lambda\to\infty} \beta(s)e^{-\lambda s}\, ds = 0$$

Máme $\frac{\partial\phi(\lambda)}{\partial\lambda} = -\int_0^{a^*} s\beta(s)\pi(s)e^{-\lambda s}\, ds < 0$. ϕ, preto ϕ je monotónna postupnosť nezáporných merateľných funkcií a použijeme Leviho vetu:

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \phi(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty} \int_0^{a^*} \beta(s)\pi(s)e^{-\lambda s}\, ds = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{a^*} \underbrace{\beta(s)\pi(s)e^{\lambda s}}_{\to\infty \text{ pre } \lambda\to\infty}\, ds = \infty$$

Preto ϕ klesá od ∞ k 0 a teda $\phi(\lambda) = 1$ má jediné reálne riešenie.

$\square$

Veta 7. *Pre každé $\lambda \in \sigma(A)$ je $\Re\lambda$ menšia nanajvýš rovná malthusovskému parametru z predchodzej vety.*

Dôkaz. Označme $\phi(\lambda) := \int_0^{a^*} \beta(s)\pi(s)e^{-\lambda s}\, ds$.

Nech $\lambda = a + ib$ je ľubovoľný koreň $\phi(\lambda) = 1$ a b je nenulové.

Pre $\int_0^{a^*} \beta(x)\pi(x)e^{-(a+ib)x}\, dx = 1$ platí:

$$\int_0^{a^*} \beta(x)\pi(x)e^{-ax}\cos(bx)\, dx = 1, \quad \int_0^{a^*} \beta(x)\pi(x)e^{-ax}\sin(bx)\, dx = 0$$

Z vlastností kosínusu, a keďže funkcie β a π sú nezáporné a dokonca ohraničené, tak dostávame, že:

$$\int_0^{a^*} \beta(x)\pi(x)e^{-ax}(\cos(bx) - 1)\, dx < 0$$

Preto $\int_0^{a^*} \beta(x)\pi(x)e^{-ax}\cos(bx)\ dx < \int_0^{a^*} \beta(x)\pi(x)e^{-ax}\ dx \Rightarrow \phi(a) > 1 \Rightarrow r_0 > a$.

Pre $b = 0$ máme rovnosť z predchodzej vety.

□

2.3 Dôkaz silno spojitej semigrupy

V tomto odstavci sa dostávame k najdôležitejšej časti tejto kapitoly. Ukážeme, že A generuje silno spojitú semigrupu.

Tento fakt môžme dokázať viacerými spôsobmi, buď z definície, alebo použitím vhodnej vety. Ukážeme použitie definície pre $\beta = 0$ a pre $\beta \neq 0$ použijem následujúcu vetu.

Veta 8. *Nech $\omega \in \mathbb{R}$. Lineárny operátor A na Banachovom priestore generuje silno spojitú semigrupu S splňujúcu $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, pre $t \geq 0$ práve vtedy keď A je uzavretý, husto definovaný a $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ s $\Re\lambda > \omega$ je $\lambda \in \rho(A)$ a platí odhad:*

$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\Re\lambda - \omega}$.

Naviac semigrupy spĺňajúce tento odhad sa nazývajú kvazikontraktívne.

Dôkaz. Nájdeme v knihe [5] str.45.

□

Všimnime si analógiu medzi vetou 3 a 9. Aby sme dokázali, že A generuje C_0 semigrupu S splňujúcu $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, stačí ukázať, že odhad vety 9 platí pre $\Re\lambda > \omega$ a A je uzavretý husto definovaný lineárny operátor.

Zavedieme si pojem Laplaceova transformácia v klasickom znení, pretože ho budeme potrebovať v dôkaze následujúcej vety.

Definícia 4. *Nech X je komplexný Banachov priestor a $f : \mathbb{R}^+ \mapsto X$ nech je merateľná funkcia. Ak existuje $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-\lambda s} f(s)\ ds$, potom*

$$\hat{f}(\lambda) = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-\lambda s} f(s)\ ds$$

sa nazýva Laplaceova transformácia funkcie f.

Veta 9. *Lineárny operátor A definovaný formuláciou (2.2) je infinitezimálnym generátorom a generuje kvazikontraktívnu, silno spojitú semigrupu S.*

A platí:

$$(S(t)x_0)(a) = B_{x_0}(t-a)\pi(a),\ a \in [0,t]$$
$$(S(t)x_0)(a) = \frac{\pi(a)x_0(a-t)}{\pi(a-t)},\ a \in (t, a^*)$$

kde existuje práve jedno B_{x_0}, $\forall x_0 \in X$, ktoré je riešením (2.3).

Dôkaz. 1. časť a) $\beta = 0$

Podľa metody charakteristik mám riešenie:

$(S(t)x_0)(a) = 0,\ t > a \geq 0$
$(S(t)x_0)(a) = \frac{\pi(a)x_0(a-t)}{\pi(a-t)},\ t < a$

S spĺňa vlastnosti silno spojitej semigrupy z definície 1:

$(S(0)x_0)(a) = \frac{\pi(a)}{\pi(a)}x_0(a) = x_0(a)$
$(S(t+s)x_0)(a) = \frac{\pi(a+t+s)}{\pi(a)}x_0(a) = \frac{\pi(a+t)}{\pi(a)}\frac{\pi(a+s)}{\pi(a)}x_0(a) = (S(t)S(s)x_0)(a)$

Ďalej vieme, že pre spojitú funkciu π je $\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)} \to 1$ pre $t \to 0^+$ a $x_0 \in X(= L^1)$, preto $\displaystyle\int_0^{a^*} |x_0(a-t) - x_0(a)|\ da \to 0$ pre $t \to 0^+$ a môžme písať:

$$\|S(t)x_0 - x_0\|_X = \int_0^{a^*} \left|\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}x_0(a-t) - x_0(a)\right|\ da =$$
$$\int_0^{a^*} \left|\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}x_0(a-t) - \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}x_0(a) + \frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}x_0(a) - x_0(a)\right|\ da =$$
$$\int_0^{a^*} \left|\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}(x_0(a-t) - x_0(a)) + x_0(a)\left(\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)} - 1\right)\right|\ da \leq$$
$$\left(\underbrace{\int_0^{a^*} \left|\underbrace{\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)}}_{\to 1 \text{ pre } t\to 0^+}(x_0(a-t) - x_0(a))\right|\ da}_{\to 0 \text{ pre } t\to 0^+} + \int_0^{a^*} \left|x_0(a)\underbrace{\left(\frac{\pi(a)}{\pi(a-t)} - 1\right)}_{\to 0 \text{ pre } t\to 0^+}\right|\ da\right) \to$$
0 pre $t \to 0^+$

Máme C_0 semigrupu S a z definície 2 ukážeme, že A definované formuláciou (2.2) je jej generátor:

$Ax(a) = \lim_{t\to 0} \frac{(S(t)x-x)(a)}{t} = \frac{\partial(S(t)x)(a)}{\partial t}|_{t=0} = \pi(a)\frac{\partial}{\partial t}\frac{x(a-t)}{\pi(a-t)}|_{t=0} =$
$\frac{\pi(a)\left(-\frac{\partial x(a-t)}{\partial t}\right)\pi(a-t) - \mu(a-t)\pi(a-t)x(a-t)}{\pi^2(a-t)}|_{t=0} = -\frac{\partial x(a)}{\partial a} - \mu(a)x(a)$

b) $\beta \neq 0$

Majme lineárny operátor A definovaný formuláciou (2.2). Pre $\lambda \in \rho(A)$, $(\lambda I - A)x(a) = g(a)$ má riešenie:

$$x(a) = e^{-\lambda a}\pi(a)x(0) + \int_0^a e^{-\lambda(a-s)}\pi(a-s)g(s)\ ds$$

Využijeme vlastností konvolúcie vety 4 a vlastností funkcie π:

$$\|x\|_X \leq |x(0)| \int_0^{a^*} \left|e^{-\lambda a}\right|\ d\lambda + \left\|e^{-\lambda}\pi\right\|_X \|g\|_X \leq \frac{|x(0)|}{\Re\lambda} + \frac{\|g\|_X}{\Re\lambda}, \text{ pre } \Re\lambda > 0$$

Ďalej je potreba odhadnúť x_0 a znova použijeme odhad pre konvolúciu:

$$|x(0)| = \left| \frac{\int_0^{a^*} \int_0^a e^{-\lambda(a-s)} \pi(a-s) g(s)\, ds\, da}{1 - \int_0^{a^*} \beta(a) e^{-\lambda a} \pi(a)\, da} \right| \leq \frac{\left\| (\beta e^{-\lambda} \pi) * g \right\|_X}{1 - \left\| \beta e^{-\lambda} \pi \right\|_X} \leq \frac{\|\beta\|_\infty \frac{\|g\|_X}{\Re\lambda}}{1 - \frac{\|\beta\|_\infty}{\Re\lambda}}, \text{ pre}$$
$\Re\lambda > \|\beta\|_\infty$

Dostali sme:

$$\|x\|_X \leq \frac{|x(0)|}{\Re\lambda} + \frac{\|g\|_X}{\Re\lambda} \leq \frac{\frac{\|\beta\|_\infty \|g\|_X}{\Re\lambda - \|\beta\|_\infty} + \|g\|_X}{\Re\lambda} = \frac{\Re\lambda \|g\|_X - \|g\|_X \|\beta\|_\infty + \|\beta\|_\infty \|g\|_X}{\Re\lambda} \frac{1}{\Re\lambda - \|\beta\|_\infty} =$$
$\frac{\|g\|_X}{\Re\lambda - \|\beta\|_\infty}$, pre $\Re\lambda > \|\beta\|_\infty$, $\forall x \in D(A)$

Preto platí:

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\Re\lambda - \|\beta\|_\infty}, ; \Re\lambda > \|\beta\|_\infty$$

Naviac A je uzavretý lineárny operátor, pretože rezolventná množina je neprázdna. K dokončeniu dôkazu, že lineárny operátor A generuje silno spojitú semigrupu potrebujeme ukázať, že $\overline{D(A)} = X (= L^1(0, a^*))$.

Definičný obor $D(A)$ rovnice (2.2) definujeme ekvivalentne pre $x(t) := x(t, \cdot)$ ako

$$D(A) = \left\{ x \in W^{1,1}(0, a^*),\ x(0) = \int_0^{a^*} \beta(a) x(a)\, da \right\}$$

Definíciu Sobolevovho priestora nájdeme v knihe [5] na strane 124. Vieme, že $W^{1,1}$ je husté v L^1, preto pre $y \in L^1(0, a^*)$ zvoľme postupnosť $x_n \in W^{1,1}(0, a^*)$, potom platí, že postupnosť x_n konverguje k y v $L^1(0, a^*)$. Zmeňme x_n v okolí 0, tak aby nová postupnosť $\tilde{x}_n$ splňovala $\tilde{x}_n \in D(A)$. Teda požadujeme aby $\tilde{x}_n(0) = \int_0^{a^*} \beta(a) \tilde{x}_n(a)\, da$ a aby $\tilde{x}_n$ konvergovala k $y \in L^1(0, a^*)$. Takú postupnosť vieme zkonštruovať a máme $\overline{D(A)} = X$.

Ukázali sme, že A generuje silno spojitú semigrupu S splňujúcu $\|S(t)\| \leq e^{\|\beta\|_\infty t}$.

2. *časť* (*Jednoznačnosť* B_{x_0})

Lineárny operátor A generuje C_0 semigrupu, označme ju S. Z vlastností semigrupy a generátora vety 1 je $S(t)x_0$ pre $x_0 \in X = L^1(0, a^*)$ mierným riešením (pre $x_0 \in D(A)$ klasickým riešením) rovnice

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = Ax(t),\ t \geq 0$$
$$x(0) = x_0$$

$(x(t) := x(t, \cdot) \in L^1(0, a^*))$, čo je naša populačná rovnica daná formuláciou (2.2). Odtiaľto špeciálne plynie, že Lotkova rovnica má riešenie. A jednoznačnosť plynie z jednoznačnosti Laplaceovej transformácie (viz [1] strana 636) $\hat{S}(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$.

Vyjadrenie $(S(t)x_0)$ dostávame zo sekcie analytického riešenia:

$$(S(t)x_0)(a) = x(t, a) = \frac{x_0(a-t)\pi(a)}{\pi(a-t)} + x(t-a, 0)\pi(a),\ t \geq 0$$

Kde $x(t,0) = \int_0^{a^*} \beta(a)x(t,a)\, da,\ t \geq 0$ rieši Lotkovu integrálnu rovnicu (2.3). Označme toto riešenie ako $B_{x_0}(t)$.

$\square$

3. Stabilizácia

Definícia 5. *Povieme, že semigrupa S je (uniformne) exponenciálne stabilná ak existujú pozitívne konštanty M a α a platí:*

$\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}$.

Veta 10. *Je ekvivalentné:*

1. *C_0 semigrupa S s generátorom A daným rovnicou(2.2) je (uniformne) exponenciálne stabilná*
2. $r_0 < 0$
3. $\displaystyle\int_0^{a^*} \beta(a)\pi(a)\, da < 1$

Dôkaz. Nech A je dané rovnicou(2.2).

Z vlastností rezolventnej množiny, máme vďaka vetám 6 a 7 platnosť *2.* $\Leftrightarrow$ *3.*

Pre $\beta = 0$ populácia vymiera a priamo vyplýva *1.* a *2.*, pretože:

$\phi(\lambda) = 0 \neq 1 \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ a spektrum $\sigma(A)$ je prázdna množina. Pre $r_0 = sup\,\{\emptyset\} = -\infty$ platí *2.* automaticky.

Z prvej časti dôkazu vety 9 mám riešenie $(S(t)x_0)(a) = \frac{\pi(a)x_0(a-t)}{\pi(a-t)}$ pre $t < a$ inak 0. Dostávam preto odhad $\|S(t)\| \leq 1$, pre $t \geq 0$ a pozitívne konštanty z prechodzej definície sú $M = \alpha = 1$.

Nech $\beta \neq 0$. Dokážeme len implikáciu z *1.* $\Rightarrow$ *2.* Nech platí uniformná exponenciálna stabilita. Potom existujú pozitívne konštanty M a α a platí: $\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}$. A z Laplaceovej transformácie vety 3a) máme splnené kritérium konvergencie Laplaceovej transformácie pre $r_0 \leq -\alpha$, pretože:

$$\|(\lambda I - A)^{-1}x\| = \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\, dt \right\| \leq \tfrac{M}{\Re\lambda + \alpha} \|x\|, \text{ pre } \Re\lambda > -\alpha.$$

A platí *2.*

□

Dôkaz implikácie *2.* $\Rightarrow$ *1.* v predchodzej vete, by bol založený na asymptotickom správaní Lotkovej rovnice, kde by sme iteračným postupom prišli k riešeniu $x(t,0) \approx Ke^{r_0 t}$, kde K by bolo závislé na počiatočnej podmienke a pre $r_0 < 0$ by bola splnená uniformna exponenciálna stabilita.

Ak $r_0 > 0$ potom je homogénny Cauchyov systém nestabilný a je zapotreby vyriešiť otázku stabilizovateľnosti.

Systém (1.2) môžeme prepísať ako:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = Ax(t) + Bu(t) \tag{3.1}$$

kde $B \in \mathfrak{L}(U, X)$. Označme tento systém ako systém (A, B).

Definícia 6. *Systém (A, B) je exponenciálne stabilizovateľný, ak existuje zpätná väzba $F \in \mathfrak{L}(X, U)$, že semigrupa generována lineárnym operátorom $A + BF$ je exponenciálne stabilná.*

Definícia 7. *Nech A je infinitezimálnym generátorom silno spojitej semigrupy S. Systém (A,B) nazveme kontrolovateľný, ak $\forall x_0,\ x_1 \in X$ existuje $t_1 \in (0, \infty)$ a funkcia $u \in L^2((0, t_1), U)$ také že mierne riešenie nehomogénneho Cauchyovho problému:*

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)\, ds$$

splňuje $x(t_1) = x_1$.

Veta 11. *Nech A je infinitezimálny generátor C_0 semigrupy S na X. Predpokladajme, že spektrum A je zjednotenie $\sigma^+ = \{\lambda \in \sigma(A); \Re\lambda \geq 0\}$ a $\sigma^- = \{\lambda \in \sigma(A); \Re\lambda < 0\}$, a je také, že existuje jednoduchá uzavretá krivka Γ s konečnou množinou σ^+, s vlastnými hodnotami konečnej násobnosti, vovnútri, a uzavretú množinu σ^- vo vonkajšej časti krivky. Definujme operátor P ako:*

$$Px = \tfrac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda I - A)^{-1} x\, d\lambda$$

kde Γ traverzuje jedenkrát v pozitívnom smere. Operátor P nazývame spektrálna projekcia na σ^+. Táto projekcia indukuje dekompozíciu stavového priestoru:

$$X = X^+ \oplus X^-, \text{ kde } X^+ = PX \text{ a } X^- = (I - P)X, \text{ kde } dimX^+ < \infty.$$

Dôkaz. Veta v širšom znení je dokázaná v knihe [1] na strane 71.

□

Obecne platí:

Veta 12. *Nech $dimU < \infty$ a nech A je generátor C_0 semigrupy. Potom nehomogénny systém daný rovnicou (3.1) je stabilizovateľný práve vtedy ak splňuje dekompozičnú vlastnosť z vety 11 a pre $A^+ := A|_{X^+}$ je systém (A^+, PB) je kontrolovateľný.*

Dôkaz. Dôkaz môžme nájsť v knihe [2] str. 84.

□

Veta 13. *Systém (A^+, PB), z prechodzej vety, je kontrolovateľný v čase $t_1 > 0$ pre nejaké $x_0,\ x(t_1) \in X$ práve vtedy keď*

$$rk(R(A^+, PB)) = rk(PB, A^+PB, ..., (A^+)^{n-1}PB) = n, \text{ kde } n = dimX^+ \ .$$

Dôkaz. Dôkaz sa nachádza v [4].

□

Veta 14. *Systém (3.1) s lineárnym operátorom A daným formuláciou (2.2) je exponenciálne stabilizovateľný.*

Dôkaz. Nech lineárny operátor A definovaný formuláciou (2.2) generuje C_0 semigrupu S.

Ukážeme, že spektrum $\sigma^+ = \{\lambda \in \sigma : \Re\lambda \geq 0\}$ pozostáva z vlastných hodnot konečnej násobnosti.

Z vlastností spektra vety 6 a vety 7 vieme, že spektrum σ^+ má reálnu časť zdola ohraničenú nulou a zhora ohraničenú malthusovským parametrom. Ďalej z vety 5 vidíme, že body spektra riešia rovnicu $\phi(\lambda) := \int_0^{a^*} \beta(a)\pi(a)e^{-\lambda a}\, da = 1$. Označme body spektra $\lambda_n \in \sigma^+,\ n \in \mathbb{N}$ a $\Re\lambda_n := \alpha_n,\ \Im\lambda_n := \beta_n$. Potom

$$\Im\phi(\lambda) = \int_0^{a^*} \beta(a)\pi(a)e^{-\alpha_n a}\sin(\beta_n a) = 0 \Rightarrow sin(\beta_n a) = 0 \ \ \forall a \in [0, a^*),\ n \in \mathbb{N}$$

Aby platila posledná rovnosť, musí byť $\beta_n,\ n \in \mathbb{N}$ ohraničené. Čím máme ohraničenosť i komplexnej roviny. Ďalej z toho istého dôkazu je $\frac{\partial\phi(\lambda)}{\partial\lambda} \neq 0$, čo nám dáva lokálnu invertovateľnosť (z vety o lokálnom difeomorfizme). Existuje preto okolie $U(\lambda, r)$, že funkcia $\phi : U(\lambda, r) \subset D(\phi) \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ má inverziu $\phi^{-1} : D(\phi^{-1}) := Rng\phi \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, takú že

$$\phi^{-1}\phi(\lambda) = \lambda,\ \lambda \in U(\lambda, r).$$

Inými slovami existuje okolie $U(\lambda, r) \subset D(\phi)$, také že $U(\lambda, r) \cap \lambda = \lambda$. Body spektra sú preto izolovanými bodmi. Potom rovnica $\lambda x(a) - Ax(a) = \lambda x(a) + \frac{\partial x(a)}{\partial a} + \mu(a)x(a) = 0$ má riešenie $x(a) = e^{\lambda a}\pi(a)x(0)$ pre $\lambda \in \sigma^+$. A keďže σ^+ je konečná, máme konečne veľa lineárne nezávislých riešení rovnice $\lambda x(a) - Ax(a) = 0$. Takže máme $dimX^+ < \infty$.

Teda máme σ^- uzavreté a σ^+ pozostáva z vlastných hodnot konečnej násobnosti, je konečná a $dimX^+ < \infty$. Preto sú splnené predpoklady vety 11. Definujme $A^+ := A|_{X^+}$ a $I^+ := I|_{X^+}$. Môžme predefinovať $\sigma^+ := \sigma(A^+)$ a $\sigma^- = \sigma(A^-)$. Ďalej $dimU = dim\mathbb{R} = 1 < \infty$.

K dokončeniu dôkazu stačí ukázať, že (A^+, PB) je kontrolovateľné. Nech BUNO $B = I$. Potom $rk(R(A^+, PI)) = rk(I^+, A^+, ..., (A^+)^{n-1})$. Pre $r_0 = 0$ je $dimX^+ = 1$ a $rk(R(A^+, PI)) = rk(I^+) = dimX^+ = 1$ a z predchodzej vety nám platí kontrolovateľnosť.. Pre $r_0 > 0$, nech $dimX^+ = n$, potom $0 \notin \sigma^+ = \{\lambda \in X^+ : det(\lambda I^+ - A^+) = 0\} \Rightarrow 0 \in \{\lambda \in X^+ : det(\lambda I^+ - A^+) \neq 0\}$, teda A^+ má nenulový determinant a preto A^+ je regulárná. Tak $rk(I^+, A^+, ..., (A^+)^{n-1}) = rk(A^+) = dimX^+ = n$ a rovnako z predchodzej vety nám platí kontrolovateľnosť. $\square$

4. Záver

V tejto práci sme nahliadli do aplikovateľnosti teórie semigrup prostredníctvom Cauchyovho problému. Cieľom bolo teda uviesť a charakterizovať základné pojmy a prispôsobiť ich danému populačnému modelu. Za určitých predpokladov sme popísali správanie rezolventnej a teda i spektrálnej množiny A, ktorá (ako sme neskôr ukázali) generovala semigrupu S vopred zadaného populačného modela. Predpokladali sme konečnosť $a^* < \infty$ a taktiež sme si zvolili priestor, ktorý bol prirodzenejší na prácu. Ak by $a^* = \infty$ potom by sa rezolventná množina správala inak. Ako sme už spomínali, iná rozumná voľba priestoru mohla byť $L^2(0, a^*)$.

Dôležitá časť tejto práce bola správne zadefinovať operátor A a jeho definičný obor a ukázať, že takto zadefinovaný operátor generuje C_0 semigrupu, ktorá riešila náš populačný model tvaru parciálnej diferenciálnej rovnice. Na základe vlastností rezolventnej množiny operátora A bola riešená otázka exponenciálnej stability a stabilizovateľnosti.

Ďalšie odvetvie riadenia lineárnych systémov je otázka optimálnej kontroly. Kde by sa nám ponúkali dve alternatívy. Sústrediť sa na kontrolu úmrtnosti alebo na kontrolu v okrajovej podmienke a teda na kontrolu pôrodnosti. V súvislosti s toutou témou sa ponúka otázka Riccatiho operátora. Toto odvetvie je rozsiahlou témou na ďalšiu prácu.

5. Literatura

[1] R.F.Curtain, H.J.Zwart, An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory, Springer 1995
[2] J.Milota, Invitation to Mathematical Control Theory, pp.64-118 in Proceedings of Seminar in Differential Equations, ed.P.Drábek, Plzeň 2006
[3] J.Milota, Continuous Semigroups and Evolution Equations, pp.1-66 in Proceedings of Seminar in Differential Equations, ed.P.Drábek, 2000
[4] www.math.uni-wupertal.de/ fa/isem
[5] E.Klaus-Jochen, N,Rainer, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations