Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Adam Bartoš

Husté množiny v součinech topologických prostorů

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Petr Simon, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2012

Chtěl bych tímto poděkovat prof. RNDr. Petru Simonovi, DrSc., za zadání tohoto zajímavého tématu a za cenné rady při jeho řešení. Dále bych chtěl poděkovat své rodině za celkovou podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Husté množiny v součinech topologických prostorů

Autor: Adam Bartoš, drekin@gmail.com

Katedra: Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Petr Simon, DrSc., Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Abstrakt: Podmnožina součinu je tenká, pokud se každé její dva různé body liší alespoň ve dvou složkách. Podmnožina součinu je velmi tenká, pokud se každé její dva různé body liší ve všech složkách. Práce shrnuje základní vlastnosti tenkých a velmi tenkých hustých množin v součinech topologických prostorů. Podává postačující a nutné podmínky jejich existence a obsahuje několik příkladů. Hlavním výsledkem práce je konstrukce ukazující, že za hypotézy kontinua pro každé přirozené $n \geq 1$ existuje spočetný T_3 prostor X bez izolovaných bodů takový, že X^n obsahuje n-tenkou hustou množinu, ale X^m, $n < m < 2n$, nikoliv. Navíc, X^m, $n < m < \omega$, neobsahuje $(n+1)$-tenkou množinu. Slabší podoba věty je dokázána za Martinova axiomu.

Klíčová slova: hustá množina, tenká množina, velmi tenká množina

Title: Dense sets in products of topological spaces

Author: Adam Bartoš, drekin@gmail.com

Department: Department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic

Supervisor: prof. RNDr. Petr Simon, DrSc., Department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic

Abstract: A subset of a product space is thin if every two its distinct points are distinct in at least two coordinates. A subset of a product space is very thin if every two its distinct points are distinct in all coordinates. The thesis summarizes the basic properties of thin-type dense sets in products of topological spaces. Sufficient and necessary conditions of their existence are given and several examples are shown. The main result of the thesis is a construction showing that under the continuum hypothesis, for every natural $n \geq 1$, there exists a countable T_3 dense-in-itself space X such that X^n contains an n-thin dense subset, but X^m, $n < m < 2n$, doesn't. Besides, X^m, $n < m < \omega$, does not contain any $(n+1)$-thin dense subset. A weaker form of the theorem is proven under Martin's axiom.

Keywords: dense set, thin set, very thin set

Obsah

Úvod

Ústředními pojmy této práce jsou tenké a velmi tenké množiny. Jedná se o podmnožiny kartézského součinu, ve kterých se každé dva různé prvky liší alespoň ve dvou, resp. ve všech složkách. Bude nás zajímat situace, kdy máme součin topologických prostorů a jeho tenkou, resp. velmi tenkou podmnožinu, která je zároveň hustá.

Husté podmnožiny topologického prostoru jsou v jistém smyslu velké – musejí protínat každou neprázdnou otevřenou množinu. Dále, nadmnožina husté množiny už je zřejmě hustá. Naopak (velmi) tenké množiny jsou „malé“ a stabilní na podmnožiny. (Velmi) tenká hustá množina tedy splňuje dva v jistém smyslu protichůdné požadavky, a proto je zajímavým předmětem studia.

Tato práce čtenáře uceleně seznamuje se základními vlastnosti (velmi) tenkých hustých množin v součinech topologických prostorů, podává postačující a nutné podmínky jejich existence a demonstruje konkrétní situace na několika příkladech. Vychází přitom hlavně z článku [GNP], prezentované poznatky shrnuje a některá tvrzení zobecňuje. Zejména pak zobecňuje příklad [GNP, 2.6] – konstrukci spočetného T_3 prostoru X bez izolovaných bodů takového, že X^2 obsahuje tenkou hustou množinu, ale X^3 nikoliv. Tato konstrukce předpokládá platnost hypotézy kontinua.

Následuje stručný popis jednotlivých kapitol. První kapitola podává přehled použitého značení a pojmů. Zahrnuje základní topologické pojmy včetně jejich vlastností, které používáme v dalším textu. Dále se podrobněji věnuje součinům topologických prostorů a nakonec definuje i ústřední pojmy této práce – tenké a velmi tenké množiny. Kromě tenkých a velmi tenkých množin jsou zavedeny také obecnější pojmy κ-tenkosti a $<\kappa$-tenkosti.

Druhá kapitola se věnuje velmi tenkým hustým množinám. Kromě několika příkladů obsahuje zejména postačující a nutné podmínky existence těchto množin. Oproti [GNP] obsahuje několik podmínek navíc a dává je s těmi z citovaného článku do souvislosti.

Tématem třetí kapitoly jsou ostatní typy tenkosti v kontextu hustých podmnožin součinů a dále podkapitola věnující se zobecnění zmíněné konstrukce [GNP, 2.6]. Tato podkapitola obsahuje několik obecných pozorování ohledně nezávislých systémů množin a tvoření topologie pomocí nich. Dále obsahuje podrobný popis samotné konstrukce, resp. jejího zobecnění.

1. Základní pojmy a značení

1.1 Obecné topologické pojmy

Značení 1.1.

- $|A|$ značí mohutnost množiny A;
- ω značí první nekonečný ordinál a též první nekonečný kardinál (nerozlišujeme mezi kardinály a jejich počátečními ordinály);
- ω_1 značí první nespočetný ordinál, resp. kardinál;
- $\mathfrak{c} = 2^\omega = |\mathbb{R}|$ značí mohutnost kontinua;
- $\mathcal{P}(A)$ značí množinu všech podmnožin A;
- pro $f\colon X \to Y$ a $x \in X$ značí $f(x) \in Y$ hodnotu zobrazení f v bodě x;
- dále pro $A \subseteq X$ značí $f[A] := \{f(a) : a \in A\} \subseteq Y$ obraz množiny A při zobrazení f;
- pro $B \subseteq Y$ značí $f^{-1}[B] := \{x \in X : f(x) \in B\}$ vzor množiny B při zobrazení f;
- pro $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ značí $f[\![\mathcal{A}]\!] := \{f[A] : A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ obraz systému množin při zobrazení f;
- pro $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ značí $f^{-1}[\![\mathcal{B}]\!] := \{f^{-1}[B] : B \in \mathcal{B}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ vzor systému množin při zobrazení f;
- $\operatorname{dom}(f)$ značí definiční obor f, $\operatorname{rng}(f)$ značí obor hodnot.

Definice 1.2. Nechť X je topologický prostor.

- Soubor otevřených množin $\mathcal{B}$ nazveme *bází* X, pokud každou otevřenou množinu U můžeme napsat ve tvaru $\bigcup \mathcal{B}'$ pro nějaký podsystém $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$.
- Soubor otevřených neprázdných množin $\mathcal{B}$ nazveme *π-bází* X, pokud pro každou otevřenou neprázdnou množinu U existuje $B \in \mathcal{B}$, že $B \subseteq U$.
- Množinu $D \subseteq X$ nazveme hustou, pokud $\overline{D} = X$. Ekvivalentně pro každou U otevřenou neprázdnou platí $D \cap U \neq \emptyset$.
- Množinu $N \subseteq X$ nazveme řídkou, pokud $X \setminus \overline{N}$ je hustá. Ekvivalentně pro každou U otevřenou neprázdnou platí $U \not\subseteq \overline{N}$.
- *Váhou* prostoru X nazveme $w(X) := \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ báze } X\}$.
- *π-váhou* X nazveme $\pi w(X) := \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}\ \pi\text{-báze } X\}$.
- *Hustotou* prostoru X nazveme $d(X) := \min\{|D| : D \text{ hustá v } X\}$.
- $\Delta(X)$ označme $\min\{|U| : \emptyset \neq U \text{ otevřená v } X\}$.

Pozorování 1.3. *Platí následující odhady:* $d(X) \leq \pi w(X) \leq w(X)$.

Důkaz. Zřejmě, je-li $\mathcal{B}$ báze, potom $\mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ je π-báze, tedy $\pi w(X) \leq w(X)$. Vybereme-li po jednom bodě z každé množiny π-báze, získáme hustou množinu, tedy $d(X) \leq \pi w(X)$. (Právě tato vlastnost π-báze ukazuje užitečnost tohoto pojmu.) $\square$

Následuje několik jednoduchých tvrzení o hustých a řídkých množinách.

Tvrzení 1.4. *Je-li D hustá v X a U je otevřená v X, pak D je hustá v U (tzn. $D \cap U$ je hustá v U).*

Důkaz. Viz [En, 1.3.6, s. 25]. □

Tvrzení 1.5. *Nechť X je topologický prostor.*

(i) *Jsou-li D, D' husté v X a D' je navíc otevřená v X, pak $D \cap D'$ je také hustá.*

(ii) *Jsou-li D, D' otevřené husté v X, pak $D \cap D'$ je také otevřená hustá. Tedy otevřené husté podmnožiny jsou stabilní na konečné průniky.*

(iii) *Jsou-li N, N' řídké v X, pak $N \cup N'$ je také řídká. Tedy řídké podmnožiny jsou stabilní na konečná sjednocení.*

(iv) *Je-li D hustá a N řídká, pak $D \setminus N$ je stále hustá.*

Důkaz.

(i) Je-li U otevřená neprázdná v X, pak $D' \cap U$ je také otevřená neprázdná, protože D' je otevřená hustá. Tedy $(D \cap D') \cap U = D \cap (D' \cap U) \neq \emptyset$.

(ii) Plyne ihned z předchozího bodu.

(iii) $\overline{N} \cup \overline{N'}$ je sjednocení uzavřených řídkých množin, tedy doplňkem je průnik otevřených hustých množin, což je dle předchozího bodu otevřená hustá množina. Takže $\overline{N} \cup \overline{N'}$ je uzavřená řídká množina a $N \cup N'$ je jako její podmnožina řídká.

(iv) $D \setminus N \supseteq D \setminus \overline{N} = D \cap (X \setminus \overline{N})$, což je průnik husté a otevřené husté množiny. □

Tvrzení 1.6. *Je-li D hustá v X, $f\colon X \to Y$ je spojité, potom $f[D]$ je hustá v $f[X]$. Tedy spojitý obraz husté množiny je hustý v obrazu.*

Důkaz. Viz [En, 1.4.10, s. 31]. □

Tvrzení 1.7. *Je-li N řídká v Y, $f\colon X \to Y$ je spojité otevřené zobrazení, pak $f^{-1}[N]$ je řídká v X. Tedy vzor řídké množiny při spojitém otevřeném zobrazení je řídká množina.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $f^{-1}[N]$ není řídká, tedy existuje $U \subseteq \overline{f^{-1}[N]}$ otevřená neprázdná. Potom ale $f[U] \subseteq f[\overline{f^{-1}[N]}] \subseteq \overline{f[f^{-1}[N]]} \subseteq \overline{N}$ (prostřední inkluze plyne ze spojitosti f). Z otevřenosti f je $f[U]$ otevřená neprázdná podmnožina $\overline{N}$, tedy N není řídká. Spor. □

Podkapitolu zakončíme užitečným odhadem hustoty Hausdorffova prostoru.

Tvrzení 1.8. *Pro Hausdorffův prostor X platí $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$.*

Důkaz. Viz [En, 1.5.3, s. 37]. □

1.2 Součiny topologických prostorů

Tato podkapitola shrnuje definice a používaná fakta o součinech topologických prostorů.

Značení 1.9. Součin topologických prostorů značíme $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ nebo, chcemeli zdůraznit mohutnost nebo uspořádání množiny indexující jednotlivé prostory, $\prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$. Jsou-li všechny prostory X_α rovny nějakému stejnému X, značíme příslušný součin X^A, resp. X^κ.

Definice 1.10. Je-li $\{f_\alpha \colon X \to Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ soubor zobrazení, pak jejich *diagonálním součinem* nazveme zobrazení

$$\begin{aligned} \triangle_{\alpha \in A} f_\alpha \colon X &\to \textstyle\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \\ x &\mapsto \langle f_\alpha(x) : \alpha \in A \rangle. \end{aligned}$$

Je-li $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ součin topologických prostorů, π_α příslušné projekce, $B \subseteq A$ neprázdná, pak *projekcí na podsoučin* $\prod_{\beta \in B} X_\beta$ nazveme zobrazení

$$\begin{aligned} \pi_B := \triangle_{\beta \in B} \pi_\beta \colon \textstyle\prod_{\alpha \in A} X_\alpha &\to \textstyle\prod_{\beta \in B} X_\beta \\ \langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A} &\mapsto \langle x_\beta \rangle_{\beta \in B}. \end{aligned}$$

Pro $B = \emptyset$ můžeme položit $\pi_B \colon \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to 1$, tj. konstantní zobrazení do jednoprvkového prostoru.

Poznámka 1.11 (skládání projekcí). Mějme topologické prostory $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, $B \subseteq A$, $\{\pi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ projekce součinu $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, $\{\rho_\beta\}_{\beta \in B}$ projekce součinu $\prod_{\beta \in B} X_\beta$. Pak pro každé $\beta \in B$ platí $\rho_\beta \circ \pi_B = \pi_\beta$. Takže místo ρ_β můžeme pro pohodlí psát π_β a π_β můžeme uvažovat na libovolném podsoučinu.

Definice 1.12. *Standardní bází součinu* $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ nazýváme soubor

$$\left\{ \textstyle\prod_{\alpha \in A} U_\alpha : U_\alpha \text{ otevřená v } X_\alpha, \{\alpha \in A : U_\alpha \neq X_\alpha\} \text{ je konečná} \right\}.$$

Je-li navíc každá U_α prvkem předem zvolené báze $\mathcal{B}_\alpha$, řekneme, že je tato standardní báze součinu *vytvořená z předepsaných bází* $\mathcal{B}_\alpha$.

Tvrzení 1.13 (vlastnosti projekce). *Nechť $X := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ je součin topologických prostorů, $B \subseteq A$, pak*

(i) *pro množiny $M_\alpha \subseteq X_\alpha$ platí $\pi_B\left[\prod_{\alpha \in A} M_\alpha\right] = \prod_{\beta \in B} M_\beta$,*

(ii) *π_B je spojité zobrazení,*

(iii) *π_B je na $\prod_{\beta \in B} X_\beta$,*

(iv) *π_B je otevřené zobrazení,*

(v) *je-li $\mathcal{B}$ báze X, potom $\pi_B[\![\mathcal{B}]\!]$ je báze $\pi_B[X]$,*

(vi) *je-li $\mathcal{B}$ π-báze X, potom $\pi_B[\![\mathcal{B}]\!]$ je π-báze $\pi_B[X]$,*

(vii) *je-li D hustá v X, je $\pi_B[D]$ hustá v $\pi_B[X]$*

(viii) *je-li N řídká v $\pi_B[X]$, je $\pi_B^{-1}[N]$ řídká v X.*

Důkaz.

(i) Plyne ihned z definice.

(ii) Jednotlivé projekce π_β jsou spojité, a jejich diagonální součin π_B je tedy také spojitý – viz [En, 2.3.6, s. 78].

(iii) Plyne z (i) pro $M_\alpha = X_\alpha$.

(iv) Plyne z (i) pro $\prod_{\alpha\in A} M_\alpha$ prvky standardní báze X.

(v) Je-li U otevřená v $\pi_B[X]$, pak $\pi_B^{-1}[U]$ je otevřená v X, a tedy ji můžeme napsat ve tvaru $\bigcup \mathcal{B}'$, kde $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Potom máme $U = \pi_B[\pi_B^{-1}[U]] = \pi_B[\bigcup \mathcal{B}'] = \bigcup \pi_B[\![\mathcal{B}']\!]$. Využíváme, že π_B je na a otevřené.

(vi) Analogicky bodu (v).

(vii) Jedná se o speciální případ tvrzení 1.6.

(viii) Protože π_B je spojité otevřené zobrazení, jedná se o speciální případ tvrzení 1.7. □

Tvrzení 1.14. *Nechť $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ je soubor topologických prostorů a pro každé $\alpha \in A$ je $D_\alpha \subseteq X_\alpha$ hustá. Pak množina $\prod_{\alpha\in A} D_\alpha$ je hustá v $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Tedy součin hustých množin je hustý v součinu.*

Důkaz. Plyne ihned z toho, že $\overline{\prod_{\alpha\in A} D_\alpha} = \prod_{\alpha\in A} \overline{D_\alpha}$, viz [En, 2.3.3, s. 78]. □

Věta 1.15 (Hewitt–Marczewski–Pondiczery)**.** *Jsou-li $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ topologické prostory hustoty nejvýše κ a $|A| \leq 2^\kappa$, pak $d\big(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\big) \leq \kappa$.*

Důkaz. Viz [En, 2.3.15, s. 81]. Myšlenku důkazu použijeme a předvedeme v důkazu Tvrzení 2.5. □

Lemma 1.16 (o váze součinu)**.** *Nechť $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ je soubor neindiskrétních topologických prostorů, $X := \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$. Pak*

$$w(X) = \max\{\kappa, \sup_{\alpha<\kappa} w(X_\alpha)\},$$
$$\pi w(X) = \max\{\kappa, \sup_{\alpha<\kappa} \pi w(X_\alpha)\},$$

pokud je příslušná pravá strana nekonečná.

Důkaz. Protože projekcí báze je báze, máme $\forall \alpha < \kappa\colon w(X_\alpha) \leq w(X)$. Je-li kardinál $\kappa > \sup_{\alpha<\kappa} w(X_\alpha)$, pak je dle předpokladu nekonečný. Nechť $\mathcal{B}$ je báze X a $|\mathcal{B}| < \kappa$. Pro každé $B \in \mathcal{B}$ existují otevřené množiny $\{U_{B,\alpha} : \alpha < \kappa\}$, že prvek standardní báze $\prod_{\alpha<\kappa} U_{B,\alpha} \subseteq B$. Protože $\{\alpha < \kappa : U_{B,\alpha} \neq X_\alpha\}$ je pro každé $B \in \mathcal{B}$ konečná, platí $\big|\{\alpha < \kappa : U_{B,\alpha} \neq X_\alpha, B \in \mathcal{B}\}\big| \leq |\mathcal{B}| < \kappa$. Tedy existuje $\alpha < \kappa$ a z předpokladu neindiskrétnosti X_α otevřená neprázdná množina $U_\alpha \subsetneq X_\alpha$, že $U_\alpha \times \prod_{\beta\neq\alpha} X_\alpha$ je otevřená množina, kterou nelze zapsat jako sjednocení prvků $\mathcal{B}$, spor. Celkem máme $w(X) \geq \max\{\kappa, \sup_{\alpha<\kappa} w(X_\alpha)\}$.

Nechť pro každé $\alpha < \kappa$ je $\mathcal{B}_\alpha$ báze X_α velikosti $w(X_\alpha)$. Pak

$$\big\{\prod_{\alpha<\kappa} B_\alpha : B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha, \{\alpha < \kappa : B_\alpha \neq X_\alpha\} \text{ je konečná}\big\}$$

je báze X velikosti nejvýše $\max\{\kappa, \sup_{\alpha<\kappa} w(X_\alpha)\}$ (jedná se o standardní bázi součinu vytvořenou z předepsaných bází $\mathcal{B}_\alpha$). V tomto odhadu využíváme předpokladu, že κ nebo $\sup_{\alpha<\kappa} w(X_\alpha)$ je nekonečné. Takže $w(X) \leq \max\{\kappa, \sup_{\alpha<\kappa} w(X_\alpha)\}$.

Pro π-bázi tvrzení dokážeme analogicky. □

Poznámka 1.17. Obsahuje-li součin $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ indiskrétní prostory $\{X_\alpha : \alpha \in B\}$, kde $B \subseteq A$, můžeme tyto při výpočtu váhy součinu směle vynechat, protože $w\big(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\big) = w\big(\prod_{\alpha\in A\setminus B} X_\alpha\big)$. Totéž platí pro π-báze. Jediná situace, kterou lemma nepokrývá, je konečný součin prostorů konečné (π-)váhy. Lze ukázat, že v takovém případě je (π-)váha součinu rovna součinu (π-)vah, tedy levá strana rovnosti v lemmatu je nekonečná, právě když je nekonečná příslušná pravá strana.

Lemma 1.18 (o řídké diagonále)**.** *Je-li X Hausdorffův prostor bez izolovaných bodů, potom diagonála $\triangle = \{\langle x, x\rangle : x \in X\}$ je uzavřená řídká v X^2.*

Důkaz. Protože X je Hausdorffův, je $\triangle$ uzavřená (přímý důsledek věty [En, 1.5.4, s. 38]). Libovolná otevřená neprázdná množina v X^2 obsahuje součin $U \times V$, kde U, V jsou otevřené neprázdné podmnožiny X. Protože X neobsahuje izolované body, jsou U, V alespoň dvoubodové, tedy $U \times V \not\subseteq \triangle = \overline{\triangle}$. □

1.3 Tenké a velmi tenké množiny

V této podkapitole definujeme ústřední pojmy této práce – různé druhy tenkých množin – a ukážeme některé jejich základní vlastnosti.

Definice 1.19. Nechť D je podmnožina součinu $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Řekneme, že D je

- *tenká*, pokud $\forall x \neq y \in D\colon \big|\{\alpha < \kappa : x_\alpha \neq y_\alpha\}\big| \geq 2$, tj. pokud se každé dva různé body množiny D liší alespoň ve dvou složkách (alespoň v jedné se liší samozřejmě);
- *velmi tenká*, pokud $(\forall x \neq y \in D)(\forall \alpha < \kappa)\colon x_\alpha \neq y_\alpha$, tj. pokud se každé dva různé body liší ve všech složkách.
- *κ-tenká*, pokud $\forall x \neq y \in D\colon \big|\{\alpha < \kappa : x_\alpha \neq y_\alpha\}\big| \geq \kappa$, tj. pokud se x, y liší alespoň v κ složkách.
- *$<\kappa$-tenká*, pokud $\forall x \neq y \in D\colon \big|\{\alpha < \kappa : x_\alpha = y_\alpha\}\big| < \kappa$, tj. pokud se x, y shodují v méně než κ složkách.
- *skoro velmi tenká*, pokud $\forall x \neq y \in D\colon \big|\{\alpha < \kappa : x_\alpha = y_\alpha\}\big| < \omega$, tj. pokud se x, y liší ve všech až na konečně mnoho složkách.

Tenké a velmi tenké množiny byly zavedeny v [Pi]. Ovšem mezi těmito dvěma extrémními pojmy existuje řada mezistupňů, přičemž můžeme postupovat dvěma způsoby – buďto nás bude zajímat, v alespoň kolika složkách se mají různé body příslušné množiny lišit, nebo naopak v kolika nejvýše složkách se mohou shodovat. Tyto dva druhy požadavků se v nekonečných součinech liší a vedou k definicím κ-tenkých a $<\kappa$-tenkých množin. Množiny $<\kappa$-tenké byly definovány v [HG, 4.1].

Co se týče (ne)ostrosti nerovností v definici κ-tenkých a $<\kappa$-tenkých množin, je naše volba opodstatněná, neboť body se liší ve více než κ složkách právě tehdy, když se liší alespoň v κ^+ složkách, tedy jedná se o κ^+-tenkou množinu. Podobně body se shodují nejvýše v κ složkách právě tehdy, když se shodují v méně než κ^+ složkách, a tedy se jedná o $<\kappa^+$-tenkou množinu.

Poznámka 1.20. Uvažujeme-li o nějakém druhu tenkosti jisté množiny v daném topologickém prostoru, je třeba si uvědomovat, vhledem k jakému součinu nás tato tenkost zajímá. Díky asociativitě součinu není topologicky rozdíl mezi prostorem

$(X \times Y) \times (X \times Y) \times (X \times Y)$ a prostorem $X \times Y \times X \times Y \times X \times Y$. Přesto body prvního prostoru tvoří trojice dvojic, zatímco body druhého prostoru jsou šestice, což je z hlediska tenkosti uvažované množiny podstatný rozdíl. Tenkost množiny rozhodně není topologický pojem.

Pozorování 1.21. *Podívejme se na základní vztahy mezi druhy tenkých množin.*

- *Zřejmě každá množina je 0-tenká a každá množina v neprázdném součinu je 1-tenká. Pojem tenké množiny splývá s pojmem 2-tenké množiny, což je první netriviální případ.*
- *V daném součinu $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ má smysl uvažovat κ-tenké množiny pouze pro $\kappa \leq |A|$. Každá velmi tenká množina je potom κ-tenká pro každé takové κ.*
- *Pojem velmi tenké množiny splývá s pojmem <1-tenké množiny.*
- *Pojem skoro velmi tenké množiny splývá s pojmem $<\omega$-tenké množiny.*
- *V konečném součinu je každá množina skoro velmi tenká a pojem nám nepřináší nic nového. V nekonečném součinu je to naopak silnější pojem než všechny uvažované κ-tenké množiny.*
- *Pro nejmenší netriviální součin, tj. součin dvou prostorů, nejsilnější pojem velmi tenké množiny splývá s nejslabším pojmem tenké množiny.*
- *Díváme-li se na X jako na součin jednoho prostoru, je v něm každá množina velmi tenká, ale žádná není tenká (2-tenké množiny v součinu tvořeném jediným prostorem nemá smysl uvažovat).*

Pozorování 1.22. *Označme $X := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.*

- *Je-li D κ-tenká v X, $D' \subseteq D$, pak D' je rovněž κ-tenká.*
- *Je-li D $<\kappa$-tenká v X, $D' \subseteq D$, pak D' je rovněž $<\kappa$-tenká.*

Tedy všechny druhy tenkých množin jsou stabilní na podmnožiny.

Důsledek 1.23. *Je-li D κ-tenká nebo $<\kappa$-tenká a hustá v nějakém součinu $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, je taková i v každém otevřeném podprostoru Y. Tj. $D \cap Y$ je κ-tenká resp. $<\kappa$-tenká a hustá v Y.*

Důkaz. Plyne přímo z předchozího pozorování a tvrzení 1.4. □

Pozorování 1.24. *Nechť $D \subseteq \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ je velmi tenká, $B \subseteq A$. Pak*

(i) *$\pi_B[D]$ je velmi tenká v $\prod_{\beta \in B} X_\beta$, tj. projekce velmi tenké množiny je velmi tenká množina;*

(ii) *je-li $B \neq \emptyset$, platí $\big|\pi_B[D]\big| = |D|$, tj. všechny projekce velmi tenké množiny mají stejnou mohutnost.*

Důkaz. Přímo z definice plyne, že množina je velmi tenká právě tehdy, když projekce π_α pro $\alpha \in A$ jsou na této množině prosté. Projekce π_β na $\pi_B[D]$ je rovna projekci π_β na D, tedy je prostá, takže $\pi_B[D]$ je velmi tenká. Dále, protože jsou všechny π_β prosté, je prostý i jejich diagonální součin π_B, tedy $\pi_B \restriction D$ je bijekce D na $\pi_B[D]$. □

Důsledek 1.25. *Všechny projekce velmi tenké a husté množiny jsou velmi tenké a husté.*

Důsledek 1.26. *Je-li D velmi tenká v $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, pak $|D| \le \min_{\alpha\in A} |X_\alpha|$.*

Důkaz. Pro každé $\alpha \in A$ máme $|D| = \big|\pi_\alpha[D]\big| \le |X_\alpha|$. $\square$

Důsledek 1.27. *Je-li D velmi tenká a hustá v $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, $\emptyset \ne B \subseteq A$, potom platí $d\big(\prod_{\beta\in B} X_\beta\big) \le |D|$.*

Důkaz. $\pi_B[D]$ je hustá v $\prod_{\beta\in B} X_\beta$ a $\big|\pi_B[D]\big| = |D|$. $\square$

Poznámka 1.28. Neplatí „všechny projekce tenké množiny jsou tenké“. Protipříkladem je tříprvková množina $\{\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,1,0\rangle, \langle 0,0,1\rangle\}$ vrcholů krychle $[0,1]^3$. Projekcí této množiny na $[0,1]^2$ je $\{\langle 1,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,0\rangle\}$, která není tenká.

2. Velmi tenké husté množiny

Nyní se budeme zabývat velmi tenkými hustými množinami, tj. hustými množinami v součinu, které jsou zároveň velmi tenké. V této kapitole podáme některé vlastnosti těchto množin – především v podobě postačujících a nutných podmínek jejich existence v daném součinu – a ukážeme několik jednoduchých příkladů.

Typickým příkladem husté množiny v součinu topologických prostorů je součin hustých množin. Ten ale zdaleka netvoří velmi tenkou množinu (kromě extrémního případu jednobodového součinu hustých jednobodových množin). Naopak jednoduchým příkladem velmi tenké množiny je diagonála v součinu stejných prostorů, která zase typicky není hustá. (Stačí, aby výchozí prostor obsahoval dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny, což je případ každého Hausdorffova alespoň dvoubodového prostoru.)

Uvědomme si, že hledáním velmi tenké husté množiny uspokojujeme dva protichůdné požadavky. Je-li D velmi tenká hustá v $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, pak musí být jednak dost velká na to, aby byla hustá ($d\big(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\big) \leq |D|$), a jednak dost malá, aby byla velmi tenká ($|D| \leq |X_\alpha|, \forall\alpha \in A$). Pro součin κ stejných prostorů dostáváme

$$d(X^\kappa) \leq |D| \leq |X|.$$

Ovšem levá strana nerovnosti typicky není omezená, a tedy pro κ dost velké v součinu X^κ velmi tenká hustá množina neexistuje. Konkrétně, pro X alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor dostáváme za použití odhadu 1.8

$$2^\kappa \leq |X^\kappa| \leq 2^{2^{d(X^\kappa)}} \leq 2^{2^{|D|}} \leq 2^{2^{|X|}},$$

což pro $\kappa \geq 2^{2^{|X|}}$ neplatí (protože $\forall\lambda\colon 2^\lambda > \lambda$).

Tuto myšlenku můžeme využít k důkazu tvrzení pro obecný součin prostorů.

Tvrzení 2.1. *Nechť $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ jsou Hausdorffovy a alespoň dvoubodové, pak $(\exists\kappa_0)(\forall\kappa \geq \kappa_0)(\forall f\colon \kappa \to A)$ $\prod_{\alpha<\kappa} X_{f(\alpha)}$ neobsahuje hustou velmi tenkou množinu.*

Důkaz. Označme $X := \prod_{\alpha<\kappa} X_{f(\alpha)}$. Volme $\lambda := \sup_{\alpha\in A} |X_\alpha|$, $\kappa_0 := 2^{2^\lambda}$. Potom pro $\kappa \geq \kappa_0$ a D velmi tenkou hustou množinu v X máme

$$d(X) \leq |D| \leq \min_{\alpha<\kappa} |X_{f(\alpha)}| \leq \lambda,$$
$$2^{\kappa_0} \leq 2^\kappa \leq |X| \leq 2^{2^{d(X)}} \leq 2^{2^\lambda} = \kappa_0, \text{ spor.}$$

□

2.1 Postačující podmínky existence velmi tenké husté množiny

Po úvodních negativních výsledcích ukážeme, že netriviální velmi tenké husté množiny existují, a podáme několik postačujících podmínek existence. (Součin indiskrétních prostorů je indiskrétní, tedy obsahuje jednobodovou velmi tenkou hustou množinu.) Následuje jednoduchý příklad velmi tenké husté množiny v důvěrně známém prostoru $\mathbb{R}^n$.

Příklad 2.2 (velmi tenká hustá podmnožina $\mathbb{R}^n$)**.** Definujme na $\mathbb{R}$ následující ekvivalenci: $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}$. Označme R transverzálu této ekvivalence (množinu, která obsahuje právě po jednom prvku z každé třídy ekvivalence). Pro $r \in R$ je $r + \mathbb{Q}$ odpovídající třída ekvivalence, a tedy $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in R}(r + \mathbb{Q})$, což je disjunktní sjednocení spočetných množin. Tedy $|R| = \mathfrak{c}$.

Očíslujme R jako $\{r_i : i < \mathfrak{c}\}$. Pro každé $i < \mathfrak{c}$ je $r_i + \mathbb{Q}$ hustá v $\mathbb{R}$ a $(r_i + \mathbb{Q})^n$ je hustá v $\mathbb{R}^n$. Prostor $\mathbb{R}^n$ má spočetnou bázi otevřených množin (např. koule se středy v $\mathbb{Q}^n$ a racionálními poloměry). Očíslujme tuto jako $\{B_i : i < \omega\}$ (prázdné množiny vynecháme). Vybereme-li pro každé $i < \omega$ bod $d_i \in B_i \cap (r_i + \mathbb{Q})^n$, získáme velmi tenkou hustou množinu.

Postup použitý v tomto příkladu nás vede k formulaci následující obecné postačující podmínky.

Tvrzení 2.3. *Nechť $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ jsou topologické prostory, přičemž v každém z nich existuje κ disjunktních hustých množin. Označme X součin $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Pokud $\kappa \geq \pi w(X)$, pak v X existuje velmi tenká hustá množina (mohutnosti $\pi w(X)$).*

Důkaz. Pro každé $\alpha \in A$ označme κ disjunktních hustých množin v X_α jako $\{D_{\alpha,i} : i < \kappa\}$, dále $D_i := \prod_{\alpha \in A} D_{\alpha,i}$. Nechť $\{B_i : i < \pi w(X)\}$ je π-báze X. Pro $i < \pi w(X)$ volme $d_i \in D_i \cap B_i$. Pak $D := \{d_i : i < \pi w(X)\}$ je velmi tenká hustá množina (protíná každou množinu π-báze, pro $i \neq j < \pi w(X)$ máme $D_{\alpha,i} \cap D_{\alpha,j} = \emptyset$, tedy $d_i(\alpha) \neq d_j(\alpha)$). $\square$

Příklad 2.4 (aplikace postačující podmínky 2.3)**.** V $\mathbb{R}$ máme $\mathfrak{c}$ disjunktních hustých množin, což je daném případě maximum ($|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$). Lemma o váze součinu (1.16) dává $\pi w(X^\kappa) = \max\{\kappa, \pi w(X)\}$. V našem případě chceme

$$\mathfrak{c} \geq \pi w(\mathbb{R}^\kappa) = \max\{\kappa, \pi w(\mathbb{R})\} = \max\{\kappa, \omega\},$$

abychom dostali velmi tenkou hustou množinu v $\mathbb{R}^\kappa$ mohutnosti $\max\{\kappa, \omega\}$. Tedy aplikací naší postačující podmínky získáváme velmi tenkou hustou množinu v $\mathbb{R}^\kappa$ pro $\kappa \leq \mathfrak{c}$, pro $\kappa \leq \omega$ dokonce velikosti ω.

Podívejme se nyní na součin $\mathbb{Q}^\kappa$. V $\mathbb{Q}$ existuje ω disjunktních hustých množin, což je opět nejvyšší možný počet. (Uvažme p-adická čísla

$$D_p := \{\tfrac{k}{p^n} : k \in \mathbb{Z}; k, p \text{ nesoudělná}; n \in \mathbb{N}\}$$

pro každé prvočíslo p.) Platí $\pi w(\mathbb{Q}) = \omega$, tedy chceme $\omega \geq \pi w(\mathbb{Q}^\kappa) = \max\{\kappa, \omega\}$. Tedy pro $\kappa \leq \omega$ obsahuje $\mathbb{Q}^\kappa$ spočetnou velmi tenkou hustou množinu.

Protože každý neprázdný prostor X obsahuje nejvýše $|X|$ disjunktních hustých množin, dává naše podmínka velmi tenkou hustou množinu nejvýše v $X^{|X|}$. Tato má mohutnost $\pi w(X^{|X|})$. Přitom Hewittova–Maczewského–Pondiczeryho věta (1.15) zaručuje existenci husté množiny mohutnosti $|X|$ až do součinu $X^{2^{|X|}}$ (pro $|X| \geq \omega$). Nabízí se otázka, neexistuje-li lepší postačující podmínka. [GNP, 2.1] dává kladnou odpověď v podobě následující podmínky, která navíc oslabuje předpoklad existence disjunktních hustých množin. Důkaz využívá myšlenku důkazu Hewittovy–Marczewského–Pondiczeryho věty.

Tvrzení 2.5. *Nechť $X = \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ je součin topologických prostorů. Označme $\lambda := \min_{\alpha<\kappa} \Delta(X_\alpha)$. Pokud*

(i) $\lambda \geq \omega$,

(ii) $\lambda \geq \sup_{\alpha<\kappa} \pi w(X_\alpha)$,

(iii) $\kappa \leq 2^\lambda$,

pak X obsahuje velmi tenkou hustou množinu (mohutnosti λ).

Důkaz. Nechť pro každé $\alpha < \kappa$ je $\{B_{\alpha,\beta} : \beta < \lambda\}$ π-báze X_α (lze z ii). Abychom získali hustou množinu v součinu, stačí, aby pro každou podmínku na konečně mnoha souřadnicích $f : K \to \lambda$ ($K \subseteq \kappa$ konečná) naše množina obsahovala bod z $\bigcap_{\alpha\in K} \pi_\alpha^{-1}[B_{\alpha,f(\alpha)}]$. Takových podmínek je $\kappa \cdot \lambda$, tedy až 2^λ. Ale jeden zvolený bod může zároveň splňovat více podmínek.

Uvažme $\mathcal{C}$ systém podmnožin κ, který odděluje konečné množiny bodů, tj. pro každé $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ různé prvky κ existují $C_1, \dots, C_k$ disjunktní množiny v $\mathcal{C}$, že $\alpha_i \in C_i$ pro $1 \leq i \leq k$. Místo abychom podmínku danou zobrazením $f : \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \to \lambda$ splnili bodem $x \in X : x_{\alpha_i} \in B_{\alpha_i, f(\alpha_i)}$, $1 \leq i \leq k$, oddělme $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ souborem $C_1, \dots, C_k$ a volme $x \in X$, že $(\forall i)(\forall \alpha \in C_i) : x_\alpha \in B_{\alpha, f(\alpha_i)}$. Tedy stačí uvažovat konečné posloupnosti dvojic $\big\langle \langle C_i, \beta_i\rangle : i < k\big\rangle$, kde $\{C_i\}_{i<k}$ jsou disjunktní množiny v $\mathcal{C}$ a $\beta_i \in \lambda$. Systém všech takových posloupností je velký $|\mathcal{C}| \cdot \lambda$. Ukážeme, že existuje systém $\mathcal{C}$ velikosti λ, a že tedy máme λ posloupností.

Uvažme 2^λ s topologií součinu. Pak standardní báze tohoto prostoru má mohutnost λ (protože $\lambda \geq \omega$) a odděluje konečné množiny bodů. (Pro jeden bod volme celé 2^λ. Máme-li $C_1, \dots, C_k$, přičemž $\forall i : x_i \in C_i$ a $\bigcup_{i<k} C_i = 2^\lambda$, pak existuje jediné i, že $x_k \in C_i$. Protože x_k se liší od x_i v nějaké souřadnici α, můžeme C_i rozdělit na množiny $C_i \cap \pi_\alpha^{-1}[\{0\}]$ a $C_i \cap \pi_\alpha^{-1}[\{1\}]$.) Protože $\kappa \leq 2^\lambda$, můžeme najít systém $\mathcal{C}$ velikosti λ i v κ.

Očíslujme tedy množinu všech konečných posloupností dvojic $\big\langle \langle C_i, \beta_i\rangle\big\rangle_{i<k}$, kde $\{C_i\}_{i<k}$ jsou disjunktní množiny v $\mathcal{C}$ a $\beta_i \in \lambda$, jako $\Big\{\big\langle \langle C_i^\delta, \beta_i^\delta\rangle\big\rangle_{i<k^\delta} : \delta < \lambda\Big\}$. Označme $U_{\delta,\alpha} := B_{\alpha,\beta_i^\delta}$ pro $\alpha \in C_i^\delta$, $U_{\delta,\alpha} := X_\alpha$, pokud α není v žádné množině C_i^δ. Potom množiny $U_{\delta,\alpha}$ jsou otevřené a dle definice λ mají mohutnost alespoň λ. Dále $\mathcal{U} := \big\{\prod_{\alpha<\kappa} U_{\delta,\alpha} : \delta < \lambda\big\}$ je systém neprázdných množin v X takový, že každá otevřená neprázdná množina v X má v $\mathcal{U}$ svojí podmnožinu, ovšem nemusí se jednat o π-bázi, protože množiny v $\mathcal{U}$ nemusí být otevřené. (Navíc pro $\kappa = 2^\lambda$ je dle lemmatu 1.16 $\pi w(X) = 2^\lambda > \lambda$.)

Vybereme-li z každé množiny v $\mathcal{U}$ jeden bod, získáme hustou množinu velikosti λ, čímž jsme vlastně dokázali Hewittovu–Marczewského–Pondiczeryho větu (1.15). Protože ale můžeme v každém kroku δ a každé složce α vybrat libovolný bod z $U_{\delta,\alpha}$, můžeme postupným výběrem transfinitní indukcí zajistit, že výsledná množina bude velmi tenká. Máme-li prvních $\delta < \lambda$ bodů $\{x^\gamma : \gamma < \delta\}$, stačí volit $x_\alpha^\delta \in U_{\delta,\alpha} \setminus \{x_\alpha^\gamma : \gamma < \delta\}$. □

Poznámka 2.6. Předpoklad $\lambda \geq \omega$ v předchozím tvrzení je splněn pro Hausdorffovy prostory bez izolovaných bodů, což je předpoklad originálního tvrzení [GNP, 1.1].

Poznámka 2.7. Tvrzení 2.5 funguje pro každé nekonečné λ takové, že

$$\sup_{\alpha<\kappa} \pi w(X_\alpha) \leq \lambda \leq \min_{\alpha<\kappa} \Delta(X_\alpha),$$

a dává velmi tenkou hustou množinu mohutnosti λ.

Příklad 2.8 (aplikace postačující podmínky 2.5). Podívejme se, jaké výsledky dává podmínka pro $\mathbb{R}^\kappa$ a $\mathbb{Q}^\kappa$. Máme $\Delta(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$, $\pi w(\mathbb{R}) = \omega$. Tedy získáváme spočetnou velmi tenkou hustou množinu v $\mathbb{R}^\kappa$ pro $\kappa \leq \mathfrak{c}$, dále velmi tenkou hustou množinu mohutnosti $\mathfrak{c}$ pro $\kappa \leq 2^\mathfrak{c}$ nebo např. mohutnosti ω_1 pro $\kappa \leq 2^{\omega_1}$. Protože $\Delta(\mathbb{Q}) = \omega$ a $\pi w(\mathbb{Q}) = \omega$, získáváme spočetnou velmi tenkou hustou množinu v $\mathbb{Q}^\kappa$ pro $\kappa \leq \mathfrak{c}$. Dostáváme tedy lepší výsledky než v příkladu 2.4.

Podobný výsledek obdržíme v případě mocniny libovolného separabilního metrizovatelného prostoru X bez izolovaných bodů. Protože X je separabilní metrizovatelný, máme $\pi w(X) = d(X) = \omega$. Protože v X nejsou izolované body, máme $\Delta(X) > 1$ a z metrizovatelnosti (stačilo by T_0) pak $\Delta(X) \geq \omega$. Z podmínky máme velmi tenkou hustou množinu mohutnosti ω v X^κ pro $\kappa \leq \mathfrak{c}$.

Podívejme se nyní na vztah zmíněných dvou postačujících podmínek. Díky lemmatu o váze součinu (1.16) můžeme za dodatečného předpokladu $\pi w(X) \geq \omega$ podmínku 2.3 přeformulovat takto.

Tvrzení 2.9. *Nechť $X = \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ je součin topologických prostorů, přičemž každý z nich obsahuje λ disjunktních hustých množin. Pokud*

(i) $\pi w(X) \geq \omega$,

(ii) $\lambda \geq \sup_{\alpha<\kappa} \pi w(X_\alpha)$,

(iii) $\kappa \leq \lambda$,

pak X obsahuje velmi tenkou hustou množinu.

Tato reformulace více odpovídá dikci podmínky 2.5. Obsahuje-li X_α λ disjunktních hustých množin, není λ větší než libovolná neprázdná otevřená množina v X_α, tedy $\lambda \leq \min_{\alpha<\kappa} \Delta(X_\alpha)$. Dále máme $\kappa \leq \lambda < 2^\lambda$ a

$$\lambda \geq \max\{\kappa, \sup_{\alpha<\kappa} \pi w(X_\alpha)\} = \pi w(X) \geq \omega.$$

Tedy předpoklady podmínky 2.3 jsou při $\pi w(X) \geq \omega$ silnější než předpoklady podmínky 2.5.

2.2 Nutné podmínky existence velmi tenké husté množiny

V této podkapitole se budeme zabývat nutnými podmínkami pro existenci velmi tenké husté množiny v součinu topologických prostorů. Na tyto můžeme samozřejmě nahlížet také jako na postačující podmínky neexistence takové množiny. Začněme jednoduchým pozorováním.

Pozorování 2.10. *Nechť X, Y jsou topologické prostory, X obsahuje izolovaný bod, Y obsahuje dvě neprázdné disjunktní otevřené množiny. Pak $X \times Y$ neobsahuje (velmi) tenkou množinu.*

Důkaz. Je-li x izolovaný v X, jsou-li U, V neprázdné disjunktní otevřené v Y a je-li D (velmi) tenká hustá v $X \times Y$, pak $\langle x, u\rangle \in D$ pro nějaké $u \in U$ a $\langle x, v\rangle \in D$ pro nějaké $v \in V$. Přitom ale $u \neq v$, což je spor tím, že D je (velmi) tenká. $\square$

Vraťme se k úvahám z počátku kapitoly. Tvrzení 2.1 nás vede k následující nutné podmínce.

Tvrzení 2.11. *Nechť* $X = \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ *je součin Hausdorffových alespoň dvoubodových prostorů, ve kterém existuje velmi tenká hustá množina* D*. Potom platí* $\kappa < 2^{2^\lambda}$*, kde* $\lambda = \min_{\alpha<\kappa} |X_\alpha|$.

Důkaz. Podobně jako v tvrzení 2.1 máme

$$d(X) \leq |D| \leq \min_{\alpha<\kappa} |X_\alpha| = \lambda,$$
$$2^\kappa \leq |X| \leq 2^{2^{d(X)}} \leq 2^{2^\lambda},$$

tedy $\kappa < 2^{2^\lambda}$. □

Následuje drobné zobecnění nutné podmínky z tvrzení [GNP, 2.1].

Tvrzení 2.12. *Nechť* D *je velmi tenká hustá množina v* $X = \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$*;* A*,* B *jsou neprázdné disjunktní podmnožiny* κ*. Označme* $X_A := \pi_A[X]$*,* $X_B := \pi_B[X]$*. Pak* $\Delta(X_A) \geq d(X_B)$*.*

Důkaz. Označme $D_{AB} := \pi_{A\cup B}[D]$. D_{AB} je jakožto projekce velmi tenké husté množiny velmi tenká a hustá v $\pi_{A\cup B}[X] = X_A \times X_B$ (v poslední rovnosti jsme využili disjunktnosti A, B). Poznamenejme, že v tomto důkazu pro $M \subseteq X_A$, $N \subseteq X_B$ uvažujeme $M \times N \subseteq \prod_{\alpha\in A\cup B} X_\alpha$, což je z pohledu tenkosti podstatné. Nechť U je otevřená v X_A realizující $\Delta(X_A)$, $D' := D_{AB} \cap (U \times X_B)$.

- D' je hustá v $U \times X_B$ (protože $U \times X_B$ je otevřená v $X_A \times X_B$ – viz 1.4), tedy $\pi_B[D']$ je hustá v $\pi_B[U \times X_B] = X_B$, tedy $\big|\pi_B[D']\big| \geq d(X_B)$.
- D' je jakožto podmnožina velmi tenké množiny D_{AB} velmi tenká, tedy máme $\big|\pi_A[D']\big| = \big|\pi_B[D']\big|$.
- Nakonec máme $\pi_A[D'] \subseteq \pi_A[U \times X_B] = U$, tedy $\big|\pi_A[D']\big| \leq |U| = \Delta(X_A)$.

Celkem

$$\Delta(X_A) \geq \big|\pi_A[D']\big| = \big|\pi_B[D']\big| \geq d(X_B).$$ □

Na závěr této podkapitoly se podívejme na vztah těchto dvou nutných podmínek. Ukážeme, že druhá nutná podmínka je silnější. Přidáme-li totiž k závěru druhé podmínky dodatečný předpoklad první podmínky o Hausdorffových alespoň dvoubodových prostorech, obdržíme závěr první podmínky. Toto shrnuje následující tvrzení.

Tvrzení 2.13. *Nechť* $X = \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ *je součin Hausdoffových alespoň dvoubodových prostorů a pro každé dvě neprázdné disjunktní podmnožiny* κ*,* A*,* B*, platí* $\Delta\big(\pi_A[X]\big) \geq d\big(\pi_B[X]\big)$*. Potom* $\kappa < 2^{2^\lambda}$*, kde* $\lambda = \min_{\alpha<\kappa} |X_\alpha|$*.*

Důkaz. Vyberme $\alpha < \kappa$ takové, že $|X_\alpha| = \lambda$. Označme $X_{\kappa\setminus\{\alpha\}} := \pi_{\kappa\setminus\{\alpha\}}[X] = \prod_{\alpha\neq\beta<\kappa} X_\beta$. Potom platí

$$d(X_{\kappa\setminus\{\alpha\}}) \leq \Delta(X_\alpha) \leq |X_\alpha| = \lambda,$$
$$2^\kappa \leq |X| = |X_\alpha| \cdot |X_{\kappa\setminus\{\alpha\}}| \leq \lambda \cdot 2^{2^{d(X_{\kappa\setminus\{\alpha\}})}} \leq \lambda \cdot 2^{2^\lambda}.$$

Pro λ nekonečné máme $\lambda \cdot 2^{2^\lambda} = 2^{2^\lambda}$, tedy $2^\kappa \leq 2^{2^\lambda}$ a $\kappa < 2^{2^\lambda}$. Pro λ konečné je X_α konečný Hausdorffův, tedy diskrétní, a $\Delta(X_\alpha) = 1$. Pro libovolné $\alpha \neq \beta < \kappa$ máme $d(X_\beta) = 1$, takže X_β je jednobodový, což je spor s tím, že neobsahuje izolované body. Pro $\kappa = 1$ tvrzení platí triviálně. □

3. Tenké husté množiny

Nejprve se podívejme na situaci v nekonečných součinech topologických prostorů. Následuje postačující podmínka pro existenci tenké husté množiny, která zobecňuje větu [GNP, 2.4] z mocnin na libovolné součiny.

Tvrzení 3.1 (postačující podmínka existence). *Nechť $X = \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ je součin alespoň dvoubodových prostorů, $\kappa \geq \omega$. Označme $\lambda := \sup_{\alpha<\kappa} d(X_\alpha)$ a pro A nekonečnou podmnožinu κ označme $\mu_A := \min_{\alpha\in A} |X_\alpha|$.*

(i) *Pokud $\kappa \cdot \lambda \leq 2^\kappa$, pak X obsahuje κ-tenkou hustou množinu.*

(ii) *Pokud $\kappa \cdot \lambda \leq \mu_A$, pak X obsahuje hustou množinu, ve které se každé dva různé body liší ve všech až na konečně mnoho souřadnicích z A. Tedy pro $A = \kappa$ obsahuje skoro velmi tenkou hustou množinu.*

Důkaz. Pro každé $\alpha < \kappa$ označme D_α hustou množinu mohutnosti λ v X_α. Dále, označíme-li $\mathcal{F} := \{f \in \prod_{\alpha\in K} D_\alpha : K \text{ konečná podmnožina } \kappa\}$, potom každá $D \subseteq X$, která obsahuje rozšíření každé funkce z $\mathcal{F}$, je hustá v X. Platí $|\mathcal{F}| = \kappa\cdot\lambda$, očíslujme tedy $\mathcal{F}$ jako $\{f_\beta : \beta < \kappa \cdot \lambda\}$.

(i) Protože $\kappa \cdot \kappa = \kappa$, existuje $\mathcal{R}$ rozklad κ na κ množin velikosti κ. Očíslujme $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ jako $\{\mathcal{M}_\beta : \beta < 2^\kappa\}$. Protože $\kappa \cdot \lambda \leq 2^\kappa$, můžeme každou f_β rozšířit o charakteristickou funkci $\chi_{\bigcup \mathcal{M}_\beta}$ (při značení, kde 0, 1 značí dva různé prvky každého X_α). Tím získáváme soubor $D := \{g_\beta : \beta < \kappa\cdot\lambda\}$, který tvoří κ-tenkou hustou množinu, neboť pro každé dvě různé funkce g_α, g_β existuje $R \in \mathcal{R}$, že $R \in \mathcal{M}_\alpha$ a $R \notin \mathcal{M}_\beta$, tedy $g_\alpha[R \setminus K] = \{1\}$ a $g_\beta[R \setminus K] = \{0\}$, kde $K = \mathrm{dom}(f_\alpha) \cup \mathrm{dom}(f_\beta)$.

(ii) Protože $\kappa \cdot \lambda \leq \mu_A$, můžeme induktivně funkce f_β rozšiřovat na g_β tak, aby $g_\beta(\alpha) \in X_\alpha \setminus \{g_\gamma(\alpha) : \gamma < \beta\}$ pro každé $\alpha \in A \setminus \mathrm{dom}(f_\beta)$, čímž zajistíme požadované. □

Důsledek 3.2. *Pro každý topologický prostor X a $\kappa \geq \omega$ obsahuje X^κ κ-tenkou hustou množinu. Speciálně, každá nekonečná mocnina topologického prostoru obsahuje tenkou hustou množinu.*

Důkaz. Je-li X alespoň dvoubodový, užijeme předchozí tvrzení. Buď platí $\kappa \cdot \lambda = \kappa \leq 2^\kappa$ nebo $\kappa \cdot \lambda = \lambda = d(X) \leq |X| = \mu_\kappa$. Je-li X jednobodový nebo prázdný, platí tvrzení triviálně. □

Předpoklady podmínky 3.1 vyjadřují jakousi vyváženost prostorů tvořících daný součin. První podmínka říká, že hustota každého prostoru musí být dost malá vzhledem k počtu činitelů. Není-li splněna, pak máme v našem součinu nějaký prostor vysoké hustoty, a tedy i mohutnosti. Je-li v součinu takovýchto „velkých“ prostorů dostatek (alespoň ω), můžeme pro existenci tenké množiny použít druhou podmínku.

Následující příklad (též [GNP, 2.5]) ukazuje „nevyvážený“ součin jinak „pěkných“ prostorů, který tenkou hustou množinu neobsahuje.

Příklad 3.3. Existuje součin spočetně mnoha metrizovatelných prostorů bez izolovaných bodů, který neobsahuje tenkou hustou množinu.

Důkaz. Položme $X := \prod_{n<\omega} X_n$, kde $X_0 = \mathbb{Q}^{(>\mathfrak{c})}$ (tj. topologická suma více než kontinua kopií $\mathbb{Q}$) a $X_n = \mathbb{Q}$ pro $n \geq 1$. X_0 obsahuje více než $\mathfrak{c}$ disjunktních otevřených množin, tedy $d(X) > \mathfrak{c}$. Protože $|\mathbb{Q}^\omega| = \mathfrak{c}$, obsahuje každá množina D hustá v X dva různé body, které se shodují na celém $\prod_{1\leq n<\omega} X_n$, což je spor s tenkostí D. $\square$

Nyní se soustřeďme na konečné součiny. Podobně jako v pozorování 2.10 jsou izolované body překážkou existence tenké husté množiny.

Pozorování 3.4. *Je-li X alespoň dvoubodový T_1 prostor s izolovaným bodem a D hustá v X^κ, potom pro každé $n < \omega, \kappa$ existují různé body x, y v D, které se shodují alespoň v n složkách.*

Důkaz. Je-li 0 izolovaný bod v X, uvažme $U := \{f \in X^\kappa : f(\alpha) = 0, \forall \alpha < n\}$. Pak U je otevřená v X^κ a stačí volit $x \in D \cap U$, $y \in D \cap (U \setminus \{x\})$. $\square$

Důsledek 3.5. *Je-li X alespoň dvoubodový T_1 prostor s izolovaným bodem, pak X^n neobsahuje tenkou hustou množinu pro žádné přirozené n. (A podle důsledku 1.25 X^κ neobsahuje velmi tenkou hustou množinu pro žádné $\kappa \geq 2$.)*

Ovšem [GNP, 2.3] nám dává příklad metrizovatelného prostoru bez izolovaných bodů se stejnými vlastnostmi.

Příklad 3.6. Existuje metrizovatelný prostor X bez izolovaných bodů takový, že X^n neobsahuje tenkou hustou množinu pro žádné přirozené n a X^κ neobsahuje velmi tenkou hustou množinu pro žádné $\kappa \geq 2$.

Důkaz. Volme $X := \mathfrak{c} \times \mathbb{Q}$, kde $\mathfrak{c}$ uvažujeme s diskrétní topologií a $\mathbb{Q}$ s běžnou topologií. Množina $\mathfrak{c}^n$ tvoří diskrétní podsoučin X^n, tedy, je-li D hustá v X^n, pak

$$(\forall \alpha \in \mathfrak{c})(\exists q \in \mathbb{Q}^n)\colon x(\alpha, q) := \big\langle \langle \alpha, q_0\rangle, \langle 0, q_1\rangle, \ldots, \langle 0, q_{n-1}\rangle \big\rangle \in D.$$

Protože $|\mathbb{Q}^n| = \omega < \mathfrak{c}$, existuje $q \in \mathbb{Q}^n$, že $\big|\{\alpha \in \mathfrak{c} : x(\alpha, q) \in D\}\big| = \mathfrak{c}$, což je spor s tenkostí D. $\square$

3.1 Hlavní konstrukce

Příklad [GNP, 2.6] ukazuje za hypotézy kontinua (tzn. $\omega_1 = \mathfrak{c}$) konstrukci spočetného regulárního Hausdorffova prostoru X takového, že X^2 obsahuje tenkou hustou množinu, avšak X^3 nikoliv. V této podkapitole tuto konstrukci zobecníme následujícím způsobem: pro každé přirozené $n \geq 2$ existuje spočetný T_3 prostor X bez izolovaných bodů takový, že X^n obsahuje n-tenkou hustou množinu, ale X^{n+1} n-tenkou hustou množinu neobsahuje.

Začněme popisem jisté obecné konstrukce topologických prostorů.

Definice 3.7. Nechť X je množina, $\{T_\alpha : \alpha < \kappa\}$ soubor podmnožin X. Pro $\alpha \leq \kappa$ definujme $\Sigma_\alpha := \{\sigma : \sigma \text{ funkce do } \{0,1\}, \mathrm{dom}(\sigma) \text{ konečná podmnožina } \alpha\}$. Pro $\sigma \in \Sigma_\alpha$ položme $[\sigma] := \bigcap_{\alpha \in \mathrm{dom}(\sigma)} T_\alpha^{\sigma(\alpha)}$, kde $T_\alpha^0 := T_\alpha$, $T_\alpha^1 := X \setminus T_\alpha$. Dále označme $[\Sigma_\alpha] := \{[\sigma] : \sigma \in \Sigma_\alpha\}$.

Pro každé $\alpha \leq \kappa$ je soubor $[\Sigma_\alpha]$ uzavřený na konečné průniky (kromě případu, kdy je průnikem prázdná množina) a pokrývá celé X, může tedy tvořit bázi topologie. *Topologii indukovanou systémem základních obojetných množin* $\{T_\beta : \beta < \alpha\}$ definujeme jako topologii na X s bází $[\Sigma_\alpha]$. Prvky $[\Sigma_\alpha]$ nazveme *bázové obojetné množiny.*

V dalším textu bude X_α označovat množinu X s topologií indukovanou systémem základních obojetných množin $\{T_\beta : \beta < \alpha\}$.

Řekneme, že $\{T_\alpha : \alpha < \kappa\}$ je *nezávislý systém množin (na X)*, je-li $[\sigma]$ nekonečná pro každou $\sigma \in \Sigma_\kappa$.

Pozorování 3.8. *Nechť $\{T_\alpha : \alpha < \kappa\}$ je nekonečný soubor podmnožin X a pro každé $\sigma \in \Sigma_\kappa$ platí $[\sigma] \neq \emptyset$. Je-li D hustá v X_κ, pak pro každé $\sigma \in \Sigma_\kappa$ je průnik $D \cap [\sigma]$ nekonečný. Speciálně, množiny $[\sigma]$ jsou nekonečné a $\{T_\alpha : \alpha < \kappa\}$ je nezávislý systém množin. Navíc, $\{T_\alpha \cap D : \alpha < \kappa\}$ je nezávislý systém indukující na D topologii podprostoru X_κ.*

Důkaz. Volme $\sigma \in \Sigma_\kappa$, $n \in \mathbb{N}$ libovolně. Z předpokladu existuje $S \subseteq \Sigma_\kappa \setminus \mathrm{dom}(\sigma)$, $|S| = n$. Funkci σ můžeme na S dodefinovat 2^n způsoby. Získané funkce indukují rozklad $[\sigma]$ na 2^n bázových obojetných množin, přičemž z hustoty každou z nich D protíná. Tedy $\big|D \cap [\sigma]\big| \geq 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Dále si stačí uvědomit, že bázi podprostorové topologie na D tvoří množiny $D \cap [\sigma]$, $\sigma \in \Sigma_\kappa$, a toto jsou právě bázové obojetné množiny indukované nezávislým systémem $\{T_\alpha \cap D : \alpha < \kappa\}$. □

Definice 3.7 nám dává dobře uspořádaný systém topologií na X. Podívejme se na některé vlastnosti tohoto systému.

Tvrzení 3.9. *Nechť $\{T_\alpha : \alpha < \kappa\}$ je nezávislý systém množin na X.*

(i) *S rostoucím α se topologie prostorů X_α zjemňují, tzn. je-li U otevřená v X_α, je otevřená i v X_β pro každé $\beta\colon \alpha \leq \beta \leq \kappa$.*

(ii) *Všechny prostory X_α jsou bez izolovaných bodů.*

(iii) *Všechny prostory X_α jsou regulární.*

(iv) *Je-li nějaký prostor X_α T_0, jsou všechny X_β, $\beta \geq \alpha$, T_3.*

(v) *Je-li α limitní ordinál a D je hustá v X_β pro každé $\beta \in B$, kde B je kofinální podmnožina α, je D hustá i v X_α.*

(vi) *Je-li D otevřená hustá v X_α, je otevřená hustá i v každém X_β, $\beta \geq \alpha$.*

(vii) *Je-li N řídká v X_α, je řídká i v každém X_β, $\beta \geq \alpha$.*

(viii) *Všechny předchozí body platí i pro libovolné mocniny $\{X_\alpha^\lambda : \alpha < \kappa\}$, tj. v předchozích tvrzeních se místo X_α, X_β vyskytne X_α^λ, X_β^λ.*

Důkaz.

(i) Plyne ihned z definice prostorů X_α.

(ii) Z nezávislosti systému $\{T_\alpha : \alpha < \kappa\}$ plyne, že každý prostor X_α má bázi tvořenou nekonečnými množinami.

(iii) Plyne ihned z toho, že v každém prostoru X_α máme bázi tvořenou obojetnými množinami.

(iv) Z předchozích bodů plyne, že všechny prostory $X_{\geq\alpha}$ jsou T_0 a regulární, tedy už nutně Hausdorffovy a T_3.

(v) Z kofinality B v α plyne $\Sigma_\alpha = \bigcup_{\beta \in B} \Sigma_\beta$. Tedy každá bázová obojetná množina X_α je již bázovou obojetnou množinou prostoru X_β pro nějaké $\beta \in B$, a tedy má s D neprázdný průnik.

(vi) Nejprve ukážeme sporem, že D je otevřená hustá v $X_{\alpha+1}$. Kdyby ne, existuje $\sigma \in \Sigma_{\alpha+1}$, že $D \cap [\sigma] = \emptyset$. Položme $\sigma' := \sigma \restriction \alpha$. D je hustá v X_α, tedy existuje nějaké $x \in D \cap [\sigma']$. Protože je D otevřená, existuje U bázová obojetná v X_α, že $x \in U \subseteq D$. Pak ale $[\sigma'] \cap U$ je neprázdná, a tedy bázová obojetná v X_α a tvaru $[\sigma'']$, kde $\sigma' \subseteq \sigma'' \in \Sigma_\alpha$. Pro $\tau := \sigma \cup \sigma''$ máme $\emptyset \neq [\tau] = [\sigma] \cap [\sigma''] \subseteq [\sigma] \cap D$, což je spor s předpokladem. Předchozí bod zajistí indukční krok v limitních bodech.

(vii) Je-li N řídká v X_α a $\beta \geq \alpha$, pak $X \setminus \overline{N}^{X_\alpha}$ je otevřená hustá v X_α a dle předchozího bodu i v X_β. Protože topologie X_β je jemnější než v případě X_α, je $X \setminus \overline{N}^{X_\beta}$ nadmnožinou předchozí množiny a také otevřená hustá, což je ekvivalentní s tím, že N je řídká v X_β.

(viii) Důkazy probíhají analogicky. Využijeme standardní bázi součinu, jejíž prvky zde mají tvar $\bigcap_{i \in F} {\pi_i}^{-1}\big[[\sigma_i]\big]$ pro $F \subseteq \lambda$ konečnou; v bodě (iii) pak fakt, že součin regulárních prostorů je regulární (viz [En, 2.3.11, s. 80]). □

Definice 3.10. Do konce kapitoly budeme používat následující označení.

- Zvolme pevně, ale libovolně přirozené $n \geq 1$.
- Jako nosnou množinu X našeho hledaného prostoru zvolme ω.
- Označme $D := \{\langle kn + i : i < n\rangle : k \in \omega\} \subseteq X^n$. Toto bude n-tenká hustá množina v X^n.

Lemma 3.11. *Existuje $\{T_\alpha : \alpha < \omega\}$ nezávislý systém na X takový, že X_ω je Hausdorffův a D je hustá v X^n_ω.*

Důkaz. Uvažme 2^ω se součinovou topologií. Systém $\{T_\alpha : \alpha < \omega\}$, kde $T_\alpha = \{f \in 2^\omega : f(\alpha) = 0\}$, tvoří nezávislý systém indukující standardní bázi součinu 2^ω, tvořenou obojetnými množinami.

Restringujme nyní situaci na

$$Y := \big\{f \in 2^\omega : (\exists \alpha < \omega)(\forall \beta \geq \alpha)\colon f(\beta) = f(\alpha)\big\},$$

tj. na od jistého prvku konstantní posloupnosti. Y je hustý podprostor 2^ω mohutnosti ω. Dle pozorování 3.8 tvoří $\{T_\alpha \cap Y : \alpha < \omega\}$ nezávislý systém indukující na Y topologii podprostoru 2^ω, tato je zřejmě Hausdorffova. Nyní Y očíslujeme tak, aby topologie homeomorfně přenesená na X splňovala požadované.

Nechť $\{B_i : i < \omega\}$ je spočetná báze Y^n. Všechny množiny v ní jsou nekonečné. Očíslujme Y jako $\{y_i : i < \omega\}$. Induktivně definujeme $f\colon X \to Y$. Máme-li definováno $f \restriction kn$ pro nějaké $k \in \omega$, volme čísla $m_0 < m_1 < \ldots < m_{n-1}$ nejmenší taková, že

- $y_{m_i} \in Y \setminus \operatorname{rng}(f \restriction kn)$ pro každé $i < n$,
- $\langle y_{m_i} : i < n\rangle \in B_k$,

a položme $f(kn+i) := y_{m_i}$ pro $i < n$. Pak f je hledaná bijekce. Z konstrukce je jasné, že f je prostá a že D je hustá v X^n, kde na X uvažujeme topologii přenesenou z Y pomocí f. Protože pro každé $m \in \omega$ existuje nekonečně mnoho bázových množin Y, které y_m obsahují, a volíme vždy nejmenší množná m_i, je f na Y. $\square$

Poznámka 3.12. Prostor 2^ω se součinovou topologií je přirozeně homeomorfní s Cantorovým diskontinuem, tedy je metrizovatelný. Y je jeho podprostor, takže je to spočetný metrizovatelný prostor bez izolovaných bodů, a tedy je dle [En, 6.2.A (d), s. 370] homeomorfní $\mathbb{Q}$. Takže jsme pouze očíslovali topologický prostor racionálních čísel tak, aby D byla hustá množina.

Definice 3.13. Nechť $\{T_\beta : \beta < \alpha\}$ je nezávislý systém na X. Definujme

$$\mathcal{C} := \big\{C = \langle f_C, g_C\rangle : f\colon n \to \Sigma_\alpha,\ g\colon n \to \{0,1\}\big\}.$$

$\mathcal{C}$ tvoří soubor podmínek, jehož význam nám osvětlí následující lemma.

Lemma 3.14. *Nechť $\{T_\beta : \beta < \alpha\}$ je nezávislý systém na X, $\alpha \geq \omega$, $T_\alpha \subseteq X$. Pokud*

$$\forall C \in \mathcal{C}\colon D \cap \textstyle\prod_{i<n} \big([f_C(i)] \cap T_\alpha^{g_C(i)}\big) \neq \emptyset,$$

kde $T_\alpha^0 := T_\alpha$, $T_\alpha^1 := X \setminus T_\alpha$, pak $\{T_\beta : \beta < \alpha + 1\}$ je nezávislý systém a D je hustá v $X^n_{\alpha+1}$.

Důkaz. Všimněme si, že množiny $\prod_{i<n}[f_C(i)]$, $C \in \mathcal{C}$, tvoří bázi X^n_α, a množiny $\prod_{i<n}[f_C(i)] \cap T_\alpha^{g_C(i)}$, $C \in \mathcal{C}$, tvoří bázi $X^n_{\alpha+1}$. Tedy D je jistě hustá v $X^n_{\alpha+1}$. Dále z předpokladu plyne, že množiny $[f_C(i)] \cap T_\alpha$ a $[f_C(i)] \cap (X \setminus T_\alpha)$, $C \in \mathcal{C}$, jsou neprázdné. Tedy pro každé $\sigma \in \Sigma_{\alpha+1}$ máme $[\sigma] \neq \emptyset$ a pozorování 3.8 dává nezávislost systému $\{T_\beta : \beta < \alpha + 1\}$. $\square$

Definice 3.15. Nechť $x \in X^m$, $1 \leq m < \omega$, t je prosté zobrazení z neprázdné podmnožiny n do m. Řekneme, že *bod x je tvaru t*, pokud jsou jeho složky po dvou různé a existuje $k_x \in \omega$, že

- $x_{t(i)} = k_x n + i$, $i \in \mathrm{dom}(t)$,
- $x_{i \notin \mathrm{rng}(t)} < k_x n$.

Dále řekneme, že *množina $E \subseteq X^m$ je tvaru t*, pokud jsou všechny její prvky tvaru t.

Všimněme si, že pro každý bod $x \in X^m$ existuje jediné t, že x je tvaru t. Stačí zvolit k_x, že složka x s největší hodnotou je tvaru $k_x n + i$, pro nějaké $i < n$, a potom vhodně definovat t.

Následují dvě lemmata pro rozšiřování nezávislého systému se zachováním hustoty D v X^n, přičemž rozšířený nezávislý systém bude mít ještě další potřebné vlastnosti.

Lemma 3.16. *Nechť $\{T_\beta : \beta < \alpha\}$ je nezávislý systém na X, $\omega \leq \alpha < \omega_1$, D je hustá v X^n_α. Pak existuje $T_\alpha \subseteq X$, že $\{T_\beta : \beta < \alpha + 1\}$ je nezávislý systém a D je hustá v $X^n_{\alpha+1}$. Pokud navíc $E \subseteq X^m$, $1 \leq m < \omega$, je l-tenká a tvaru t, kde $|\,\mathrm{dom}(t)| < l$, pak lze zajistit $E \cap T_\alpha^m = \emptyset$.*

Důkaz. Platí $|\mathcal{C}| = |\Sigma_\alpha| = |\alpha| = \omega$, kde poslední rovnost plyne z předpokladu. Očíslujme tedy $\mathcal{C}$ jako $\{\langle f_j, g_j\rangle : j < \omega\}$. Budeme induktivně definovat posloupnost bodů $k_j \in \omega$ a jim odpovídajících dvojic disjunktních konečných množin $A_j = \langle A_{j,0}, A_{j,1}\rangle$.

Nechť máme k_i, A_i pro všechna $i < j$. Volme $k_j \in \omega$ tak, že

$$\langle k_j n + i : i < n\rangle \in D \cap \left(\prod_{i<n}[f_j(i)]\right) \setminus \left(\bigcup_{i<j}(A_{i,0} \cup A_{i,1})\right)^n.$$

To lze, neboť D je dle předpokladu hustá v X^n_α a analogicky pozorování 3.8 jsou průniky $D \cap \prod_{i<n}[f_j(i)]$ nekonečné. Dále definujme

$$A_{j,0} := \{k_j n + i : g_j(i) = 0\}, \quad A_{j,1} := \{k_j n + i : g_j(i) = 1\}.$$

Potom $D \cap \prod_{i<n}[f_j(i)] \cap A_{j,g_j(i)} \neq \emptyset$. Volíme-li $T_\alpha := \bigcup_{j<\omega} A_{j,0}$, máme $X \setminus T_\alpha \supseteq \bigcup_{j<\omega} A_{j,1}$ a jsou splněny předpoklady lemmatu 3.14.

Máme-li navíc zadanou množinu E splňující předpoklady, můžeme volit body k_j tak, aby navíc splňovaly $E \cap F^m_j = \emptyset$, kde $F_j := \left(\bigcup_{i\leq j} A_{i,0}\right)$. Uvažme hypotetický bod $e \in E \cap F^m_j$. Protože e je tvaru t a z indukčního předpokladu máme $E \cap F^m_{j-1} = \emptyset$ (tj. $e \notin F^m_{j-1}$), platí $k_e = k_j$, tedy $e_{t(i)} = k_j n + i \in A_{j,0}$, $i \in \operatorname{dom}(t)$. Dále $e_{i \notin \operatorname{rng}(t)} \in F_{k-1}$.

Protože E je l-tenká, neexistují $e' \neq e'' \in E$, že $e'_i = e''_i$, $i \in (m \setminus \operatorname{rng}(t))$. Potom by se totiž e', e'' mohly lišit nejvýše ve složkách indexovaných $\operatorname{rng}(t)$ a těch je $|\operatorname{rng}(t)| = |\operatorname{dom}(t)| < l$, což je spor s l-tenkostí E.

Takže každý hypotetický bod e je jednoznačně určen svými složkami indexovanými $(m \setminus \operatorname{rng}(t))$, jejichž hodnoty leží v F_{k-1}, což je konečná množina. Existuje tedy jen konečně mnoho těchto bodů e a jim odpovídajících čísel $k_e \in \omega$. Těmto se při výběru k_j můžeme vyhnout. □

Lemma 3.17. *Nechť $\{T_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{S_\alpha\}$ je nezávislý systém na X, $\omega \leq \alpha < \omega_1$, D je hustá v Y^n, kde Y značí X s topologií indukovanou systémem $\{T_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{S_\alpha\}$. Nechť dále $E \subseteq X^m$, $n < m < 2n$, je n-tenká množina tvaru t, $\operatorname{dom}(t) = n$. Pak existuje $T_\alpha \subseteq S_\alpha$, že $\{T_\beta : \beta < \alpha + 1\}$ je nezávislý, D je hustá v $X^n_{\alpha+1}$, $E \cap T^m_\alpha$ je řídká v $X^m_{\alpha+1}$.*

Důkaz. Platí $|\mathcal{C}| = |\alpha| = \omega$. Očíslujme tedy $\mathcal{C}$ jako $\{\langle f_j, g_j\rangle : j < \omega\}$. Definujme induktivně rostoucí posloupnost bodů $k_j \in \omega$ splňující

- $\langle k_j n + i : i < n\rangle \in D \cap \prod_{i<n}([f_j(i)] \cap S^{g_j(i)}_\alpha)$, kde $S^0_\alpha := S_\alpha$, $S^1_\alpha := X \setminus S_\alpha$,
- $E \cap F^m_j = E \cap F^m_{j-1}$, je-li to možné.

Přitom definujeme $F_j := \bigcup_{i\leq j} A_{i,0}$, kde

$$A_{j,0} := \{k_j n + i : g_j(i) = 0\} \subseteq S_\alpha, \quad A_{j,1} := \{k_j n + i : g_j(i) = 1\} \subseteq X \setminus S_\alpha.$$

Nakonec položme $T_\alpha := \bigcup_{j<\omega} A_{j,0} = \bigcup_{j<\omega} F_j \subseteq S_\alpha$.

Platí $X \setminus T_\alpha \supseteq X \setminus S_\alpha \supseteq \bigcup_{j<\omega} A_{j,1}$, takže T_α splňuje předpoklady lemmatu 3.14, $\{T_\beta : \beta < \alpha + 1\}$ je nezávislý systém na X a D je hustá v $X^n_{\alpha+1}$.

Ukážeme sporem, že $E \cap T^m_\alpha$ je řídká v $X^m_{\alpha+1}$. Kdyby ne, tak existují množiny B_i, $i < m$, bázové obojetné v $X_{\alpha+1}$, že $E \cap T^m_\alpha \cap \prod_{i<m} B_i$ je hustá v $\prod_{i<m} B_i$. Můžeme předpokládat, že B_i jsou tvaru $[\sigma_i] \cap T_\alpha$, kde $\sigma_i \in \Sigma_\alpha$, takže $T_\alpha \subseteq B_i$ a $E \cap \prod_{i<m} B_i$ je hustá v $\prod_{i<m} B_i$.

Volme bod $e \in E \cap \prod_{i<m} B_i$. Platí

$$e \in T_\alpha^m = \left(\bigcup_{j<\omega} F_j\right)^m = \bigcup_{j<\omega} F_j^m = \bigcup_{j<\omega}(F_j^m \setminus F_{j-1}^m),$$

tedy existuje j, že $e \in F_j^m \setminus F_{j-1}^m$. Protože e je tvaru t a $e \notin F_{j-1}^m$, platí $k_e = k_j$, tj. $e_{t(i)} = k_j n + i \in A_{j,0} \cap [f_j(i)]$, $i \in \mathrm{dom}(t) = n$. Odtud také plyne, že $g_j(i) = 0$ pro každé $i < n$. Definujme

$$\begin{aligned} U_{t(i)} &:= [f_j(i)], && i \in \mathrm{dom}(t), \\ U_i &:= X, && i \notin \mathrm{rng}(t). \end{aligned}$$

Položme $V_i := B_i \cap U_i$, $i < m$. Protože $e \in \prod_{i<m} V_i$, jsou množiny V_i neprázdné, a tedy bázové obojetné v $X_{\alpha+1}$. Protože V_i jsou nekonečné, jsou množiny $V_i \setminus k_j n$ neprázdné a otevřené v B_i. Tedy $\prod_{i<m}(V_i \setminus k_j n)$ je neprázdná otevřená v $\prod_{i<m} B_i$. Z hustoty tedy obsahuje nějaký bod $e' \in E$.

Platí $e'_i \geq k_j n$. Dále $k_{e'} n + i = e'_{t(i)} \in U_{t(i)} \cap T_\alpha \subseteq [f_j(i)] \cap S_\alpha$, $i \in \mathrm{dom}(t) = n$. Tedy $k_{e'}$ je jiný kandidát na výběr v j-tém kroku indukce místo k_j. Označíme-li F'_j jemu odpovídající alternativu k množině F_j, pak nemůže platit $E \cap {F'}_j^m = E \cap F_{j-1}^m$. Jinak bychom totiž dle definice nemohli vybrat původní bod k_j, pro který tato podmínka neplatí. Existuje tedy bod $e'' \in E \cap {F'}_j^m \setminus F_{j-1}^m$. Protože e'' je tvaru t, platí $k_{e''} = k_{e'}$, tj. $e''_{t(i)} = k_{e'} n + i = e'_{t(i)}$. Protože $m > n$, existuje $i \in m \setminus \mathrm{rng}(t)$. Pro toto i platí $e'_i \geq k_j n$, ale $e''_i \in F_{j-1} < k_j n$, tedy $e' \neq e''$. Máme tedy dva různé prvky E, které se shodují v n složkách, přitom celkový počet složek $m < 2n$, což dává spor s n-tenkostí E. $\square$

Nyní konečně následuje důkaz hlavního tvrzení.

Věta 3.18. *(CH) Pro každé přirozené $n \geq 2$ existuje spočetný T_3 prostor X bez izolovaných bodů takový, že X^n obsahuje n-tenkou hustou množinu, ale X^{n+1} n-tenkou hustou množinu neobsahuje.*

Důkaz. Jak jsme již říkali, nosnou množinou hledaného prostoru bude $X = \omega$ a D bude n-tenká hustá v X^n.

Uvažme všechny n-tenké množiny $E \subseteq X^{n+1}$ všech tvarů t. Těchto množin je kontinuum. Protože ale předpokládáme hypotézu kontinua, můžeme je očíslovat jako $\{E_\alpha : \omega \leq \alpha < \omega_1\}$.

Na X budeme konstruovat topologie indukované nezávislými systémy základních obojetných množin $\{T_\beta : \beta < \alpha\}$ pro $\alpha < \omega_1$. Vyjdeme z T_3 prostoru X_ω daného systémem $\{T_\beta : \beta < \omega\}$ z lemmatu 3.11. Máme-li již soubor $\{T_\beta : \beta < \alpha\}$ pro $\omega \leq \alpha < \omega_1$, tj. prostor X_α, zvolíme T_α tak, aby prostor $X_{\alpha+1}$ splňoval:

- $\{T_\beta : \beta < \alpha + 1\}$ je stále nezávislý systém,
- D je hustá v $X_{\alpha+1}^n$,
- $E_\alpha \cap T_\alpha^{n+1}$ je řídká v $X_{\alpha+1}^{n+1}$.

Rozdělme situaci na dva případy. Je-li E_α tvaru t, kde $|\mathrm{dom}(t)| < n$, můžeme použít lemma 3.16 a získáme hledané T_α dokonce takové, že $E_\alpha \cap T_\alpha^{n+1} = \emptyset$. Je-li naopak E_α tvaru t, kde $|\mathrm{dom}(t)| \geq n$, pak nutně $\mathrm{dom}(t) = n$. V takovém případě použijeme lemma 3.16 pouze k získání množiny S_α rozšiřující nezávislý systém za zachování hustoty D a z ní vybereme hledanou T_α pomocí lemmatu 3.17.

Nyní ukážeme, že prostor X_{ω_1} splňuje požadované. Dle tvrzení 3.9 je X_{ω_1} T_3 prostor bez izolovaných bodů, protože už prostor X_ω je Hausdorffův. Dále D je hustá v $X^n_{\omega_1}$, protože naše indukce přenáší hustotu D na následnické prostory a na limitní prostory je přenesena automaticky tvrzením 3.9. Nakonec, je-li E libovolná n-tenká podmnožina X^{n+1}, pak každý její bod je nějakého tvaru t, přičemž všech uvažovaných tvarů je konečně mnoho, takže E lze zapsat jako konečné sjednocení množin E_α. Buď $E = \bigcup_{j<k} E_{\alpha_j}$. Množina $E_{\alpha_i} \cap T^{n+1}_{\alpha_i}$, $i < k$, je řídká v $X^{n+1}_{\alpha_i+1}$, a tedy je řídká i v $X^{n+1}_{\omega_1}$. Tím spíše je zde řídká i $E_{\alpha_i} \cap \bigcap_{j<k} T^{n+1}_{\alpha_j}$. $E \cap \bigcap_{j<k} T^{n+1}_{\alpha_j}$ je jakožto konečné sjednocení těchto množin rovněž řídká v $X^{n+1}_{\omega_1}$. Potom ale E nemůže být v $X^{n+1}_{\omega_1}$ hustá, což jsme chtěli dokázat. □

Máme tedy prostor, který obsahuje velmi tenkou hustou množinu v každé mocnině až do X^n, ale v X^{n+1} neobsahuje n-tenkou hustou množinu. Pro $n = 2$ máme prostor X, že X^2 obsahuje tenkou množinu, ale X^3 nikoliv, což je původní výsledek [GNP, 2.6].

Všimněme si, že předchozí důkaz může probíhat stejně i pro vyšší mocniny X^m. Lemma 3.16 platí pro libovolné m a dodatečný předpoklad $|\operatorname{dom}(t)| <$ tenkost E je pro $m \geq n$, E $(n+1)$-tenkou splněn. Lemma 3.17 platí pro $n < m < 2n$. V hlavní větě můžeme uvažovat množiny E_α ze všech mocnin X^m, $n < m < \omega$, najednou, pořád jich je kontinuum. Důsledkem těchto úvah je následující zesílení věty.

Věta 3.19. *(CH) Pro každé přirozené $n \geq 1$ existuje spočetný T_3 prostor X bez izolovaných bodů takový, že*

- *X^n obsahuje n-tenkou hustou množinu, a tedy X^m, $m \leq n$, obsahuje velmi tenkou hustou množinu,*
- *X^m, $n < m < 2n$, neobsahuje n-tenkou hustou množinu,*
- *X^m, $n < m < \omega$, neobsahuje $(n+1)$-tenkou hustou množinu, a tedy ani velmi tenkou hustou množinu.*

Důkaz. Plyne z předchozích úvah. □

V poslední části kapitoly ukážeme, že lemma 3.16 lze za platnosti Martinova axiomu zesílit, důsledkem čehož je částečná platnost předchozí věty pouze za Martinova axiomu.

Lemma 3.20. *(MA) Nechť $\{T_\beta : \beta < \alpha\}$ je nezávislý systém na X, $\omega \leq \alpha < \mathfrak{c}$, D je hustá v X^n_α. Pak existuje $T_\alpha \subseteq X$, že $\{T_\beta : \beta < \alpha+1\}$ je nezávislý systém a D je hustá v $X^n_{\alpha+1}$. Pokud navíc $E \subseteq X^m$, $1 \leq m < \omega$, je l-tenká a tvaru t, kde $|\operatorname{dom}(t)| < l$, pak lze zajistit $E \cap T^m_\alpha = \emptyset$.*

Důkaz. Uvažme uspořádanou množinu

$$\mathcal{A} := \{A = \langle A_0, A_1\rangle : A_0, A_1 \text{ jsou konečné disjunktní podmnožiny } X\},$$
$$A \leq A' \;:\Leftrightarrow\; A_0 \supseteq A'_0 \wedge A_1 \supseteq A'_1.$$

Platí $|\mathcal{A}| = \omega$, tedy uspořádání $\mathcal{A}$ splňuje c. c. c. Pro $C \in \mathcal{C}$ definujme

$$D_C := \{A \in \mathcal{A} : D \cap \textstyle\prod_{i<n}([f_C(i)] \cap A_{g_C(i)}) \neq \emptyset\}.$$

Množiny D_C jsou v uspořádání $\mathcal{A}$ husté. Máme-li $A \in \mathcal{A}$ libovolnou, volme $k \in \omega$ tak, aby $\langle kn+i : i < n\rangle \in D \cap \prod_{i<n}[f_C(i)] \setminus (A_0 \cup A_1)^n$. To lze, neboť z nekonečného průniku $D \cap \prod_{i<n}[f_C(i)]$ odebíráme konečnou množinu. Položme $A' := \langle A_0 \cup \{kn+i : g_C(i) = 0\}, A_1 \cup \{kn+i : g_C(i) = 1\}\rangle$. Potom $A' \leq A$, $A' \in D_C$.

$\mathcal{D} := \{D_C : C \in \mathcal{C}\}$ je soubor hustých množin. Přitom $|\mathcal{D}| = |\mathcal{C}| = |\alpha| < \mathfrak{c}$, takže Martinův axiom nám dá $\mathcal{D}$-generický filtr F. Množiny $\bigcup_{A\in F} A_0$ a $\bigcup_{A\in F} A_1$ jsou disjunktní. Kdyby existovaly $A, A' \in F$, že $x \in A_0 \cap A'_1$, pak existuje $A'' \in F$: $A'' \leq A, A'$, protože F je filtr. Potom $x \in A''_0 \cap A''_1$, což je spor. Položíme-li $T_\alpha := \bigcup_{A\in F} A_0$, pak $X \setminus T_\alpha \supseteq \bigcup_{A\in F} A_1$ a T_α splňuje předpoklady lemmatu 3.14.

Máme-li navíc zadanou množinu E splňující předpoklady, pak uvažme uspořádanou podmnožinu $\mathcal{A}' := \{A \in \mathcal{A} : A_0^m \cap E = \emptyset\}$. Stejný argument jako v lemmatu 3.16 nám dává, že množiny $D_C \cap \mathcal{A}'$, $C \in \mathcal{C}$, jsou v $\mathcal{A}'$ husté, a tedy existuje $\mathcal{D}$-generický filtr F dokonce v $\mathcal{A}'$. Přitom platí $E \cap (\bigcup_{A\in F} A_0)^m = \emptyset$. Kdyby totiž existovaly množiny $A_i \in F$, $i < m$, a bod $x \in E \cap \prod_{i<m} A_{i,0}$, potom $x \in {A'}_0^m$, kde $A' \in F$, $A' \leq A_i$, $i < m$, což je spor. Položme tedy jako předtím $T_\alpha := \bigcup_{A\in F} A_0$. □

Důsledek 3.21. *(MA) Pro každé přirozené $n \geq 1$ existuje spočetný T_3 prostor X bez izolovaných bodů takový, že*

- *X^n obsahuje n-tenkou hustou množinu,*
- *X^m, $n < m < \omega$, neobsahuje $(n+1)$-tenkou hustou množinu.*

Důkaz. Postupujeme analogicky větě 3.18, za E_α bereme všechny $(n+1)$-tenké podmnožiny všech X^m všech možných tvarů t. □

Následuje příklad, který je možné zařadit po bok příkladu 3.6.

Příklad 3.22. (MA) Existuje spočetný T_3 prostor X bez izolovaných bodů takový, že X^n neobsahuje tenkou hustou množinu pro žádné přirozené n.

Důkaz. Jedná se o speciální případ předchozího důsledku pro $n = 1$. □

Závěr

Podařilo se nám vymezit jednotlivé druhy tenkých množin – tenké, velmi tenké, skoro velmi tenké, κ-tenké, $<\kappa$-tenké – ukázat jejich základní vlastnosti a vztahy mezi nimi. Dále jsme se věnovali těmto množinám ve spojení s jejich hustotou v součinech topologických prostorů. Podali jsme několik postačujících a nutných podmínek jejich existence a konkrétní situace demonstrovali na několika příkladech.

Dále jsme zobecnili konstrukci [GNP, 2.6] následujícím způsobem: pro každé přirozené $n \geq 1$ existuje spočetný T_3 prostor X bez izolovaných bodů takový, že

- X^n obsahuje n-tenkou množinu,
- X^m, $n < m < 2m$ neobsahuje n-tenkou množinu,
- X^m, $n < m < \omega$ neobsahuje $(n+1)$-tenkou množinu.

Celé tvrzení jsme dokázali za hypotézy kontinua, kromě druhého bodu jsme podali důkaz za Martinova axiomu.

Nabízí se několik otevřených otázek. Šlo by celé výše uvedené zobecnění dokázat pouze za Martinova axiomu nebo dokonce v ZFC? Existuje prostor X, že X^n obsahuje velmi tenkou hustou množinu, ale X^{n+1} neobsahuje ani tenkou hustou množinu? Existuje prostor X, že X^n obsahuje l-tenkou hustou množinu pro nějaké $1 < l < n$, ale X^{n+1} l-tenkou hustou množinu neobsahuje?

Dalším možným rozšířením práce by bylo uvažovat analogickou konstrukci na jiném kardinálu než ω. Konstrukce by mohla probíhat na kardinálu κ takovém, že $\kappa^+ = 2^\kappa$. Velmi tenká hustá množina v X^n by pak byla tvořena body $\langle \gamma + kn + i : i < n \rangle$, kde γ je 0 nebo limitní ordinál $< \kappa$ a $k \in \omega$.

Seznam použité literatury

[En] Engelking, Ryszard. *General topology*. Revised and completed edition. Berlin: Heldermann, 1989. Sigma series in pure mathematics; vol. 6. ISBN 3-88538-006-4.

[GNP] Gruenhage, G. – Natkaniec, T. – Piotrowski, Z. On thin, very thin, and slim dense sets. *Topology and its Applications*, 2007, vol. 154, no. 4, s. 817–833. ISSN 0166-8641.

[HG] Hutchison, Jennifer – Gruenhage, Gary. Thin-type dense sets and related properties. *Topology and its Applications*, 2011, vol. 158, no. 16, s. 2174–2183. ISSN 0166-8641.

[Pi] Piotrowski, Zbigniew. Dense subsets of product spaces. *Questions and Answers in General Topology*, 1993, vol. 11, s. 313–320. ISSN 0918-4732.