

Adam Bartoš: Husté množiny v součinech topologických prostorů

Husté podmnožiny topologických prostorů jsou od nepaměti předmětem intensivního zájmu topologů. Úhly pohledu jsou velmi pestré: Mohutnost Hausdorffova prostoru nemůže být větší, než mohutnost druhé potence jeho husté množiny (Hausdorff), i velké součiny prostorů mohou mít malou hustou část (Hewitt, Marczewski, Pondiczéry), v prostoru bez izolovaných bodů s maximální topologií je každá hustá množina otevřená (Hewitt, Katětov) — a mohli bychom ještě dlouho pokračovat. Zhruba před dvaceti lety, Zbigniew Piotrowski a Gary Gruenhagen otevřeli nové, velmi zajímavé téma: Jakou kombinatorickou strukturu mohou mít husté podmnožiny součinů? Triviální příklad pro ilustraci: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ obsahuje spočetnou hustou část D takovou, že pro každé dva různé body $\langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \in D$ platí, že všechny čtyři body x, y, u, v jsou navzájem různé, tedy D je opravdu hodně nepodobná husté množině $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Tomuto tématu je práce věnována.

Pan Bartoš se ve své práci soustředil na tenké a velmi tenké husté množiny v součinu. Podmnožina D v topologickém součinu je *tenká*, pokud pro dva různé body $x = \langle x_\alpha : \alpha \in I \rangle$ a $y = \langle y_\alpha : \alpha \in I \rangle$ z D platí, že nerovnost $x_\alpha \neq y_\alpha$ je splněna alespoň pro dvě souřadnice, a *velmi tenká*, pokud tatáž nerovnost platí pro všechna $\alpha \in I$. V Kapitole 1 zavedl nezbytné pojmy a připomněl jak důležité věty, tak snadná tvrzení, později často používaná. Kapitole 2 věnoval velmi tenkým hustým množinám. Zde dokázal několik nových, avšak snadných tvrzení o jejich existenci a uvedl příklady. Konečně, v kapitole 3, těžišti práce, dokázal dvě zobecnění vět z [GNP], přičemž druhé z nich (3.19 a 3.21) je velmi obtížné: Za předpokladu CH existuje pro každé přirozené $n \geq 1$ prostor X (z důkazu je zřejmé, že homeomorfní se spočetnou hustou částí prostoru $\{0, 1\}^{\mathfrak{c}}$), že X^n obsahuje velmi tenkou hustou množinu, avšak v X^m neexistuje n -tenká hustá množina, pro $n < m < 2n$. Nepatrně slabší tvrzení (ve vyšších mocninách neexistuje $(n + 1)$ -tenká hustá množina) dokázal za MA.

Oba výsledky jsou nové a značně netriviální.

Práce je napsána velmi čitelně, materiál je dobře uspořádán a dokonce se mi nepovedlo najít ani jeden překlep.

Závěr. Předložená bakalářská práce svědčí o tom, že pan Adam Bartoš kvalitně zvládl zvolenou problematiku, prokázal jak schopnost samostatné práce s literaturou, tak schopnost řešit problémy. Doporučuji tuto diplomovou práci klasifikovat stupněm

V Praze, 3. srpna 2012



Prof. RNDr Petr Simon, DrSc.