

Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Teorie grafů a její výskyt ve školské matematice

Ester Glasová

Obor: Matematika a technická výchova

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Praha 2012

Děkuji všem, kteří se podíleli na vzniku této práce. Především děkuji prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za odborné vedení, cenné rady a připomínky při zpracování diplomové práce.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem zadanou diplomovou práci zpracovala sama s přispěním vedoucího práce a použila jsem pouze literaturu v práci uvedenou. Dále prohlašuji, že nemám námitek proti půjčování nebo zveřejňování mé diplomové práce nebo její části se souhlasem katedry.

V Praze dne 13. 4. 2012

Abstrakt:

Teorie grafů a její výskyt ve školské matematice

Diplomová práce se zabývá možnostmi zařazení některých úloh z teorie grafů do výuky na gymnáziu a základní škole. Obsahuje potřebnou teorii pro učitele; je v ní uvedeno několik příkladů, kde se vyskytla teorie grafů ve školské matematice na základní škole, a také popsáno několik všeobecně známých úloh, k jejichž řešení se používá teorie grafů. Součástí práce jsou i přípravy dvou vyučovacích hodin. Tématem první z nich je kreslení jedním tahem a Eulerovský tah obecně. Druhá je věnována bludištím, labyrintům, jejich přetváření na graf a zkoumání možných algoritmů na procházení bludištěm.

V experimentální části autorka zkoumá, zda jsou žáci schopni pochopit vybrané části z teorie grafů a zda jim připadá, že je tato látka zábavnější než matematika, na kterou jsou ze školy zvyklí. Výsledky tohoto experimentu jsou srovnávány pro děti ze základní školy a víceletého gymnázia.

Abstract:

Graph theory and its use in school mathematics

This thesis deals with the inclusion of some problems of graph theory in education at secondary school. It contains the necessary theory for teachers as well as several examples of graph theory in school mathematics in elementary school; moreover it describes several well-known problems, which can be solved using graph theory.

The work also includes preparation of two lessons. The theme of the first one is drawing in one stroke and an Eulerian cycle in general. Second topic is dedicated to mazes and labyrinths, their transformation to graph and few algorithms for passing through the maze.

In the experimental part, the author examines whether the students are able to understand the selected parts of graph theory, and whether they find this topic more interesting than the usual mathematics they are used to at school. The results of this experiment are then compared for children from two types of lower secondary schools.

Obsah

Obsah	5
1 Úvod.....	7
2 Kde se můžeme setkat s grafy.....	8
2.1 Matematické úlohy a hry	9
2.1.1 Koza, vlk a zelí	9
2.1.2 Zebry	10
2.2 Výskyt grafů ve školách	12
3 Úvod do teorie grafů	14
3.1 Reprezentace grafu	16
3.2 Důležité pojmy.....	18
3.3 Kostra grafu	22
3.4 Minimální kostra.....	25
3.4.1 Kruskalův algoritmus (neboli Hladový)	26
3.4.2 Jarníkův algoritmus (Primův)	27
3.4.3 Borůvkův algoritmus	27
3.4.4 Úloha na hledání minimální kostry pro žáky	28
3.5 Další pojmy.....	31
3.5.5 Stupeň vrcholu	31
3.5.6 Skóre grafu.....	31
3.5.7 Princip sudosti.....	32
3.5.8 Eulerovský graf.....	32
4 Experiment.....	33
4.1 Příprava hodiny „Domeček jedním tahem“	34
Bludiště	40
Bludiště	40
4.2 Příprava hodiny „Bludiště“	42
4.3 Druhá část hodiny „Bludiště“	48
4.4 Zkoumané skupiny.....	52
4.5 Tvorba dotazníku	53
4.6 Třídy gymnázia	58
4.6.1 Průběh hodiny	59
4.6.2 Výsledky dotazníků	60
4.7 Třídy základní školy	63
4.7.3 7. třída	63
4.7.4 6. třídy.....	67

4.8 Celkové hodnocení	70
5 Seznam použité literatury:	73
6 Další doporučené publikace:	73
7 Seznam převzatých obrázků:	74
8 Seznam obrázků:	75
9 Seznam tabulek:	76
10 Přílohy.....	77
10.1 Příloha 1 – Pracovní list 1	77
10.2 Příloha 2 – Pracovní list 2.....	78

1 Úvod

Co si představíte pod pojmem „graf“? Většina lidí si představí sloupcové či koláčové grafy, které znají z novin, z různých statistik atd. Případně si vzpomenou na grafy funkcí, které se učili v matematice na základní škole. Málokdo se však setkal s teorií grafů, tedy s grafy tvořenými jednotlivými vrcholy propojenými hranami. Toto téma se učí až na vysokých školách, ačkoliv jde o zajímavou část matematiky, se kterou se, aniž bychom si to uvědomovali, setkáváme velmi často. Kdo například nikdy nezkoušel kreslit domeček jedním tahem?

Já osobně jsem se například právě s kreslením domečku jedním tahem setkala již jako malé dítě, domnívám se, že se s touto úlohou setká dříve či později téměř každý. Vzpomínám si však, jak mě zaujalo, když mi můj otec vysvětlil pravidlo, jak poznat, zda lze obrázek nakreslit jedním tahem. Tehdy jsem to nepovažovala za žádnou matematiku ani pravidlo, které bych se musela učit nazpaměť, byl to pro mne kouzelný trik, který moji kamarádi neznali.

Po letech jsem se s tímto tématem setkala na vysoké škole a uvědomila jsem si, že teorie grafů obsahuje více takových zajímavých částí, se kterými by se v určité zjednodušené formě mohli seznámit i žáci středních či základních škol. Toto se stalo hlavní myšlenkou mé diplomové práce. Zkoumá dvě věci:

- Zda jsou žáci schopni porozumět vybraným částem z teorie grafů a
- zda je toto téma baví více než látka běžně probíraná v hodinách matematiky.

Já osobně se domnívám, že jde o téma zajímavé, a to hlavně proto, že se často zabývá úlohami, se kterými se již žáci setkali, a pouze objasňuje matematické teorie a pravidla okolo již známé úlohy. Spojování nových poznatků s již známými informacemi je základem snadnějšího pochopení a zapamatování. Lze tedy využít dříve získané zkušenosti z kreslení domečku jedním tahem či bloudění bludištěm k rozvíjení dalších matematických dovedností žáků.

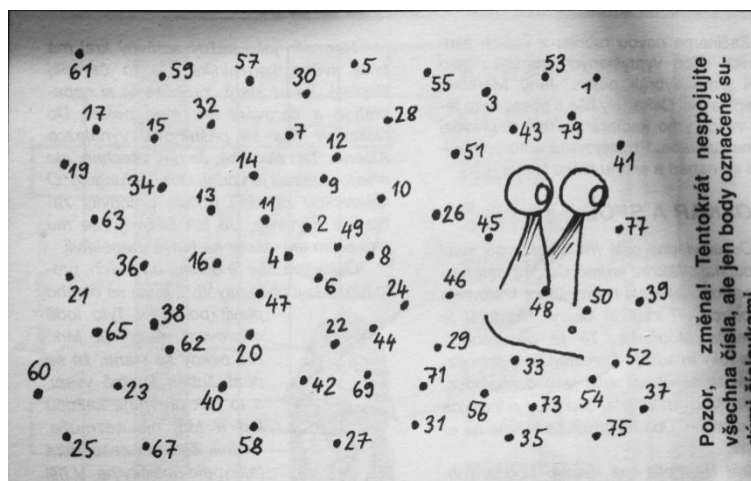
Nejčastější otázka, kterou jsem slýchala od svých žáků v hodinách matematiky, byla: „K čemu nám to v životě bude? K čemu to využijeme?“. Samozřejmě k některým tématům jde vymýšlet různá praktická využití. Podle mého názoru má matematika hlavně rozvíjet logické myšlení žáků, učit je některým strategickým postupům

a pomáhat řešit různé logické problémy. Tyto znalosti jsou v životě nezbytné. Proč by tedy nemohli žáci rozvíjet své myšlení na něčem, co alespoň částečně znají, a to nejen ze školních lavic?

Cílem této diplomové práce je učitelům osvětlit části teorie grafů a ukázat jim možné využití ve výuce. Neobsahuje pouze zpracovanou část teorie grafů, ale také hlavně experiment uskutečněný ve třídách gymnázia i základní školy, při němž bylo zkoumáno, zda jde o zábavnou a žáky uchopitelnou látku.

2 Kde se můžeme setkat s grafy

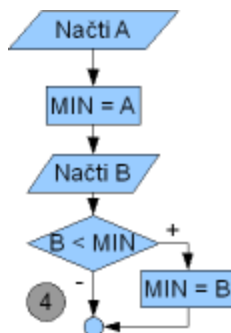
Už malé děti rády luští takzvané spojovačky (viz obr. 1), které se často vyskytují v dětských časopisech. Zadání většinou zní: Spojte čísla od 1 do 40 a zjistíte tak, co se skrývá na obrázku. Jde vlastně o graf, který má očíslované vrcholy 1, 2, ...40 a hrany 1–2, 2–3, 3–4, ..., 39–40. Některá zadání mohou vypadat složitěji: Spojte pouze sudá čísla od 2 do 62. Na následujícím obrázku můžete vidět příklad spojovačky, kterou jsem kdysi vyrobila pro dětský časopis.



Obrázek 1: Spojovačka do dětského časopisu

Schematické znázornění informací pomáhá v jejich utřídění a lepšímu porozumění. Často se jedná o znázornění pomocí grafů. Například v dnešní pedagogice, ale i jinde jsou stále více prosazovány myšlenkové mapy, nejde o nic jiného než o poskládání určitých informací (vrcholů) a jejich vztahů (hran) do grafu.

Dále se s grafy setkáváme v programování. Algoritmy se často zapisují pomocí vývojových diagramů (viz obr. 2), které lze také považovat za grafy.



Obrázek 2: Vývojový diagram (převzatý obrázek, viz str. 74)

S takovými diagramy se však můžeme setkat i v časopisech pro mládež či na internetu, kde jsou ve zjednodušené formě používány k jednoduchým zábavným testům typu „které osobnosti se podobáš?“ atd. Podoba s grafy se také nedá upřít často využívaným úlohám ve všech možných školních předmětech nebo zábavných časopisech, kde přiřazujeme termínům z jednoho sloupečku popisy či data z druhého sloupečku. Jedná se vlastně o bipartitní graf, kde každému prvku z jedné množiny přiřadíme prvek z množiny druhé.

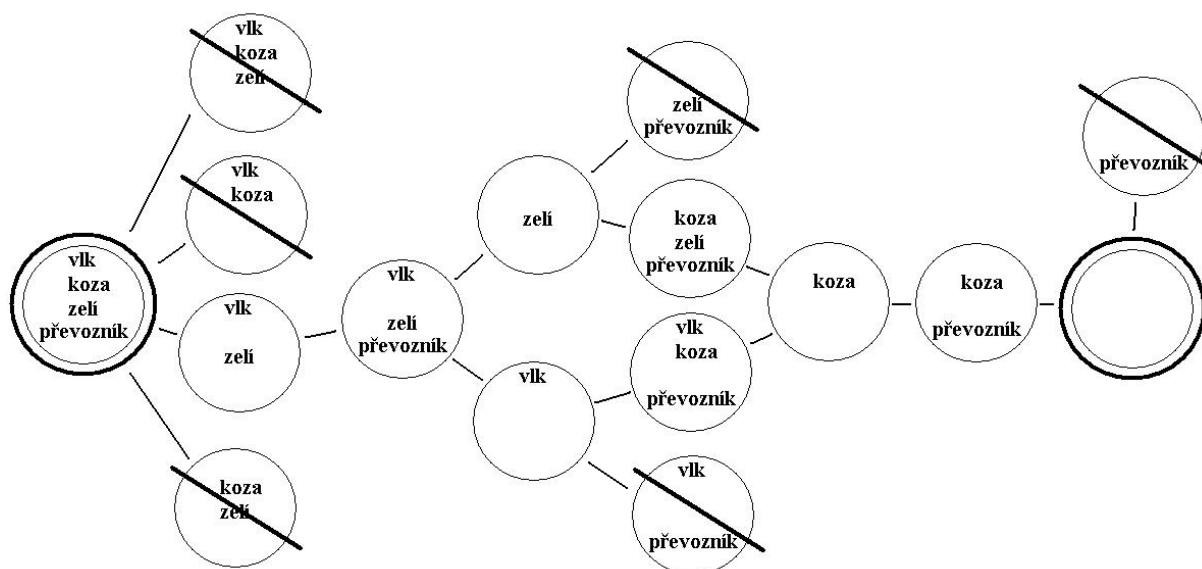
2.1 Matematické úlohy a hry

Grafy lze využít k přehlednému systematickému řešení různých matematických úloh a her. Velmi známá úloha je „Koza, vlk a zelí“. I tuto úlohu lze vyřešit pomocí grafu.

2.1.1 Koza, vlk a zelí

Zadání: Převozník má těžký úkol. Musí převést přes řeku kozu, vlka a zelí, přičemž do loďky se vejde jen on a jedno zvíře může vzít s sebou zelí, ale nikdy více najednou. Pokud zůstane bez dozoru vlk s kozou, vlk kozu sežere. Pokud zůstane samotná koza se zelím, neodolá a zelí sežere. Jak má převozník postupovat, aby nedošlo k žádnému neštěstí?

Řešení: Vrcholy našeho grafu budou obsahovat popis situace na levém břehu. Vrcholů tedy budeme mít 16. Škrtneme všechny vrcholy, které popisují nepřipustnou situaci, tzn. vlk je s kozou nebo koza se zelím bez dozoru převozníka, a to buď na původním, nebo na cílovém břehu. Takových možností je 6. Začneme ve vrcholu (vlk, koza, zelí, převozník) a chceme se postupně dostat do vrcholu (*prázdný břeh*). Existují dokonce dvě řešení, jak ukazuje Obrázek 3.



Obrázek 3: Řešení úlohy "Koza, vlk a zeli" znázorněné grafem

Tuto úlohu a několik dalších lze nalézt v diplomové práci Mgr. Lukáše Jirovského na internetových stránkách <http://teorie-grafu.cz/>. Naleznete tam také řešení jednotlivých úloh a dokonce i animace ilustrující tato řešení.

2.1.2 Zebry

Dále je vhodné zmínit zajímavé logické problémy často nazývané „zebra“. Nazývají se tak podle první zveřejněné úlohy tohoto typu. Cílem tehdy bylo odpovědět na otázku: „Kdo chová zebra?“. Autor tohoto zadání bohužel není znám, existuje mnoho teorií, jedna z nich uvádí za autora samotného Alberta Einsteina. Tento typ úlohy se často vyskytuje v různých luštitelských a matematických časopisech. Také na internetu problémů typu zebra najdete velmi mnoho. Uvádím zadání velmi jednoduché zebry:

Zadání: Každá z mých třech kamarádek se věnuje jiné činnosti a má ráda jinou barvu.

1. Alice nehraje na žádný hudební nástroj.
2. Dívka, která jezdí na koloběžce, má ráda zelenou barvu.
3. Míša nemá ráda zelenou barvu.
4. Šárka nemá koloběžku.
5. Oblíbená barva dívky, která ráda čte, je modrá.
6. Žlutá je oblíbená barva Šárky.

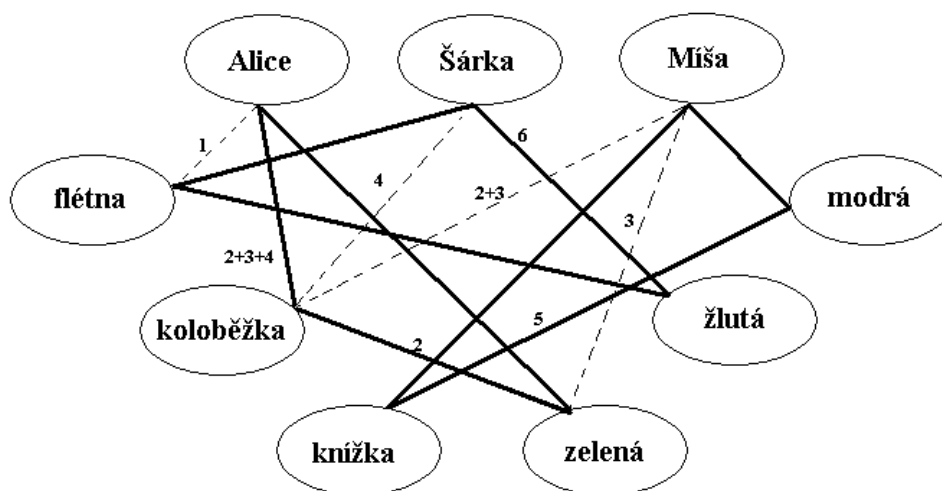
Která z kamarádek ráda hraje na flétnu?

Při řešení takové úlohy většinou každý zvolí nějaký svůj způsob zápisu, který mu pomůže v uspořádání tolika informací a k dosažení správné odpovědi. Většinou tomuto zápisu rozumí pouze autor a nikdo jiný. Tímto způsobem byli schopni vyřešit několik jednoduchých zeber i někteří mí žáci v šesté třídě bez jakékoliv pomoci. Tyto úlohy jsem použila, když byli šikovnější žáci v hodině matematiky hotovi s jinými úkoly dříve než jejich spolužáci a nechtěli jen tak nečinně čekat. Využila jsem k tomu úlohy z knížky „Zebry, zebry, zebříčky“ (viz doporučené publikace str. 73), kde je zařazeno přes 200 úloh tohoto typu.

Nejprve je nutné si uvědomit, které všechny informace se v úloze objevují. Následně si každý může zvolit svůj způsob zápisu. Způsobů jak úlohu řešit je velmi mnoho. Následující obrázky ukazují, že tyto úlohy je také možno řešit pomocí grafů. Buď pomocí grafického znázornění (viz obr. 4), které podle mého názoru při určité obtížnosti již ztrácejí na přehlednosti, nebo pomocí zápisu ve tvaru tabulky tzv. zjednodušené matice sousednosti (viz obr. 5).

Tato struktura umožní systematický a přehledný zápis a zjednoduší nám tak postup k vyřešení i u poměrně složitých zeber. Více se o zebrách můžete dozvědět v článku na portálu RVP publikovaném 29. 3. 2012 nazvaném „O zebrách“ (viz doporučené publikace str. 73).

Graficky: Čárkovaně jsou znázorněny hrany, které ve výsledném řešení nebudou. I to je důležitá informace kterou je nutno zakreslit. Číslo u hrany znamená číslo informace, ze kterého tento vztah vyplývá.



Obrázek 4: Graf znázorňující řešení výše zadané zebry

	flétna	koloběžka	knižka	modrá	žlutá	zelená
Alice	X	✓	X	X	X	✓
Šárka	✓	X	X	X	✓	X
Miša	X	X	✓	✓	X	X
modrá	X	X	✓			
žlutá	✓	X	X			
zelená	X	✓	X			

Obrázek 5: Tabulka - matice sousednosti - další způsob řešení předchozí úlohy

U tabulkového zápisu každé dvojici podle postupně získávaných informací zapisujeme pomocí dvou znaků, zda k sobě patří nebo ne (v našem případě zaškrtnutí a křížek).

Z grafu i z tabulky lze vyčíst, že správnou odpovědí je: Na flétnu hraje Šárka.

2.2 Výskyt grafů ve školách

Ačkoliv teorie grafů není zařazena do výukových plánů základní školy, občas se přece jen ve výuce vyskytne. Spojovačka sudých čísel, a dokonce i spojovačka čísel dělitelných třemi, se objevuje v učebnicích pro první stupeň z nakladatelství Fraus. V těchto učebnicích se vyskytuje mnoho úloh využívající zakreslení pomocí grafů, neboť děti porozumí obrázkům lépe než složitým popisům. Vzpomeňme si například na množiny, se kterými se určitě setkal každý.

Ve výše zmíněných učebnicích matematiky pro třetí ročník se dokonce objevuje domeček jedním tahem spolu se dvěma dalšími grafy. V učitelově učebnici však stojí pouze poznámka, že je nutné začít kreslit ve spodních dvou bodech, není uveden důvod. Ani učitel tedy nezjistí po přečtení řešení, jak poznat u trochu pozměněného zadání, kde je nutné začít. Přitom nejde o složitou myšlenku a on by ji mohl v dalších hodinách využít k vymýšlení dalších obrázků na kreslení jedním tahem.

Na prvním stupni se tedy přece jen teorie grafů alespoň občas vyskytne, důkazem toho je i materiál Milana Hejného s názvem Barevná bludiště (viz doporučené publikace str. 73). Vznikl na základě výsledků z kurzu, jehož hlavní součástí byla samostatná tvořivá práce učitelů účastníků se tohoto kurzu pořádaného pedagogickou fakultou UK. Popisuje několik úspěšných pokusů začlenění bludišť do výuky na prvním stupni, a to nejen do výuky matematiky.

Materiálů zabývajících se teorií grafů na internetu nalezneme mnoho, většinu však lze využít maximálně ve výuce na gymnáziu či vysoké škole. Pro využití na základní škole nejsou primárně určeny. U některých by snad bylo možné využití po provedení určitých výrazně zjednodušujících úprav.

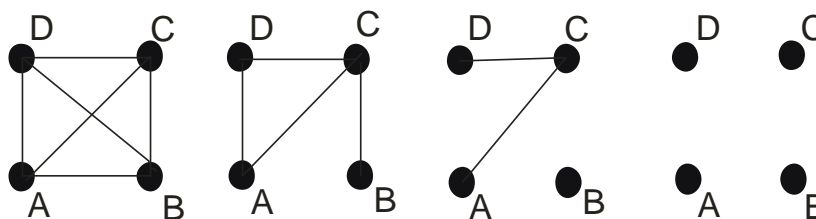
Na druhém stupni jsem se sice s teorií grafů v učebnicích nesetkala, ovšem určitě se neodvážím tvrdit, že žádný učitel něco takového do své výuky nezahrnuje. Bývalý kolega Ivo Hradecký mi doporučil pohádku „O myších malířkách“ z knihy Vladimíra Burjana (viz doporučené publikace str. 73) zabývající se kreslením grafů jedním tahem. Kolega přiznal, že tuto pohádku již v jedné třídě využil a s reakcí žáků byl spokojen. Pravděpodobně existuje více takových tvořivých učitelů, kteří obzvlášťují matematiku pomocí úloh z teorie grafů. Nejen jim by mohly přijít vhod další nápady na zpestření výuky. Snad se díky této práci seznámí s teorií grafů i další učitelé na základní či střední škole a zapojí tuto krásnou část matematiky do svých příprav.

3 Úvod do teorie grafů

Definice: Graf G (obyčejný neorientovaný) je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V je nějaká množina a E je množina dvoubodových podmnožin množiny V . (Matoušek a Nešetřil, 1996, str. 85)

Nejlépe tuto definici pochopíme, znázorníme-li graf obrázkem.

Zde jsou čtyři různé grafy:

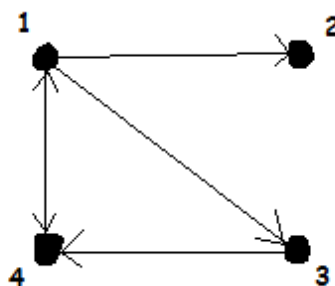


Obrázek 6: Ukázka čtyř různých grafů

Prvky množiny V jsou znázorněny jako body A, B, C, D – nazýváme je **vrcholy**.

Prvky množiny E mohou být všechny možné dvojice typu AB, AC, AD, BC atd. Můžeme je tedy znázornit jako úsečky mezi dvěma body – nazýváme je **hrany**.

Pokud jsou znázorněny jako šipky, jedná se o **orientovaný graf** (viz obr. 7). V tom případě není hrana AB totožná s hranou BA , jako to bylo u neorientovaného grafu.



Obrázek 7: Orientovaný graf

Hran v neorientovaném grafu s V vrcholy může být maximálně $\binom{V}{2}$. (Matoušek a Nešetřil 1996)

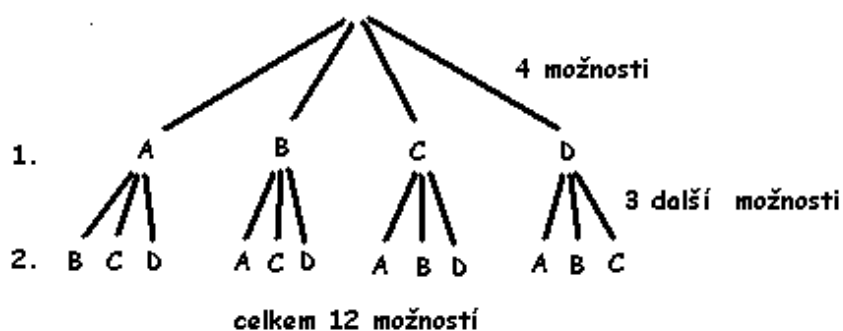
Poznámka: Kombinační čísla se učí až na střední škole, proto buď nebudeme uvádět počet všech možných hran, nebo jej vysvětlíme pomocí logického uvažování například takto na 4 vrcholech:

- 1) vybíráme dvojici
- 2) pro první vrchol máme 4 možnosti (A, B, C nebo D)
- 3) vybereme-li například A , pro druhý vrchol máme možnosti 3 (B, C, D), takže celkem máme 4×3 možností (pokud nebude žákům jasné proč „krát“, můžeme k výkladu použít obrázek stromu možností (viz obr. 8))
- 4) je nutné si ještě uvědomit, že strana AB je totožná se stranou BA a my jsme ji započítali dvakrát, je tedy náš výsledek nutné vydělit 2, tzn. $4 \times 3 : 2$
- 5) můžeme jim zkusit vytvořit obecný vzoreček (záleží na věku a šikovnosti žáků) měli jsme 4 vrcholy...

Jak by vypadal počet možných hran pro graf s 5 vrcholy?

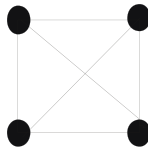
Jak pro graf s 6 vrcholy?

A jak pro graf s n vrcholy?



Obrázek 8: Strom možností výběru dvou vrcholů ze čtyř

Pokud je počet hran grafu s V vrcholy roven $\binom{V}{2}$, a tedy obsahuje všechny možné hrany, nazýváme graf grafem **úplným**.



Obrázek 9: Úplný graf

Značení: $G = (V, E)$ znamená, že graf G má množinu vrcholů V a množinu hran E .

3.1 Reprezentace grafu

- „Obrázkem“ – tento způsob je velice přehledný, názorný a pro školní účely velmi vhodný. Díky této přehlednosti ho lze použít k řešení mnoha různých matematických problémů. Využila jsem ho již při zavádění základních definic, a to právě pro jeho názornost.

- Výčtem hran – Pokud žákům zakážete ukazování nakresleného grafu, např. zvětšíte jejich vzdálenost od sebe, nebo dokonce budou nuceni slovně graf popsat např. do telefonu, přes icq atd., jistě zvolí tento způsob.

př. Graf má 4 vrcholy a hrany: 1-3, 1-4, 2-3, 3-4.

nebo př. Graf má čtyři vrcholy: A, B, C, D a 4 hrany: AC, AD, BC, CD .

- Seznamem sousedů – pro každý vrchol zapíšeme ostatní vrcholy, do kterých z něj vede hrana.

př. 1: 3, 4

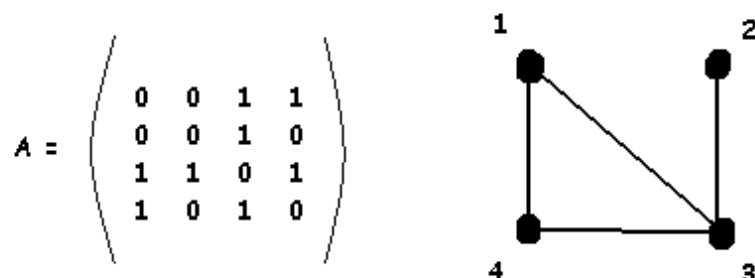
2: 3

3: 1, 2, 4

4: 1, 3

Toto je další velmi intuitivní způsob.

- Maticí sousednosti – jde o matici A typu $n \times n$ (kde n je počet vrcholů v grafu), která obsahuje pouze nuly a jedničky. $A_{i,j} = 1$ právě tehdy, když graf obsahuje hranu $\{i, j\}$.

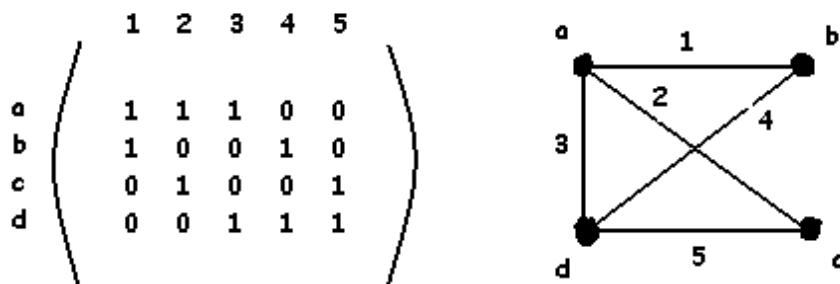


Obrázek 10: Zápis grafu maticí sousednosti a zápis toho samého grafu obrázkem

Pro počítače je tento maticový způsob daleko zpracovatelnější než obrázek.

Ačkoliv se matice učí až na středních školách, s tabulkami se setkávají děti často, není tedy potřeba je učit definici matice atd.

- Maticí vzdálenosti – jde pouze o drobnou úpravu matice sousednosti, pokud mezi dvěma vrcholy je hrana, nenapišeme do matice pouze 1, ale přímo její ohodnocení (např. vzdálenost těchto bodů, cenu vyasfaltování silnice mezi těmito body atd.).
- Maticí incidence – jde o matici typu $n \times m$ (n – počet vrcholů, m – počet hran) obsahující 0 a 1 (u orientovaných grafů ještě -1). Pro každou hranu je určen jeden sloupec a pro každý vrchol jeden řádek. Každý sloupec obsahuje dvě jedničky (hrana vede mezi dvěma vrcholy). Názorně je to vidět z příkladu na následujícím obrázku.



Obrázek 11: Zápis grafu maticí incidence a zápis toho samého grafu obrázkem

(Pro orientované grafy bychom do matice napsali 1 tam, kde hrana začíná, a -1 tam, kde hrana končí.)

- Laplaceovou maticí – matice A typu $n \times n$, pro kterou platí

$$A_{ij} = -1 \text{ pro } i \neq j, \text{ pokud mezi vrcholy existuje hrana}$$

$$A_{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j, \text{ pokud mezi vrcholy není hrana}$$

$$A_{ij} = \text{deg}(i) \text{ pro } i = j, \text{ kde } \text{deg}(i) \text{ je počet hran vedoucích z vrcholu } i$$

Lépe vysvětlí obrázek:



Obrázek 12: Zápis grafu Laplaceovou maticí a zápis toho samého grafu obrázkem

Tato matice se hlavně používá pro určení počtu koster (kostra viz str. 22). Všimněte si, že při vynechání jednoho řádku a sloupce se neztratí žádná informace.

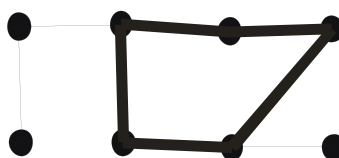
3.2 Důležité pojmy

Kružnicí rozumíme množinu vrcholů a hran:

$$(\{v_1, \dots, v_n\}, \{ \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\} \});$$

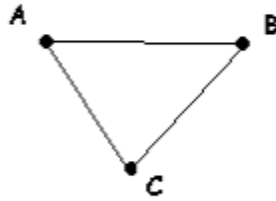
jinak řečeno: graf obsahuje kružnici, pokud existují alespoň dva vrcholy, mezi kterými vedou dvě různé cesty.

Kružnice je na následujícím obrázku zvýrazněna:



Obrázek 13: Příklad grafu obsahujícího kružnici

Poznámka: Jistě zajímavou informací pro žáky bude, že kružnice je i toto:



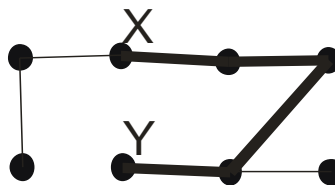
Obrázek 14: Kružnice v grafu může vypadat jako trojúhelník

Cestou mezi vrcholy v_1 a v_n rozumíme množinu vrcholů a hran:

$$(\{v_1, \dots, v_n\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\});$$

jinak řečeno: mezi dvěma vrcholy vede cesta, pokud je mezi nimi hrana nebo je možné se po hranách grafu přes další vrcholy dostat z jednoho vrcholu do druhého.

Na následujícím obrázku mezi vrcholy X , Y nevede hrana, ale existuje mezi nimi cesta. (zvýrazněná)



Obrázek 15: Ukázka cesty v grafu mezi vrcholy X a Y

Souvislý graf je graf G , ve kterém platí: mezi každými dvěma vrcholy grafu G existuje cesta.



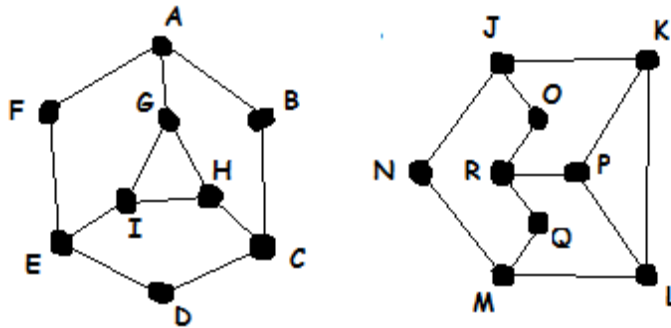
Obrázek 16: Dva souvislé grafy



Obrázek 17: Dva nesouvislé grafy

Dva grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ nazveme **izomorfní**, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení f z V do V' tak, že platí $\{x, y\} \in E$, právě když $\{f(x), f(y)\} \in E'$. (Matoušek a Nešetřil, 1996, str. 88)

Jinak řečeno¹: Dva grafy G a F nazveme **izomorfní**, pokud mají stejný počet vrcholů i hran a existuje přiřazení vrcholů grafu G vrcholům grafu F takové, že pokud existuje mezi dvěma vrcholy v grafu G hrana, existuje i mezi jim přiřazenými vrcholy v grafu F .



Obrázek 18: Grafy navzájem izomorfní

Ačkoliv tyto dva grafy na první pohled nevypadají stejně, jsou izomorfní. Přiřazení vrcholů může být například takové: $AJ, BO, CR, DQ, EM, FN, GK, HP, IL$.

Strom je souvislý graf neobsahující kružnici. (Matoušek a Nešetřil, 1996, str. 130)

Jinak řečeno: Mezi každými dvěma vrcholy vede právě jedna cesta.

¹ Platí pouze pro grafy s konečným počtem vrcholů.

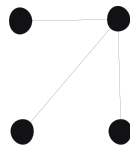


Obrázek 19: Dva stromy

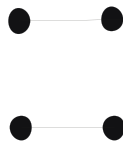
Poznámka: Každý strom má $n - 1$ hran, kde n je počet vrcholů grafu.

*Nechť $V = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ je rozklad množiny V na třídy ekvivalence. Množiny V_i se nazývají **komponenty grafu**. (Matoušek a Nešetřil, 1996, str. 94)*

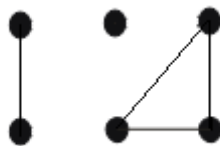
Jinak řečeno: Komponentami myslíme největší možné souvislé části grafu.



Obrázek 20: Souvislý graf (má vždy jednu komponentu)



Obrázek 21: Nesouvislý graf se 2 komponentami



Obrázek 22: Nesouvislý graf se třemi komponentami

3.3 Kostra grafu

Definice: Necht' $G = (V, E)$ je graf. Libovolný strom tvaru (V, E') , $E' \subseteq E$, nazveme *kostra grafu* G . (Matoušek a Nešetřil, 1996, str. 140)

Jinak řečeno: *Kostra grafu* G je strom, který je podgrafem a obsahuje všechny vrcholy grafu G . (Matoušek a Nešetřil, 1996, str. 140)

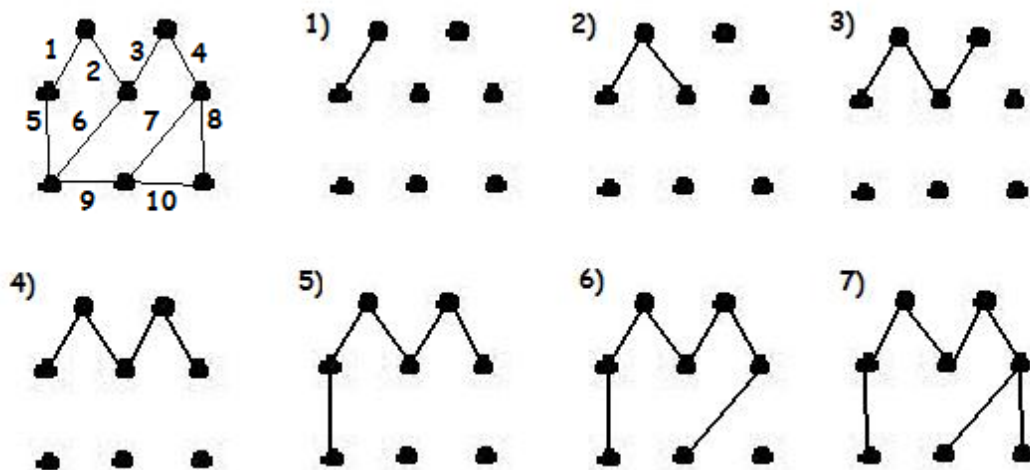
Poznámka: Každý souvislý graf má kostru. Pro nesouvislé grafy kostra neexistuje.

Algoritmus 1 (jak najít kostru grafu) (Matoušek a Nešetřil, 1996)

- $G = (V, E)$ je graf s n vrcholy a m stranami.
- Libovolně seřadíme hrany grafu: (e_1, e_2, \dots, e_m) .
- Postupně budeme vytvářet množiny hran $E_0, E_1, \dots \in E$.
- $E_0 = \emptyset$. (E_0 bude prázdná množina)
- Pomocí E_0 získáme E_1 , pomocí E_1 získáme E_2 atd. takto:
 - neobsahuje-li graf $(V, E_{i-1} \cup \{e_i\})$ kružnici, pak $E_i = E_{i-1} \cup \{e_i\}$
 - jinak $E_i = E_{i-1}$.
- Algoritmus se zastaví, jakmile E_i má již $n-1$ hran nebo $i = m$ (tzn. probraly se všechny hrany grafu G)

Jinak řečeno: Seřadíme libovolně hrany grafu a bereme jednu hranu po druhé.

Hranu do grafu přidáváme pouze v případě, že se jejím přidáním nevytvoří kružnice. (viz obr. 23)



Obrázek 23: Ukázka použití algoritmu 1 pro nalezení kostry grafu

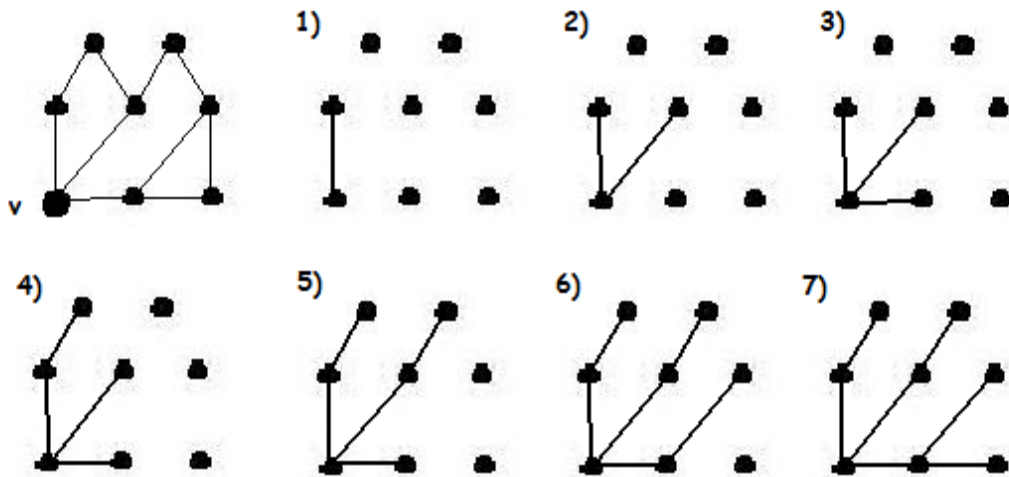
Algoritmus 2 (jak najít kostru grafu) (Matoušek a Nešetřil, 1996)

- $G = (V, E)$ je graf s n vrcholy a m stranami.
- Postupně budeme vytvářet množiny $V_0, V_1, \dots \subseteq V$
a $E_0, E_1, \dots \subseteq E$.
- $E_0 = \emptyset$ a $V_0 = \{v\}$, kde v je libovolně zvolený vrchol.
- Pomocí E_0 získáme E_1 , pomocí E_1 získáme E_2 atd.

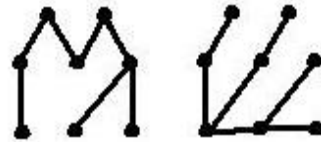
a pomocí V_1 získáme V_2 , atd. takto:

→ Nalezneme nějakou hranu $e_i = \{x_i, y_i\} \in E(G)$ takovou, že $x_i \in V_{i-1}$, $y_i \in V - V_{i-1}$, pak $V_i = V_{i-1} \cup \{y_i\}$, $E_i = E_{i-1} \cup \{e_i\}$. Pokud žádná taková hrana již neexistuje, algoritmus končí.

Jinak řečeno: Začneme s jedním libovolně zvoleným vrcholem. Postupně k němu (a později k vrcholům, se kterými již je spojen) připojujeme jeden vrchol za druhým, pomocí jedné hrany se připojí vždy jeden vrchol. (viz obr. 24)



Obrázek 24: Ukázka použití algoritmu 2 pro nalezení kostry grafu



Obrázek 25: Kostry vzniklé algoritmem 1 a 2

Podívejme se, že každý algoritmus našel jinou kostru stejného grafu.

3.4 Minimální kostra

Problém minimální kostry

Tento problém nejjednodušeji vysvětlíme na příkladu.

Napadne sníh a silničáři musí pluhem prohrabat cesty a tím propojit spojení mezi např. 30 městy. Samozřejmě chceme, aby práce byla hotova co nejdříve, tzn. aby pluhař měl co nejméně práce, neboli odhrabal co nejkratší úsek. Křižovatky jsou pouze ve městech, nikdy mimo město.

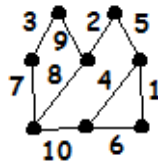
Pro převedení této úlohy do grafu je třeba „ohodnotit“ hrany v grafu G , tedy každé hraně $e \in E$ přiřadíme číslo $w(e)$, které nazýváme **váha** hrany e . Váhou budeme uvažovat kladné číslo (v našem případě jde o délku cesty). (Matoušek a Nešetřil, 1996)

Úloha: *Pro souvislý graf $G = (V, E)$ s nezáporným ohodnocením hran w nalezněte kostru $T = (V, E')$ grafu G s nejmenší možnou hodnotou $w(E')$.* (Matoušek a Nešetřil, 1996, str. 146)

Daný graf může mít samozřejmě mnoho různých koster. My však chceme nalézt tu nejlehčí (tzn. výsledná váha všech hran kostry dohromady bude nejmenší možná). To může vypadat jako dosti obtížný úkol, existují však hned tři velmi jednoduché algoritmy.

Algoritmus Kruskalův (hladový), Jarníkův (Primův) a Borůvkův. Zajímavé je, že první, kdo vymyslel jeden z algoritmů, a to v roce 1926, byl Otakar Borůvka, a jak už ze jména vyplývá, byl to Čech. Další byl algoritmus Jarníkův, který je však ve světě znám jako Primův, ačkoliv s tímto algoritmem přišel český matematik Jarník již v roce 1930 a Prim až v roce 1957. Hladový algoritmus vymyslel Kruskal až v roce 1956, avšak jeho algoritmus je zdá se nejoblíbenější.

Postupně vysvětlíme tyto tři algoritmy a předvedeme jejich použití pro vyhledávání minimální kostry na příkladu:



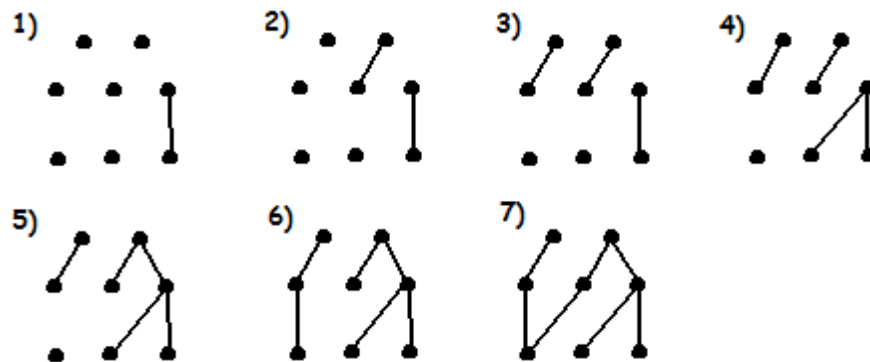
Obrázek 26: Graf s ohodnocenými hranami

3.4.1 Kruskalův algoritmus (neboli Hladový)

Je dán souvislý graf $G = (V, E)$ s ohodnocením w . Předpokládejme, že hrany jsou uspořádány tak, že platí $w(e_1) \leq w(e_2) \leq w(e_3) \leq \dots \leq w(e_m)$. Pro toto uspořádání provedme algoritmus 2. (Matoušek a Nešetřil, 1996, str. 147)

Jinak řečeno:

- 1) seřadíme hrany podle jejich váhy od nejlehčí hrany k nejtěžší
- 2) u každé hrany budeme rozhodovat, jestli ji do grafu přidáme nebo ne, a to tímto způsobem:
 - a) pokud přidáním hrany nevznikne kružnice, přidáme tuto hranu
 - b) pokud ovšem kružnici vytvoří, nebudeme ji do grafu přidávat.

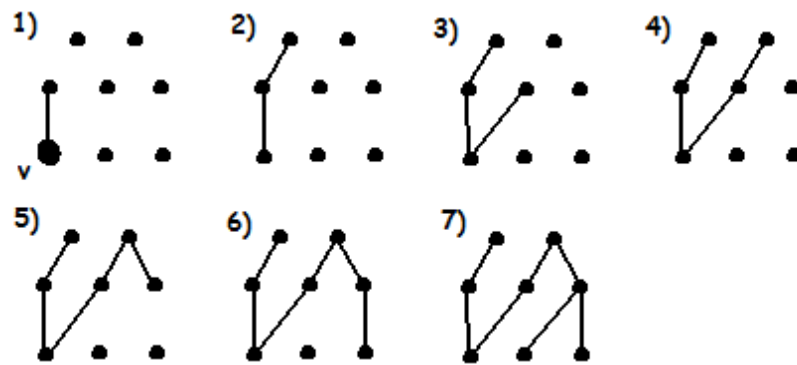


Obrázek 27: Použití Kruskalova (hladového) algoritmu pro nalezení minimální kostry

3.4.2 Jarníkův algoritmus (Primův)

Postupujeme podle algoritmu 2 pro hledání kostry, přičemž hranu e_i volíme jako hranu nejmenší možné váhy mezi hranami množiny $\{\{x,y\} \in E(G), x \in V_{i-1}, y \notin V_{i-1}\}$. (Matoušek a Nešetřil, 1996, str. 151)

Jinak řečeno: Začneme v libovolném vrcholu a vždy vybíráme z hran z něj vedoucích tu nejlehčí (použijeme hladový algoritmus) a do množiny hran, z kterých vybíráme, přidáme hrany vedoucí z vrcholu nově připojeného.



Obrázek 28: Použití Jarníkova algoritmu pro nalezení minimální kostry
(začíná v libovolném vrcholu, zde zvýrazněném vrcholu v)

3.4.3 Borůvkův algoritmus

Položme $V' = V$, $E_0 = \emptyset$ (prázdná množina).

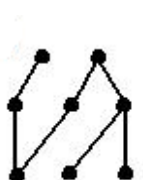
Nechť (V_1, \dots, V_t) je rozklad množiny V podle komponent souvislosti grafu. Pro každou komponentu V_j vyhledáme hranu $e_j = \{x, y\}$, kde $(x \in V_j, y \notin V_j)$. Tuto podmínku splňuje více hran, my však vybereme tu nejlehčí z nich a přidáme ji do grafu. Algoritmus končí, má-li graf jedinou komponentu. (Matoušek a Nešetřil, 1996)

Jinak řečeno: Postupně ke každé komponentě přidáme hranu, která vede z této komponenty do jiné komponenty, a to tu nejlehčí možnou. Provádíme tento postup tak dlouho, dokud není graf souvislý. (viz obr. 29)



Obrázek 29: Použití Borůvkova algoritmu pro nalezení minimální kostry (má pouze 2 kroky)

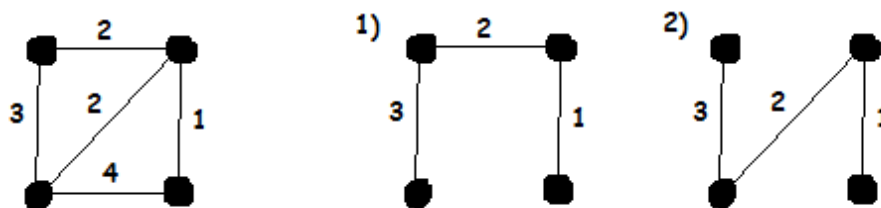
Všimněme si, že pomocí všech tří algoritmů jsme našli tutěž minimální kostru.



Obrázek 30: Minimální kostra

Mohlo by se stát, že by graf měl více minimálních koster?

Ano, je to možné, uvádíme příklad pro graf se dvěma minimálními kostrami, může jich však mít klidně i více. (viz obr. 31)



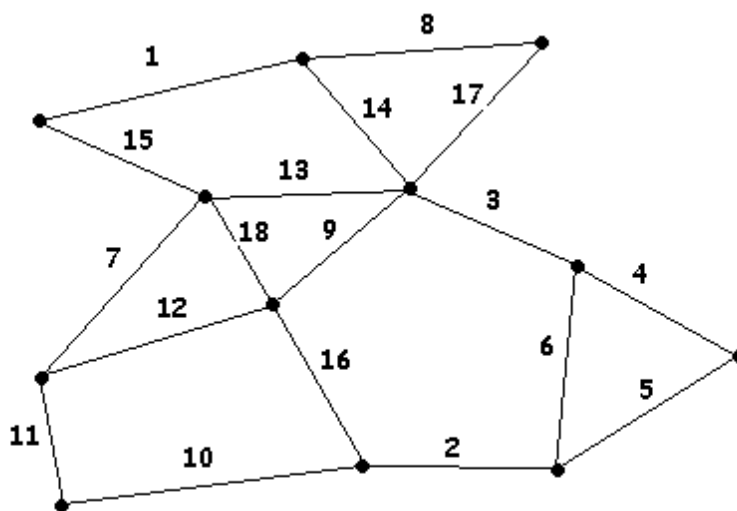
Obrázek 31: Graf se dvěma různými minimálními kostrami

3.4.4 Úloha na hledání minimální kostry pro žáky

Problém minimální kostry je určitě také zajímavým tématem k řešení a i když se v mém experimentu nakonec neobjevil, jde o další část, která by dle mého názoru žáky zaujala a podpořila v jejich kreativitě.

Zde je jeden příklad s 12 městy následovaný jednodušším popisem hladového algoritmu:

- Napadne sníh a silničáři musí pluhem prohrabat cesty a tím propojit spojení mezi 12 městy (= 12 bodů = 12 vrcholů grafu). Samozřejmě chceme, aby práce byla hotova co nejdříve, tzn. aby pluhař měl co nejméně práce, neboli odhrabal co nejkratší úsek. Následující obrázek znázorňuje mapku s městy.



Obrázek 32: Zadání úlohy Hledání minimální kostry

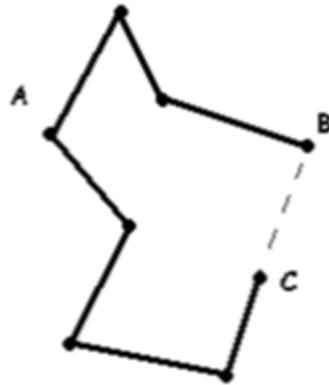
Poznámka:

- Na obrázku je u každé cesty zapsaná její délka v kilometrech.
- Pokud pluhař pojedou po nějaké cestě podruhé, už se její délka nepočítá, neboť cesta zůstala odhrabaná a pluh pouze projíždí bez námahy.
- Zvýrazníme takovou variantu, aby byl počet prohrabaných kilometrů co nejkratší a přesto se obyvatelé kteréhokoliv města mohli dostat do ostatních měst.

Jak na to?

- 1) Seřadíme cesty (= hrany grafu) podle jejich délky od nejkratší po nejdelší
- 2) Zkoumejme postupně jednotlivé cesty, nejdříve 1 km dlouhou, potom 2 km dlouhou...

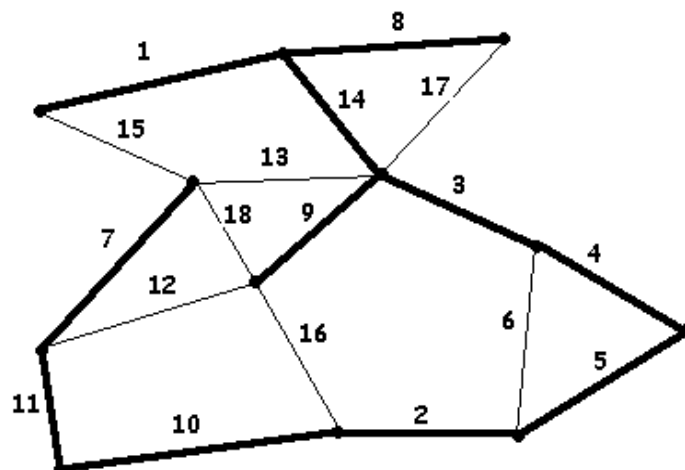
3) Pokud cesta spojuje města, která zatím nejsou nijak propojena (neexistuje mezi nimi žádná cesta ani delší přes jiná města), zvýrazníme ji pastelkou (= přidáme ji na seznam pluhaře = přidáme ji do našeho grafu), pokud však města již nějak propojena jsou (viz obr. 33), tuto cestu nezvýrazníme a pluhař ji prohrabávat nebude.



Obrázek 33: Hranu BC přidávat nebudeme, neboť již existuje cesta přes bod A

4) Jestliže jste tímto způsobem prověřili všechny cesty, ověřte sami, že jsou opravdu všechna města navzájem propojena a je možno se z jakéhokoliv dostat po vyhrabané cestě do kteréhokoliv jiného.

Na následujícím obrázku je znázorněno řešení předchozí úlohy:

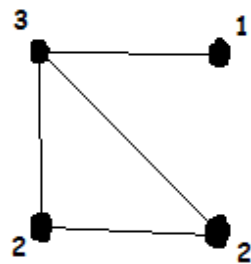


Obrázek 34: Řešení problému Hledání minimální kostry

3.5 Další pojmy

3.5.5 Stupeň vrcholu

Za stupeň vrcholu v považujeme celé číslo $\deg(v)$, které určuje počet hran vedoucích z vrcholu v .



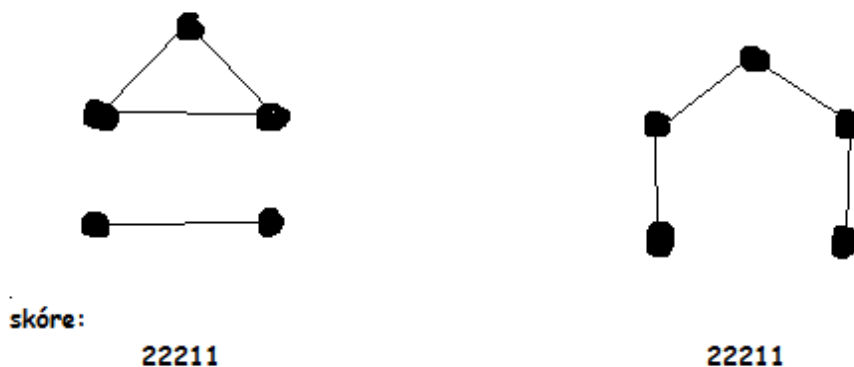
Obrázek 35: Graf, který má u každého vrcholu zapsán svůj stupeň

3.5.6 Skóre grafu

Je-li $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ množina všech vrcholů grafu G , posloupnost $(\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n))$ nazýváme skóre grafu G . (Matoušek a Nešetřil, 1996)

Skóre předchozího grafu může vypadat například takto: 3221.

Na pořadí nezáleží, i když se většinou zapisuje od největšího stupně k nejmenšímu nebo naopak. Pokud jsou dva grafy stejné (izomorfní), mají stejné skóre, opačně to ale neplatí. Dva grafy mohou mít stejné skóre, a přesto nejsou stejné (izomorfní). (viz obr. 36)



Obrázek 36: Dva neizomorfní grafy mající stejné skóre

3.5.7 Princip sudosti

Tvrzení: Lichých stupňů v grafu musí být sudý počet.

Vysvětlení, proč tomu tak je, je docela logické. Každá hrana je započítána dvakrát, jednou do stupně vrcholu, ve kterém začíná, podruhé do stupně vrcholu, ve kterém končí. Platí tedy, že součet všech stupňů vrcholů v grafu je roven dvojnásobku počtu hran. Protože jde o dvojnásobek celého čísla, jde o číslo sudé. Aby součet byl sudý, musí být lichých stupňů sudý počet.

3.5.8 Eulerovský graf

Nechť $G = (V, E)$ je graf, který má n vrcholů a m hran. **Eulerovský tah** označuje takový tah, který obsahuje každou hranu grafu právě jednou (vrcholy se mohou opakovat) a lze jej vyjádřit posloupností $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_m, v_m)$, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$.

Pokud $v_m = v_0$, pak se jedná o **uzavřený eulerovský tah**. V takovém případě nazýváme i samotný **graf eulerovský**.

Pokud v_m je různé od v_0 , pak stupně těchto dvou vrcholů jsou liché.

Graf G je eulerovský právě tehdy, když je souvislý a všechny vrcholy jsou sudého stupně.

Jinak řečeno: Graf lze nakreslit jedním tahem, kdy začneme a skončíme ve stejném vrcholu, právě tehdy, když mají všechny jeho vrcholy sudý stupeň.

Platí tedy, že graf lze nakreslit jedním tahem, pokud:

- všechny vrcholy mají sudý stupeň (jde o uzavřený tah, graf je eulerovský)

a nebo

- právě dva vrcholy jsou lichého stupně (jde o otevřený tah)

4 Experiment

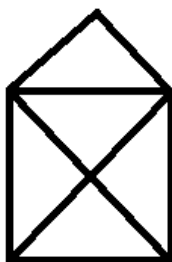
Cílem experimentu bylo zjistit, zda jsou žáci schopni porozumět vybraným částem z teorie grafů a zda je toto téma baví více než látka běžně probíraná v hodinách matematiky. Experiment zkoumá také, zda je vhodné toto téma zařadit pouze pro nadanější děti (například vybrané na gymnázium) nebo zda toto téma lze zařadit i na základní školu bez jakéhokoliv zaměření.

Součástí experimentu jsou nejen dvě přípravy na výuku teorie grafů, pozorování průběhu hodiny, reakcí žáků a rozdílů mezi hodinami v jednotlivých třídách, ale také zpracování informací získaných pomocí dotazníků vyplněných všemi žáky.

Připravila jsem dvě témata. První téma nazvané „Domeček jedním tahem“ se zabývá Eulerovým pravidlem pro rozeznávání, zda lze spojitý graf nakreslit jedním tahem (viz str. 32). Druhé nazvané „Bludiště“ se zabývá pravidly jak procházet bludištěm a přetvářením složitěho bludiště na graf pro usnadnění orientace v bludišti (viz str. 42). Druhá část kapitoly „Bludiště“ shrnuje pravidla pro průchod bludištěm (viz str. 48).

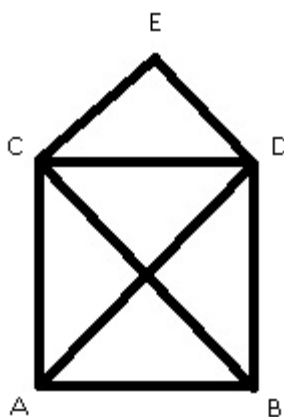
Žáci pracovali převážně ve formě diskuse celé třídy, aktivně se podíleli na postupu hodiny pod vedením otázek a návodných úloh učitele. Také chvílemi samostatně plnili úlohy z pracovních listů (viz přílohy str. 78), kdy měli povoleno spolupracovat se svými sousedy. Následně porovnávali výsledky s celou třídou, případně vyvraceli myšlenky svých spolužáků a debatovali o správnosti jednotlivých tvrzení.

4.1 Příprava hodiny „Domeček jedním tahem“



Obrázek 37: Domeček jedním tahem

Asi každý někdy zkusil nakreslit domeček jedním tahem, pokud tedy nakreslíme tento obrázek na tabuli, určitě někdo ze žáků vysvětlí, o co se jedná. Je nutné dohodnout se například na tom, co všechno jsou body (vrcholy), kde se může vybírat z více cest. Prostřední kříž se totiž většinou za vrchol nepovažuje. Poté necháme žáky, aby si každý našel svůj způsob nakreslení domečku jedním tahem. Vyzveme žáky, aby postupně vysvětlovali, jakým způsobem domeček nakreslili oni. Můžeme nejprve nechat na nich, jakým způsobem budou postup popisovat. Nejlepší forma vhodná i k zapsání je nejspíše označení vrcholů například písmeny *A*, *B*, *C*, *D*, *E*.



Obrázek 38: Domeček s vrcholy označenými písmeny

Jeden z možných způsobů pak můžeme zapsat takto: $ACDBCEDAB$. Takových možností je dokonce 88.²

Dále je třeba žáky dovést k poznání, že všechny možnosti začínají a končí ve vrcholech s lichým stupněm, v našem případě ve vrcholu A nebo B . Nejprve je rozdělíme do skupin podle toho, ve kterém bodě začali. Vytvoří se dvě skupiny. Jedna začala v bodě A a druhá v bodě B . Pak se každé skupiny zeptáme, ve kterém bodě skončili. Skupina, která začala v bodě A , skončila v bodě B a naopak skupina, která začala v bodě B , skončila v bodě A . Žáci si jistě všimnou, že nikdo z nich nevymyslel variantu začínající v bodě C , D nebo E . Můžeme jim nechat chvíli na hledání takové varianty, ale sami to jistě rychle vzdají. Nadneseme otázku: čím se body A , B liší od ostatních? Necháme žáky přemýšlet, jak by tyto body popsali, aniž by použili písmena A , B . Mohou k tomu použít například obrázek. Zde uveďme jednu návodnou úlohu:

- Určete, která značka znázorňuje který bod (A , B , C , D , E). V některých případech existuje více možných řešení.

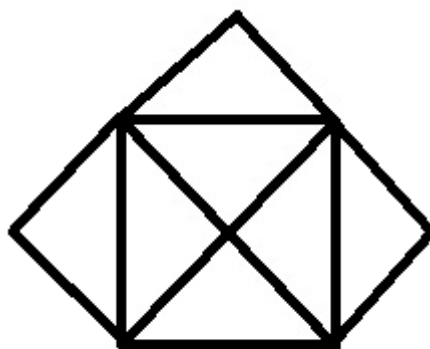


Obrázek 39: Návodná úloha č. 1

Tato úloha by mohla žáky navést k myšlence, že jednotlivé vrcholy se liší počtem hran, které z něj vedou. Ke každému vrcholu tedy můžeme napsat číslo určující počet takových hran (stupeň vrcholu). Vrcholy A i B mají oba stupeň vrcholu 3, toho si žáci jistě všimnou, možná pak určí pravidlo, že je nutno začít tah ve vrcholu se stupněm 3. V takovém případě jim zadáme například takovouto úlohu:

²Zjištěno autorkou pomocí nákresu orientovaného grafu zobrazujícího 44 možností začínajících ve vrcholu A . Stejný počet tvoří skupina začínající ve vrcholu B a končící ve vrcholu A (pouze opačný směr původních možností zobrazených grafem).

- Zkuste nakreslit následující obrázek jedním tahem a pak ke každému vrcholu napište počet hran, které z něj vedou:



Obrázek 40: „Domeček se třemi střechami“ = graf se dvěma vrcholy lichého stupně (oba stupně 5)

Pomocí této úlohy zjistí, že mohou začít a skončit nejen ve vrcholu se stupněm 3, ale také ve vrcholu se stupněm 5. Jistě někoho z žáků napadne, že obě čísla jsou lichá. Ještě je nutné upozornit, že u našich obrázků jsou vrcholy s lichým stupněm vždy právě dva, v jednom se začne a ve druhém skončí. Nabízí se otázka, zda vrcholů s lichým stupněm může být jiný počet.

- Může být vrcholů s lichým stupněm více než dva?

V jednom vrcholu s lichým stupněm začneme, ve druhém skončíme, ale jak to bude vypadat u těch ostatních? Pokud do takového vrcholu přijdeme po jedné hraně, musíme po druhé zase odejít, protože tímto vrcholem pouze procházíme (viz obr. 41). Hran tedy musí být sudý počet ve všech vrcholech mimo dvou, prvního a posledního, ty mohou být lichého stupně.



Obrázek 41: Vrchol průchozí, začínající a konečný

- Může být lichého stupně pouze jeden vrchol?

Každá hrana má vždy dva konce, to znamená, že součet všech konců je sudé číslo a je rovno součtu stupňů všech vrcholů. Pokud by byl lichého stupně pouze jeden z vrcholů, i tento součet by byl lichý. Nelze tedy, aby byl pouze jeden vrchol lichého stupně.

- Co ale, když začneme a skončíme ve stejném vrcholu?

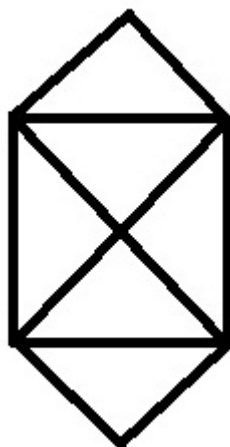
Takto vypadá situace u vrcholu, ve kterém začneme i skončíme:



Obrázek 42: Vrchol začínající i konečný

Pokud nepřijdou žáci sami od sebe na to, že v takovém případě budou všechny vrcholy mít sudý stupeň, pomůžeme jim například touto úlohou:

- Zkuste nakreslit tento obrázek jedním tahem a pak ke každému vrcholu napište počet hran, které z něj vedou:



Obrázek 43: Graf se všemi vrcholy sudými = „domeček a dvě střechy“

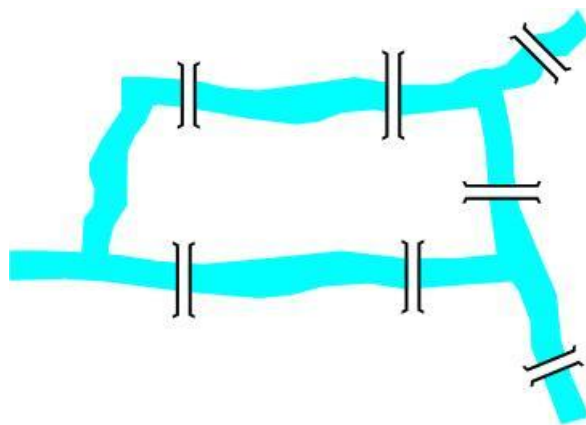
Společně se žáky zapíšeme na tabuli stupně jednotlivých vrcholů a pokusíme se žáky dovést k myšlence, že vrcholy jsou sudého stupně a že lze začít v jakémkoliv vrcholu (Můžeme použít například otázku: „Ve kterém vrcholu jste začali a ve kterém skončili? Začali jste se svým sousedem ve stejném vrcholu? Můžeme začít v jakémkoliv vrcholu? Začal někdo ve vrcholu s lichým stupněm?“). Nakonec dojdeme se žáky ke zjištění, že pokud mají všechny vrcholy sudý stupeň, nejen že obrázek lze nakreslit jedním tahem, ale dokonce ještě skončíme ve stejném vrcholu, ve kterém jsme začali.

Můžeme tedy se žáky zformulovat pravidlo:

Obrázek lze nakreslit jedním tahem právě tehdy, když

- všechny stupně vrcholů jsou sudé (tah může začít v kterémkoliv vrcholu a v tomtéž skončí).
- právě dva vrcholy jsou lichého stupně (v jednom z nich tah začne a ve druhém skončí).

Toto pravidlo zavedl Leonhard Euler, když se roku 1736 pokoušel vyřešit slavný problém sedmi mostů města Královce. (viz obr. 44)

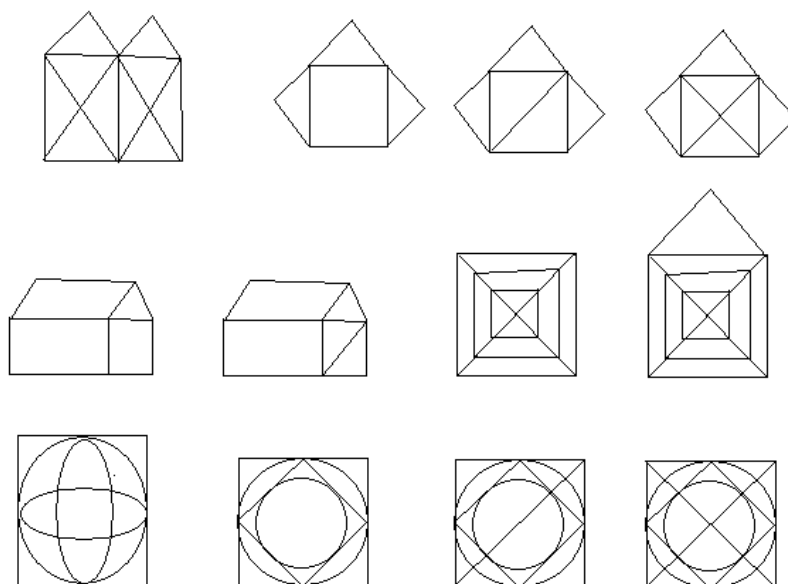


Obrázek 44: Problém sedmi mostů města Královce (převzatý obrázek, viz str. 74)

Otázkou bylo, zda je možné projít každým mostem ve městě právě jednou. Euler v roce 1736 dokázal, že to možné není.

Nakonec žákům na procvičení zadáme následující úlohu z pracovního listu (viz příloha 1). Pokud ji nestihnou vypracovat ve škole, mohou ji dokončit doma, je však nutné provést společnou kontrolu výsledků.

- Určete u každého grafu z obrázku, zda lze či nelze nakreslit jedním tahem:



Obrázek 45: Úlohy pro žáky

- Vymyslete každý jeden graf pro své spolužáky, u kterého mohou zjišťovat, zda lze nakreslit jedním tahem.

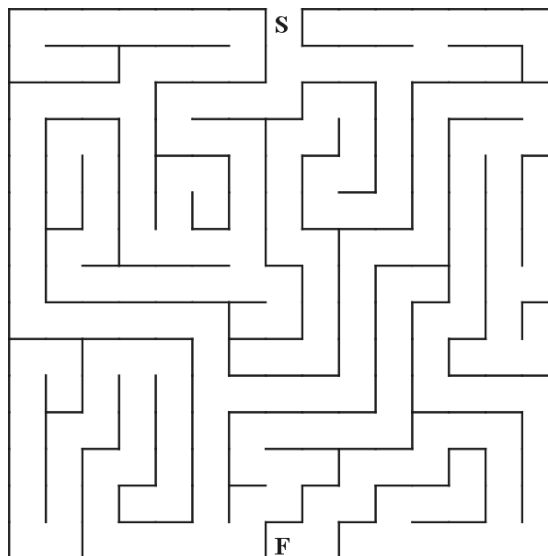
Bludiště

Bludiště rozdělujeme do dvou hlavních skupin. První skupinou jsou **klasické labyrinty**. Mají jeden jediný vstup a k dosažení středu se používá jedné cesty, která nenabízí žádnou jinou možnost. Tím, že existuje jedna jediná cesta, nemůže poutník minout cíl.



Obrázek 46: Ukázka klasického labyrintu (převzatý obrázek viz 74)

Druhou skupinou jsou **klasická bludiště**. Mohou mít více vstupů a více výstupů, k cíli může vést více cest a poutník je nucen se rozhodovat mezi více různými cestami a velice snadno zabloudí. Pojmy bludiště a labyrinty však málokdo rozlišuje a často zaměňuje jedno za druhé.



Obrázek 47: Ukázka klasického bludiště (převzatý obrázek, viz str. 74)

Asi každý z nás někdy zkoušel najít cestu bludištěm, ať už tužkou na papíře nebo v opravdovém bludišti například z živého plotu, zídek či zrcadel. Oboje má svoje výhody a nevýhody.

U bludiště je výhodné mít nadhled a asi bude jednodušší procházet ho pouze tužkou na celkové mapce. Na druhé straně labyrinty jsou složeny z mnoha souběžných cest a na papíře se jednodušeji spleteme a omylem přeskočíme o jednu cestu vedle, přitom v reálu nás labyrint zabloudit nenechá, ani kdybychom se o to snažili.

O tom, že labyrint a bludiště jsou často myšlena jako synonyma, se můžeme přesvědčit i v krétské mytologii. Velmi známý je příběh o Minoově labyrintu. Král Minos měl podle pověsti nepovedeného syna Minotaura. Byl to napůl člověk, napůl býk. Minotaurus požíral lidi, a tak jej Minos nechal uvěznit v Labyrintu, který mu pro ten účel měl postavit stavitel Daidalos. *Labyrint znamená původně "Dům dvojbřité sekery"*. (Janovský) Takto tedy tehdy vzniklo slovo labyrint.

Kvůli dřívějším sporům athénskému a krétskému králi musely Athény posílat každým devátým rokem na Krétu sedm dívek a sedm mladíků pro Minotaura. Ovšem pověst praví, že Theseus (syn boha moře Poseidóna) se dobrovolně vydal na Krétu mezi 14 vybranými oběťmi, bludištěm prošel a Minotaura zabil. Dostal prý od Ariadny (dcery krétského krále) na pomoc nit, aby ve spleti chodeb nezabloudil. Nemohlo tedy jít o klasický labyrint, ale o bludiště.

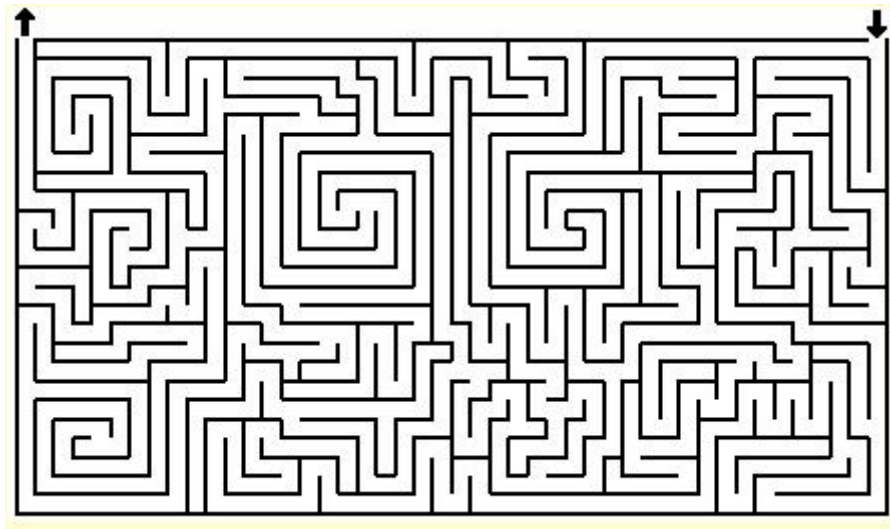


Obrázek 48: Krétský labyrint s Minotaurem uprostřed (převzatý obrázek viz str. 74)

4.2 Příprava hodiny „Bludiště“

Nejprve žáky necháme samotné hledat cestu bludištěm, někomu se to podaří rychleji, někomu pomaleji a někomu třeba vůbec. Mezi tím, co bloudí, jim můžeme vyprávět o Minoově labyrintu.

- Najděte cestu skrz bludiště:



Obrázek 49: Bludiště (převzatý obrázek, viz str. 74)

- Najděte cestu doprostřed labyrintu:



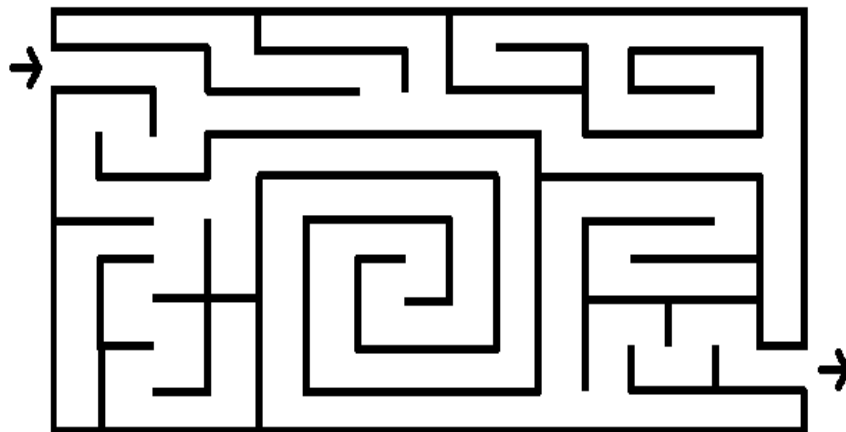
Obrázek 50: Labyrint (převzatý, obrázek viz str. 74)

Zkusíme žáky pomocí návodných otázek dovést k myšlence, že v bludišti bloudíme kvůli špatným rozhodnutím na jednotlivých křižovatkách, kdežto v labyrintu žádné křižovatky nejsou, tudíž mohou zabloudit pouze z nepozornosti, např. když omylem přeskočí z jedné dlouhé chodby do druhé, když labyrint řeší tužkou na papíře.

Návodné otázky:

- Které hledání cesty bylo jednodušší? Cesty bludištěm či labyrintem?
- Jaký je mezi nimi rozdíl?
- Kolik křižovatek je přibližně v bludišti? A kolik v labyrintu?

Teď zkusíme následující bludiště zakreslit trochu jednodušeji. (Budd a Sangwin, 2001)

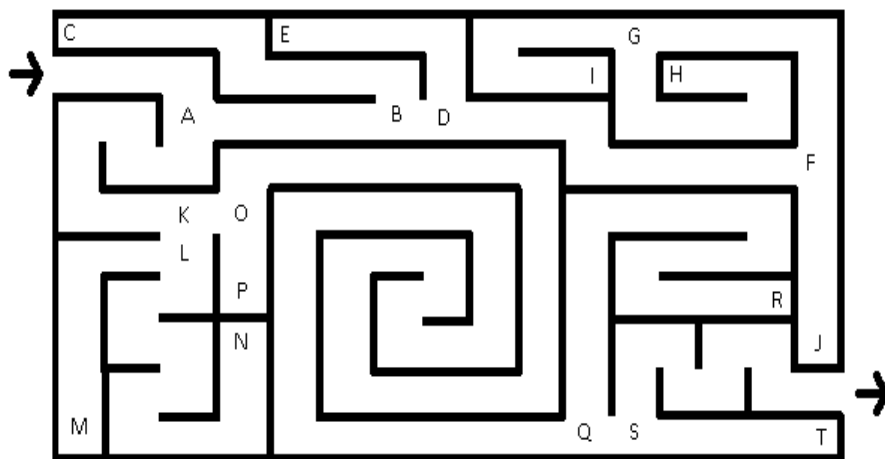


Obrázek 51: Bludiště

Nejprve si označíme písmeny všechna důležitá místa:

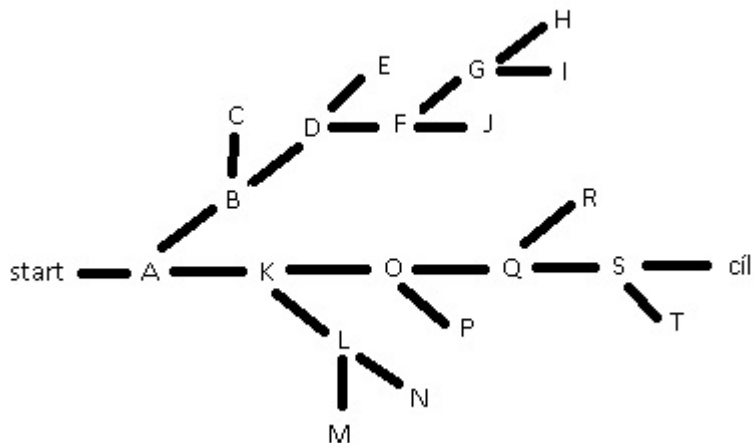
- 1) všechny křižovatky
- 2) všechny konce slepých cest

Například takto (viz obr. 52)



Obrázek 52: Bludiště s označenými křižovatkami

Nové zakreslení bludiště bude mít místo klikatých zamotaných cestiček rovné čáry. Bude tak pro nás přehlednější a lépe v něm najdeme správnou cestu. Bude nám sloužit jako taková mapa pro průchod bludištěm. Rozmístíme jednotlivá písmena jako body (vrcholy) a pospojujeme pomocí čar (hran) ty, mezi kterými vede cesta bez průchodu další křižovatkou. Naše bludiště bude po zjednodušení vypadat nějak takto:



Obrázek 53: Bludiště znázorněné grafem

V tomto zakreslení je nalezení cesty skrz bludiště hračka. Žáci se mohou ve dvojicích navzájem podle této mapky navigovat. Rozdělíme žáky do dvojic, případně i do malých

skupin. Jeden žák bude mít tuto zjednodušenou mapku a ostatní pouze bludiště bez písmen. Následující úkoly pro žáky s mapkou mohou znít například takto:

- Proved' své spolužáky po správné cestě do cíle. (Nezapomeň, že oni nemají v bludišti zapsaná písmena, k popisu cesty je tedy nepoužívej.)
- Zaved' spolužáky do slepé uličky s písmenem *I*.
- Zaved' spolužáky do slepé uličky s písmenem *M*.
- Zaved' spolužáky do slepé uličky s písmenem *R*.
- Zaved' spolužáky do slepé uličky, kterou si vybereš.
- Tímto způsobem by se dalo zašifrovat nějaké slovo. Zkus to společně se svými spolužáky ze skupinky. Šifru si vyměňte s jinou skupinkou a jejich zašifrované slovo vyluštěte.

Jakým způsobem tedy můžeme předat informaci kudy skrz bludiště?

a) pomocí písmenek (start-*A-K-O-Q-S*-cíl)

b) pomocí informací vlevo/vpravo (vpravo-vlevo-vlevo-vpravo-vlevo)

Jistě existuje i mnoho dalších způsobů. Například můžeme vpravo zapsat jako *P* a vlevo jako *L*, tím se nám popis výrazně zkrátí: *PLLPL*.

Nebo můžeme použít část naší mapky, a to i bez písmen:



Obrázek 54: Možné znázornění cesty bludištěm

Všimněte si, že jsou zakresleny jen části vedlejších cest. Pokud je čárka doleva, my jdeme vpravo a naopak.

- Do jaké slepé uličky by nás zavedl následující obrázek?



Obrázek 55: Cesta bludištěm do slepé uličky

- Zkuste nakreslit takovouto navigační čáru pro své spolužáky, která je zavede do jedné slepé uličky.
- Opět můžete tímto způsobem zašifrovat nějaké slovo či celou větu.

Graf můžeme zapsat i jinak než obrázkem. Pokud máme například vrcholy označené písmenky nebo jinými symboly, stačí pro každý vrchol napsat seznam jeho sousedů, tedy vrcholů, do nichž z něj vede hrana. Zadáme žákům následující úlohu z pracovního listu (viz příloha 1):

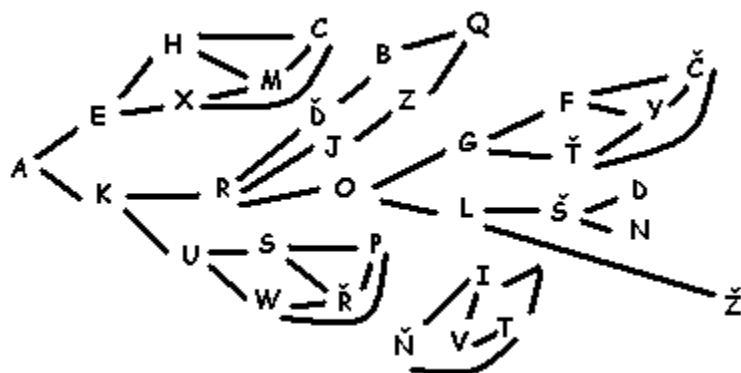
Zkuste najít cestu bludištěm, které je zapsáno takovýmto seznamem sousedů, pokud víte, že start je v bodě *A* a cíl v bodě *Ž*. Proházením písmen, které potkáte po cestě, můžete vytvořit slovo. Přijdete na to jaké?³

A: <i>E, K</i>	J: <i>R, Z</i>	S: <i>P, Ř, U</i>
B: <i>Ď, Q</i>	K: <i>A, R, U</i>	Š: <i>D, L, N</i>
C: <i>H, M, X</i>	L: <i>O, Š, Ž</i>	T: <i>Ň, V, Ž</i>
Č: <i>F, Ě, Y</i>	M: <i>C, H, X</i>	Ť: <i>Č, G, Y</i>
D: <i>N, Š</i>	N: <i>D, Š</i>	U: <i>K, S, W</i>
Ď: <i>B, R</i>	Ň: <i>I, T, V</i>	V: <i>I, Ň, T</i>
E: <i>A, H, X</i>	O: <i>G, L, R</i>	W: <i>P, Ř, U</i>
F: <i>Č, G, Y</i>	P: <i>S, Ř, W</i>	X: <i>C, E, M</i>
G: <i>F, O, Ě</i>	Q: <i>B, Z</i>	Y: <i>Č, F, Ě</i>
H: <i>C, E, M</i>	R: <i>Ď, J, K, O</i>	Z: <i>J, Q</i>
I: <i>Ň, V, Ž</i>	Ř: <i>P, S, W</i>	Ž: <i>I, L, T</i>

Obrázek 56: Písmenkové bludiště

³ Tento typ úlohy uvádí Vejmla (viz doporučené publikace str. 73) ve své knize ovšem bez tvoření slova z písmen posbíraných po cestě. Podle mého názoru se tím tato úloha stává jakousi šifrou a luštění šifer je u dětí stále oblíbené.

Řešení předchozí úlohy:



Obrázek 57: Předchozí bludiště zapsané grafem

Správnou cestu bludištěm tedy můžeme popsat písmeny: A, K, R, O, L, Ž. Proházením těchto písmen lze poskládat slovo *ŽRALOK*.

4.3 Druhá část hodiny „Bludiště“

Studenti již mají mnoho zkušeností s hledáním cesty skrz bludiště, vyzkoušíme, zda zvládnou také svůj systém srozumitelně popsat a vysvětlit tak ostatním spolužákům, jak cestu hledali. Existuje mnoho různých způsobů jak bloudit v bludišti. Zde uvedeme několik jednoduchých způsobů, které by možná mohl některý ze žáků vymyslet nebo již znát z dřívějších zkušeností s bludišti. (Budd a Sangwin, 2001)

1) Náhodně

Určitě to někteří zkoušeli náhodně, prostě si na každé křižovatce zvolili namátkou jednu z cest. I toto je určitý algoritmus, i když ne vždy musí skončit úspěšně.

2) Začerněním slepých cest

Tento způsob je poněkud pracnější, ale také účinný. Ve chvíli, kdy dojdete na konec slepé cesty, stačí ji vybarvit zpět k první křižovatce. Po vybarvení všech slepých cest by měla zůstat pouze správná cesta od startu k cíli, případně těchto cest může existovat více.

3) Převedení bludiště na graf

Složité obrázek bludiště si můžeme zjednodušit na daleko přehlednější graf. (viz str. 43)

4) Mapa

Předchozí způsoby fungují, pouze pokud bloudíte bludiště na papíře, takže určitě bude bloudění jednodušší, pokud vlastníte mapu bludiště, získáte tím určitý nadhled.

Co ale pokud budeme chodit v reálném bludišti, ne pouze na papíře?

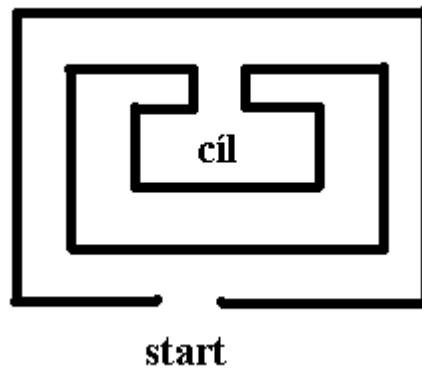
5) Navigátor

Další, co by nám pomohlo, mít nějakého rádce či navigátora, který by měl mapku nebo stál na vyvýšeném místě a volal, kudy máme jít.

6) Pravidlo pravé ruky

Asi nejznámější pravidlo na procházení bludiště v reálu, je pravidlo pravé ruky. Spočívá v tom, že položíme pravou ruku na stěnu bludiště a ta nás vede. Bohužel

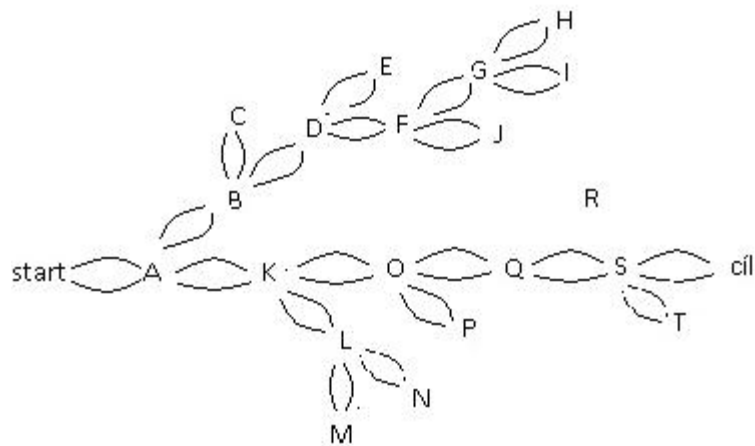
tento způsob nemusí fungovat na některá bludiště, u kterých je cílem dostat se do středu, nejčastěji ke starému stromu uprostřed. (viz obr. 58)



Obrázek 58: Ukázka bludiště, kde nefunguje pravidlo pravé ruky

Existují ještě další pravidla, která si zájemci můžou najít na internetu. Nejuniverzálnější by však bylo projít bludiště úplně celé, tzn. projít všechny cesty. Potom bychom cestou určitě museli projít okolo cíle, ať už bude uprostřed či někde jinde. Jde tedy o to, najít cestu bludištěm, která prochází všechny jeho části. Existuje však taková?

Lze projít bludiště jedním tahem? To samozřejmě nelze obecně říci, pokud však řekneme, že projdeme každou cestou právě dvakrát, můžeme díky Eulerovu pravidlu dokázat, že taková cesta existuje. Ukažme si to na bludišti z minulé kapitoly. (viz obr. 51, obr. 52, obr. 53)

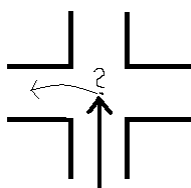


Obrázek 59: Graf se zdvojenými hranami

Graf na obr. 59 má oproti tomu původnímu všechny hrany zdvojené, projdeme tedy každou z původních cest dvakrát a opět skončíme na startu. Vzhledem k tomu, že jsou všechny hrany zdvojené, musí být stupeň každého vrcholu sudý, a proto lze podle Eulerova pravidla projít tento graf jedním uzavřeným tahem a skončit na místě, kde jsme začali.

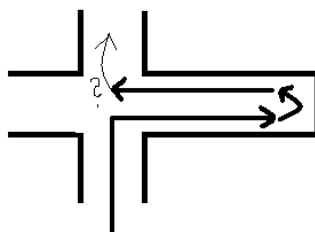
Dále zkusíme s dětmi vymyslet pravidla, jak se v bludišti chovat. Pomocí jednoduchých otázek lze s žáky dojít k jednoduchým pravidlům. Pro lepší představu doporučuji používat obrázky pro znázornění jednotlivých situací.

- 1) Jak začneme? Co uděláme na startu? Vybereme si libovolnou cestu a vydáme se po ní.
- 2) Co se může stát dál? Dojdeme na další „novou“ křižovatku nebo na konec slepé uličky.
- 3) Co uděláme, když dojdeme na novou křižovatku? (viz obr. 60) Vybereme si libovolnou cestu.



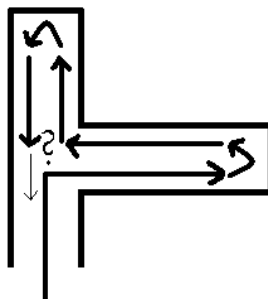
Obrázek 60: Výběr libovolné cesty na nové křižovatce

- 4) Co uděláme, když dojdeme na konec slepé uličky? Otočíme se a vrátíme na nejbližší křižovatku. Takové křižovatce budeme říkat „stará“ křižovatka, neboť už jsme ji dříve navštívili.
- 5) Co když se vrátíme (např. ze slepé uličky) na „starou“ křižovatku? (viz obr. 61) Vybereme novou zatím nevybranou cestu.



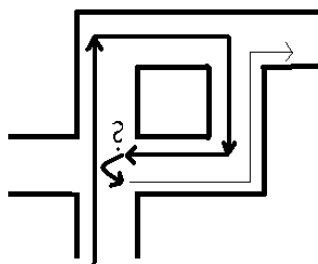
Obrázek 61: Výběr jiné cesty při návratu na starou křižovatku

A co když už žádná neexistuje? (viz obr. 62) Pak se vracíme po cestě, kterou jsme na tuto křižovatku přišli poprvé.



Obrázek 62: Návrat ze staré křižovatky, pokud již žádná další cesta není

6) Také se může stát, že přijdeme po „nové cestě“ (= prozkoumáváme novou cestu = nevracíme se) a narazíme na starou křižovatku (viz obr. 63); v tu chvíli je třeba se začít vracet, neboť máme po cestě zpět možná ještě nějakou cestu na prozkoumání.



Obrázek 63: Navštívení staré křižovatky při prozkoumávání nové cesty

Pravidla můžeme tedy sepsat takto:

- Dojdeme-li na novou křižovatku, vydáme se libovolnou cestou.
- Dojdeme-li na konec slepé uličky, otočíme se a zamíříme zpět.
- Vracíme-li se na starou křižovatku, mohou nastat dvě varianty:
 - Pokud z křižovatky vede zatím neprozkoumaná cesta, vydáme se po ní.
 - Pokud již žádná taková není, vracíme se zpět po cestě, kterou jsme na tuto křižovatku přišli poprvé.
- Pokud při průzkumu nové cesty narazíme na starou křižovatku, otočíme se a vracíme se naší cestou zpět k nejbližší křižovatce.

4.4 Zkoumané skupiny

Experiment jsem prováděla na dvou různých školách – v dubnu roku 2011 ve třídách víceletého gymnázia a v únoru roku 2012 ve třídách jedné základní školy v Praze. Obě školy jsou pražské a nemají žádné speciální zaměření. Gymnázium je osmileté s všeobecným zaměřením uplatňující při výběru žáků písemné přijímací zkoušky. Jde o gymnázium, kde učí můj bratr. Základní škola je bez jakéhokoliv speciálního zaměření, dříve dokonce mívala takzvané dys-třídy určené pro žáky s dyslexiemi, dysgrafiemi atd. Přijímá děti ze svého blízkého okolí, a to bez speciálních požadavků při výběru žáků. Na této škole jsem v době experimentu půl roku učila, a to ve všech třídách účastnících se výzkumu.

Zkoumanou skupinu můžeme rozdělit na 5 podskupin, ve kterých postupně probíhal experiment.

První dvě skupiny byly sestaveny ze žáků víceletého gymnázia, kteří se dobrovolně přihlásili na čtyřdenní matematický kurz pořádaný jejich učiteli. Kurzu se zúčastnili žáci osmiletého gymnázia ze tříd: kvinta, sexta, septima. Věkové složení účastníků kurzu bylo tedy od 15 do 18 let.

Předpokládala jsem, že na matematický kurz se přihlásí žáci se zvýšeným zájmem o matematiku a logické úlohy. Protože však kurz probíhal v Kostelci nad Černými lesy v komplexu místního zámku, mohli se žáci také přihlásit pouze kvůli krásnému prostředí, pobytu na zámku nebo například kvůli svým kamarádům či oblíbenosti pořádajících kantorů. Proto jsem se ve výzkumu také zajímala o to, z jakého důvodu žáci na tento kurz jeli.

Vnější podmínky pro experiment byly ideální, žáci nebyli v průběhu ničím rušeni a byli schopni udržet pozornost, komunikovat a spolupracovat po celou dobu. Díky tomu bylo možné vyzkoušet kapitolu „Domeček jedním tahem“ i celou kapitolu „Bludiště“.

Třetí skupinou byla 7. třída pražské základní školy, která většinou jeví zájem o matematiku, i když se samozřejmě i v ní najdou výjimky. V dané třídě je pouze 14 žáků, jde o třídu, která, pokud má dobrou náladu, umí skvěle spolupracovat. Mnoho jejích žáků se samo aktivně zapojuje do výuky a rádo sděluje své názory. Většinou jim jako motivace stačí samotná matematika, poskytující jim možnost hledání různých řešení nastíněných matematických problémů.

Experiment v 7. třídě probíhal ve dvou vyučovacích hodinách, a to ve dvou různých dnech. První den šlo o kapitolu Domeček jedním tahem, kde vnější podmínky byly ztížené asi deseti žáky ze sousední třídy rozřazenými na tuto hodinu do naší třídy. Měli sice zadanou svoji práci, ale většina z nich nedokázala směřovat svoji pozornost pouze k práci a raději komunikovali se svým okolím. Žáci z jiné třídy jsou vždy určitým rozptylujícím prvkem. Na druhou stranu v jedné chvíli se žák z jiné třídy do našeho experimentu dobrovolně zapojil, což určitě pozitivně podporuje teorii, že jde o zábavnou část matematiky.

Druhý den se jednalo o část kapitoly „Bludiště“. Kapitolu jsem nezařadila celou jako pro žáky gymnázia hlavně z časových důvodů. Považovala jsem pro 7. třídu menší množství látky na 45 minut za dostatečné, navíc by nedostatek času žáky stresoval a demotivoval, a tak by byly výsledky výzkumu zkresleny. Výsledky mohly být negativně ovlivněny mimo jiné tím, že šlo o poslední hodinu 7. třídy v onom dni. Naopak pozitivně mohla výsledky ovlivnit přítomnost interaktivní tabule.

Poslední dvě skupiny byly dvě šesté třídy základní školy. V 6. B je 14 dětí a většinou dobře spolupracují a aktivně se zapojují do hodiny matematiky. V 6. A je 19 dětí a bývá o něco živější, někteří žáci mají problém udržet pozornost.

V šestých třídách žáci pracovali poněkud pomalejším tempem než ve třídě sedmé. Rozhodování, zda jednotlivé grafy lze nakreslit jedním tahem, následovalo až druhý den v následující hodině matematiky. Přesto se zdálo, že většina žáků si látku z předchozí hodiny pamatovala a neměla s úlohou z pracovního listu (viz str. 78) žádný problém. Kapitolu „Bludiště“ jsem do těchto tříd nezařadila, neboť jsem po předchozím pozorování usoudila, že by tuto kapitolu bylo potřeba pro šesté třídy zjednodušit či rozložit postupně do více hodin.

4.5 Tvorba dotazníku

Jak už název dosvědčuje, slovo „dotazník“ se spojuje s „dotazováním“, s otázkami. Je to způsob písemného kladení otázek a získávání písemných odpovědí. Dotazník je nejfrekventovanější metodou zjišťování údajů. Je určen hlavně pro hromadné získávání údajů. Myslí se tím získávání údajů o velkém počtu odpovídajících. Proto se dotazník považuje za velmi ekonomický výzkumný nástroj a v možnosti získávat velké množství informací při malé investici času má zřejmě přednost před jinými výzkumnými metodami. (Gavora, 1996, str. 53)

Já jsem si dotazník vybrala právě z výše uvedených důvodů. Využila jsem dotazník, abych získala názory všech žáků, nejen těch aktivních, kteří se výrazně projevovali při hodině (hlásili se, odpovídali na otázky, ptali se, navrhovali možná řešení, ...) a ovlivňovali tak sami průběh hodiny. Potřebovala jsem získat informace od všech žáků, a to nejlépe jako součást vyučování, tedy jako součást experimentální hodiny, neboť čím později bych se na dojmy žáků z hodiny zeptala, tím méně by si pamatovali a informace by byly o to více zkreslené. Dalším důvodem bylo, že žáci jsou na písemnou formu zvyklí, neboť se s různým zaškrťáváním možností a vyplňováním odpovědí ve škole setkávají běžně, například v písemných testech. Podle mé zkušenosti přikládají písemné formě větší důležitost a více se snaží a soustředí na svou práci než u formy ústní.

Cílem dotazníku bylo zjistit, zda žáci látku týkající se teorie grafů pochopili nebo některé části neporozuměli a zda byla látka pro účastníky zábavnější než běžná hodina matematiky nebo alespoň stejně zábavná.

Další důležitou otázkou je délka dotazníku. Je třeba získat všechny potřebné informace, ale na druhé straně nadměrná délka dotazníku může velmi uškodit. Dlouhý dotazník respondenty většinou rychle unaví, naruší tak jejich soustředění a přispěje k nepřesnostem při vyplňování a získané informace pak mohou být dosti zkreslené. (Gavora, 1996)

R. M. Wolf (1988) doporučuje maximální délku vyplňování 30 minut pro dospělé respondenty. U dětí by mělo být toto časové omezení ještě přísnější, a to maximálně 15 minut.

V mém případě šlo o starší děti, které však již měly za sebou hodinu poměrně náročnou na soustředění a možná i několik dalších náročných hodin předtím. Můj dotazník tedy musel být opravdu krátký. Čas potřebný na jeho vyplnění byl zhruba 3 minuty. Chtěla jsem však získat co nejvíce informací, a to pravdivých a pečlivě promyšlených, proto jsem žákům poskytla na vyplňování daleko více času. Každý žák mohl posoudit sám, kolik času je mu třeba k vyplnění dotazníku, a odevzdal vyplněný dotazník až ve chvíli, kdy byl se svými odpověďmi spokojen.

Speciálním problémem je tvorba otázek do dotazníků pro děti. Znění otázek musí být velmi jednoduché. Výběru slov je potřeba věnovat značnou pozornost. Výzkumník musí přetlumočit své myšlenky z jazyka dospělého do jazyka dítěte. (Gavora, 1996, str. 56)

Pro tvorbu otázek jsem použila češtinu odpovídající věku žáků, otázky formulovala jednoduše bez zbytečných odborných termínů; žádná otázka nepřesáhla jeden řádek. Snažila jsem se dotazník co nejvíce přizpůsobit žákům, aby nebyly odpovědi zkreslené kvůli nepochopení složitých otázek.

Podle Gavory (1996) se dotazník skládá ze tří částí: vstupní, střední a ukončovací. Vzhledem k tomu, že jsem dotazníky žákům rozdávala sama, neobsahuje můj dotazník žádnou vstupní ani ukončovací část. Všechny potřebné informace jsem žákům sdělila při rozdávání dotazníků, stejně tak poděkování proběhlo ústně při odevzdávání vyplněného dotazníku. Samozřejmě také nebyl problém s návratností dotazníků. Žáci se mohli ptát v průběhu vyplňování, pokud jim některá otázka nebyla jasná. Přesto se však stalo, že nějakou otázku vynechali či špatně vyplnili. Možná tak učinili pouze z nedbalosti či lenosti. Domnívám se, že příčinou nebyl strach zeptat se a přiznat tak, že něčemu neporozuměli, neboť jsem třídou procházela a dotaz tedy mohl být naprosto soukromý.

Věk:	Třída:	žena/muž	jméno:
Známkujte jako ve škole 1 nejlepší 5 nejhorší. Vybranou známku zakroužkujte.			
1)	Baví tě matematika?	Ano 1.....2.....3.....4.....5	Ne
2)	Jde ti matematika?	Ano 1.....2.....3.....4.....5	Ne
3)	Bavila tě ta matematika, kterou jsme tu dělali?	Ano 1.....2.....3.....4.....5	Ne
4)	Pochopil jsi všechno, co jsme tu dělali?	Ano 1.....2.....3.....4.....5	Ne
5)	Napiš, kterou část jsi nepochopil.		
6)	Napiš, co tě bavilo nejvíc.		
7)	Proč jsi jel na tento kurz?	a) Kvůli matematice b) kvůli něčemu jinému (napiš kvůli čemu):	

Obrázek 64: Dotazník

Při rozdávání dotazníku jsem žákům vždy vysvětlila, které části výuky se dotazník týká. Na gymnáziu to byla dvouhodinová, na základní škole v sedmé třídě hodina, která

zrovna probíhala, a v šestých třídách minulá hodina matematiky. Stejně však u položky číslo 6 docházelo ke špatnému pochopení a žáci zde vyplňovali nejen to, co je nejvíce bavilo v hodině s teorií grafů, ale i v ostatních hodinách matematiky. Beru to však i z té lepší stránky, alespoň jsem tak měla i zpětnou vazbu ke své výuce v těchto třídách během roku.

První část dotazníku obsahovala pouze faktografické údaje, a to věk, třídu, pohlaví a jméno. Dotazníky nebyly anonymní, i když jsem žákům slíbila, že jejich jména nikde uvádět nebudu. Anonymita dotazníků by mi totiž neumožnila srovnávat fakta z dotazníku s mým pozorováním jednotlivých žáků v experimentální hodině a ani s poznatky o žácích, které jsem získala během ostatních vyučovacích hodin.

Rozlišujeme tři různé typy otázek: uzavřené, polouzavřené, otevřené. Na uzavřené otázky jsou předem připravené odpovědi, ze kterých respondent pouze vybere a nějakým způsobem označí svou odpověď. Odpověď na otevřenou otázku musí respondent osobně zformulovat a zapsat. U polouzavřené otázky je možné buď vybrat z nabízených otázek, nebo dopsat svoji odpověď, pokud respondentovi nevyhovuje žádná z předem připravených možností. V některých otázkách používáme posuzovací škály, mívají většinou 3, 5, 7 nebo až 9 stupňů. (Gavora, 1996) Já jsem použila do prvních 4 položek otázky škálované s pěti stupni. Učinila jsem tak proto, že jsou žáci na pětistupňovou škálu zvyklí ze školního hodnocení prospěchu. Jak jsem předpokládala, neměli žáci s tímto hodnocením žádné problémy, bylo pro ně přirozeným hodnotícím systémem.

První otázka zněla: „Baví tě matematika?“ a druhá: „Jde ti matematika?“. Tyto otázky měly za úkol zjistit, zda jde o děti se zájmem o matematiku, které mají pocit, že jsou na matematiku nadanější, nebo o žáky, kterým matematika dělá problémy, resp. nemají o ni velký zájem.

Třetí otázka zněla: „Bavila tě ta matematika, kterou jsme tu dělali?“⁴ Tuto otázku jsem dala do dotazníku ze dvou důvodů. Zjišťovala jsem, zda se žákům tato hodina zdála zábavná. Ale hlavně, zda se žákům zdála zábavnější než běžná hodina matematiky. Tuto informaci lze získat srovnáním s odpovědí na první otázku „Baví tě matematika?“.

⁴ Ačkoliv je otázka směřovaná na přítomnost, žákům jsem vždy ústně vysvětlila, které části se dotazník týká. Přestože se tedy v 6. třídách jednalo o hodinu z předchozího dne, žákům nedělalo problém na tuto otázku odpovědět.

Stejně tak můžeme srovnat druhou a čtvrtou otázku. Čtvrtá otázka zněla: „Pochopil jsi vše, co jsme tu dělali?“. Tato otázka měla za úkol zjistit, jestli všichni žáci pochopili probíranou látku nebo jestli mají pocit, že to bylo na ně moc složité a pro ně nepochopitelné. Srovnáním s druhou otázkou můžeme zjistit, jestli tuto hodinu pochopilo méně, stejně nebo více žáků než těch, kteří uvedli, že jim matematika jde. V případě, že něčemu neporozuměli, měli v šesté otázce upřesnit, co nepochopili.

Pátá a šestá otázka byla otevřená. Tento typ otázek u dětí moc oblíbený není, raději zaškrťávají předepsané odpovědi, proto jsem očekávala, že někteří určitě neodpovědí, případně nebudou umět srozumitelně svou odpověď zformulovat. Brala jsem je tedy pouze jako doplňující otázky, ze kterých se mohu dozvědět zajímavé informace podporující otázky předchozí.

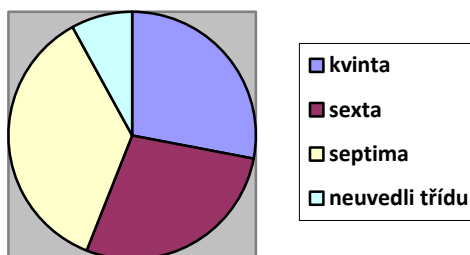
Sedmou otázkou, která však byla uvedena pouze v dotaznících pro studenty účastníci se matematického kurzu gymnázia, byla polouzavřená otázka. Zněla takto: „Proč si přijel na tento kurz?“ a měla na výběr ze dvou možností a) kvůli matematice nebo b) kvůli něčemu jinému. U druhé možnosti bylo potřeba, aby studenti uvedli svůj důvod. Samozřejmě bylo možné zaškrtnout obě odpovědi, neboť účastníci mohli mít důvodů své účasti více. Tato otázka měla za úkol hlavně zjistit, zda jde o výběr žáků zaměřených na matematiku. Už to, že navštěvují gymnázium, napovídá, že by o nějaký výběr nadanějších žáků jít mělo.

4.6 Třídy gymnázia

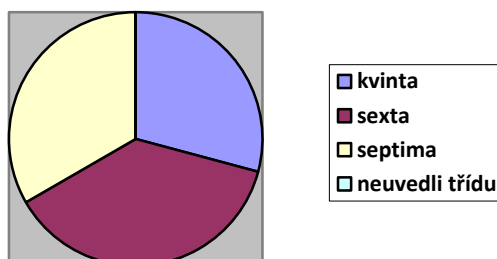
Účastníků kurzu bylo 49, z toho 15 chlapců a 34 děvčat. Rozdělení do dvou skupin bylo necháno na rozhodnutí žáků, bylo pouze omezené nutností přibližně stejného počtu žáků v obou skupinách. V první skupině 2 žáci svou třídu v dotazníku nevedli. Zastoupení jednotlivých tříd v obou skupinách bylo přibližně stejné, jak můžete vyčíst z tabulky a grafu, které následují.

	skupina A	skupina B
kvinta	7	7
sexta	7	9
septima	9	8
nevedli třídu	2	0

Tabulka 1: Počty žáků z různých tříd ve skupinách



Obrázek 65: Zastoupení jednotlivých tříd ve skupině A



Obrázek 66: Zastoupení jednotlivých tříd ve skupině B

Kurzu se mohli zúčastnit žáci z kvinty, sexty či septimy. Samozřejmě mohly zasáhnout vnější faktory jako například omezení kapacity kurzu nebo rodinné důvody. Já jsem se však zaměřila na osobní důvody žáků, proč na kurz přijeli. 41 žáků vybralo variantu, že

se účastní kurzu kvůli matematice, z nich 9 uvedlo ještě další důvod. Pouze 8 žáků popřelo, že by jelo na kurz kvůli matematice, a uvedlo důvod jiný. Někteří žáci napsali více důvodů najednou. Tři žáci přijeli kvůli kamarádům, další tři kvůli zábavě a tři kvůli poznání nového. Dvakrát žáci uvedli jako důvod své účasti osvobození ze školy a dvakrát zvědavost. Další důvody vyskytující se v dotaznících pouze jednou byly tyto: bydlení na zámku, záliba ve školních akcích s kamarády, upevnění kolektivu, výborní učitelé, nejpříjemnější varianta z výběru kurzů, nedostatek výjezdů během roku, příroda. 41 žáků ze 49 se tedy zúčastnilo kurzu kvůli matematice, a tedy pouze 8 žáků matematiku jako svůj důvod účasti na kurzu neuvádělo. Vzhledem k vysokému počtu žáků, kteří jeli na kurz kvůli matematice, můžeme považovat tuto skupinu za motivovanější s větším zájmem o matematiku než v ostatních skupinách.

4.6.1 Průběh hodiny

Část první

Na začátku hodiny jsem se zeptala, co si žáci představí pod pojmem „graf“. V obou skupinách vymysleli graf koláčový a sloupcový, které dobře znají z informatiky, statistiky, případně z novin. Dále si vzpomněli, že se v matematice učili grafy funkcí. Ovšem grafy v podobě vrcholů a hran neznali, ačkoliv se s mnoha takovými jistě setkali. Domeček poznali v obou skupinách bez problémů a jistě ho již dříve zkusili nakreslit jedním tahem. Do hledání nějakého řešení se nadšeně pustili a mnoho jich chtělo sdělit svůj postup. Slovního popisu se nebáli, měli však drobné problémy s vyjadřováním svých myšlenek. Po zavedení označení vrcholů A , B , C , D , E bez problému sdělovali řady písmen (např. $ABCADECDB$, ...).

O tah začínající ve vrcholech C , D nebo E se žáci snažili, ale velice rychle to vzdali a usoudili, že domeček nakreslit jedním tahem lze pouze z vrcholu A nebo B . Důvodem k jejich tvrzení bylo pouze to, že nikomu v celé třídě se nepodařilo takové řešení najít, to však neznamená, že neexistuje. V dalším postupu se skupiny trochu lišily. Zatímco první skupina sama vymyslela, že vrcholy A a B se liší počtem hran, které do nich vedou, pro druhou skupinu bylo třeba zadat návodnou úlohu. Tato odlišnost byla také způsobena tím, že jedna ze studentek v první skupině se již někdy dříve setkala v literatuře s teorií kreslení domečku jedním tahem a tak navrhla myšlenku, že je třeba začít ve vrcholu, ze kterého vede lichý počet hran. Ve druhé skupině jsme k této

myšlenky došli ještě pomocí dalšího pomocného příkladu „domečku se třemi střechami“ (viz obr. 40).

Žáci v obou skupinách pomocí svých otázek a vhodného směřování dokázali sami vymyslet a zformulovat, jak zní pravidlo, kdy lze nakreslit graf jedním tahem. A určování, které grafy jdou a které nejdou nakreslit jedním tahem, jim nedělalo žádné problémy. Během hodiny běžně používali nově zavedené matematické termíny jako graf, vrchol i hrana, i když se někdy objevily i výrazy obrázek, bod a čára, cesta atd.

Část druhá

Druhou část hodiny jsem začala rozdělením druhého pracovního listu (viz příloha 2). Žáci opět s nadšením začali hledat cestu v bludišti i labyrintu. Neznali rozdíl mezi termíny bludiště a labyrint, ale mezi dvěma úlohami na rozdaných listech ho velmi rychle objevili. Někteří totiž měli problém s nalezením cesty bludištěm, labyrint však zvládli všichni velmi rychle. Stačilo jim tedy ujasnit, co je bludiště a co pouze labyrint (viz str. 40).

Následovala diskuze třídy o různých strategiích, které žáci použili na hledání cesty v bludišti. Žáci přiznali, že bludiště z pracovního listu řešili pomocí náhodných pokusů. Byli však poté schopni navrhnout i další účinnější strategie, dokonce přišli i s pravidlem pravé ruky. Dále jsme se zabývali přetvoření obrázku bludiště na jednodušší způsob zápisu, pomocí grafu, tedy vytvoření jednoduché mapky. Jediné, co zesložilo tuto část, byla špatná kvalita žaluzií v místnosti, takže promítané obrázky bludiště byly hůře viditelné. Následovala část jak projít celé bludiště a nevynechat žádnou uličku. (viz str. 50) Žáci s mou pomocí řešili, jak se chovat v jednotlivých situacích v bludišti, a sami navrhovali pravidla.

Poslední na řadu přišlo bludiště zapsané pomocí seznamu sousedních křížovatek pro každou křížovátku. (viz str. 46) Tato úloha některé studenty velmi zaujala a s nadšením se do ní pustili. Úloha se podobala luštění šifry, neboť výsledná cesta byla přesmyčkou slova ŽRALOK. Luštění šifer je u některých žáků oblíbené, a proto bylo velkým motivačním faktorem a možná přispělo k výběru kapitoly „Bludiště“ jako nejoblíbenější části.

4.6.2 Výsledky dotazníků

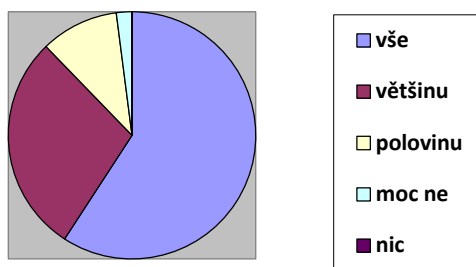
S důvodem návštěvy kurzu souvisí otázka číslo 1 v dotazníku: „Baví tě matematika?“. 15 žáků uvedlo, že je matematika velmi baví, a 21 žáků, že je matematika docela baví.

Jen 10 žáků váhalo a odpovědělo neutrálně, že je matematika někdy baví a někdy ne. A dokonce pouze 3 žáci přiznali, že je matematika moc nebaví. To, že žádný nezaškrtl možnost, že ho matematika vůbec nebaví, nás u tohoto experimentu prováděného na matematickém kurzu nemůže překvapit.

U otázky, zda jsou v matematice úspěšní, už můžeme předpokládat jiné výsledky, i když i to je matematickým kurzem jistě ovlivněno. Pouze 8 žáků se odvážilo o sobě tvrdit, že jim matematika jde velmi dobře. Nejvíce, 19 žáků, o sobě uvedlo, že jim matematika docela jde. 15 jich odpovědělo neutrálně, že jim matematika někdy jde a někdy nejde. 6 žáků přiznalo, že jim matematika moc nejde, a 1 dokonce, že mu nejde vůbec.

Na otázku: "Co tě bavilo nejvíc?" odpovědělo 39 žáků. 4 žáci kolonku pro odpověď nechali prázdnou a 6 žáků špatně pochopilo, že se otázka týká celého kurzu. Psali aktivity z předchozích dnů, ačkoliv jsem je ústně upozorňovala, že se dotazník týká toho, co dělali pouze se mnou. Opět se mi potvrdilo, že co žákům nenapíše na tabuli nebo nenadiktují do sešitu, to nejspíš alespoň jeden z nich nebude vědět. Z 39 odpovědí uvedlo 25 žáků pouze bludiště, 7 žáků bludiště a domečky a 6 žáků uvedlo jen domečky. 17 žáků uvedlo svou odpověď konkrétněji, např.: kreslení domečků a bloudění v bludišti (3x), pravidla s vrcholy (3x), pravidla bloudění (4x), mapování bludiště (1x), písmenkové bludiště neboli šifra žralok (6x). Přes 32 žáků tedy bavilo nejvíce bludiště a 13 uvedlo kreslení domečků, i když to neznamená, že ostatní kreslení domečků nebavilo, možná jen nad domečky zvítězila obliba bludišť. Pouze 1 studentka na otázku „co ji nejvíc bavilo?“ odpověděla: „nic“.

Na otázku, zda všechno pochopili, odpovědělo 29 žáků, že ano. 14 žáků pochopilo většinu, polovina z nich však nenapsala, co nepochopila. 5 jich uvedlo, že pochopili polovinu (něco ano a něco ne). A 1 studentka zaškrtila, že toho moc nepochopila, ale do kolonky, kterou část nepochopila, napsala: „tu poslední část“.

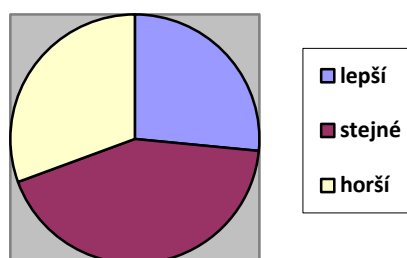


Obrázek 67: Pochopili jste vše? (gymnázium)

13 žáků uvedlo, že je tato hodina velmi bavila, 22 žáků docela bavila, 10 žáků odpovědělo neutrálně, 3 hodina moc nebavila a 1 student odpověděl, že ho vůbec nebavila.

13 žáků oznámkovalo tuto hodinu lépe než běžnou hodinu matematiky, na kterou jsou zvyklí. Započítáme-li k tomu i ty, kteří zhodnotili hodinu stejně jako běžnou hodinu matematiky, vyjde nám 34 žáků. Pouze 15 žáků ohodnotilo hodinu hůře, což mohlo být ovlivněno například tím, že experiment probíhal na kurzu a ne přímo ve škole, místo běžné vyučovací hodiny.

Následující graf zobrazuje, jak žáci hodnotili tuto hodinu v porovnání s běžnou hodinou matematiky.



Obrázek 68: Hodnocení hodiny z teorie grafů oproti běžné hodině matematiky (gymnázium)

4.7 Třídy základní školy

4.7.3 7. třída

Průběh hodiny

První část

Na začátku první hodiny žáci bez problému poznali, že jde o domeček, který jde nakreslit jedním tahem (viz obr. 37). Nezaváděla jsem jim žádné nové termíny, použila jsem výrazy jim blízké, tzn. graf zůstal pouze obrázkem, vrcholy jsme nazývali jen body a hrany zůstali obyčejnými čarami, případně cestami, které vedou mezi jednotlivými body. Věřím, že některým šikovnějším žákům by používání odborných termínů nedělalo žádný problém, ale pro jiné by to zbytečně zkomplikovalo porozumění věci.

Nakreslit domeček jedním tahem se bez problému podařilo všem žákům, někteří se dokonce dožadovali, aby mohli předvést více svých řešení. Dokonce i jeden žák přiřazený sem na tuto hodinu z jiné třídy, který většinou nejevil o matematiku velký zájem, přišel dobrovolně nakreslit na tabuli svůj domeček jedním tahem. Žáci nejraději své způsoby řešení opravdu sami kreslili na tabuli, avšak poradili si i s popisem typu: Začnu vlevo dole, pak nahoru, pak vpravo, pak šikmo dolů atd. Písmenka žákům popis o moc nezjednodušila, používání zápisu typu: *ABCADECDB* jim nebylo úplně vlastní.

I v této třídě se objevilo několik chybných řešení začínajících v bodech *C*, *D* nebo *E*. I když žáci zjistili, že na tabuli svůj postup už neumí zopakovat, přesto stále tvrdili, že domeček určitě takto nakreslit lze. V průběhu hodiny se někteří ještě znovu vraceli s dalšími neúspěšnými pokusy. Jeden ze žáků přišel s nápadem, že body *A*, *B* se liší od ostatních tím, že mají lichý počet čar, které z nich vedou, takže nebylo třeba používat návodnou úlohu se samostatnými body.

Díky dostatečnému počtu aktivních žáků proběhlo zjišťování možného počtu bodů lichého stupně bez velkých problémů (říkali jsme jim zjednodušeně liché body, termín stupeň jsme nepoužili), ovšem s formulací přesného pravidla potřebovali žáci sedmé třídy mou pomoc. Když jsem jim sdělila, že toto pravidlo vymyslel pan Euler a že si o jeho problému sedmi mostů mohou přečíst na internetu, ihned použili počítač ve třídě na jeho vyhledání. Techniku tato třída využívá velmi ráda, jakoukoliv možnost využít

počítač uvítá. V určování, zda jednotlivé obrázky lze či nelze nakreslit, se objevilo několik chyb, žáci je však rychle pomocí kontroly ve dvojicích byli schopni opravit.

Druhá část

Druhou hodinu jsem začala rozdáním druhého pracovního listu (viz příloha 2). Bloudění bludištěm a procházení labyrintu bavilo všechny žáky. Zapojili se s radostí i slabší žáci, kteří toho většinou v hodinách matematiky udělají daleko méně než ostatní nebo dokonce celou hodinu pasivně sledují bez jakéhokoliv zapojení. Rozdíl mezi dvěma úlohami k bloudění zaznamenali všichni žáci, jeden z nich dokonce znal rozdíl mezi bludištěm a labyrintem, pouze prohodil názvy a myslel, že labyrint má křižovatky a bludiště ne. Dokonce si i vzpomněl, že už někdy slyšel o Minotaurovi a labyrintu, ve kterém byl schován.

Ve chvíli, kdy jsem žákům promítla jednoduché bludiště na interaktivní tabuli (jiná možnost promítání nebyla), chopily se dvě dívky iniciativy a zakreslili na tabuli správnou cestu bludištěm, aniž bych je k tomu vybídla. Podpořily tak mou teorii, že se jim bludiště budou zdát zábavná. Při zaznamenávání bludiště do grafu (viz str. 43) spolupracovalo jen několik jedinců, nejraději by zakreslili pouze správnou cestu bez ostatních uliček, očividně nadšení upadalo, a proto jsem přešla přímo k poslední aktivní úloze (viz obr. 56).

Hledání cesty bludištěm zadaným pomocí výčtu sousedních křižovatek opět přilákalo pozornost některých žáků, na danou úlohu se totiž ptali již v průběhu hodiny. Opět kreslili plánec pouze do té doby, než narazili na správnou cestu, z jejich pohledu nebylo nutné kreslit plánec dál. Někteří dokonce začali bloudit z obou konců, což jim práci opravdu ulehčilo.

Výsledky dotazníků

Ačkoliv má sedmá třída standardně 14 žáků, první části experimentu se zúčastnilo pouze 9 z nich, ostatní danou hodinu z různých důvodů chyběli. Druhé části se zúčastnilo 12 žáků. 5 žáků se zúčastnilo pouze jedné z těchto hodin a 8 žáků se zúčastnilo obou hodin. Těchto 8 žáků tedy dvakrát odpovědělo na první dvě otázky.

1. Baví tě matematika?
2. Jde ti matematika?

Je zajímavé, že na obě otázky odpověděli stejně v obou dotaznících pouze 4 žáci. 2 ze žáků odpověděli jinak na obě otázky, z toho 1 dokonce odpověděl jednou, že ho matematika velmi nebaví, a podruhé, že ho velmi baví. Usuzuji z toho, že při vyplňování dotazníků také zapracovala momentální nálada a nejistota v rozhodování se jednou přiklonila k lepší straně a jednou k té horší. Výsledky z jednotlivých hodin lze nalézt v následujících tabulkách.

Baví tě matematika?	1. hodina	2. hodina
velmi	2	3
docela	4	5
jak kdy	2	2
moc ne	0	1
vůbec ne	1	1

Tabulka 2: Četnost odpovědí na otázku č. 1

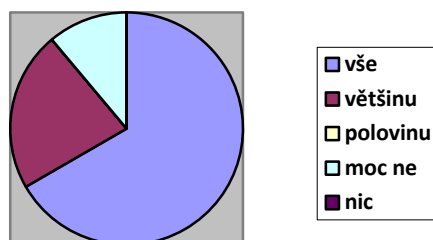
Jde ti matematika?	1. hodina	2. hodina
velmi	6	4
docela	2	2
jak kdy	0	3
moc ne	0	3
vůbec ne	1	0

Tabulka 3: Četnost odpovědí na otázku č. 2

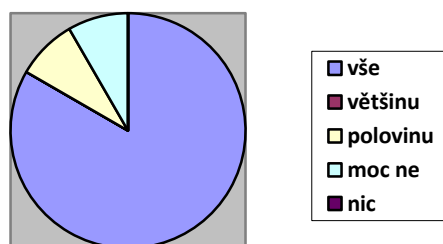
Na otázku, zda je bavila první hodina, odpovědělo 5 žáků, že je velmi bavila, 3 žáci, že je docela bavila. Pouze 1 žák uvedl, že ho moc nebavila, tvářil se, že jde o příliš jednoduché věci. Celkově neměl moc dobrou náladu, neboť to byl onen žák, který zaškrtl, že ho matematika vůbec nebaví, a druhý den naopak, že ho velmi baví. O druhé hodině uvedlo 8 žáků, že je probíraná látka velmi bavila, 3 žáky docela bavila a pouze 1 se vyjádřil neutrálně.

První hodinu si 6 žáků myslelo, že vše pochopilo, 2 žáci usoudili, že pochopili většinu, ale do kolonky, co nepochopili, nenapsali nic. Pouze jedna žákyně připustila, že látku moc nepochopila, nejspíš to však bylo jejím nezájmem o hodinu, zajímavější pro ni byly

její kamarádky z jiné třídy, které byly na tuto hodinu do třídy přiřazeny. O hodině „bludiště“ uvedlo 10 žáků, že všechnu látku pochopili, pouze 1, že pochopil přibližně polovinu, a 1, že látku moc nepochopil; ale oba posledně jmenovaní žáci patří mezi žáky, kterým matematika činí potíže i během roku. Považuji u nich za úspěch, že alespoň občas projeví zájem a dokonce i viditelnou aktivitu, což se u nich moc často nevidí.



Obrázek 69: Pochopili jste vše? (7. třída, Domečky)



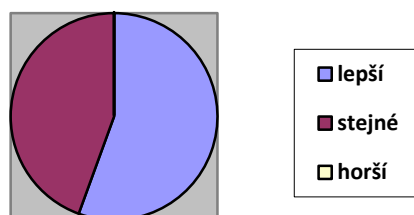
Obrázek 70: Pochopili jste vše? (7. třída, Bludiště)

Na otázku, co je z kapitoly kreslení domečku jedním tahem bavilo nejvíc, odpověděli 2 žáci, že je bavilo vše, 2 uvedli kreslení domečku na začátku, 1 odpověď zněla: „jiný pohled na matematiku“ a jedna „spolupráce a názorné ukázky na tabuli“. 2 žáci na otázku neodpověděli. Odpovídání na stejnou otázku u kapitoly „Bludiště“ bylo nejspíše negativně ovlivněno tím, že se již blížil konec hodiny a vyučování vůbec. Většina žáků kolonku nevyplnila, 2 uvedli, že se jim líbila celá hodina, 1 si oblíbil řešení bludiště zadané písmeny a 1 kladně ohodnotil celkový nápad na tuto práci.

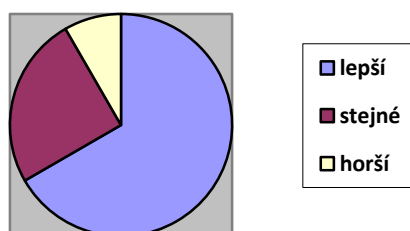
5 žáků ohodnotilo hodinu s domečky jedním tahem lépe než běžnou hodinu matematiky. 8 žáků zhodnotilo i hodinu s bludišti lépe než ostatní hodiny matematiky. Stejně ohodnotili hodinu s domečky 4 žáci a hodinu s bludišti 3 žáci. Domečky

neohodnotil nikdo hůře než obyčejnou hodinu matematiky a bludiště pouze 1. Opět jde o již dříve zmíněného žáka s velkými výkyvy při vyhodnocování dotazníků.

Následující grafy zobrazují, jak žáci hodnotí dané hodiny oproti běžné hodině matematiky.



Obrázek 71: Hodnocení hodiny z teorie grafů oproti běžné hodině matematiky (7. třída, Domečky)



Obrázek 72: Hodnocení hodiny z teorie grafů oproti běžné hodině matematiky (7. třída, Bludiště)

4.7.4 6. třídy

Průběh hodiny

Domeček, který lze nakreslit jedním tahem, v šestých třídách poznali a opět s velkým nadšením přijali úkol nakreslit si tento domeček jedním tahem do sešitu. Objevili se tu často problémy, že svůj postup nebyli schopni podruhé zopakovat, ale o to více se dále snažili uspět. Slovní popisování žákům dělalo potíže, i když si nakonec poradili a popis nějakým svým nematematickým způsobem zvládli. To však bylo pozorovatelné i v běžných hodinách, otázky typu: „Nemůžu to radši ukázat na tabuli, já to neumím říct?“ se v těchto třídách objevovaly běžně. Zápisy *ABCADECDB* žákům nevyhovovaly, pouze byli schopni využít písmenka při slovním popisu. Např. „Začnu v Áčku, potom jdu do Béčka,...“.

Při rozdělení podle počátečního bodu se v těchto třídách našli žáci, kteří prý začali v bodě *C*, *D* nebo *E*, sami ovšem u tabule zjistili svůj omyl. Stejně jako v sedmé třídě nechtěli opustit myšlenku nakreslit domeček se začátkem v bodě *C*, *D* nebo *E*. Nechala jsem žákům nějakou dobu na další zkoušení a oni nechtěli přestat a stále hledali další možnosti a přicházeli s dalšími a dalšími pokusy, které však u tabule ztroskotaly. Zdá se, že úlohy, u kterých nikdo nemůže nalézt řešení, mají pro žáky své kouzlo, neboť se stále snaží být v něčem první.

V obou třídách bylo nutné využít návodných úloh (viz obr. 39 a obr. 40), sami by nepřišli na to, že do bodů *A* a *B* vede lichý počet cest. Ovšem návodné úlohy a několik vhodných otázek z mé strany (např. Kolik cest vedlo do bodu *A*? Kolik do bodu *B*? Z kterého bodu jste začali kreslit domeček se třemi střechami? Kolik do tohoto bodu vede cest? Co mají tato čísla společného? ...) je k tomuto poznání dovedlo. Pro jednu žákyni se muselo zopakovat, která jsou lichá a která sudá čísla. Řešení počtu tzv. lichých bodů zabralo v těchto třídách více času než v sedmé třídě či na gymnáziu, ale nakonec jsme se k výsledku přece jen dostali.

Formulace pravidla byla v obou třídách spíše práce pro mne. Ačkoliv se zdálo, že pravidlo všichni pochopili, při řešení, zda obrázky lze či nelze nakreslit, se objevilo několik jedinců, kteří je opravdu zkoušeli kreslit. Zdálo se, že je to zkoušení baví a o nějaké zjednodušení jim nejde. Někteří žáci špatně určili u různých obrázků, že nakreslit je jedním tahem není možné, ačkoliv to možné bylo. Usoudili tak pouze z toho důvodu, že oni sami takový tah nezvládli najít, přestože existoval. Po mém upozornění na tyto chyby pochopili, že pomocí pravidla bude výsledek jistější.

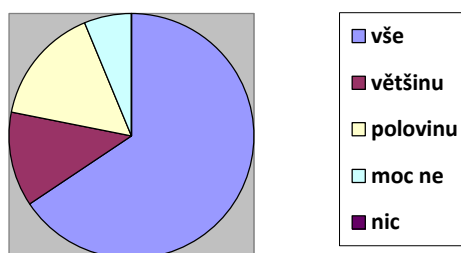
Jedná se o dvě odlišné třídy, přesto však hodina probíhala velmi podobně, až na to, že 6. A byla o něco pomalejší. Možná to způsobil větší počet žáků ve třídě, na tuto hodinu jich bylo 18 a v 6. B pouze 15. Není to sice veliký rozdíl, avšak připočteme-li živost některých žáků z 6. A, pochopíme vzniklý časový rozdíl.

Výsledky dotazníků

Na otázku, zda je matematika baví, odpovědělo 10 žáků, že je velmi baví, 12 žáků matematika docela baví. 5 žáků baví matematika pouze někdy a 5 žáků dokonce přiznalo, že je matematika velmi nebaví. Je tedy vidět, že nejde o žádné matematické třídy, přesto je matematika pro mnohé zábavou. K otázce, zda jim matematika jde, se vyjádřilo pouze 7 žáků, že jim velmi jde. „Docela jde“ odpovědělo 10 žáků a „někdy

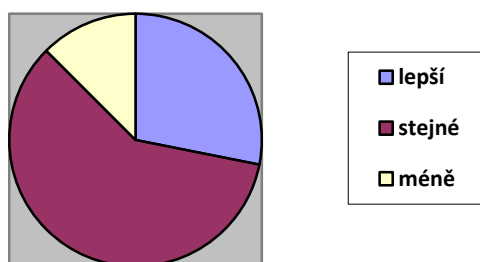
jde“ zaškrtno dokonce 12 žáků. 2 žáci uvedli, že jim matematika moc nejde a 1 dokonce přiznal, že mu matematika nejde vůbec.

12 žáků přiznalo, že je hodina s kreslením domečků velmi bavila, a dalších 13 jich uvedlo, že je docela bavila, 1 se vyjádřil neutrálně a 3 uvedli, že je to moc nebavilo, a další 3 to nebavilo vůbec. Na otázku, zda vše pochopili, dokonce 21 žáků odpovědělo „ano“. 4 žáci pochopili většinu, 5 zhruba polovinu a 2 si myslí, že to moc nepochopili; jde o žáky, kteří i v běžné hodině mají slabší výsledky.



Obrázek 73: Pochopili jste vše? (6. třída, Domečky)

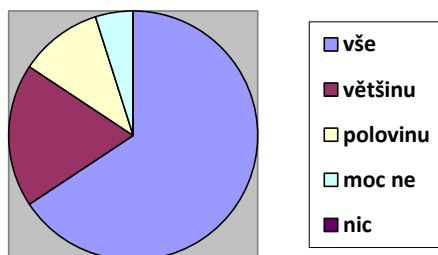
Otázkou zůstává, jestli žáky látka bavila více než matematika v ostatních hodinách. 9 žáků ohodnotilo danou látku lépe, 19 stejně a pouze 4 dali běžné látce z hodin matematiky lepší hodnocení.



Obrázek 74: Hodnocení hodiny z teorie grafů oproti běžné hodině matematiky (6. třída, Domečky)

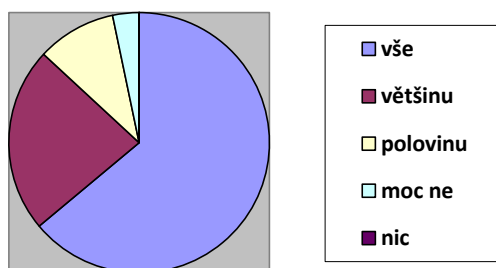
4.8 Celkové hodnocení

Hodiny s kreslením domečku jedním tahem se zúčastnilo 90 žáků, 49 z víceletého gymnázia a 41 ze základní školy. Celkem 56 žáků z 90 (62 %) uvedlo, že pochopili vše. Dalších 20 žáků pochopilo většinu, 10 přibližně polovinu a 4 si myslí, že toho moc nepochopili. Zdá se tedy, že 76 žáků (85 %) bylo schopno pochopit alespoň většinu z této části teorie grafů.



Obrázek 75: Pochopili jste vše? (Domečky)

Části zabývající se bludištěm se zúčastnilo 61 žáků, z toho 49 žáků gymnázia a 12 žáků základní školy. Celkem 39 z 61 žáků (64 %) uvedlo, že pochopili vše. Dalších 14 žáků pochopilo většinu, 6 polovinu a pouze 2 si myslí, že toho moc nepochopili. 53 žáků (87 %) se domnívá, že pochopili alespoň většinu z této části teorie grafů.



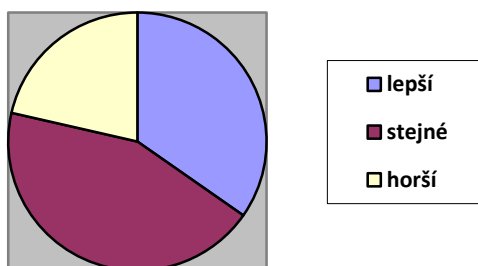
Obrázek 76: Pochopili jste vše? (Bludiště)

Zdá se tedy, že v obou případech více než 60 % žáků mělo pocit, že pochopilo vše, v případě základní školy takový pocit mělo na hodině s domečky dokonce 66 % žáků a na hodině s bludišti 83 % (u druhé hodiny s bludišti se však jednalo o velmi malý vzorek žáků – pouze 12). Přes 80 % žáků tvrdí, že pochopilo alespoň většinu, v případě základní školy se při hodině s domečky takto ohodnotilo až 80 % žáků. Můžeme tedy přijmout první část hypotézy, že žáci gymnázia i základní školy jsou schopni pochopit

část teorie grafů. Zbývá určit, zda žáky teorie grafů baví více než běžná hodina matematiky.

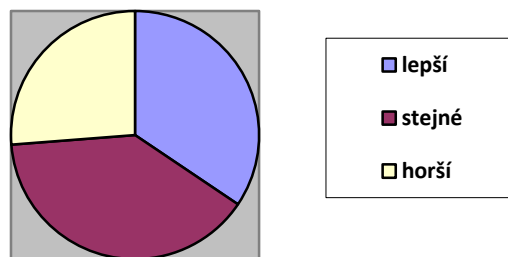
Na otázku, zda žáky bavilo téma kreslení jedním tahem více než ostatní hodiny matematiky, odpovědělo 27 žáků, že je daná hodina bavila více. 44 žáků přiřadilo dané hodině stejné hodnocení jako běžným hodinám matematiky, 18 z nich dokonce zaškrtnulo u otázky, jestli je baví matematika, nejvyšší možné hodnocení. Potom samozřejmě nemohli hodinu s domečky ohodnotit lépe, ale pouze stejně. Můžeme tedy říci, že 45 žáků (50 %) přisoudilo hodině zabývající se teorií grafů lepší hodnocení (pokud to bylo možné) než běžné hodině matematiky. 71 žáků (78 %) ohodnotilo danou hodinu alespoň stejně.

Pouze 19 žáků (21 %) ohodnotilo hodinu hůře než ostatní hodiny matematiky. Nejvíce takových žáků bylo ze tříd gymnázia, ti k tomu však mohli mít různé důvody, například: vyhovuje jim více jejich učitel, jeho způsob vedení výuky, jsou na něj zvyklí, nebo porovnávali nejen s matematikou, se kterou se setkají v hodinách matematiky, ale například s různými logickými hrami a dalšími činnostmi z kurzů, které se třeba ani matematiky netýkají.



Obrázek 77: Hodnocení hodiny z teorie grafů oproti běžné hodině matematiky (Domečky)

21 z 61 žáků (34 %) ohodnotilo bludiště lépe než ostatní hodiny matematiky. Dalších 24 žáků ohodnotilo danou hodinu stejně jako ostatní hodiny. 9 z těchto 24 žáků však hodinu lépe už ani hodnotit nemohli, neboť přiřadili ostatním hodinám matematiky nejlepší možný stupeň hodnocení. Můžeme tedy tvrdit, že 30 žáků (49 %) přisoudilo hodině s bludišti lepší hodnocení (pokud to bylo možné) než běžné hodině matematiky. 45 žáků (74 %) ohodnotilo danou hodinu alespoň stejným hodnocení jako ostatní hodiny. Hůře hodinu s bludišti ohodnotilo 16 žáků, z toho byl pouze 1 žákem základní školy, opět tedy musíme uvažovat vnější vliv kurzu či učitelů na žáky gymnázia.



Obrázek 78: Hodnocení hodiny z teorie grafů oproti běžné hodině matematiky (Bludiště)

Každopádně žáci, kteří ohodnotili hodinu teorie grafů lépe než ostatní hodiny, a žáci, kteří ohodnotili danou hodinu i ostatní hodiny nejvyšším stupněm, tvoří v obou případech přibližně 50 % všech žáků. U žáků základní školy jde v případě domečků o 61 % žáků (v případě bludišť dokonce o 83 % žáků, musíme si však uvědomit, že jde o vzorek pouze 12 žáků). Vezmeme-li v potaz i žáky hodnotící všechny hodiny stejně, získáme skoro 80 % žáků a v případě základní školy dokonce 90 % žáků.

Odvážím se tedy tvrdit, že se podařilo potvrdit hypotézu, že žáky vybraná část teorie grafů baví více než látka běžně probíraná v hodinách matematiky. Všimněte si, že výsledky experimentu vycházejí dokonce lépe na vzorku žáků ze základní školy. Proto lze zařadit teorii grafů do výuky nejen pro nadanější děti (například na gymnáziu), ale určitě i na základní školu bez jakéhokoliv zaměření.

5 Seznam použité literatury:

- 1) BUDD, C.J.; SANGWIN C.J. Maths aMaze. *Plus magazine* [online]. 2001, Issue 14 [cit. 2011-02-03]. Dostupné na: <<http://plus.maths.org/content/maths-amazes>>.
- 2) GAVORA, P. 1996. *Výzkumné metody v pedagogice*. Brno: PAIDO, 1996. ISBN 80-85931-15-X.
- 3) JANOVSKEÝ, D. Krétská mytologie a archeologické příběhy. *Kréta* [online]. [cit. 2011-02-03]. Dostupné z: <<http://kreta.rovnou.cz/mytologie-kreta.html>>.
- 4) MATOUŠEK, J.; NEŠETŘIL, J. 1996. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Praha: MATFYZPRESS, 1996. ISBN 80-85863-17-0.
- 5) VEJMOLA, S. 1986. *Konec záhady hlavolamů*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986.

6 Další doporučené publikace:

- 1) BROŽ, J. 2007. *Zebry, zebry, zebříčky*. Praha: SCIENTIA, 2007. ISBN 978-80-86960-25-8.
- 2) BURJAN, V., K. BACHRATÁ a H. BACHRATÝ. 1990. *Odborný program matematických kroužků na druhém stupni základní školy*. Překlad Antonín Vrba. Praha: SPN, 1990. ISBN 80-042-5264-8.
- 3) HEJNÝ a kol. 1998. *Barevná bludiště*. Praha: Pedagogická fakulta UK, 1998.
- 4) NOVÁK, S. 2012. O zebřích. *Metodický portál: Články* [online]. 29. 03. 2012, [cit. 2012-04-01]. Dostupný na WWW: <<http://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/15431/O-ZEBRACH.html>>. ISSN 1802-4785.
- 5) JIROVSKÝ, L. 2010. *Teorie grafů*. Praha, 2010. Diplomová práce (Mgr.). Univerzita Karlova v Praze. Matematicko-fyzikální fakulta. Katedra didaktiky matematiky. Dostupné též na WWW: < <http://teorie-grafu.cz/> >.

7 Seznam převzatých obrázků:

1. Obrázek 2:
BENEŠ, L. Vývojové diagramy - 7. díl. *Programujte.com* [online]. 8. 8. 2011[cit. 2012-04-01]. Dostupné na WWW:
<<http://programujte.com/clanek/2010061000-vyvojove-diagramy-7-dil/>>
2. Obrázek 44:
HORDĚJČUK, V. Teorie grafů. [online]. [cit. 2011-02-03]. Dostupné na WWW: <<http://voho.cz/wiki/teorie-grafu/>>
3. Obrázek 46:
Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2012-02-03]. Dostupné na WWW:
<<http://sv.wikipedia.org/wiki/Labyrint>>
4. Obrázek 47:
Obdélníkové bludiště. In: *Dětský blog* [online]. 1. května 2006 [cit. 2011-02-03]. Dostupné na WWW: <<http://detsky.blog.cz/0605/bludiste>>
5. Obrázek 48:
Minotaurus. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2011-02-03]. Dostupné na WWW:
<<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Minotaurus.gif>>
6. Obrázek 49:
Obdélníkové bludiště. In: *Dětský blog* [online]. 2. června 2009 [cit. 2011-02-03]. Dostupné na WWW: <<http://detsky.blog.cz/0608/obdelnikove-bludiste>>
7. Obrázek 50:
Choises: a Paradigm for Life. *Blogger.com* [online]. [cit. 2011-02-03]. Dostupné na WWW: <<http://paradigm4life.blogspot.com/2012/01/maze.html>>

8 Seznam obrázků:

Obrázek 1: Spojovačka do dětského časopisu	8
Obrázek 2: Vývojový diagram (převzatý obrázek, viz str. 74).....	9
Obrázek 3: Řešení úlohy "Koza, vlk a zelí" znázorněné grafem	10
Obrázek 4: Graf znázorňující řešení výše zadané zebry	11
Obrázek 5: Tabulka - matice sousednosti - další způsob řešení předchozí úlohy	12
Obrázek 6: Ukázka čtyř různých grafů	14
Obrázek 7: Orientovaný graf	14
Obrázek 8: Strom možností výběru dvou vrcholů ze čtyř	15
Obrázek 9: Úplný graf	16
Obrázek 10: Zápis grafu maticí sousednosti a zápis toho samého grafu obrázkem	17
Obrázek 11: Zápis grafu maticí incidence a zápis toho samého grafu obrázkem.....	17
Obrázek 13: Příklad grafu obsahujícího kružnici	18
Obrázek 12: Zápis grafu Laplaceovou maticí a zápis toho samého grafu obrázkem	18
Obrázek 14: Kružnice v grafu může vypadat jako trojúhelník.....	19
Obrázek 15: Ukázka cesty v grafu mezi vrcholy X a Y	19
Obrázek 16: Dva souvislé grafy.....	19
Obrázek 17: Dva nesouvislé grafy.....	20
Obrázek 18: Grafy navzájem izomorfní	20
Obrázek 19: Dva stromy	21
Obrázek 20: Souvislý graf (má vždy jednu komponentu)	21
Obrázek 21: Nesouvislý graf se 2 komponentami	21
Obrázek 22: Nesouvislý graf se třemi komponentami.....	21
Obrázek 23: Ukázka použití algoritmu 1 pro nalezení kostry grafu.....	23
Obrázek 24: Ukázka použití algoritmu 2 pro nalezení kostry grafu.....	24
Obrázek 25: Kostry vzniklé algoritmem 1 a 2	24
Obrázek 26: Graf s ohodnocenými hranami	26
Obrázek 27: Použití Kruskalova (hladového) algoritmu pro nalezení minimální kostry.....	26
Obrázek 28: Použití Jarníkova algoritmu pro nalezení minimální kostry	27
Obrázek 29: Použití Borůvkova algoritmu pro nalezení minimální kostry (má pouze 2 kroky).....	28
Obrázek 30: Minimální kostra	28
Obrázek 31: Graf se dvěma různými minimálními kostrami	28
Obrázek 32: Zadání úlohy Hledání minimální kostry	29
Obrázek 33: Hranu BC přidávat nebudeme, neboť již existuje cesta přes bod A	30
Obrázek 34: Řešení problému Hledání minimální kostry	30
Obrázek 35: Graf, který má u každého vrcholu zapsaný svůj stupeň.....	31
Obrázek 36: Dva neizomorfní grafy mající stejné skóre	31
Obrázek 37: Domeček jedním tahem.....	34
Obrázek 38: Domeček s vrcholy označenými písmeny	34
Obrázek 39: Návodná úloha č. 1	35
Obrázek 40: „Domeček se třemi střechami“ = graf se dvěma vrcholy lichého stupně (oba stupně 5).....	36
Obrázek 41: Vrchol průchozí, začínající a konečný	37
Obrázek 42: Vrchol začínající i konečný.....	37
Obrázek 43: Graf se všemi vrcholy sudými = „domeček a dvě střechy“	38
Obrázek 44: Problém sedmi mostů města Královce (převzatý obrázek, viz str. 74).....	39
Obrázek 45: Úlohy pro žáky	39

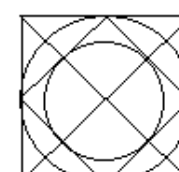
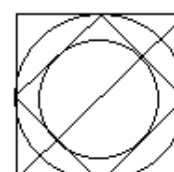
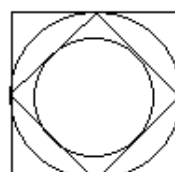
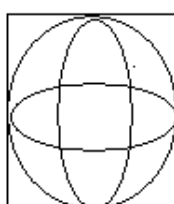
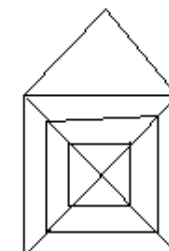
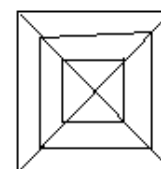
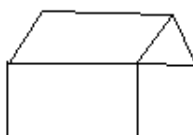
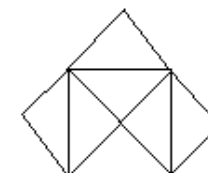
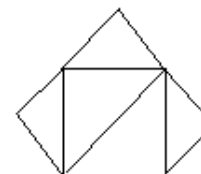
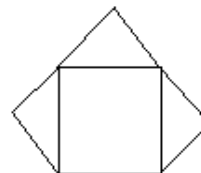
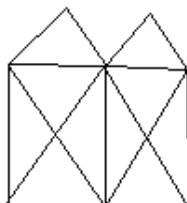
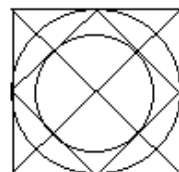
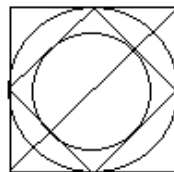
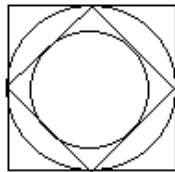
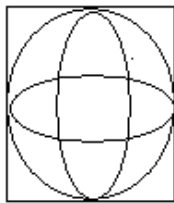
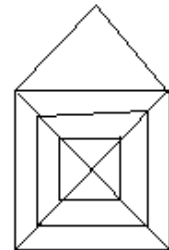
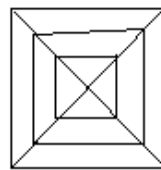
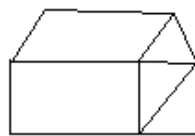
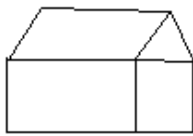
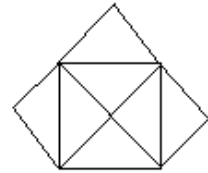
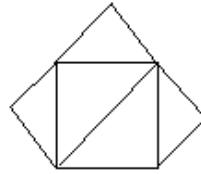
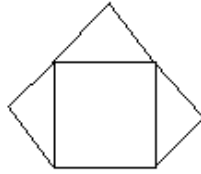
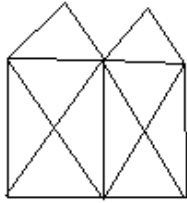
Obrázek 47: Ukázka klasického bludiště (převzatý obrázek, viz str. 74).....	40
Obrázek 46: Ukázka klasického labyrintu (převzatý obrázek viz 74).....	40
Obrázek 48: Krétský labyrint s Minotaurem uprostřed (převzatý obrázek viz str. 74) ..	41
Obrázek 49: Bludiště (převzatý obrázek, viz str. 74)	42
Obrázek 50: Labyrint (převzatý, obrázek viz str. 74).....	42
Obrázek 51: Bludiště	43
Obrázek 52: Bludiště s označenými křižovatkami	44
Obrázek 53: Bludiště znázorněné grafem	44
Obrázek 54: Možné znázornění cesty bludištěm	45
Obrázek 56: Písmenkové bludiště.....	46
Obrázek 55: Cesta bludištěm do slepé uličky	46
Obrázek 57: Předchozí bludiště zapsané grafem	47
Obrázek 58: Ukázka bludiště, kde nefunguje pravidlo pravé ruky.....	49
Obrázek 59: Graf se zdvojenými hranami	49
Obrázek 60: Výběr libovolné cesty na nové křižovatce	50
Obrázek 61: Výběr jiné cesty při návratu na starou křižovatku	50
Obrázek 62: Návrat ze staré křižovatky, pokud již žádná další cesta není	51
Obrázek 63: Navštívení staré křižovatky při prozkoumávání nové cesty	51
Obrázek 64: Dotazník	55
Obrázek 65: Zastoupení jednotlivých tříd ve skupině A	58
Obrázek 66: Zastoupení jednotlivých tříd ve skupině B.....	58
Obrázek 67: Pochopili jste vše? (gymnázium)	62
Obrázek 68: Hodnocení hodiny z teorie grafů oproti běžné hodině matematiky (gymnázium).....	62
Obrázek 69: Pochopili jste vše? (7. třída, Domečky)	66
Obrázek 70: Pochopili jste vše? (7. třída, Bludiště)	66
Obrázek 71: Hodnocení hodiny z teorie grafů oproti běžné hodině matematiky (7. třída, Domečky).....	67
Obrázek 72: Hodnocení hodiny z teorie grafů oproti běžné hodině matematiky (7. třída, Bludiště)	67
Obrázek 73: Pochopili jste vše? (6. třída, Domečky)	69
Obrázek 74: Hodnocení hodiny z teorie grafů oproti běžné hodině matematiky (6. třída, Domečky)	69
Obrázek 75: Pochopili jste vše? (Domečky).....	70
Obrázek 76: Pochopili jste vše? (Bludiště).....	70
Obrázek 77: Hodnocení hodiny z teorie grafů oproti běžné hodině matematiky (Domečky)	71
Obrázek 78: Hodnocení hodiny z teorie grafů oproti běžné hodině matematiky (Bludiště)	72

9 Seznam tabulek:

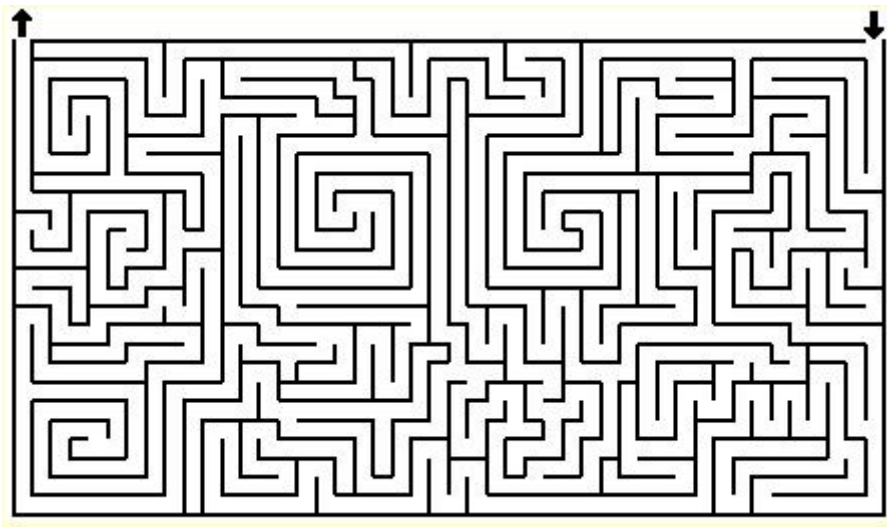
Tabulka 1: Počty žáků z různých tříd ve skupinách	58
Tabulka 2: Četnost odpovědí na otázku č. 1	65
Tabulka 3: Četnost odpovědí na otázku č. 2.....	65

10 Přílohy

10.1 Příloha 1 – Pracovní list 1



10.2 Příloha 2 – Pracovní list 2



A: E, K
B: Ď, Q
C: H, M, X
Č: F, Ě, Y
D: N, Š
Ď: B, R
E: A, H, X
F: Č, G, Y
G: F, O, Ě
H: C, E, M
I: Ň, V, Ž

J: R, Z
K: A, R, U
L: O, Š, Ž
M: C, H, X
N: D, Š
Ň: I, T, V
O: G, L, R
P: S, Ř, W
Q: B, Z
R: Ď, J, K, O
Ř: P, S, W

S: P, Ř, U
Š: D, L, N
T: Ň, V, Ž
Ě: Č, G, Y
U: K, S, W
V: I, Ň, T
W: P, Ř, U
X: C, E, M
Y: Č, F, Ě
Z: J, Q
Ž: I, L, T