Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Eliška Vojtová

Kreditní riziko

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	Mgr. Jiří Herman
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika

Praha 2012

Tímto bych chtěla velmi poděkovat Mgr. Jiřímu Hermanovi za pomoc při zpracování diplomové práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 12.4.2012 Eliška Vojtová

Název práce: Kreditní riziko

Autor: Bc. Eliška Vojtová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Jiří Herman, Česká pojišťovna a.s.

Abstrakt: Diplomová práce se zabývá problematikou kreditního rizika a vybranými metodami jeho výpočtu. Z přístupů měření kreditního rizika se zaměřuje na předpoklady, postupy výpočtu, výsledky i specifika modelů CreditMetrics a CreditRisk$^+$. Model CreditRisk$^+$ určuje rozdělení ztrát portfolia, které jsou zapříčiněny defaulty protistran. Model CreditMetrics, který pomocí simulací Monte Carlo určuje rozdělení budoucích hodnot portfolia, uvažuje jak riziko defaultu, tak i riziko kreditní migrace. Třetím přístupem, který je do práce zahrnut, je Solvency II, Evropskou unií navrhovaný soubor požadavků pro stanovení výše regulatorního kapitálu pro pojišťovny. V praktické části práce jsou všechny přístupy aplikovány na tři modelová portfolia s různou kreditní kvalitou a jejich výstupy, včetně stanovené výše kapitálů na pokrytí neočekávaných ztrát, analyzovány a porovnány.

Klíčová slova: kreditní riziko, CreditMetrics, CreditRisk$^+$, Solvency II

Title: Credit risk

Author: Bc. Eliška Vojtová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Jiří Herman, Česká pojišťovna a.s.

Abstract: This thesis deals with credit risk and selected methods of its evaluation. It is focused on assumptions, calculation methods, results and specifics of the CreditMetrics and the CreditRisk$^+$ models. The CreditRisk$^+$ model analytically determines the portfolio credit losses distribution that is caused by defaults of counterparties. In the CreditMetrics model, the credit migration risk is additionally considered and the future portfolio value distribution is calculated using the Monte Carlo simulation. The third approach covered in this thesis is the Solvency II, the set of requirements proposed by the European Union for determination of regulatory capital for insurance companies. In the practical part the three approaches are applied on a set of three portfolios of different credit quality. Their results, particularly the determined level of capital required to cover the risk of unexpected credit losses, are analyzed and compared.

Keywords: credit risk, CreditMetrics, CreditRisk$^+$, Solvency II

Obsah

Úvod

Výraz riziko, z italského "risico", původně označoval nebezpečí při plavbě, jemuž se posádky musely vyhnout. Od doby, kdy se začal poprvé objevovat, tj. od 17. století, pronikl do všech oborů lidské činnosti i běžné řeči. Pojem riziko v oblasti financí je spojen s nejednoznačností a neurčitostí průběhu určitých procesů a jejich výsledků. Jedním z významných finančních rizik je riziko kreditní, což je riziko ztráty zapříčiněné změnou schopnosti dlužné strany splácet své závazky.

Kreditnímu riziku jsou vystaveny všechny instituce, které mají pohledávky vůči jiným společnostem. Z toho důvodu je kvantifikace tohoto rizika v dnešní době nutná a velice žádaná. V této práci se zabýváme dvěma obecně využitelnými modely, které určují rozdělení budoucích hodnot (resp. ztrát) portfolia vzhledem ke kreditními riziku. Dále se zabýváme i výpočtem, který navrhuje Evropská komise v rámci nové regulace Solvency II. Tyto tři metody pro určení výše kreditního rizika popisujeme a srovnáváme na příkladu tří modelových portfolií o různých kreditních kvalitách. Výsledky porovnáme a zhodnotíme výhody a nevýhody jednotlivých metod.

Z hlediska struktury je diplomová práce rozdělena na teoretickou a praktickou část. První kapitola se věnuje samotnému pojmu riziko, jeho definování a typologii (s důrazem na riziko kreditní). V dalších kapitolách jsou popsány dvě metody výpočtu kreditního rizika - CreditMetrics a CreditRisk$^+$. Zmiňujeme se zde o jejich vstupech i předpokladech a popisujeme postup výpočtu. Následuje kapitola srovnávající tyto dvě metody. Teoretická část je zakončena popisem metody Slovency II. Závěrečná kapitola se zabývá aplikací všech těchto metod a porovnáním jejich výsledků na modelových portfoliích.

Kapitola 1

Rizika

1.1 Definice pojmu riziko

Riziko je historický výraz pocházející údajně ze 17. století, kdy se objevil v souvislosti s lodní plavbou. Výraz "risico" pochází z italštiny a označoval úskalí, kterému se museli plavci vyhnout. Později se tímto slovem vyjadřovalo "vystavení nepříznivým okolnostem." Ve starších encyklopediích najdeme pod heslem riziko vysvětlení, že se jedná o odvahu či nebezpečí, případně že "riskovat" znamená odvážit se něčeho. Teprve v poslední době se objevuje i význam ve smyslu možné ztráty. Podle dnešních výkladů se rizikem obecně rozumí nebezpečí vzniku škody, poškození, ztráty či zničení, případně nezdaru při podnikání. [13],[14]

Neexistuje jedna obecně uznávaná definice, pojem riziko je definován různě:

- pravděpodobnost či možnost vzniku ztráty, obecně nezdaru
- variabilita možných výsledků nebo nejistota jejich dosažení
- odchýlení skutečných a očekávaných výsledků
- pravděpodobnost jakéhokoliv výsledku odlišného od výsledku očekávaného

Ze souboru definic je celkově patrné, že riziko není veličina, která vede k exaktním hodnotám, ale veličina, jejíž hodnota je odhadem, a to odhadem empirickým nebo analytickým. Ve financích je pojem "riziko" užíván v souvislosti s nejednoznačností průběhu určitých skutečných procesů a nejednoznačností jejich výsledků.

S rizikem jsou těsně spjaty dva pojmy: [13],[14]

- Pojem neurčitého výsledku, o němž se implicitně uvažuje ve všech definicích rizika: výsledek musí být nejistý. Máme-li hovořit o riziku, musí existovat alespoň dvě varianty řešení. Víme-li s jistotou, k jak velké ztrátě dojde, nelze hovořit o riziku
- Alespoň jeden z možných výsledků je nežádoucí. V obecném slova smyslu může jít o ztrátu, kdy jistá část majetku jednotlivce je ztracena; může jít o výnos, který je nižší než možný výnos. Například investor, který nevyužije příležitosti, "ztrácí" zisk, kterého mohlo být dosaženo. O investorovi rozhodujícím se mezi dvěma akciemi, můžeme říci, že "tratil", pokud zvolil tu akcii, jejíž hodnota se zvýšila méně než hodnota akcie druhé

1.2 Dělení rizik

Všeobecně se rizika klasifikují podle zdroje, odkud nejistota pochází. Rizika tak lze rozdělit na rizika finanční a nefinanční. [9]

Finanční rizika

- kreditní (úvěrové) riziko – riziko ztráty zapříčiněné změnou schopnosti dlužné strany splácet závazky
- tržní riziko – nejistota plynoucí ze změn tržních cen a jejich dopadu na zisk
- riziko likvidity – riziko, že firma nebude schopna dostát v určitém okamžiku svým závazkům
- operační riziko – riziko lidské chyby nebo selhání systému

Nefinanční rizika

- právní riziko – riziko ztráty zapříčiněné právní nevymahatelností nebo špatnou interpretací práva
- daňové riziko – riziko nepříznivých změn daňových povinností
- reputační riziko – potenciální ztráta vzniklá poškozením dobrého jména společnosti
- politické riziko – riziko ztráty v důsledku změny politického prostředí
- riziko modelu – potenciální ztráta z důvodu nesprávného použití modelu

V této práci se budeme zabývat pouze rizikem kreditním.

1.3 Kreditní riziko

Kreditní riziko je riziko ztráty, které vyplývá z možnosti selhání subjektu (dlužníka), resp. protistrany tím, že nedostojí svým závazkům podle podmínek kontraktu. Míní se tím riziko ztráty kapitálu v důsledku: [5]

- Insolvence subjektu nebo protistrany.
  - Přímé úvěrové riziko – riziko ztráty u bilančních a mimobilančních položek, např. depozit, poskytnutých úvěrů, dluhopisů, směnek, derivátů apod.
  - Vypořádací riziko (settlement risk) - riziko ze selhání protistrany při vypořádání transakcí.
- Změny kreditní kvality subjektu (ratingu) a následné změny kreditní prémie pro jím emitované instrumenty. Důsledkem je pokles reálné hodnoty instrumentu.

Klíčovým aspektem kreditního rizika je posouzení schopnosti protistrany dostát svým závazkům, tzv. úvěrové posouzení. Tuto schopnost mohou subjekty posuzovat vlastním interním hodnotícím modelem, často však tento úkol svěřují také specializovaným ratingovým agenturám (např. Moody's, Standard&Poor's). Důležitou roli při posuzování tohoto rizika hraje nalezení všech podstatných rizikových faktorů, kterým se přiřazují váhy podle míry důležitosti těchto faktorů.

1.3.1 Dělení kreditního rizika

Existují dva hlavní typy kreditního rizika: [4]

- riziko kreditního spreadu (neboli úvěrového rozpětí)
- riziko defaultu (neboli selhání protistrany)

Riziko kreditního spreadu se projevuje u portfolií, jejichž hodnotu ovlivňují pozorované změny v úvěrovém rozpětí. Kreditní spread je v podstatě kompenzace za riziko, neboli navýšení výnosu požadované trhem za podstoupení vyššího rizika, takže riziko kreditního spreadu spočívá ve ztrátě způsobené změnou výše této kompenzace na trhu. Např. při snížení ratingu protistrany se instrument stává méně výhodný, protože podstupujeme vyšší riziko než je nám úvěrovým rozpětím kompenzováno.

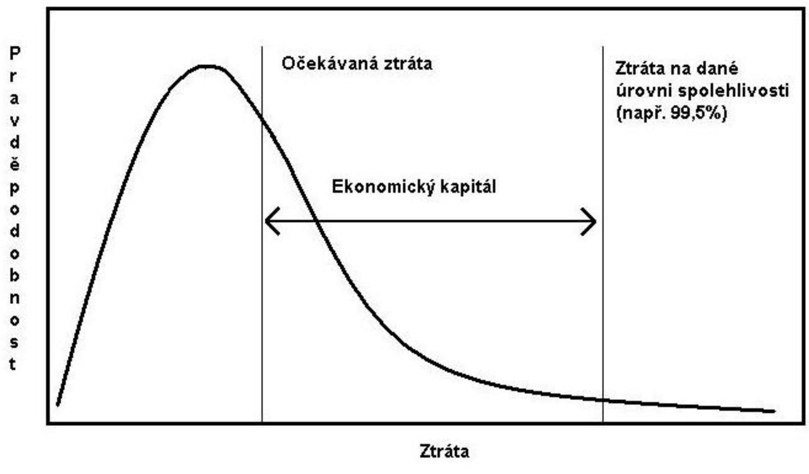
Každé kreditní portfolio podstupuje riziko defaultu, neboli riziko, že protistrana nebude schopna plnit své závazky. V případě selhání dlužníka se věřiteli z dlužné částky obvykle podaří získat pouze poměr ve výši tzv. recovery rate (míry návratnosti), tj. určitý podíl, který věřitel dostane při likvidaci či restrukturalizaci společnosti v úpadku.

Modely, které se zabývají pouze rizikem defaultu se nazývají "Default mode". Modelům, které se zabývají oběma těmito riziky, se říká "Mark-to-market". V této práci se budeme podrobněji zabývat modelem CreditMetrics, což je "Mark-to-market" portfoliový model, a dále CreditRisk$^+$, což je model typu "Default mode".

1.3.2 Ekonomický a regulatorní kapitál

Ekonomický kapitál představuje odhad o výši kapitálu, který je nutno udržovat pro případ neočekávaných ztrát v daném časovém horizontu na dané úrovni spolehlivosti. Výše regulatorního kapitálu je určována příslušnými regulátory na takové úrovni, aby byla udržena stabilita sektoru jako celku. Potenciální konvergence regulatorního kapitálu směrem k ekonomickému je postavena na implicitním předpokladu, že odhady ekonomického kapitálu jsou dostatečně důvěryhodné a nevedou ve svých důsledcích ke snížení celkové stability systému. [8]

Výstup z modelů CreditMetrics i CreditRisk$^+$ může být použit k určení výše ekonomického kapitálu, který je potřeba na pokrytí neočekávaných ztrát.



Obrázek 1.1: Ekonomický kapitál [4]

Pro výpočet regulatorního kapitálu zde používáme přístup Solvency II - legislativní program Evropské unie, který představuje nový harmonizovaný regulatorní systém řízení evropských pojišťoven. Tato legislativa má nahradit 14 existujících pojistných nařízení Evropské unie.

Na obrázku (1.1) vidíme rozdělení hustoty ztrát na tři části, kdy každá z nich je kontrolována odlišným způsobem, viz. tabulka (1.1).

Část rozdělení ztrát	**Kontrolní mechanismus**
Do očekávané ztráty	Opravné položky
Očekávaná ztráta až ztráta na dané hladině spolehlivosti	Ekonomický kapitál
Ztráta větší než ztráta na dané hladině spolehlivosti	Kvantifikováno pomocí analýzy scénářů a kontrolováno limity koncentrace

Tabulka 1.1: Kontrolní mechanismy kreditních rizik [4]

Základem efektivního řízení rizik je měření nejistoty nebo rozptylu ztrát a relativní pravděpodobnost možných hodnot neočekávaných ztrát v portfoliu. Ekonomický kapitál udává stupeň podstupovaného rizika, které měří na bázi portfolia a bere v úvahu diverzifikaci i koncentraci.

1.3.3 Portfoliový přístup k řízení kreditního rizika

Kreditní riziko se v devadesátých letech stalo pravděpodobně hlavní výzvou řízení rizik. Společnosti přijímají stále větší množství kreditního rizika a s narůstajícím rizikem se zvyšuje i potřeba přesnějších technik k jeho měření. [7]

Jedním z důvodů portfoliového přístupu k řízení kreditního rizika je možnost systematicky uchopovat koncentrační riziko. Koncentrační riziko poukazuje na riziko vycházející z rostoucího počtu aktiv vázaných na jednoho dlužníka či skupiny dlužníků, kteří mají mezi sebou vzájemný vztah (např. odvětví, region,...), neboli vzniká přítomností většího počtu dlužníků v portfoliu, jejichž jmění je ovlivňováno společným faktorem. Za účelem kvantifikace tohoto rizika je využit koncept systematického a specifického faktoru. Systematický faktor vyjadřuje vliv vnějších faktorů, které mají dopad na změny ve jmění dlužníků. Specifický faktor je jedinečný pro každého dlužníka. Systematický faktor ovlivňuje riziko extrémních ztrát, zatímco diverzifikace z velké části eliminuje vliv specifického faktoru.

Předpokládáme, že specifické faktory všech dlužníků jsou nezávislé na všech systematických faktorech a zároveň jsou i nezávislé vzájemně mezi sebou. V této práci dále předpokládáme, že každá společnost je ovlivňována pouze jedním systematickým faktorem.

V současnosti je hlavním přístupem pro regulaci tohoto rizika systém limitů. Limity se stanovují např. na velikost expozice jednotlivých protistran, ratingových kategorií, zemí i průmyslů, ale i na maximální dobu do splatnosti. Díky těmto limitům získáme přiměřeně dobře diverzifikované portfolio, avšak neposkytují možnost měření diverzifikace. K tomu využíváme modelů, jako jsou modely CreditMetrics i CreditRisk$^+$.

1.3.4 Volba časového horizontu

Důležitým rozhodnutím, které musí být učiněno při modelování kreditního rizika, je volba časového horizontu, neboli den, ke kterému počítáme výši kreditního rizika. Volba časového horizontu je v kompetenci jednotlivých společností, obecně by tato doba neměla být kratší než časový rámec, za který mohou být přijata opatření na snížení rizik. Porovnávat lze vždy jen rizika počítaná na stejném časovém horizontu. Nejčastěji se používají tyto časové horizonty: [4]

- konstantní časový horizont (např. jeden rok)
- interval do splatnosti instrumentu

Výhodou konstantního časového horizontu je ohodnocení rizikovosti všech aktiv k jednomu dni. Často je volen jednoletý časový horizont, protože opatření na zmírnění rizik se dají přijmout v období jednoho roku, v této době může být také doplněn kapitál, je-li jeho výše narušena kreditními ztrátami, a navíc jeden rok je klasické účetní období. Pro všechny tyto důvody se roční horizont používá pro výpočet ekonomického kapitálu.

Naopak časový horizont daný dobou do splatnosti instrumentu zohledňuje celkovou strukturu defaultních měr v průběhu "života" daného aktiva. Takový pohled na portfolio umožňuje manažerům porovnat aktiva různých splatností a kreditních kvalit a je vhodným prostředkem doplňujícím konstantní horizont, pro řízení portfolia.

Cílem práce je určit hodnotu ekonomického kapitálu, proto volíme jednoletý časový horizont. Stejný časový horizont používá i Solvency II pro výpočet solventnostního kapitálového požadavku, proto budeme moci výsledné výše kapitálů porovnávat.

Kapitola 2

CreditMetrics

CreditMetrics je nástroj k měření rizika portfolia, který promítá změny v dlužníkově kreditní kvalitě do změn ve výši možných ztrát. Kromě možnosti defaultu (selhání protistrany) jsou brány v úvahu i změny v ratingu dlužníka a jejich vliv na hodnotu portfolia. Ohodnocuje tedy nejen riziko defaultu, ale i riziko kreditního spreadu, neboli je to model typu Mark-to-market. CreditMetrics uvažuje korelace mezi změnami v hodnotách firem jednotlivých dlužníků, a tak se zde projevují výhody z diverzifikace či naopak nevýhody přílišné koncentrace některých rizikových faktorů v portfoliu.

Model CreditMetrics lze řešit analytickým i simulačním přístupem. Analytický přístup je však použitelný jen pro případy s malým množstvím instrumentů v portfoliu. Proto se v této práci zabýváme pouze metodou simulační, která je známá pod názvem Monte Carlo. Nevýhodou simulační metody je náhodný šum, tedy chyby ve výpočtu rizika, ale ten lze minimalizovat větším počtem simulací. Naopak výhodou této metody je jednodušší získání většího množství statistik.

Základními předpoklady této metody jsou: [7]

- správně přidělený rating pro každý instrument dle jeho emitenta
- subjekty se stejným ratingem mají shodné pravděpodobnosti přechodu mezi ratingy i pravděpodobnosti defaultu
- hodnota instrumentu se mění v závislosti na hodnotě ratingu emitenta

Ratingovou kategorií zde rozumíme jakoukoli skupinu společností se shodnou kreditní kvalitou.

2.1 Výpočet kreditního rizika

Pro výpočet kreditního rizika metodou CreditMetrics potřebujeme znát:

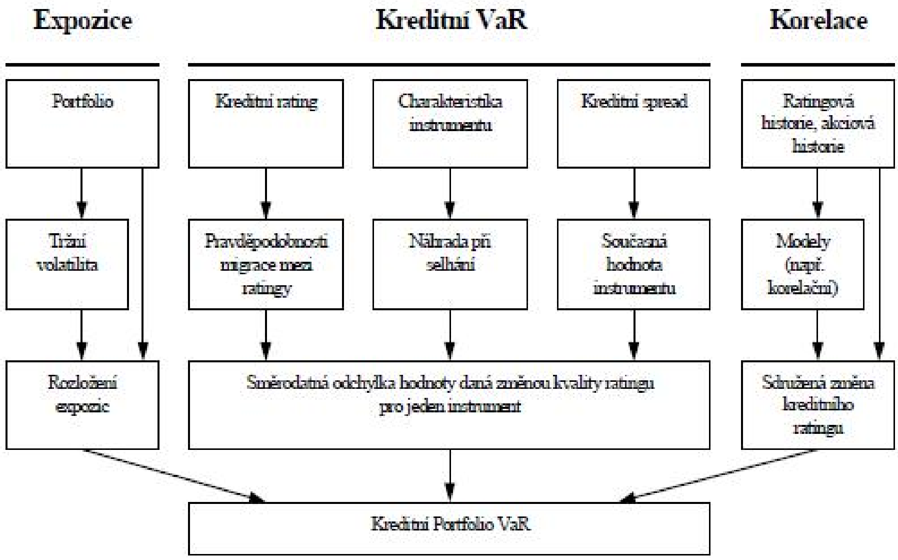
- informace o finančních tocích instrumentů (tj. cashflows, data splatností, aktuální ratingy a seniority - pořadí, v jakém jsou věřitelé uspokojeni v případě defaultu)
- bezrizikové úrokové míry
- výše kreditních spreadů (tj. úvěrová rozpětí, která udávají, jaký je rozdíl mezi bezrizikovou výnosovou křivkou a výnosovou křivkou konkrétního instrumentu; v této práci považujeme instrumenty v rámci daného ratingu za stejně rizikové)
- hodnoty recovery rates (měr návratnosti, tj. informace o procentuální návratnosti hodnoty investice v případě dlužníkovy neschopnosti splácet)
- počet sektorů a korelace mezi jejich výnosy či výnosovými indexy
- váhy pro každého dlužníka, které udávají, nakolik je daný dlužník ovlivňován jednotlivými sektory
- váhu specifického faktoru pro každého dlužníka
- pravděpodobnosti přechodu mezi všemi ratingovými třídami pro daný časový horizont (v této práci uvažujeme časový horizont roven jednomu roku)

Pravděpodobnosti přechodu samozřejmě musí korespondovat s používanými ratingovými kategoriemi.

Jak již bylo zmíněno výše, v této práci se zaměřujeme pouze na řešení pomocí simulační metody Monte Carlo. Tu lze rozdělit do tří základních kroků: [7]

- generování scénářů – každý scénář odpovídá možnému budoucímu ratingu dlužníků v portfoliu na konci časového horizontu (v našem případě tedy 1 rok)
- ohodnocení portfolia – pro každý scénář oceníme portfolio dle nového ratingu, a tak získáme velké množství možných budoucích hodnot portfolia
- vyhodnocení výsledků – z výsledných hodnot portfolia odhadujeme jejich rozdělení a můžeme odhadovat jakoukoli zvolenou popisnou statistiku

Nyní se budeme postupně zabývat jednotlivými kroky.



Obrázek 2.1: Schéma modelu CreditMetrics [7]

2.2 Generování scénářů

V této části představíme model, který spojuje změny v hodnotě firmy dlužníka se změnami v jeho kreditní kvalitě a defaulty.

Nejprve určíme hranice přechodu mezi ratingy. Předpokládáme, že rating společnosti se odvíjí od hodnoty této společnosti a že změny v hodnotě firmy mají normované normální rozdělení. Vycházíme tak z předpokladu, že hodnota společnosti v daném období přímo ovlivňuje její schopnost plnit závazky. Z toho plyne, že existují mezní hodnoty firmy, jejichž překročení vede ke změně jejího ratingu. Musí tak existovat mezní výše změn v hodnotě firmy, které označíme $Z_{Def}, Z_{CCC}, Z_B, Z_{BB}$, atd. tak, že pokud změna v hodnotě firmy bude menší než Z_{Def}, firma bude v defaultu, bude-li mezi hodnotami Z_{Def} a Z_{CCC}, firma bude mít rating CCC, atd.. Povšimněme si, že při tomto definování hranic přechodu neexistuje Z_{AAA}, protože všechny změny větší než Z_{AA} již přiřazují firmě rating AAA. [7]

Z předpokladu, že změny v hodnotě firmy mají normované normální rozdělení, lze jednoduše získat hranice přechodu mezi ratingy, máme-li pravděpodobnosti těchto přechodů, což předpokládáme. Určíme kumulované pravděpodobnosti přechodu, a to tak, že k pravděpodobnosti defaultu postupně načítáme pravděpodobnosti přechodů do lepších ratingů, a vypočteme kvantily normovaného normálního rozdělení pro tyto pravděpodobnosti. Tím dostaneme mezní výše změn v hodnotě společnosti, které, budou-li překročeny, zajišťují firmě vyšší rating.

Máme-li určeny hranice přechodu, můžeme pokračovat generováním náhodných čísel. Tato čísla mají reprezentovat změny v hodnotě jednotlivých dlužných firem, proto musí mít normované normální rozdělení a počet hodnot v každé simulaci musí odpovídat počtu dlužníků.

Víme, že mezi jednotlivými společnostmi jsou dané určité závislosti, a je zřejmé, že tyto závislosti musí platit i mezi změnami v jejich hodnotách, proto je nyní třeba do nich tyto korelace promítnout. Potřebujeme tedy určit jejich výši, neboli chceme najít korelační matici. Z důvodu nedostatku historických dat, a tudíž nemožnosti přímého odvození těchto korelací, použijeme k jejich modelování nepřímý přístup.

Jak již víme z kapitoly č. 1, každá společnost je ovlivňována systematickým a specifickým faktorem. Zde pro jednoduchost předpokládáme, že na každou společnost má vliv pouze jeden systematický faktor. Znalost sektoru, který hodnotu společnosti ovlivňuje, i míru jeho vlivu na tuto společnost máme, neboť je to jeden z předpokládaných vstupů do modelu. Známe tedy váhu vlivu výnosů určitého sektoru na výši hodnoty firmy (ozn. w_1), která je rovna váze systematického faktoru na danou společnost. Víme také, že celková volatilita musí být rovna 1, protože předpokládáme standardizované změny. Váhu vlivu specifického faktoru (ozn. w_2) dopočítáme dle vzorce [7]

$$w_2 = \sqrt{1 - w_1^2}. \tag{2.1}$$

Tímto způsobem určíme váhy všech dlužníků. Matice vah W bude mít velikost $(k \times n)$, kde $k = m + n$ a m je počet sektorů a n je počet dlužníků. Tedy prvních m řádků odpovídá vahám sektorů a zbylé řádky odpovídají vahám specifického faktoru. Neboli vahám každého dlužníka odpovídá jeden sloupec matice, ve kterém je váha ovlivňujícího sektoru v řádku tohoto sektoru a váha jeho specifického faktoru v řádku, který odpovídá danému dlužníkovi, zbytek sloupce je vyplněn nulami.

Nyní vytvoříme pomocnou matici C o velikosti $(k \times k)$, kde opět $k = m + n$. Matice C se v podstatě skládá ze dvou matic a je doplněna nulami. Těmito dvěma maticemi je korelační matice výnosových indexů jednotlivých sektorů $(m \times m)$, která je v levé horní části matice C, a jednotková matice $(n \times n)$, kterou umístíme do pravého dolního rohu matice C. Hodnoty korelací výnosových indexů jednotlivých sektorů určíme z historických dat. Jednotková matice vyjadřuje vztah specifických faktorů jednotlivých dlužníků, neboli je z ní patrné, že jednotlivé specifické faktory jsou mezi sebou nezávislé. Tyto dvě matice jsou doplněny nulovými maticemi $(m \times k)$ v pravé horní části a $(k \times m)$ v levé dolní části, které vyjadřují, že mezi specifickými a systematickými faktory neexistují žádné vazby.

Výslednou matici korelací R $(n \times n)$ pro dané portfolio dostaneme pronásobením výše zmíněných matic

$$R = W'CW. \tag{2.2}$$

Nyní, když máme korelační matici, musíme upravit nezávislé náhodné změny v hodnotách společností tak, abychom zohlednili jejich vzájemné korelace. K tomu potřebujeme odmocninu z korelační matice, kterou pronásobíme každý vektor simulací. Nemáme-li v používaném softwaru zabudovanou funkci k tomu určenou, můžeme použít například Choleského dekompozici, která je popsána níže.

Nejprve ukážeme, že pronásobením vektoru nezávislých náhodných veličin odmocninou z korelační matice dostaneme vektor s korelacemi z dané korelační matice. Řekneme, že máme vektor x nezávislých náhodných veličin a dolní trojúhelníkovou matici L, která vznikla např. Choleského rozkladem korelační matice. Neboli pro vektor y, který vznikne jejich pronásobením, platí

$$y = Lx^T \rightarrow y_i = \sum_j L_{ij} x_j \tag{2.3}$$

Nyní určíme korelační matici vektoru y

$$corr(y_i, y_k) = corr\left(\sum_j L_{ij} x_j, \sum_l L_{kl} x_l\right) = \sum_j L_{ij} \sum_l L_{kl}\ corr(x_j, x_l). \tag{2.4}$$

Tento vzorec můžeme snadno upravit. $corr(x_j, x_l)$ je rovno jedné jen pokud $j = l$ a jinak vždy nule. Proto lze sumy před korelací sloučit do jedné a vyjde nám

$$corr(y_i, y_k) = \sum_j L_{ij} (L_{kj})^T \tag{2.5}$$

Z toho plyne, že korelační matice vektoru y je rovna maticovému součinu LL^T.

Nyní podrobněji popíšeme rozklad korelační matice. Choleského dekompozice je rozložení symetrické pozitivně definitní čtvercové matice R na horní trojúhelníkovou matici L tak, aby platilo

$$R = LL^T. \tag{2.6}$$

Z rozepsání po jednotlivých sloupcích lze snadno odvodit vzorce pro prvky matice L. Z prvního sloupce vyplývá následující [6]

$$\begin{aligned}
r_{11} &= l_{11}l_{11} \rightarrow l_{11} = \sqrt{r_{11}} \\
r_{21} &= l_{11}l_{21} \rightarrow l_{21} = r_{21}/l_{11} \\
r_{31} &= l_{11}l_{31} \rightarrow l_{31} = r_{31}/l_{11} \\
&\vdots \\
r_{n1} &= l_{11}l_{n1} \rightarrow l_{n1} = r_{n1}/l_{11}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

a z druhého

$$\begin{aligned}
r_{22} &= l_{21}l_{21} + l_{22}l_{22} \rightarrow l_{22} = \sqrt{r_{22} - l_{21}^2} \\
r_{32} &= l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \rightarrow l_{32} = (r_{32} - l_{21}l_{31})/l_{22} \\
&\vdots \\
r_{n2} &= l_{21}l_{n1} + l_{22}l_{n2} \rightarrow l_{n2} = (r_{n2} - l_{21}l_{n1})/l_{22}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Takto lze rozepsat všechny sloupce. Z toho plyne, že pro prvky matice L na diagonále platí

$$r_{ii} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}^2 \ \rightarrow \ l_{ii} = \sqrt{r_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \tag{2.9}$$

a pro prvky pod diagonálou, neboli pro každé $i > j$, platí

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}l_{jk} \ \rightarrow \ l_{ij} = \left(r_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk} \right) /l_{jj}. \tag{2.10}$$

Po pronásobení každé simulace dolní trojúhelníkovou maticí L, která vznikla dle vzorců (2.9) a (2.10), získáme scénáře výší změn hodnot jednotlivých firem s požadovanými korelacemi. Ke každé takové změně v hodnotě firmy jsme schopni přiřadit nový rating, protože známe hranice přechodu mezi ratingy pro každou původní ratingovou třídu. Tímto způsobem získáme požadované scénáře budoucích ratingů jednotlivých firem.

2.3 Ohodnocení portfolia

Pro každý instrument ze zkoumaného portfolia chceme určit jeho hodnoty na konci časového horizontu při všech možných scénářích.

V této práci pracujeme jen s dluhopisy, proto zde popíšeme jen jejich oceňování, ale metodu CreditMetrics lze použít i pro další finanční instrumenty.

Nejprve určíme forwardové sazby. Forwardové sazby jsou budoucí úrokové míry. Nás konkrétně zajímají roční (forwardové) sazby $f_{t-1,t}$, které začínají na konci časového horizontu (v našem případě jeden rok) a musí být známé jejich hodnoty až do doby splatnosti daného dluhopisu. Tyto sazby určíme pomocí bezrizikových úrokových měr, což jsou spotové sazby s_t - aktuální úrokové míry aplikovatelné na finančním trhu pro úročení a diskontování přes období délky t, dle následujícího vzorce

$$(1 + s_{t-1})^{t-1} (1 + f_{t-1,t}) = (1 + s_t)^t . \tag{2.11}$$

Takto získáme potřebné forwardové sazby. K těm nyní přičteme kreditní spready, abychom tak určili sazby pro jednotlivé ratingy.

Těmito nově získanými sazbami oddiskontujeme všechna cashflow, která se uskuteční po časovém horizontu. Tím získáme hodnotu instrumentů, kterou budou mít, skončí-li v daném ratingu. Takto určíme všechny možné budoucí hodnoty pro jednotlivé dluhopisy.

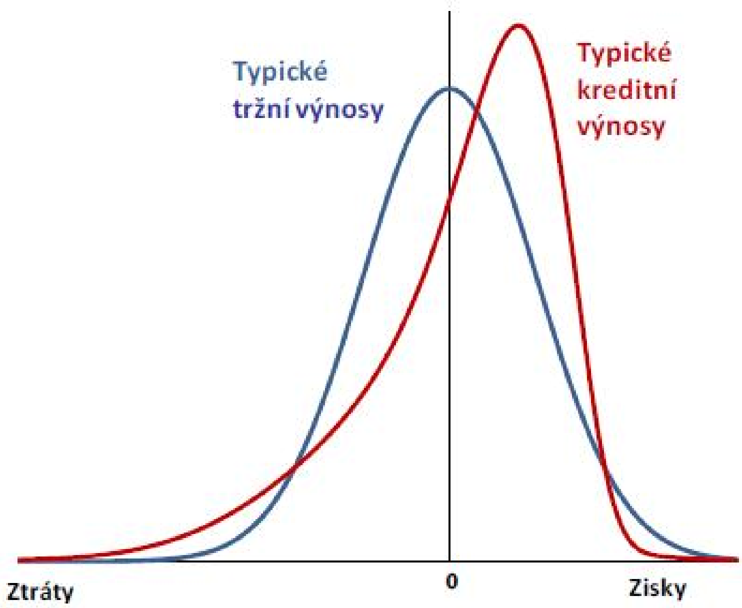
Pro případ defaultu je situace odlišná, neboť recovery rates (míry návratnosti) nejsou udávány přesným procentem, ale je známa jejich střední hodnota a směrodatná odchylka. Velký rozptyl těchto hodnot může být vysokým rizikem, proto pro každý defaultní scénář lze generovat náhodnou výši recovery rate dle beta rozdělení se střední hodnotou a směrodatnou odchylkou odpovídající konkrétnímu instrumentu. Hodnoty beta rozdělení jsou pouze z intervalu (0,1), takže se nemusíme obávat "nesmyslných" hodnot. [7]

2.4 Vyhodnocení výsledků

Do této chvíle jsme nasimulovali mnoho možných budoucích hodnot portfolia, nyní zbývá tyto informace přetransformovat do odhadu rizika. Nejprve se však zmíníme o možných statistikách, kterými lze riziko měřit, a pak ukážeme, jak dojít k námi požadovanému výsledku, hodnotě VaR.

2.4.1 Interpretace měr rizika

Při výběru vhodné míry rizika si vždy nejprve musíme uvědomit, k jakému účelu tyto hodnoty budeme používat, a podle toho zvolit nejvhodnější statistiku. Zde se zmíníme jen o dvou základních mírách - směrodatné odchylce a percentilu.



Obrázek 2.2: Graf typických kreditních výnosů [5]

Směrodatná odchylka se velmi snadno počítá, avšak jako míra rizika má řadu nevýhod. Je to totiž symetrická míra rozptýlení okolo střední hodnoty portfolia, neboli měří rozptýlení jednotlivých hodnot portfolia od jeho průměrné hodnoty. Čím větší toto rozptýlení je, tím je hodnota směrodatné odchylky a také rizika vyšší. Ze symetričnosti plyne, že tato statistika nerozlišuje mezi stranou výnosů a stranou ztrát. Jak je ale vidět z grafu (2.2), kreditní výnosy jsou asymetrické a mají tzv. těžký chvost. Rozdělení s těžkým chvostem definujeme jako rozdělení, které v extrémních hodnotách nabývá vyšších pravděpodobností než normální rozdělení. Těžký chvost je zapříčiněn defaulty, a proto je na straně ztrát. Naopak strana výnosů je poměrně krátká a strmá, neboť výše výnosů získaná migrací je omezená. My se samozřejmě zajímáme o stranu ztrát, proto můžeme považovat směrodatnou odchylku částečně za klamavou. Navíc z důvodu většinou "nenormálního" rozdělení kreditních výnosů, jak je patrné i z grafu (2.2), nelze z hodnoty směrodatné odchylky usuzovat žádné další informace.

Konkrétní hodnotu odhadu směrodatné odchylky S_p možných hodnot zkoumaného portfolia získáme dle vzorce

$$S_p = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (V^{(i)} - \bar{X}_p)^2}, \tag{2.12}$$

kde N je počet scénářů, $V^{(i)}$, pro $i = 1, ..., N$, jsou hodnoty portfolia v odpovídajícím scénáři a $\bar{X}_p$ je odhad střední hodnoty portfolia, který jsme získali ze vzorce

$$\bar{X}_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} V^{(i)}. \tag{2.13}$$

Další běžně užívanou mírou rizika je percentil. Pravděpodobnost, že skutečná hodnota portfolia bude nižší než hodnota 1. percentilu je 1%, tzn. že první percentil portfolia udává úroveň, pod kterou můžeme očekávat ztráty pouze s jednoprocentní pravděpodobností. Výhodou této statistiky je její přesné vymezení a konkrétní význam.

2.4.2 Výsledná hodnota VaR

Pro získání hodnoty v riziku pro zkoumané portfolio potřebujeme odhad střední hodnoty možných hodnot portfolia $\bar{X}_p$ dle vzorce (2.13) a hodnotu kvantilu $q_{1-\alpha}$, kterou získáme z dat. VaR na hladině α pak získáme dle vzorce

$$\mathrm{VaR} = q_{1-\alpha} - \bar{X}_p, \tag{2.14}$$

kde se $\bar{X}_p$ interpretuje jako očekávaná hodnota portfolia na konci rizikového intervalu a $(1-\alpha)$-kvantil jako hodnota portfolia, pod kterou se s pravděpodobností α portfolio na konci rizikové intervalu nedostane. Jejich rozdíl tedy znamená maximální ztrátu na hladině α.

VaR udává velikost požadovaného kapitálu za jeden rok, proto potřebujeme výsledek oddiskontovat, abychom získali hodnotu k aktuálnímu datu.

Kapitola 3

CreditRisk$^+$

CreditRisk$^+$ je metoda pro výpočet rozdělení možných kreditních ztrát portfolia, kterou vyvinula a v roce 1997 uveřejnila skupina Credit Suisse. Může být použita pro stanovení kreditního rizika jak v retailu, tak v korporátním odvětví, a to pro půjčky, deriváty i obchodovatelné dluhopisy. Tato metoda je založena na portfoliovém přístupu k modelování rizika defaultu, uvažuje informace týkající se velikosti a splatnosti instrumentů, kreditní kvality a systematického rizika dlužníka (systematické riziko je riziko vyplývající z celkového ekonomického vývoje postihující všechny subjekty). [3]

CreditRisk$^+$ je statistický model kreditního rizika, který nevytváří předpoklady o příčinách defaultu. Tento přístup je podobný přístupu, který se využívá k řízení tržního rizika, kde není snaha o modelování příčin změn v tržních cenách. CreditRisk$^+$ předpokládá, že defaulty se vyskytují ve sledech událostí tak, že není možné předpovídat přesný čas jejich výskytu ani jejich počet.

K modelování náhodnosti defaultu dlužníka jsou v modelu využity matematické metody, které se často používají v pojišťovnictví. Předpokládá totiž portfolio s mnoha individuálními riziky s malými pravděpodobnostmi výskytu. Tento přístup se liší od matematických metod běžně využívaných ve finančnictví. Ve finančním modelování se většinou usiluje o modelování spojitých změn v cenách spíše než náhodných událostí. Díky tomuto přístupu je CreditRisk$^+$ model analytický, který umožňuje rychlý a explicitní výpočet celkového rozdělení ztrát portfolia.

Model vychází z toho, že hodnota akcií a dluhopisů je v podstatě perspektivní a je určována očekávanou budoucností jednotlivých dlužníků z pohledu investorů. Neboli spojuje aktuální kreditní kvalitu dlužníků a její předpokládaný vývoj v budoucnu. Proto se z vývoje na trhu dá usuzovat, že se defaultní míra mění spojitě. Model CreditRisk$^+$ tedy pokládá míry defaultu za spojité náhodné veličiny a uvažuje jejich volatility za účelem zachycení nejistoty v jejich výši. Směrodatné odchylky mohou být významné v porovnání s defaultními měrami, reflektují totiž skutečnou fluktuaci ekonomických cyklů. V praxi však nemáme k dispozici individuální defaultní míry u jednotlivých dlužníků, vhodným přístupem pro stanovení defaultních měr je proto například přiřazení pravděpodobností defaultů dle kreditních ratingů.

Vnější faktory, jako například stav ekonomiky, mohou zapříčinit korelace mezi jednotlivými defaulty i přesto, že mezi nimi jinak není žádný příčinný vztah. Efekty těchto faktorů jsou zapracovány do modelu CreditRisk$^+$ pomocí volatilit defaultních měr a analýzy sektorů namísto užití korelací defaultů jako přímého vstupu do modelu. [4]

Než přejdeme k popisu modelu CreditRisk$^+$, definujeme pravděpodobnostní vytvořující funkci, kterou budeme později potřebovat.

Definice: Nechť $\{a_n\} = \{a_n, n \in N_0\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže mocninná řada $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ konverguje pro $|s| < s_0$ pro nějaké $s_0 > 0$, potom $A(s)$ nazveme *vytvořující funkcí posloupnosti* $\{a_n\}$. [11]

Definice: Nechť X je nezáporná celočíselná náhodná veličina s rozdělením $\{p_n, n \in N_0\}$. Vytvořující funkci posloupnosti $\{p_n\}$ nazýváme *pravděpodobnostní vytvořující funkcí X* a značíme $P_X(s)$, tedy $P_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$. [11]

3.1 Základní model

Každý model výpočtu kreditního rizika je závislý na vstupních datech, jejichž kvalita přímo ovlivňuje přesnost výsledku. Model CreditRisk$^+$ vyžaduje následující vstupní data: [4]

- expozice
- defaultní míry jednotlivých dlužníků
- volatility jednotlivých defaultních měr
- míry návratnosti při defaultu

Základní model CreditRisk$^+$ předpokládá, že rozdělení počtu defaultů je Poissonovo s parametrem λ, kde λ je rovna očekávanému počtu defaultů celého portfolia. Toto platí za podmínek, že pravděpodobnost defaultu pro jednotlivé dlužníky jsou nenáhodné veličiny. [10]

$$P[\text{počet defaultů} = n] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, \quad \text{kde} \quad \lambda = \sum_A p_A, \tag{3.1}$$

kde sčítáme přes všechny dlužníky A z portfolia a p_A značí pravděpodobnost defaultu dlužníka A.

Výše uvedené je odvozeno v [4] na str. 34 pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce a vychází z předpokladu nezávislosti defaultů jednotlivých dlužníků, které mají alternativní rozdělení (stav zdefaultování či nezdefaultování). Pravděpodobnostní vytvořující funkce Poissonova rozdělení s parametrem λ vypadá následovně

$$F(z) = e^{\lambda(z-1)}. \tag{3.2}$$

Toto rozdělení nezávisí na počtu dlužníků v portfoliu nebo individuálních pravděpodobnostech defaultu za předpokladu, že jsou stejně malé.

Za účelem snížení počtu dat pro zpracování nejprve určíme rizikovou expozici jednotlivých dlužníků. Riziková expozice je hodnota, kterou můžeme ztratit. Určí se jako rozdíl tržní hodnoty expozice a hodnoty, kterou bychom měli získat zpět v případě defaultu dlužníka. Ta je rovna nominální hodnotě expozice vynásobené mírou návratnosti. Máme-li určeny všechny rizikové expozice, můžeme je po vhodném zaokrouhlení rozdělit do skupin dle stejné výše podstupovaného rizika.

Označme ν_A rizikovou expozici dlužníka A a ε_A očekávanou ztrátu dlužníka A, obojí jako násobek zvolené jednotky L.

$$L_A = L \times \nu_A, \tag{3.3}$$

kde L_A značí celkovou rizikovou expozici dlužníka A. Volba vhodné jednotky L je taková, aby po zaokrouhlení ν_A vznikl přijatelně malý počet skupin dlužníků o stejné rizikové expozici.

Nechť tedy máme po zaokrouhlení m skupin, ve kterých jsou dlužníci se shodnou výší podstupovaného rizika, pak můžeme definovat ν_j jako tuto společnou rizikovou expozici, ε_j jako očekávanou ztrátu a λ_j jako očekávaný počet defaultů ve skupině j, kde $1 \leq j \leq m$, pro které platí

$$\varepsilon_j = \nu_j \times \lambda_j, \quad \text{a tudíž} \quad \lambda_j = \frac{\varepsilon_j}{\nu_j} = \sum_{A:\nu_A=\nu_j} \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}. \tag{3.4}$$

Zaokrouhlením ν_A dochází k malé chybě modelu, v [4] na str. 39 je dokázáno, že tato chyba je zanedbatelná.

Nyní ukážeme odvození rozdělení ztrát zapříčiněných defaulty některých dlužníků. Toto rozdělení je v [4] opět odvozováno pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce. Definujme

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{celková ztráta} = n \times L) z^n. \tag{3.5}$$

Stále předpokládáme nezávislost jednotlivých expozic v portfoliu, a proto můžeme psát

$$G(z) = \prod_{j=1}^{m} G_j(z). \tag{3.6}$$

Každou skupinu j, pro $1 \leq j \leq m$, můžeme považovat za samostatné portfolio s následující vytvořující funkcí

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{počet defaultů} = n) z^{n\nu_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_j} \lambda_j^n}{n!} z^{n\nu_j} = e^{-\lambda_j + \lambda_j z^{\nu_j}}. \tag{3.7}$$

Potom tedy

$$G(z) = \prod_{j=1}^{m} e^{-\lambda_j + \lambda_j z^{\nu_j}} = e^{-\sum_{j=1}^{m} \lambda_j + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j z^{\nu_j}}, \tag{3.8}$$

kde $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j$ značí celkový očekávaný počet defaultů v portfoliu, který značíme λ.

Funkci $G(z)$ můžeme přepsat jako

$$G(z) = e^{-\lambda(P(z)-1)} = F(P(z)), \tag{3.9}$$

$$\text{kde} \quad P(z) = \frac{\sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon_j}{\nu_j} z^{\nu_j}}{\sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon_j}{\nu_j}}. \tag{3.10}$$

Z tohoto zápisu vidíme, že funkce $G(z)$ závisí pouze na ν a ε.

3.2 Rozšíření základního modelu

V základním modelu jsme uvažovali nenáhodné pravděpodobnosti defaultu jednotlivých dlužníků. Ve skutečnosti se však tyto pravděpodobnosti v čase mění, protože je ovlivňují různé vnější faktory, jako například vývoj ekonomiky. Proto rozšíříme původní model o analýzu sektorů.

Analýza sektorů je v podstatě analýza vnějších vlivů na jednotlivé dlužníky. V tomto modelu budeme předpokládat, že každý dlužník je ovlivňován pouze jedním vnějším faktorem. Rozdělíme tedy dlužníky do sektorů dle faktoru, který je ovlivňuje (např. dle země, kde sídlí). Předpokládáme, že tyto vnější faktory jsou na sobě vzájemně nezávislé.

Mějme tedy n nezávislých sektorů, pro $1 \leq k \leq n$ označme x_k náhodnou veličinu reprezentující průměrnou míru defaultu v sektoru k, λ_k bude znázorňovat střední hodnotu x_k a σ_k jeho směrodatnou odchylku.

Upravme značení stávajících parametrů tak, že přidáme horní index (k), který bude značit k-tý sektor.

Obdobně jako v (3.4) platí

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{m_{(k)}} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} = \sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}, \tag{3.11}$$

kde se sčítá přes všechny dlužníky A ze sektoru k a podíl ε_A/ν_A vyjadřuje pravděpodobnost defaultu dlužníka A. Pomocí vzorce (3.11) získáme hodnotu λ_k.

Nyní musíme odvodit σ_k. K tomu využijeme směrodatnou odchylku dlužníka A, kterou označíme σ_A. Vhodným nástrojem pro získání σ_A je odvození z ratingu dlužníka A. Řekneme, že x_A značí průměrnou míru defaultu dlužníka A. Model CreditRisk$^+$ odhaduje tuto hodnotu takto

$$x_A = \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}\frac{x_k}{\lambda_k}. \tag{3.12}$$

Z (3.12) plyne

$$\sum_A \sigma_A = \sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}\frac{\sigma_k}{\lambda_k} = \frac{\sigma_k}{\lambda_k}\sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} = \sigma_k, \tag{3.13}$$

kde se sčítá přes všechny dlužníky A ze sektoru k.

Stejně jako v základním modelu nejprve odvodíme rozdělení počtu defaultů, a to opět pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce. Z předpokladu nezávislosti mezi sektory dostaneme

$$F(z) = \sum_{l=0}^{\infty} P(\text{počet defaultů} = l) z^l = \prod_{k=1}^{n} F_k(z). \tag{3.14}$$

Budeme se tedy nejprve zabývat funkcí $F_k(z)$ pro libovolný sektor k, kde $1 \le k \le n$. Z (3.2) víme, že při daném x_k tato funkce vypadá následovně

$$F_k(z)|[x_k = x] = e^{\lambda(z-1)}. \tag{3.15}$$

Za předpokladu, že x_k má hustotu $f_k(x)$

$$\begin{aligned} F_k(z) &= \sum_{l=0}^{\infty} P(\text{počet defaultů} = l) z^l = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} z^l \int_0^{\infty} P(\text{počet defaultů} = l|[x_k = x]) f_k(x) dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{\lambda(z-1)} f_k(x) dx. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Pro dopočet (3.16) je nutné určit rozdělení x_k. Model CreditRisk$^+$ předpokládá, že x_k má gama rozdělení se střední hodnotou λ_k a směrodatnou odchylkou σ_k pro všechna k, $1 \le k \le n$. Tedy hustotu

$$\begin{aligned} f(x_k; \alpha_k, \beta_k) =& x_k^{\alpha_k - 1} \frac{e^{-x_k/\beta_k}}{\beta_k^{\alpha_k} \Gamma(\alpha_k)}, \\ \text{kde } x_k \ge 0,\ \alpha_k, \beta_k > 0 \text{ a } \Gamma(\alpha_k) =& \int_0^{\infty} e^{-x_k} x_k^{\alpha_k - 1} dx_k. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Dále víme, že střední hodnota $\lambda_k = \alpha_k \beta_k$ a rozptyl gama rozdělení je $\sigma_k^2 = \alpha_k \beta_k^2$. Z toho vyplývá

$$\alpha_k = \frac{\lambda_k^2}{\sigma_k^2} \quad \text{a} \quad \beta_k = \frac{\sigma_k^2}{\lambda_k}. \tag{3.18}$$

Když nyní do (3.16) dosadíme (3.17), po úpravě a substituci $y_k = x_k(\beta_k^{-1} - 1 + z)$ dostaneme

$$F_k(z) = \frac{1}{\beta_k^{\alpha_k}\Gamma(\alpha_k)} \int_0^\infty \left(\frac{y_k}{\beta_k^{-1} - 1 + z}\right)^{\alpha_k - 1} e^{-y_k} \frac{dy_k}{\beta_k^{-1} - 1 + z} =$$
$$= \frac{1}{\beta_k^{\alpha_k}(1 + \beta_k^{-1} - z)^{\alpha_k}}. \tag{3.19}$$

Dále můžeme tento tvar upravit takto

$$F_k(z) = \left(\frac{1 - p_k}{1 - p_k z}\right)^{\alpha_k}, \quad \text{kde} \quad p_k = \frac{\beta_k}{1 + \beta_k}. \tag{3.20}$$

Z toho plyne, že rozdělení počtu defaultů v sektoru k, $\forall k$, má negativně binomického rozdělení s parametry p_k a α_k. ((3.20) je pravděpodobnostní vytvořující funkce tohoto rozdělení.)

Pravděpodobnostní vytvořující funkci počtu defaultů získáme jako součin $F_k(z)$ z (3.20)

$$F(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 - p_k}{1 - p_k z}\right)^{\alpha_k}, \tag{3.21}$$

s parametry α_k, β_k a p_k viz výše.

Nyní tedy známe rozdělení počtu škod v portfoliu a přejdeme k odvození rozdělení ztrát. Stejně jako v (3.5) definujeme

$$G(z) = \sum_{l=0}^{\infty} P(\text{celková ztráta} = l \times L) z^l \tag{3.22}$$

jako pravděpodobnostní vytvořující funkci celkové ztráty. Opět také platí rovnost

$$G(z) = \prod_{k=1}^{n} G_k(z), \tag{3.23}$$

protože předpokládáme nezávislost sektorů. Analogicky s (3.10) a za použití (3.11) definujeme polynom $P_k(z)$ takto

$$P_k(z) = \frac{\sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} z^{\nu_j^{(k)}}}{\sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}}} = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} z^{\nu_j^{(k)}}. \tag{3.24}$$

Vzorec (3.24) můžeme pomocí (3.11) upravit

$$P_k(z) = \frac{\sum\limits_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} z^{\nu_A}}{\sum\limits_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A}} = \frac{1}{\lambda_k} \sum_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} z^{\nu_A}. \tag{3.25}$$

Stejně jako ve vzorci (3.16) pro rozdělení počtu defaultů pro pravděpodobnostní vytvořující funkci ztráty způsobené defaulty některých dlužníků platí

$$\begin{aligned} G_k(z) &= \sum_{l=0}^{\infty} z^l \int_0^{\infty} P(\text{celková ztráta} = l \times L | x_k) f_k(x_k) dx_k = \\ &= \int_0^{\infty} e^{\sum\limits_A x_A (z^{\nu_A} - 1)} f_k(x_k) dx_k = \int_0^{\infty} e^{x_k (P_k(z) - 1)} f_k(x_k) dx_k, \end{aligned} \tag{3.26}$$

kde poslední rovnost vychází z následujícího

$$e^{\sum\limits_A x_A (z^{\nu_A} - 1)} = e^{\frac{x_k}{\lambda_k} \sum\limits_A \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} (z^{\nu_A} - 1)} = e^{x_k (P_k(z) - 1)}, \tag{3.27}$$

kde jsme použili (3.12).

Z toho plyne, že stejně jako v základním modelu platilo (3.9), i v rozšířeném platí

$$G_k(z) = F_k(P_k(z)). \tag{3.28}$$

Tedy

$$G(z) = \prod_{k=1}^{n} G_k(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 - p_k}{1 - p_k P_k(z)} \right)^{\alpha_k} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 - p_k}{1 - \frac{p_k}{\lambda_k} \sum\limits_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} z^{\nu_j^{(k)}}} \right)^{\alpha_k}, \tag{3.29}$$

kde parametry α_k, β_k a p_k jsou definovány jako v (3.18) a (3.20).

Nyní tedy známe pravděpodobnostní vytvořující funkci rozdělení ztrát portfolia vzniklých defaulty některých dlužníků a z ní odvodíme rekurentní vzorec pro výpočet.

3.3 Rekurentní vztah pro výpočet

Nechť A_n značí pravděpodobnost ztráty velikosti $n \times L$ pro libovolné přirozené číslo n, pak z definice pravděpodobnostní vytvořující funkce na straně 21 zřejmě plyne

$$P(z = n \times L) = \frac{1}{n!} \frac{d^n G(z)}{dz^n}\bigg|_{z=0} = A_n, \tag{3.30}$$

kde z značí celkovou ztrátu. Výpočet jednotlivých derivací je přímočarý, ale numericky náročný. Můžeme ale použít nasledující pozorování. Protože $G(z)$ je racionální funkce, je i logaritmická derivace $G(z)$ racionální funkcí.

$$\frac{d}{dz}(logG(z)) = \frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{A(z)}{B(z)}, \tag{3.31}$$

kde $A(z)$ a $B(z)$ jsou polynomy

$$\begin{aligned} A(z) &= a_0 + \ldots + a_r z^r \\ B(z) &= b_0 + \ldots + b_s z^s. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Tento vztah nám umožňuje odvodit rekurentní relaci pro koeficienty Taylorova rozvoje $G(z)$. V případě, že $G(z)$ má tvar (3.29) platí navíc pro polynomy $A(z)$ a $B(z)$ jednoduchý vztah $A(z) = -B'(z)$. My však odvodíme rekurentní vztah pro obecnější případ, kdy $A(z)$ a $B(z)$ jsou nezávislé.

Postupujeme následovně dle [4]. Zapišme rovnici (3.31) ve tvaru

$$B(z)G'(z) = A(z)G(z), \tag{3.33}$$

což lze po zderivování $G(z)$ zapsat takto

$$\left(\sum_{j=0}^{s} b_j z^j\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)A_{n+1}z^n\right) = \left(\sum_{i=0}^{r} a_i z^i\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n\right). \tag{3.34}$$

Pro $n \geq 0$ jsou koeficienty u z^n na levé a pravé straně rovnice v daném pořadí rovny

$$\sum_{j=0}^{min(s,n)}(n+1-j)b_j A_{n+1-j} \quad \text{a} \quad \sum_{i=0}^{min(r,n)} a_i A_{n-i}. \tag{3.35}$$

Takže po úpravě můžeme psát

$$b_0(n+1)A_{n+1} = \sum_{i=0}^{min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=1}^{min(s,n)}(n+1-j)b_j A_{n+1-j} \tag{3.36}$$

nebo ekvivalentně

$$b_0(n+1)A_{n+1} = \sum_{i=0}^{min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=0}^{min(s-1,n-1)}(n-j)b_{j+1}A_{n-j}. \tag{3.37}$$

Tedy rekurentní vzorec pro A_n vypadá následovně

$$A_{n+1} = \frac{1}{b_0(n+1)}\left(\sum_{i=0}^{min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=0}^{min(s-1,n-1)}(n-j)b_{j+1}A_{n-j}\right). \tag{3.38}$$

Obecně odvozený rekurentní vzorec nyní aplikujeme na naši konkrétní funkci $G(z)$ ze vzorce (3.29), abychom získali konkrétní podoby polynomů $A(z)$ a $B(z)$,

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{G_k'(z)}{G_k(z)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{p_k\alpha_k}{\lambda_k}\sum_{j=1}^{m(k)}\varepsilon_j^{(k)}z^{\nu_j^{(k)}-1}}{1-\frac{p_k}{\lambda_k}\sum_{j=1}^{m(k)}\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}}z^{\nu_j^{(k)}}}. \tag{3.39}$$

Z toho plyne, že polynomy $A(z)$ a $B(z)$ mají tvar

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{p_k\alpha_k}{\lambda_k}\sum_{j=1}^{m(k)}\varepsilon_j^{(k)}z^{\nu_j^{(k)}-1}}{1-\frac{p_k}{\lambda_k}\sum_{j=1}^{m(k)}\frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}}z^{\nu_j^{(k)}}}, \tag{3.40}$$

kde již všechny parametry známe.

Nyní už jen zbývá určit A_0. To lze například z (3.29), kde za z dosadíme 0. Dostaneme tedy

$$A_0 = G(0) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1-p_k}{1 - \frac{p_k}{\lambda_k} \sum\limits_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} 0^{\nu_j^{(k)}}} \right)^{\alpha_k} = \prod_{k=1}^{n} (1-p_k)^{\alpha_k}. \tag{3.41}$$

3.3.1 Ukázkový příklad

Postup výpočtu nyní ukážeme na jednoduchém příkladu.

Uvažujme dva instrumenty od dvou různých dlužníků z jednoho stejného sektoru, jak je zadáno v [10] na str. 19. Mějme dáno:

	1.dlužník	**2.dlužník**
velikost expozice $= \nu_j$	1	2
roční průměrná pravděpodobnost defaultu $= \lambda_j$	8%	5%
roční směrodatná odchylka $= \sigma_j$	4%	2,5%
míra návratnosti při defaultu	0%	0%

Tabulka 3.1: Zadání ukázkového příkladu

Ze vzorce (3.40) plyne, že v případě pouze jediného sektoru platí:

$$A(z) = \frac{p\alpha}{\lambda} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j z^{\nu_j - 1} \tag{3.42}$$

$$B(z) = 1 - \frac{p}{\lambda} \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon_j}{\nu_j} z^{\nu_j}. \tag{3.43}$$

Dle vzorců (3.4), (3.11), (3.18) a (3.20) vyčíslíme jednotlivé parametry, které budeme potřebovat k dosazení do vzorců (3.42) a (3.43), viz tabulka (3.2). Parametry dosadíme do vzorců (3.42) a (3.43) a tak získáme hodnoty koeficientů a_0, a_1, b_0, b_1 a b_2.

m	2
λ	0,13
ε_1	0.08
ε_2	0.10
α	4
β	0,0325
p	0,031477

Tabulka 3.2: Hodnoty parametrů

$$A(z) = \frac{0,031477 \times 4}{0,13}(0,08z^0 + 0,10z^1) = 0,07748 + 0,09685z \tag{3.44}$$

$$B(z) = 1 - \frac{0,031477}{0,13}\left(\frac{0,08}{1}z^1 + \frac{0,10}{2}z^2\right) = 1 - 0,01937z - 0,01211z^2, \tag{3.45}$$

tudíž hodnoty r a s ze vzorce (3.38) jsou $r = 1$ a $s = 2$.

Všechny vstupy do rekurentního vzorce (3.38) máme tedy připravené. Ze vzorce (3.41) zjistíme hodnotu A_0 a podle vzorce (3.47) můžeme určit další členy polynomu A_n.

$$A_0 = (1-p)^\alpha = (1 - 0,031477)^4 = 0,879913. \tag{3.46}$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}\left(\sum_{i=0}^{min(1,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{j=0}^{min(1,n-1)} (n-j)b_{j+1}A_{n-j}\right). \tag{3.47}$$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= a_0 A_0 = 0,068177 \\
A_2 &= \frac{1}{2}(a_0 A_1 + a_1 A_0 - b_1 A_1) = 0,045912 \\
A_3 &= \frac{1}{3}(a_0 A_2 + a_1 A_1 - 2b_1 A_2 - b_2 A_1) = 0,004255 \\
A_4 &= \frac{1}{4}(a_0 A_3 + a_1 A_2 - 3b_1 A_3 - 2b_2 A_2) = 0,001534 \\
A_5 &= \frac{1}{5}(a_0 A_4 + a_1 A_3 - 4b_1 A_4 - 3b_2 A_3) = 0,000161 \\
A_6 &= \frac{1}{6}(a_0 A_5 + a_1 A_4 - 5b_1 A_5 - 4b_2 A_4) = 0,000042 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

A_n nám udává rozdělení výší škod, protože víme, že značí pravděpodobnost, že nastane škoda ve výši $n \times L$.

Kapitola 4

Porovnání modelů CreditMetrics a CreditRisk$^+$

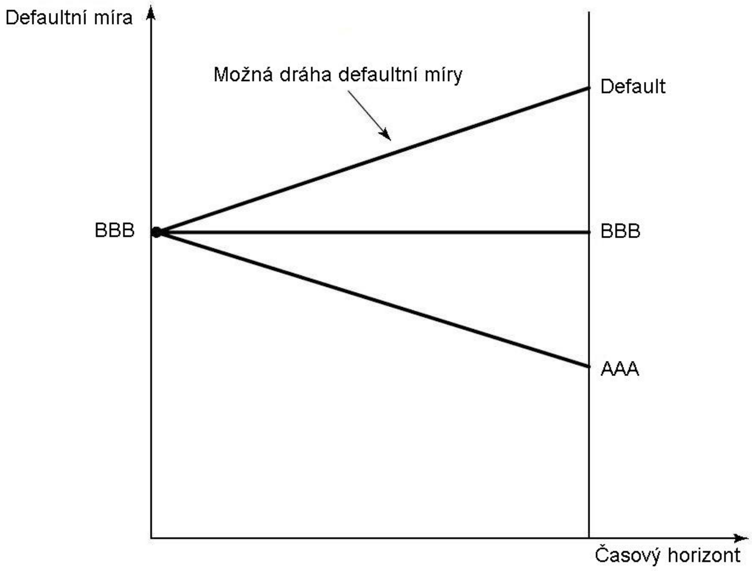
V kapitolách 2 a 3 jsme se seznámili s modely CreditMetrics a CreditRisk$^+$ pro výpočet výše kreditního rizika. V této kapitole se zaměříme na rozdíly mezi oběma modely.

4.1 Základní rozdíly mezi modely

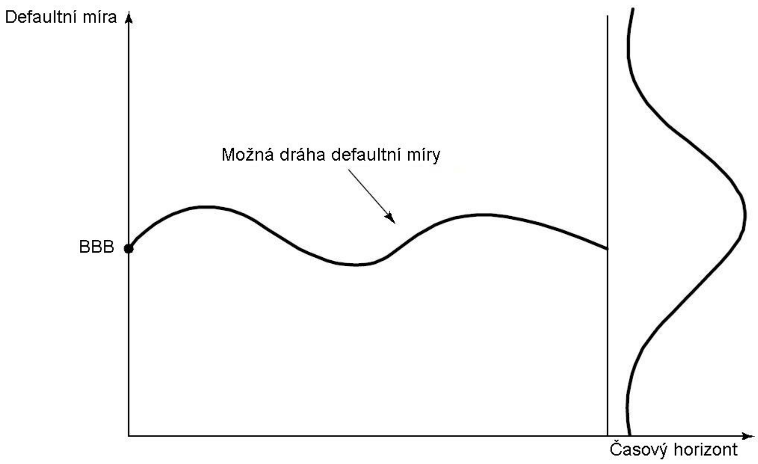
Modely CreditMetrics a CreditRisk$^+$ se liší v mnoha aspektech. Požadují odlišná vstupní data, mají jiné předpoklady, využívají rozdílné přístupy a i jejich hlavní výstupy se liší. Tyto rozdíly jsou srovnány v tabulce (4.1).

Rozdíl mezi těmito modely je také v rychlosti jejich výpočtu. Výpočet modelu CreditRisk$^+$, který je počítán analytickou metodou, je výrazně rychlejší než výpočet metody CreditMetrics, která využívá simulací.

Dalším rozdílem mezi těmito dvěma modely je jejich přístup k míře defaultu. CreditMetrics považuje míru defaultu za diskrétní (viz. obrázek (4.1)) a CreditRisk$^+$ za spojitou veličinu (viz. obrázek (4.2)). Diskrétní přístup uvažující kreditní migraci a spojitý přístup s volatilitou defaultních měr jsou různé reprezentace chování míry selhání. [4]



Obrázek 4.1: Diskrétní míra defaultu - CreditMetrics [2]



Obrázek 4.2: Spojitá míra defaultu - CreditRisk$^+$ [2]

	CreditMetrics	**CreditRisk$^+$**
Typ modelu	Mark-to-market	Default mode
Podléhající riziko	riziko kreditního spreadu i defaultu	riziko defaultu
Přístup	finanční	aktuárský
Faktory řídící riziko	výnosy aktiv	očekávané defaultní míry
Požadovaná data	historická matice přechodů, kreditní spready, výnosová křivka, míry návratnosti, korelace, výše expozic	defaultní míry a jejich volatility, informace o vnějších faktorech, míry návratnosti, výše expozic
Charakteristika kreditní události	kreditní migrace	náhodné míry defaultu
Volatilita kreditních událostí	konstantní nebo náhodná	náhodná
Korelace kreditních událostí	(mnohorozměrné) normální změny v hodnotě společnosti	předpoklad nezávislosti nebo korelace s oček. mírou návratnosti
Míry návratnosti	náhodné (Beta rozdělení)	konstantní v rámci skupiny
Numerický přístup	simulační i analytický	analytický
Klasifikace rizika	ratingy	expozice skupin
Hlavní výstup	rozdělení hodnot portfolia	rozdělení ztrát portfolia

Tabulka 4.1: Porovnání modelů CreditMetrics a CreditRisk$^+$ [2]

Kapitola 5

Solvency II

Solvency II je aktualizovaný soubor regulatorních požadavků pro pojišťovny působící na území Evropské unie, který má vstoupit v platnost 1. ledna 2013. Odůvodněním pro pojistnou legislativu Evropské unie je ulehčení rozvoje jednotného trhu v pojistných službách v Evropě a zároveň zajištění adekvátního stupně ochrany spotřebitele. [16]

Koncept Solvency II byl v roce 2000 iniciován Evropskou komisí, aby provedl základní změny v regulaci evropského pojišťovnictví. Tento projekt cílí k vytvoření harmonizovanějšího, rizikově orientovaného solventnostního režimu, z něhož vyplývají kapitálové požadavky, které více reflektují aktuální riziko. Plánem Evropské komise bylo vytvořit systém, který [19]

- prohlubuje integraci pojistného trhu EU
- zlepšuje ochranu pojistníka i obmyšleného
- zvětšuje mezinárodní konkurenceschopnost pojišťoven z EU
- vylepšuje dohled nad pojistným trhem v EU

Solvency II má třípilířovou strukturu, viz obrázek (5.1). Minimální výše kapitálu definovaná pilířem I bude odrážet rizika, která pojišťovna podstupuje, přičemž pilíř II bude podporovat aktivní přístup k jejich řízení. Pilíř III umožní pozorovatelům porovnat odlišné přístupy pojistitelů k daným rizikům. [18]

Minimální kapitálový požadavek (MCR - Minimum Capital Requirement) reprezentuje hraniční bod pro povinnou intervenci dohledu. Musí být kryt vhodnými zdroji do jednoho roku od začátku platnosti Solvency II. MCR je kalibrovaný na 85% hodnoty v riziku (VaR) pro roční rizikový interval.

Pilíř 1 **Kapitálové požadavky**	Pilíř 2 **Hodnocení supervize**	Pilíř 3 **Tržní disciplína**
Požadavky na minimální kapitál pojišťoven obecně vychází z vyhodnocení rizika, z informací o pojistkách a výše účetně evidovaných aktiv a pasiv. Firmy mají možnost vytvořit si vlastní přístupy a interní modely. Požadavky na solventnost finančních skupin berou v úvahu rizika na úrovni celé skupiny. Další pravidla týkající se aktiv a pasiv.	Hodnocení možností a efektivity systému řízení rizik a vnitřní kontroly, včetně: • nedostatečného krytí expozice, včetně programu zajištění, • interních rizikových modelů, • stresového testování a technických rezerv, • odborné způsobilosti vrcholového managementu, • nesouladu při alokaci aktiv a pasiv. V konkrétních případech bude vyžadováno dodatečné navýšení kapitálu.	Povinné a doporučené zveřejnění údajů vytvoří průhledné tržní prostředí a umožní účastníkům zhodnotit zásadní informace o rozsahu činností, výši rizik, postupech řízení a kapitálové adekvátnosti jednotlivých pojišťoven. Zveřejnění se týká: • rizik, • analýzy citlivosti a scénářové analýzy možného vývoje s ohledem k aktivům a technické rezervě.

Obrázek 5.1: 3 pilíře Solvency II [18]

Solventnostní kapitálový požadavek (SCR - Solvency Capital Requirement) je vyšší než MCR a reprezentuje kapitálový požadavek, který má chránit proti nepříznivým událostem, které mohou nastat v následujících 12ti měsících. Je kalibrovaný na hladině 99,5% hodnoty v riziku (VaR) pro roční časový horizont. V případě, že pojišťovna nebude držet dostatečné finanční zdroje pro pokrytí SCR, bude povinna oznámit tuto skutečnost orgánu dohledu a předložit plán obnovy. K výpočtu SCR mohou být použity standardní formule (spolu se standardními stress testy a korelacemi) nebo dohledem schválený interní model.

Skutečnost, že legislativní návrh konceptu Solvency II je stále ve fázi vývoje, může mít vliv na aktuálnost některých v práci použitých informací.

5.1 Standardní výpočet SCR pro kreditní riziko

Výpočet SCR pro kreditní riziko je v Solvency II součástí modulu tržního rizika a skládá se ze dvou kapitálových požadavků:

- $\text{SCR}_{rozpětí}$, který označuje podmodul rizika kreditního rozpětí
- $\text{SCR}_{koncentrace}$, který označuje podmodul rizika koncentrace

$\text{SCR}_{rozpětí}$ vyjadřuje citlivost hodnot aktiv, závazků a finančních nástrojů na změny úrovně kreditních rozpětí nebo jejich volatility v rámci časové struktury bezrizikových úrokových měr. A $\text{SCR}_{koncentrace}$ vyčísluje dodatečná rizika pro pojišťovnu nebo zajišťovnu vyplývající z nedostatečné diverzifikace portfolia nebo z velké expozice rizika selhání jednotlivým emitentem cenných papírů nebo skupinou spřízněných emitentů. [15]

Koncept Solvency II předpokládá nezávislost těchto dvou podmodulů. Solventnostní kapitálový požadavek pro kreditní riziko se vypočte dle následujícího vzorce [17]

$$SCR_{credit} = \sqrt{SCR^2_{rozpětí} + SCR^2_{koncentrace}}\,. \tag{5.1}$$

Dále se podrobněji zmíníme o výpočtu solventnostního kapitálového požadavku těchto dvou podmodulů.

5.1.1 Riziko kreditního rozpětí

Riziko kreditního spreadu vychází z citlivosti hodnot aktiv, pasiv a finančních instrumentů na změny ve výši nebo volatilitě kreditního spreadu nad výnosovou křivku. [12]

Kapitálový požadavek pro riziko kreditního rozpětí (spread risk) SCR_{spread} by měl být roven

$$SCR_{rozpětí} = SCR_{dluhopisy} + SCR_{struktur} + SCR_{kd}, \tag{5.2}$$

kde $SCR_{dluhopisy}$, $SCR_{struktur}$ a SCR_{kd} značí kapitálový požadavek pro riziko kreditního rozpětí na dluhopisech, strukturovaných finančních instrumentech a kreditních derivátech v daném pořadí. [17]

V našem zkoumaném portfoliu budeme mít pouze dluhopisy, proto se zaměříme jen na výpočet výše $SCR_{dluhopisy}$.

Kapitálový požadavek pro riziko kreditního rozpětí u dluhopisů by měl být roven ztrátě primárního kapitálu, která bude mít za následek okamžitý pokles v hodnotě každého dluhopisu ve výši ($\text{durace}_i \cdot \text{FUP}_i$). Primární kapitál tvoří hodnota podřízených závazků a hodnota aktiv převyšující hodnotu závazků snížená o hodnotu vlastních akcií držených pojišťovnou nebo zajišťovnou. Durace_i značí modifikovanou duraci i-tého dluhopisu udávanou v letech. Nikdy by neměla být menší než 1 a větší než maximální durace pro daný rating dle tabulky (5.1). Pro dluhopisy s proměnným kupónem by durace_i měla odpovídat modifikované duraci dluhopisu s fixním kupónem se stejnou dobou do splatnosti a kupónovými platbami rovnými forwardové úrokové míře. [17]

kreditní rating	0	1	2	3	4	5	6	N/A
rizikový faktor FUP_i	0,9%	1,1%	1,4%	2,5%	4,5%	7,5%	7,5%	3%
max. durace (v letech)	36	29	23	13	10	8	8	12

Tabulka 5.1: Rizikové faktory FUP_i a maximální durace pro jednotlivé ratingové skupiny dle Solvency II

Výslednou hodnotu $SCR_{dluhopisy}$ určíme dle vzorce

$$SCR_{dluhopisy} = \sum_i MV_i \cdot durace_i \cdot FUP(rating)_i, \tag{5.3}$$

kde MV_i značí expozici i-tého dluhopisu, $durace_i$ udává duraci i-tého dluhopisu a $FUP(rating)_i$ vyjadřuje hodnotu funkce FUP z tabulky (5.1) pro rating i-tého dluhopisu.

5.1.2 Koncentrace tržního rizika

Podmodul koncentrace tržního rizika se týká aktiv, která podléhají akciovému riziku, nemovitostnímu riziku nebo riziku kreditního rozpětí. Vhodné ohodnocení rizika koncentrace musí uvažovat přímé i nepřímé expozice, které jsou obsaženy v tomto podmodulu.

Pro jednoduchost a v zájmu konzistence je definice koncentrace tržního rizika omezená na rizika týkající se akumulace expozic jednoho dlužníka. Neobsahuje tedy jiné typy koncentrací jako například zeměpisnou oblast, průmyslové odvětví, atd. [12]

Výše kapitálového požadavku pro koncentraci tržního rizika se určuje dle vzorce

$$SCR_{koncentrace} = \sqrt{\sum_i Conc_i^2}, \tag{5.4}$$

kde $Conc_i$ značí kapitálový požadavek pro koncentraci tržního rizika pro jediného dlužníka i.

$Conc_i$ by měl být roven ztrátě primárního kapitálu, která bude mít za následek okamžitý pokles v hodnotě aktiva ve výši $(XS_i \cdot g_i)$ odpovídající protistraně i. XS_i značí nadměrnou expozici a g_i je rizikový faktor koncentrace tržního rizika.

XS_i se určí dle vzorce

$$XS_i = Max\left(0; \frac{E_i}{Aktiva} - CT_i\right), \tag{5.5}$$

kde E_i značí výši expozice v defaultu vůči dlužníkovi i, $Aktiva$ vyjadřuje součet všech expozic podléhajících výpočtu koncentrace tržního rizika a CT_i udává práh k odvození překročení expozice, viz tabulka (5.2). [17]

Expozici jediného dlužníka by měl být přiřazen rizikový faktor g_i dle tabulky (5.2).

kreditní rating	0	1	2	3	4	5	6
práh CT$_i$	3%	3%	1,5%	1,5%	1,5%	1,5%	1,5%
rizikový faktor g_i	12%	12%	21%	27%	73%	73%	73%

Tabulka 5.2: Prahy k odvození přemíry expozice CT_i a rizikové faktory g_i pro jednotlivé ratingové skupiny dle Solvency II

Výslednou hodnotu $Conc_i$ tedy získáme podle vzorce

$$Conc_i = MV_i \cdot XS_i \cdot g_i, \tag{5.6}$$

kde MV_i značí expozici jediného dlužníka i.

V této práci se nezabýváme dopadem vlivu koncentrace na portfolio. Nehodnotíme efekt samotné koncentrace, ale hlavně riziko úvěrového rozpětí. Proto mají i námi zkoumaná portfolia v poslední kapitole koncentraci shodnou.

Kapitola 6

Příklad

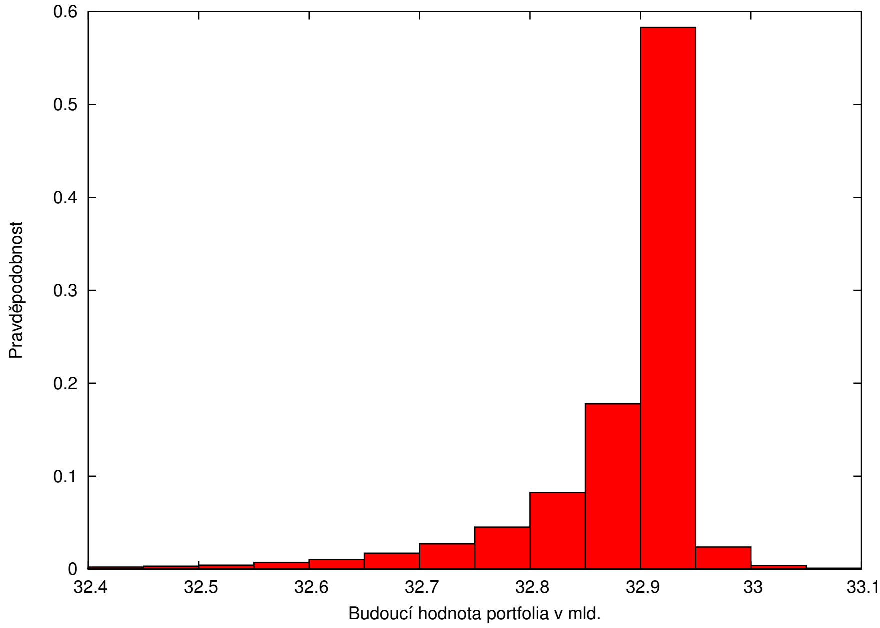
V této kapitole jsou metody popsané v kapitolách 2, 3 a 5 ilustrovány na příkladu a jejich výsledky porovnány. Příklad byl počítán v programu MS Excel 2003.

Zadána byla tři portfolia, která se skládají vždy z dvaceti dluhopisů o různých nominálních hodnotách a duracích. Portfolia se od sebe liší pouze kreditní kvalitou těchto dluhopisů, a to tak, že rating každého dluhopisu je postupně v portfoliu A, B a C (ozn. PTF A, PTF B, PTF C) vždy o jeden stupeň horší. Všechny dluhopisy jsou bezkupónové a jsou rozděleny do 4 sektorů tak, že každému dluhopisu je přiřazen právě jeden sektor. Dále jsou zadány bezrizikové spotové úrokové míry, kreditní spready a míry návratnosti dle ratingů, matice pravděpodobností přechodu mezi ratingy a k ní odpovídající volatility pravděpodobností defaultu pro potřeby metody CreditRisk$^+$. Pro určení korelací v metodě CreditMetrics máme zadány časové řady hodnot indexů odpovídající jednotlivým sektorům a pracujeme s předpokladem, že všechny sektory ovlivňují změny v hodnotě dlužných firem z 80%. Přesné hodnoty zadání jsou obsaženy v příloze.

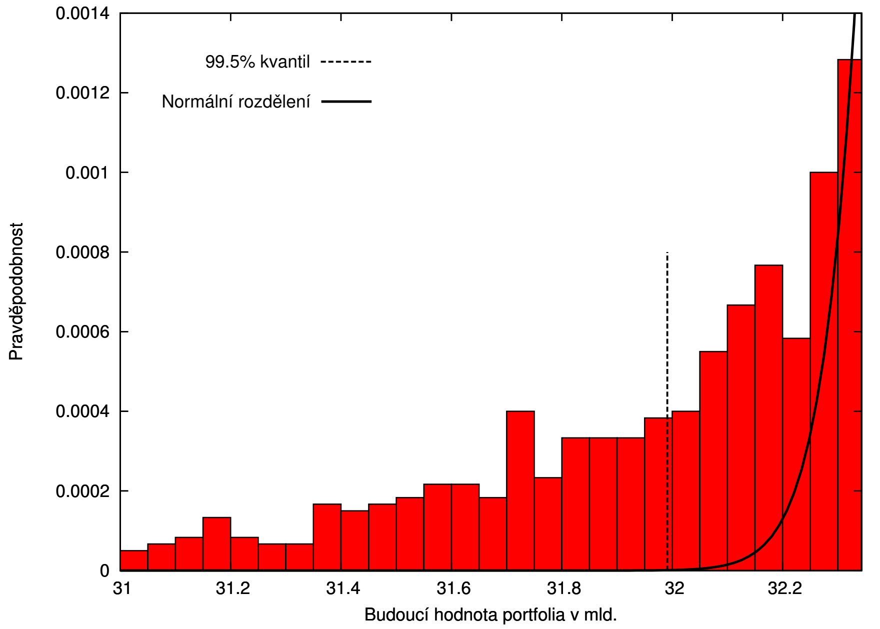
Postupy výpočtu všech metod jsou podrobně popsány v příslušných kapitolách, a proto se nyní budeme zabývat jen jejich výsledky.

6.1 Výsledky modelu CreditMetrics

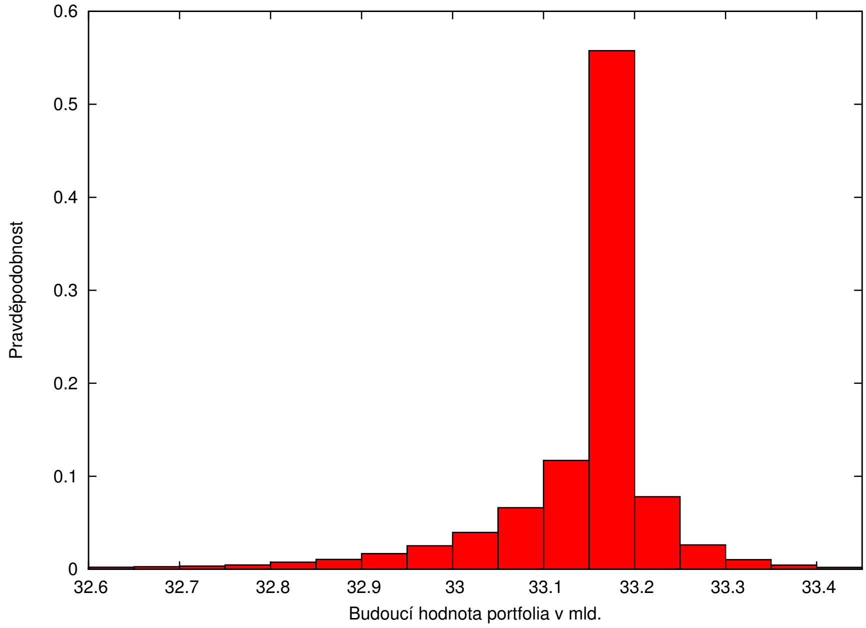
Metodu CreditMetrics řešíme pomocí simulací Monte Carlo. V našem případě simulujeme 60 tis. budoucích scénářů, což je počet, který nám zaručuje stabilní řešení. Histogramy budoucích hodnot jednotlivých portfolií jsou znázorněny na obrázcích (6.1), (6.3) a (6.5). Na obrázcích (6.2), (6.4) a (6.6) jsou detailněji zobrazeny hodnoty těžkých chvostů těchto portfolií.



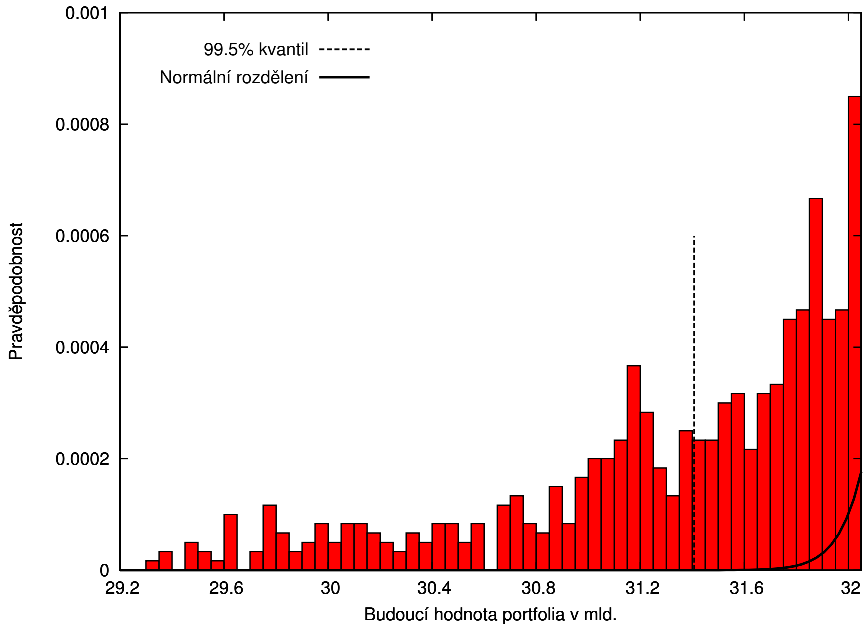
Obrázek 6.1: Histogram budoucích hodnot portfolia A



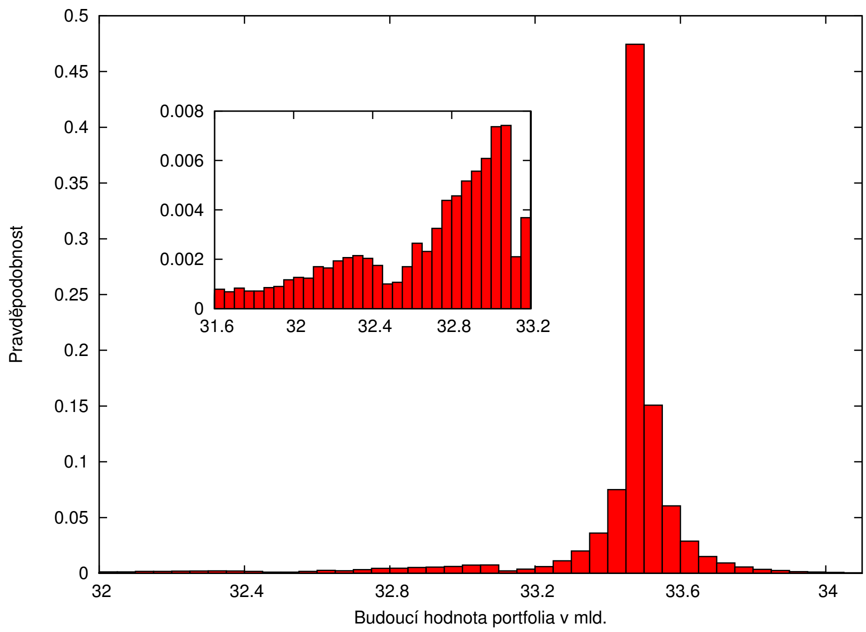
Obrázek 6.2: Detail těžkého chvostu histogramu budoucích hodnot portfolia A od 1% kvantilu



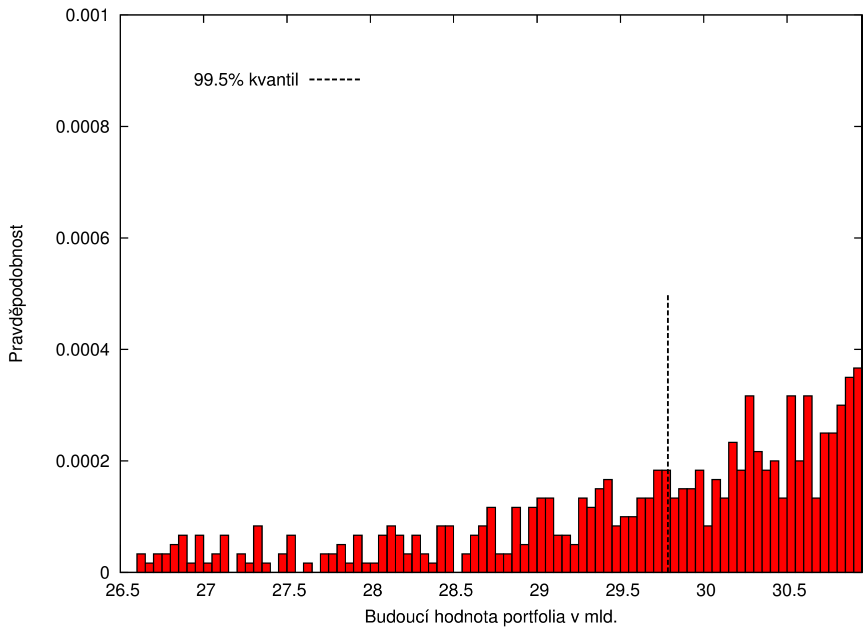
Obrázek 6.3: Histogram budoucích hodnot portfolia B



Obrázek 6.4: Detail těžkého chvostu histogramu budoucích hodnot portfolia B od 1% kvantilu



Obrázek 6.5: Histogram budoucích hodnot portfolia C



Obrázek 6.6: Detail těžkého chvostu histogramu budoucích hodnot portfolia C od 1% kvantilu

Na obrázcích (6.2) a (6.4) je znázorněna hodnota normálního rozdělení. Na obrázku (6.6) nebylo normální rozdělení vykresleno, protože na celém zobrazeném intervalu již splývá s osou x. Svislou přerušovanou čarou je zde také naznačena hodnota 0,5% kvantliu. Velikost intervalů na ose x je vždy 50 mil.. U všech třech zkoumaných portfolií převyšují hodnoty histogramu křivku normálního rozdělení, což potvrzuje náš předpoklad, že rozdělení kreditních výnosů má těžké chvosty.

Nejvyšší sloupec na obrázcích (6.1), (6.3) a (6.5) znázorňuje pravděpodobnost, že všechna portfolia zůstanou na svém původním ratingu.

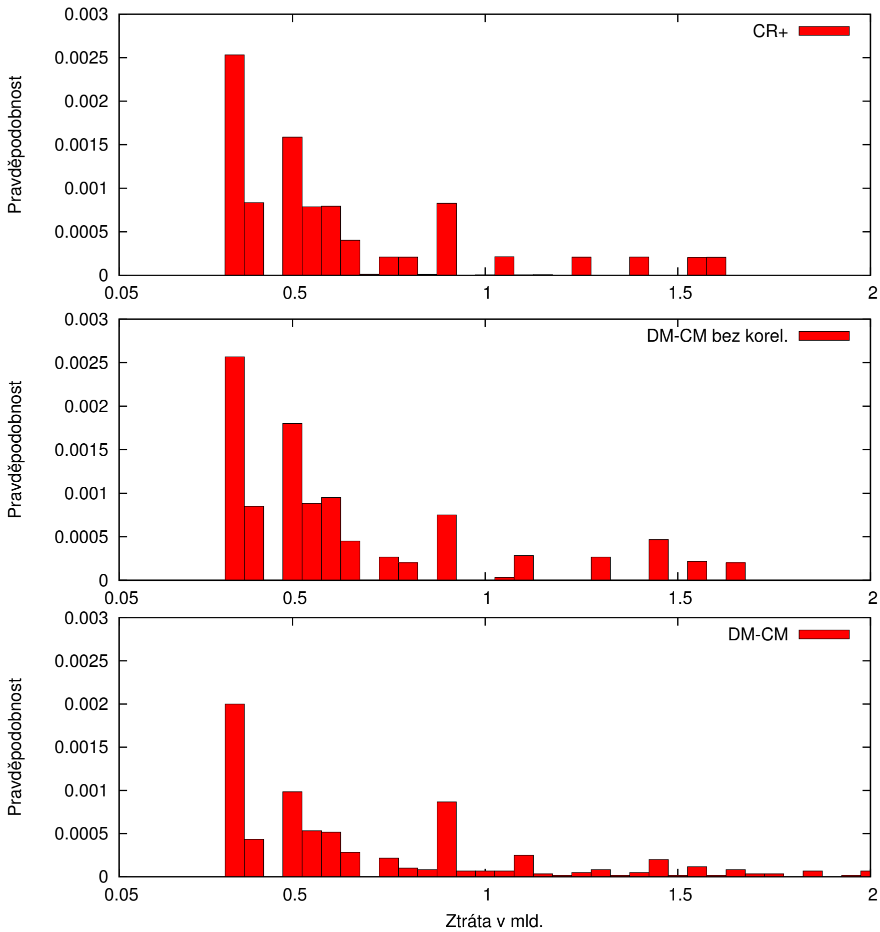
Rozdíl mezi jednotlivými portfolii je patrný vpravo od nejvyššího sloupce. Tato část vyjadřuje pravděpodobnosti výnosů zapříčiněné migrací dlužníků do vyšších ratingových skupin. Z jednotlivých histogramů vidíme, že v případě portfolia s vyšší kreditní kvalitou (PTF A) jsou tyto pravděpodobnosti v podstatě zanedbatelné, zatímco u PTF C jsou výrazné a zaujímají skoro stejně velké procento z budoucích hodnot jako možné ztráty. Výše zmíněné plyne ze skutečnosti, že v případě dluhopisů s horší kreditní kvalitou jsou pravděpodobnosti migrace do vyšších ratingových skupin výrazně větší než pro dluhopisy s lepší kreditní kvalitou.

Hrboly, které jsou vidět na straně ztrát, znázorňují případ, kdy nastane alespoň jeden default. První hrbol poukazuje na default jednoho dlužníka z portfolia a každý následující hrbol vyjadřuje o jeden default víc. Tyto hrboly jsou v portfoliu s horší kreditní kvalitou samozřejmě výraznější, protože tam je pravděpodobnost defaultu vyšší než v portfoliu s lepší kreditní kvalitou. Dobře viditelné jsou na detailním výřezu na obrázku (6.5).

6.2 Srovnání výsledků Default mode modelů

Jak bylo popsáno v kapitole č. 4 "Porovnání modelů CreditMetrics a CreditRisk$^+$", jeden ze základních rozdílů mezi těmito modely je jejich definice ztráty. CreditMetrics je model typu Mark-to-market a CreditRisk$^+$ je Default mode model. Právě z tohoto důvodu je srovnání jejich výsledků komplikované. Upravíme proto model CreditMetrics na Default mode model, a tak budeme moci lépe porovnávat vyčíslené ztráty.

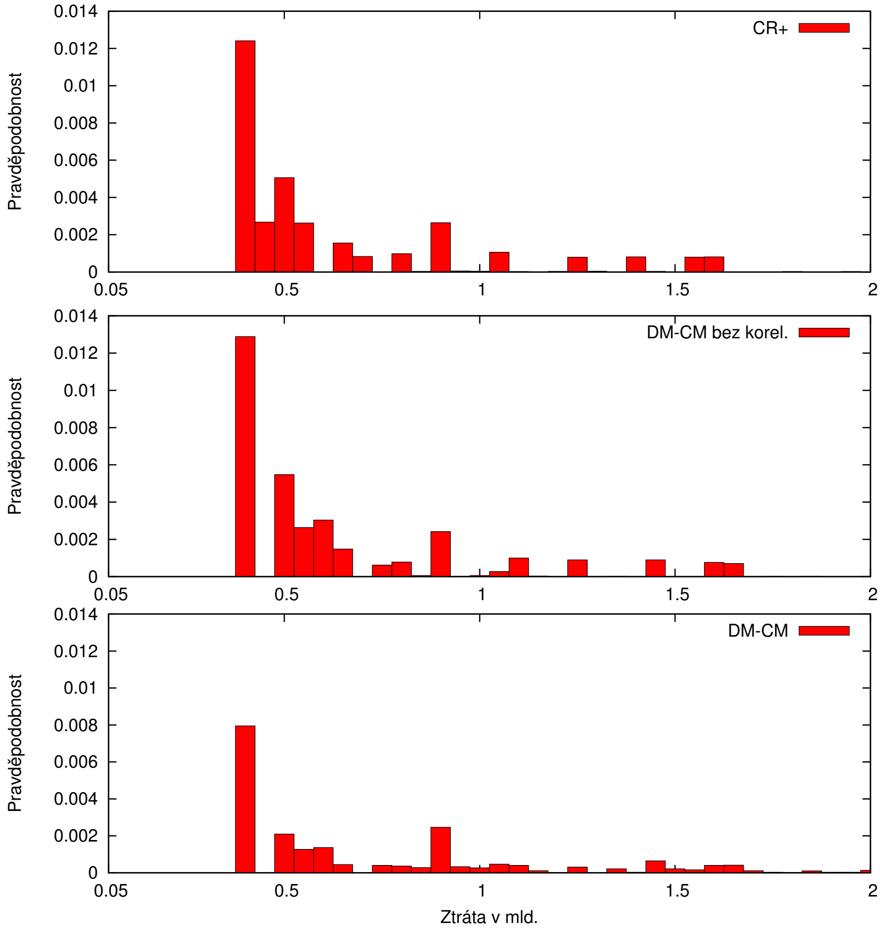
Úprava modelu CreditMetrics bude velice jednoduchá, změníme pouze uvažování budoucích stavů portfolia. Neboli budeme předpokládat jen dvoustavové



Obrázek 6.7: Srovnání rozdělení ztrát portfolia A

prostředí. Buď instrument zůstane v původním ratingu, a dle toho bude i oceňován, a nebo zdefaultuje. Takto upravený model CreditMetrics je již typu Default mode, označme ho DM-CreditMetrics.

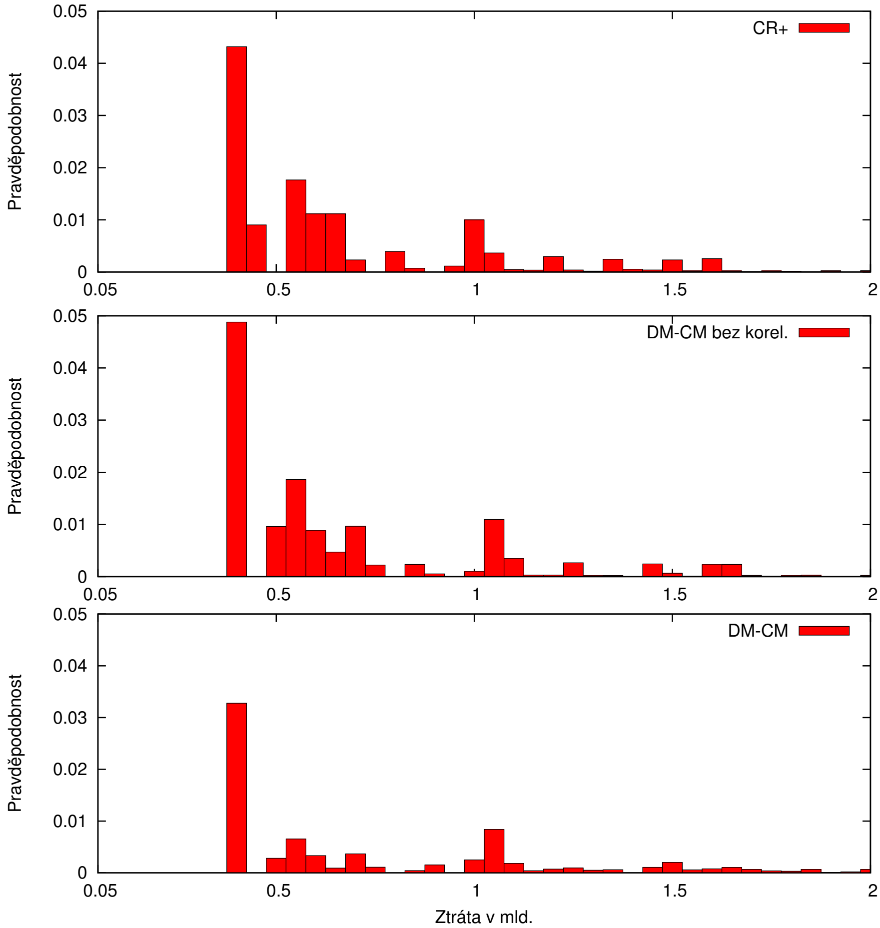
Metoda CreditRisk^{+} určuje pouze rozdělení ztrát, na rozdíl od metody DM-CreditMetrics, která určuje rozdělení hodnot portfolia. Pro srovnání výsledků tedy určíme hodnoty ztrát v metodě DM-CreditMetrics, a to tak, že jednotlivé nasimulované hodnoty portfolia odečteme od hodnoty daného portfolia v případě, že nedojde k žádné změně v ratingu. Tím získáme možné budoucí hodnoty ztrát našeho portfolia. Ty už teď jen oddiskontujeme bezrizikovou úrokovou mírou, jako jsme to dělali v klasické metodě CreditMetrics, abychom určili jejich současnou hodnotu. Máme tak k dispozici možné hodnoty ztrát, které nám určují rozdělení ztrát portfolia a které lze s výsledky z metody CreditRisk^{+} porovnávat.



Obrázek 6.8: Srovnání rozdělení ztrát portfolia B

Dalším podstatným rozdílem mezi zkoumanými metodami je jejich přístup k závislostem mezi jednotlivými dlužníky. Metoda CreditMetrics používá korelace, zatímco metoda CreditRisk$^+$ využívá volatilit defaultních měr a analýzy sektorů.

Srovnání rozdělení ztrát metod CreditRisk$^+$ a DM-CreditMetrics vidíme na obrázcích (6.7), (6.8) a (6.9). Uprostřed těchto obrázků je vždy vložen graf rozdělení ztrát určený také metodou DM-CreditMetrics, ale v tomto případě s nulovými korelacemi mezi jednotlivými dlužníky. Z grafů na všech obrázcích je patrné, že tvar rozdělení ztrát je u všech tří Default mode modelů podobný. Avšak první dva grafy na každém obrázku jsou téměř totožné. Z toho plyne, že pro naše portfolia metoda CreditRisk$^+$ nereflektuje závislosti mezi dlužníky.



Obrázek 6.9: Srovnání rozdělení ztrát portfolia C

6.3 Porovnání výší ekonomického a regulatorního kapitálu

Tabulka (6.1) ukazuje výsledné hodnoty regulatorního a ekonomického kapitálu pro zadané portfolio vypočtené jednotlivými metodami.

Hodnota ekonomického kapitálu (v tabulce (6.1)) je v metodě CreditRisk$^+$ určena jako 99,5% kvantil rozdělení ztrát a ve všech verzích metody CreditMetrics podle vzorce (2.14) ze str. 18, kde $\alpha = 99,5\%$.

	PTF A	PTF B	PTF C
CreditRisk$^+$	484 000 000	1 062 000 000	1 602 000 000
DM-CreditMetrics bez korel.	538 883 348	1 077 415 349	1 563 075 427
DM-CreditMetrics	495 998 240	1 255 746 828	3 200 923 535
CreditMetrics	863 166 797	1 676 222 020	3 533 507 371
Solvency II	1 075 728 676	1 469 667 861	2 409 177 379

Tabulka 6.1: Výsledné hodnoty regulatorního a ekonomického kapitálu

Výsledné ekonomické kapitály vypočtené metodami CreditRisk$^+$ a DM-CreditMetrics bez korelací jsou pro všechna tři portfolia velice podobné. To, jak jsme již psali výše, vyplývá ze skutečnosti, že v metodě CreditRisk$^+$ se v tomto případě závislosti mezi dlužníky neprojevují.

Metoda DM-CreditMetrics pro PTF A a PTF B vede k podobným výsledkům jako zbylé dva default mode modely. Jen hodnota ekonomického kapitálu pro PTF C se výrazně liší. Tento velký rozdíl přikládáme korelacím, které metoda DM-CreditMetrics uvažuje a které u portfolia s horší kreditní kvalitou zapříčiňují větší počet defaultů při horším scénáři. Tyto korelace se u kvalitnějších portfolií tak výrazně neprojevují, protože tam je pravděpodobnost defaultu jen skutečně malá.

Při porovnání hodnot ekonomických kapitálů určených metodami DM-CreditMetrics a CreditMetrics, lze vypozorovat, že se zhoršující kreditní kvalitou portfolia se poměr těchto hodnot snižuje. To je důsledkem skutečnosti, že v portfoliu s dlužníky s dobrým ratingem zaujímají změny v hodnotě způsobené kreditní migrací významnou část a defaulty nastávají jen s malou pravděpodobností. V portfoliu s horší kreditní kvalitou se defaulty vyskytují častěji a mají tak větší váhu na změnu v hodnotě portfolia než změny způsobené migrací.

Z metod pro výpočet výše ekonomického kapitálu pro menší portfolio je tedy vhodnější použití metody CreditMetrics pro její komplexnost. Zahrnuje jak korelace, tak migrace mezi ratingy jednotlivých dlužníků. Význam započítání změny v hodnotě instrumentu při migraci plyne i z počtu takových změn v roce. Dle Standard&Poor's [1] se procento migrací v jednom roce pohybuje mezi 25% a 33% společností s externím ratingem. Další výhodou metody CreditMetrics je, že z nasimulovaných hodnot snadno získáme i hodnoty dalších statistik, a to jejich absolutní i marginální hodnoty, které lze využít například pro určení stanovení výší limitů.

Z tabulky (6.1) je patrné, že regulatorní kapitál určený metodou Solvency II reaguje méně na kvalitu portfolia než metoda CreditMetrics. Neboli u portfolia s lepší kreditní kvalitou (v našem případě PTF A) nadhodnocuje riziko a naopak u méně kvalitního portfolia (PTF C) riziko oproti metodě CreditMetrics podhodnocuje. Tato skutečnost může vést k tomu, že pojišťovny budou motivovány investovat rizikověji. Nevýhodou Solvency II rovněž je, že nebere v úvahu seniority při vypořádání dluhů a dokonce ani korelace mezi jednotlivým dlužníky. Dále Solvency II zanedbává riziko plynoucí z koncentrace protistran z jednoho sektoru, neboli nepenalizuje za větší počet dlužníků, kteří jsou ovlivňováni stejným vnějším faktorem.

Závěr

V této práci jsme se seznámili se dvěma modely, které určují rozdělení budoucích hodnot (resp. ztrát) portfolia vzhledem ke kreditními riziku a jejichž pomocí lze vypočítat výši ekonomického kapitálu, a s navrhovanou metodou pro výpočet regulatorního kapitálu pro pojišťovny. Tyto metody jsme poté aplikovali na třech portfoliích s různou kreditní kvalitou. Mark-to-market metodu CreditMetrics jsme, pro snazší srovnání s metodou CreditRisk$^+$, upravili na Default mode model. Zanalyzovali a graficky jsme vyhodnotili rozdělení budoucích hodnot jednotlivých portfolií dle metody CreditMetrics a srovnali rozdělení ztrát určené Default mode metodami. Nakonec jsme porovnali výsledné hodnoty ekonomického a regulatorního kapitálu.

Ze srovnání metody CreditRisk$^+$ s Default mode verzí metody CreditMetrics jsme zjistili, že pro námi zkoumaná portfolia s malým počtem protistran nereflektuje metoda CreditRisk$^+$ závislosti mezi dlužníky. To vede k podhodnocení výsledné výše ekonomického kapitálu především u portfolií s horší kreditní kvalitou, kde při horším scénáři mohou korelace zapříčinit větší počet defaultů. Zanedbání migrací mezi ratingy se projeví především u portfolií s lepší kreditní kvalitou, a to proto, že u takových portfolií mají kvůli malému počtu defaultů migrace větší váhu. Pro pojišťovny, které pracují s menšími portfolii než například banky, tedy nepovažujeme tuto metodu za příliš vhodnou.

Výpočet výše ekonomického kapitálu pomocí metody CreditMetrics je sice z důvodu využití simulací Monte Carlo časově náročnější, ale takto získané hodnoty, a tudíž i informace o možných výnosech či ztrátách, jsou komplexnější. Metoda CreditMetrics uvažuje totiž jak migrace mezi ratingy, tak korelace mezi jednotlivými dlužníky. V případě pojišťoven bychom proto spíše než metodu CreditRisk$^+$ doporučili metodu CreditMetrics, protože i pro menší portfolia lépe vyhodnocuje skutečnou výši kreditního rizika.

Posledním zkoumaným přístupem k výpočtu výše kapitálu na pokrytí kreditních ztrát je Solvency II, Evropskou unií navrhovaný soubor regulatorních požadavků pro stanovení výše regulatorního kapitálu pro pojišťovny. Velkou výhodou tohoto přístupu je jednoduchost jeho výpočtu. Na druhou stranu zanedbává některé faktory, které kreditní riziko ovlivňují. Solvency II neuvažuje korelace mezi jednotlivými dlužníky ani seniority při vypořádání dluhů. V rámci koncentračního rizika řeší pouze koncentrace vzhledem ke konkrétnímu dlužníkovi, ale chybí zde penalizace za koncentraci dlužníků, kteří jsou ovlivňováni stejným faktorem. Navíc pro kvalitní portfolia je požadován vyšší kapitál než jsou kapitálové požadavky ostatních námi zkoumaných metod. Tato skutečnost může vést k navýšení rizika, které pojišťovny podstupují. Pojišťovny by proto neměly spoléhat pouze na Solvency II, ale podstupovaná rizika paralelně a nezávisle vyhodnocovat.

Seznam použité literatury

[1] *2010 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions* [online], 30. březen 2011. Dostupné z WWW:
http://www.standardandpoors.com/ratings/articles/

[2] Allen, L.: *Credit Risk Modeling of Middle Markets (prezentace)* [online]. Dostupné z WWW:
http://fic.wharton.upenn.edu/fic/allen.pdf

[3] *Business.center.cz* [online], Slovník pojmů. Dostupné z WWW:
http://business.center.cz/business/pojmy/p1960-systematicke-riziko.aspx

[4] Credit Suisse First Boston International: *CreditRisk*$^{+}$ [online], London, 1997. Dostupné z WWW:
http://www.csfb.com/institutional/research/assets/creditrisk.pdf

[5] Gronychová, M.: *Měření kreditního rizika model CreditMetrics (prezentace)* [online], Seminář z aktuárských věd, 21.11.2008. Dostupné z WWW:
http://www.actuaria.cz/upload/Kreditni riziko.pdf

[6] *Choleského dekompozice* Wikipedie - otevřená encykolpedie [online], Wikimedia Foundation, 2011. Dostupné z WWW:
http://cs.wikipedia.org/wiki/Cholesk%C3%A9ho_dekompozice

[7] J. P. Morgan: *CreditMetrics*^{TM} *- Technical Document* [online], New York, 1997. Dostupné z WWW:
http://www.defaultrisk.com/_pdf6j4/creditmetrics_techdoc.pdf

[8] Kadlčáková, N., Sůvová, H.,: *Regulatorní a modelový přístup k úvěrovému riziku v bance*, Bankovnictví: rubrika: Měnová politika [online], 21.3.2002. Dostupné z WWW:
http://www.cnb.cz/cs/verejnost/pro_media/clanky_rozhovory/

[9] Mejstřík, M.: *Bankovnictví (přednáška)*, FSV UK, Praha, 2007

[10] Melchiori, M. R.: *CreditRisk$^+$ by Fast Fourier Transform* [online], červenec 2004. Dostupné z WWW:
http://www.bica.com.ar/Archivos_MRM/CreditRisk+byFFT_versionJuly2004.pdf

[11] Prášková, Z., Lachout, P.: *Základy náhodných procesů*, Karolinum, Praha, 1998

[12] *QIS5 Technical Specifications* [online], Evropská Komise, Brusel, 5. července 2010. Dostupné z WWW:
https://eiopa.europa.eu/consultations/qis/quantitative-impact-study-5/technical-specifications/index.html

[13] Smejkal, V., Rais, K.: *Řízení rizik*, Granda Publishing, Praha, 2003

[14] Smejkal, V., Rais, K.: *Řizení rizik ve firmách a jiných orgaizacích*, Granda Publishing, Praha, 2006

[15] *Směrnice Evropského parlamentu a Rady 2009/138/ES o přístupu k pojišťovací a zajišťovací činnosti a jejím výkonu (Solventnost II)* [online], 25. listopadu 2009. Dostupné z WWW:
http://eur-lex.europa.eu/

[16] *Solvency II* [online], Wikipedia - The Free Encykolopedia, Wikimedia Foundation, 2011. Dostupné z WWW:
http://en.wikipedia.org/wiki/Solvency_II

[17] *Solvency II - draft*, Evropská Komise, 10/2010

[18] *Solvency II – důsledky pro řízení rizik v pojišťovnictví* [online], System Online. Dostupné z WWW:
http://www.systemonline.cz/clanky/

[19] *Towers Watson* [online]. Dostupné z WWW:
http://www.towerswatson.com/solvencyii/about

Přílohy

Protistrana	Expozice	Rating	Durace	Sektor	Nominální hod.
1	2 222 132 198	AA	1,1513	UTILITY	2 286 597 487
2	885 262 760	A	3,8029	ENERGY	1 019 426 403
3	3 431 739 084	AAA	3,2210	INDUSTRL	3 683 481 769
4	1 571 800 232	AAA	3,7272	ENERGY	1 709 125 573
5	1 179 435 815	AA	1,4020	UTILITY	1 221 653 132
6	1 318 278 945	A	1,9836	FINANCE	1 414 036 819
7	725 392 453	A	2,7404	UTILITY	800 782 261
8	726 813 186	A	3,2832	ENERGY	819 627 119
9	527 128 815	BBB	3,7482	UTILITY	627 831 426
10	1 104 536 174	AA	3,7193	FINANCE	1 222 771 103
11	1 575 062 115	AA	2,2713	UTILITY	1 670 617 088
12	1 878 002 519	AA	3,6426	ENERGY	2 074 113 668
13	607 760 381	A	2,7492	UTILITY	671 155 313
14	3 067 578 369	AAA	2,1966	FINANCE	3 212 223 273
15	2 393 265 873	AA	2,7062	ENERGY	2 570 200 405
16	788 659 225	A	2,8554	ENERGY	874 522 429
17	959 363 941	AA	3,0477	UTILITY	1 040 657 931
18	2 114 890 919	AA	3,8188	FINANCE	2 348 522 800
19	4 096 639 453	AAA	3,3181	INDUSTRL	4 407 933 245
20	940 281 413	AA	2,6273	ENERGY	1 007 495 689

Tabulka 6.2: Dluhopisy z portfolia A

Protistrana	Expozice	Rating	Durace	Sektor	Nominální hod.
1	2 222 132 198	A	1,1513	UTILITY	2 312 295 394
2	885 262 760	BBB	3,8029	ENERGY	1 057 289 628
3	3 431 739 084	AA	3,2210	INDUSTRL	3 741 831 323
4	1 571 800 232	AA	3,7272	ENERGY	1 740 477 141
5	1 179 435 815	A	1,4020	UTILITY	1 238 389 078
6	1 318 278 945	BBB	1,9836	FINANCE	1 441 239 445
7	725 392 453	BBB	2,7404	UTILITY	822 126 969
8	726 813 186	BBB	3,2832	ENERGY	845 856 284
9	527 128 815	BB	3,7482	UTILITY	650 587 381
10	1 104 536 174	A	3,7193	FINANCE	1 267 612 028
11	1 575 062 115	A	2,2713	UTILITY	1 707 818 918
12	1 878 002 519	A	3,6426	ENERGY	2 148 583 936
13	607 760 381	BBB	2,7492	UTILITY	689 103 366
14	3 067 578 369	AA	2,1966	FINANCE	3 246 872 756
15	2 393 265 873	A	2,7062	ENERGY	2 638 510 896
16	788 659 225	BBB	2,8554	ENERGY	898 821 924
17	959 363 941	A	3,0477	UTILITY	1 071 847 614
18	2 114 890 919	A	3,8188	FINANCE	2 436 984 132
19	4 096 639 453	AA	3,3181	INDUSTRL	4 479 872 539
20	940 281 413	A	2,6273	ENERGY	1 033 484 219

Tabulka 6.3: Dluhopisy z portfolia B

Protistrana	Expozice	Rating	Durace	Sektor	Nominální hod.
1	2 222 132 198	BBB	1,1513	UTILITY	2 338 030 883
2	885 262 760	BB	3,8029	ENERGY	1 096 179 375
3	3 431 739 084	A	3,2210	INDUSTRL	3 860 436 908
4	1 571 800 232	A	3,7272	ENERGY	1 804 440 040
5	1 179 435 815	BBB	1,4020	UTILITY	1 255 190 130
6	1 318 278 945	BB	1,9836	FINANCE	1 468 699 073
7	725 392 453	BB	2,7404	UTILITY	843 829 532
8	726 813 186	BB	3,2832	ENERGY	872 663 543
9	527 128 815	B	3,7482	UTILITY	673 942 308
10	1 104 536 174	BBB	3,7193	FINANCE	1 313 643 526
11	1 575 062 115	BBB	2,2713	UTILITY	1 745 479 937
12	1 878 002 519	BBB	3,6426	ENERGY	2 224 975 131
13	607 760 381	BB	2,7492	UTILITY	707 353 871
14	3 067 578 369	A	2,1966	FINANCE	3 316 779 755
15	2 393 265 873	BBB	2,7062	ENERGY	2 707 954 958
16	788 659 225	BB	2,8554	ENERGY	923 555 930
17	959 363 941	BBB	3,0477	UTILITY	1 103 659 269
18	2 114 890 919	BBB	3,8188	FINANCE	2 527 881 049
19	4 096 639 453	A	3,3181	INDUSTRL	4 626 205 053
20	940 281 413	BBB	2,6273	ENERGY	1 059 883 948

Tabulka 6.4: Dluhopisy z portfolia C

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default	Volatilita
AAA	90,87	8,35	0,56	0,05	0,08	0,03	0,05	0,00	0,00
AA	0,59	90,15	8,52	0,55	0,06	0,08	0,02	0,02	0,08
A	0,04	1,99	91,64	5,64	0,40	0,18	0,02	0,08	0,12
BBB	0,01	0,14	3,96	90,50	4,26	0,71	0,16	0,27	0,27
BB	0,02	0,04	0,19	5,79	83,97	8,09	0,84	1,05	1,05
B	0,00	0,05	0,16	0,26	6,21	82,94	5,06	5,32	3,31
CCC	0,00	0,00	0,22	0,33	0,97	15,20	51,25	32,03	12,69

Tabulka 6.5: Matice pravděpodobností přechodu mezi ratingy a směrodatná odchylka pravděpodobnosti defaultu. [1]

Rating	Recovery rate	Kreditní spread
AAA	30%	0,50%
AA	30%	1,00%
A	30%	2,00%
BBB	30%	3,00%
BB	20%	4,00%
B	20%	5,00%
CCC	10%	6,00%

Tabulka 6.6: Zadané hodnoty recovery rates a kreditních spreadů

počet let	úroková míra
1	1,50%
2	1,60%
3	1,70%
4	1,80%

Tabulka 6.7: Spotové bezrizikové úrokové míry

	ENERGY	FINANCE	INDUSTRL	UTILITY
ENERGY	1	0,532284934	0,864163674	0,911898854
FINANCE	0,532284934	1	0,81380119	0,636340607
INDUSTRL	0,864163674	0,81380119	1	0,874859645
UTILITY	0,911898854	0,636340607	0,874859645	1

Tabulka 6.8: Korelace mezi jednotlivými sektory