Pedagogická fakulta UK v Praze

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Rozšíření pojmu shodné zobrazení na základní škole či nižším gymnáziu

Extending the Term of Congruence in Higher Primary School and/or Lower High School

Jitka Šrailová

Vedoucí práce: RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.

V Praze 2006

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně s použitím uvedené literatury.

V Ejpovicích dne 10.4. 2006

Obsah

Úvod

Se skládáním shodných zobrazení jsem se poprvé setkala v prvním ročníku vysoké školy. Bylo to zajímavé rozšíření a propojení znalostí ze školy střední a základní, poznatky se najednou dostaly do souvislosti a získaly nový rozměr. Současně mě napadlo, že by tuto látku, nebo přesněji její základy, zejména skládání dvou osových souměrností, byli schopni pochopit i žáci mnohem mladší.

Když jsem začala přemýšlet o rozpracování rozšiřujícího učiva pro nadané děti jako o možném tématu své diplomové práce, rozhodla jsem se vrátit se po několika letech k myšlence z prvního ročníku a ověřit svou domněnku v praxi. Dokáží žáci základní školy či nižšího gymnázia skutečně pochopit skládání osových souměrností a může to pro ně mít nějaký přínos? Lze tuto látku efektivně využít při výuce dalších shodných zobrazení jakožto rozšiřujícího učiva na základní škole, respektive na nižším gymnáziu? Domnívám se, že ano, jsem přesvědčená, že se toto učivo dá velmi názorně vyložit a je vhodné k experimentování a konstruktivnímu vyučování. Umožní žákům, aby sami s pomocí učitele objevovali nové, neznámé s použitím starého a známého.

Poté, co jsem se rozhodla zabývat se ve své diplomové práci rozšířením pojmu shodné zobrazení na základní škole či nižším gymnáziu, seznámila jsem se nejprve s názory některých českých odborníků na tuto problematiku publikovaných v knihách zabývajících se geometrií či didaktikou geometrie. Jejich autoři se shodují v tom, že je vhodné věnovat se geometrii přesto nebo právě proto, že je řadou učitelů neoblíbená a zanedbávaná, což se v začarovaném kruhu přenáší z generace na generaci. Zdůrazňují význam geometrie jako části matematiky, která rozvíjí celou řadu důležitých schopností a upozorňují na nutnost hledat nové přístupy a pozitivní vztah k ní. V této literatuře se objevuje i zdůvodnění, proč se ve škole zabývat studiem geometrických transformací. Dále je zde čtenář seznámen s principy a přínosem problémového vyučování. Zmíněna je i problematika skládání zobrazení na základní škole. Tyto názory mě silně podpořily v přesvědčení, že rozhodnutí zabývat se v mé diplomové práci novými přístupy k problematice shodných zobrazení je správné.

Poté jsem začala sbírat informace o tom, jak vypadá výuka shodných zobrazení v současné české škole. Prvním zdrojem těchto informací byly učební osnovy a učebnice. V učebních osnovách pro základní školu (vzdělávací program Základní škola) se jako povinné učivo ze shodných zobrazení objevuje pouze středová a osová souměrnost, jako možné rozšiřující učivo je uvedena rovinová souměrnost a středová souměrnost v prostoru a další shodná zobrazení, tedy posunutí a otočení.

Způsob, jakým jsou shodná zobrazení v českých učebnicích zavedena a definována, jakožto i náročnost a kreativita úloh se často výrazně liší. V prostudovaných učebnicích jsem se setkala s celou řadou různých přístupů k tomuto tématu, v několika z nich jsem dokonce našla náznak skládání osových souměrností. To mě znovu motivovalo zabývat se tímto tématem a vyzkoušet možnost využití skládání osových souměrností při výuce dalších shodných zobrazení, tj. otočení a posunutí.

V této práci tedy nejprve představím názory některých našich odborníků na danou problematiku. Poté se pokusím zmapovat výuku shodných zobrazení na základní škole a nižším gymnáziu na základě prostudování současných českých učebnic a zhodnotit, do jaké míry se v nich názory odborníků promítají do praxe. Vzhledem k tomu, že jsem při psaní diplomové práce strávila jeden semestr na univerzitě v Heidelbergu, zajímalo mě, jak je toto téma podáváno v německé škole. Nahlédla jsem do německých učebnic a zahrnula je do své práce. S překvapením jsem zjistila, že se v německých učebnicích pro osmou třídu objevuje skládání dvou osových souměrností s rovnoběžnými a různoběžnými osami. Toto zjištění mě utvrdilo v přesvědčení, že úvahy o možnostech využití skládání osových souměrností ve škole nejsou scestné.

Další součástí mé diplomové práce je příprava a realizace experimentální výuky, která představuje možné rozšíření pojmu shodná zobrazení s využitím skládání osových souměrností. Při přípravě této experimentální výuky jsem se inspirovala českými i německými učebnicemi, samozřejmě s ohledem na rozdíly v českém a německém školském systému. Pro účely experimentální výuky jsem pro žáky sestavila učební text, který je rovněž součástí práce. Nakonec následuje vyhodnocení výsledků experimentální výuky na základě závěrečného testu, který žáci vypracovali.

V závěru této práce se zamyslím nad výsledkem a smyslem zpracování tohoto tématu jako celku a navrhnu změny, které by v experimentální výuce bylo nutno provést, aby byla vhodná pro výuku žáků nadaných pro matematiku, a jakých změn by musela doznat pro využití na běžné základní škole.

1. kapitola

Shodná zobrazení ve škole

Na začátku této kapitoly věnované shodným zobrazením ve škole nejprve uvedu názory několika českých odborníků na problematiku výuky školské geometrie. Zaměřím se zde zejména na otázky související s tématem mojí práce, tj. na výuku shodných zobrazení ve škole, možnosti využití jejich skládání a přístupy, kterých lze při výuce použít. Pokusím se zde zodpovědět otázky, které se nabízejí v souvislosti s volbou tématu této práce, a najít v literatuře zdůvodnění, proč je zajímavé a přínosné zabývat se právě tímto tématem a proč se pokusit o jeho rozpracování zrovna výše zmíněným způsobem.

V dalších podkapitolách se budu zabývat zpracování tohoto tématu v současných českých a německých učebnicích. Nakonec této kapitoly zhodnotím, do jaké míry se názory odborníků v těchto učebnicích odrážejí.

1.1 Názory odborníků na význam a zpracování tohoto tématu

Jak již bylo řečeno v úvodu, v rozhodnutí zabývat se v diplomové práci rozšířením tématu shodné zobrazení na základní škole či nižším gymnáziu mě utvrzují názory některých odborníků na toto téma. Dávají odpověď na následující otázky týkající se volby tématu mé diplomové práce a experimentální výuky: „Proč zvolit téma z geometrie?“, „Proč se snažit o konstruktivistický přístup a problémové vyučování?“, „Proč věnovat pozornost právě shodným zobrazením?“ a „Čím může být pro žáky problematika skládání zobrazení přínosná?“.

Jak F. Kuřina v knize [37], tak M. Hejný v knize [33] vyjadřují názor, že geometrie je důležitou součástí školské matematiky, která se podílí na rozvoji celé řady důležitých psychických funkcí. M. Hejný uvádí, že jsou to například „predstavivosť, kombinačné schopnosti, pamäť, tvorivosť, schopnosti argumentácie, schopnosti abstrakce atď. ([33], s. 324).“ F. Kuřina zdůrazňuje význam geometrie pro nacházení nového způsobu vidění věcí: „Geometrické útvary lze obvykle vymodelovat či nakreslit, geometrické úvahy souvisejí s představivostí, s uměním vidět dosud neformulované souvislosti. ... Geometrie, kterou budeme studovat, je názorná: jedním z cílů geometrie je rozvíjení geometrické představivosti ([37], s. 10).“

Navzdory těmto tvrzením si matematici a didaktici přiznávají skutečnost, že geometrie je sice podstatnou, ale mnoha učiteli neoblíbenou a „zanedbávanou složkou školské matematiky ([37], s. 12)". F. Kuřina na tomto místě apeluje na současné i budoucí učitele: „Příčinou je jakýsi začarovaný kruh, který můžete rozetnout i vy, najdete-li ke geometrii kladný vztah, který budete dále pěstovat. Je třeba si uvědomit, že geometrická fakta nejsou to nejdůležitější, co vám může geometrie dát (i když tuto stránku vzdělání nelze podceňovat). Důležitější než obsah geometrického vzdělávání je formativní význam této disciplíny ([37], s. 12)."

Z výše napsaného tedy vyplývá, že pokud se má situace ve výuce geometrie změnit, je nutné se geometrii nevyhýbat, naopak jí věnovat více pozornosti, hledat k ní pozitivní vztah a zaměřit se při její výuce zejména na rozvíjení výše zmíněných schopností.

Další otázka se týkala problémového vyučování ve výuce geometrie. F. Kuřina se v knize [35] vyjadřuje k různým možným pojetím školské geometrie, formuluje pak svůj názor na ně a zdůrazňuje, že: „Žák základní školy má spíše zájem něco nového se dozvědět nebo sám objevit, než pořádat velké množství poznatků do systému ([35], s. 19)." Jak napovídá název, je v publikaci [35] kladen důraz na problémové vyučování v geometrii a v matematice vůbec. Tento pojem je zde definován následovně: „Problémovým vyučováním rozumíme takový systém vyučování, kdy žák samostatným zkoumáním dané problémové situace, formulací a řešením úloh dospívá k pochopení a tvorbě matematických pojmů a postupů a k řešení problémů ([35], s. 14)." Průběh problémového vyučování je zde dále blíže vysvětlen a zároveň je zdůvodněn jeho přínos: „Problémové vyučování je pracovní úsilí, které se často opírá o experiment. Je prací, která vychází z žákových zkušeností, při níž žák formuluje domněnky, konstruuje příklady a protipříklady. Mnohdy přitom dochází samostatně i k otázce důkazu matematických poznatků. Matematika nejenže zde není žáku vnucována; řešení vhodných problémů naopak vede k vytváření matematického aparátu, matematika vzniká z potřeb řešení úloh. Problémovým vyučováním lze rozvíjet systematicky žákovy schopnosti pozorovat fakta a vyvozovat z nich důsledky, problémové vyučování vede k žáka k samostatnosti myšlení. ([35], s. 15)." Kuřina zde dále zdůrazňuje význam experimentu, který může mít ráz hry a přináší do matematiky přirozenou hravost, která jí ve školním podání často chybí a je nahrazována heslem „'Uč se, budeš to jednou potřebovat', které je málo povzbudivé pro žáky a bohužel není ani pravdivé ([35], s. 11)."

Autor si je vědom předností, ale také jistých mezí problémového vyučování: „Jsem přesvědčen, že při problémovém vyučování lze dosáhnout některých lepších výsledků v práci školy, je však třeba počítat s časovými nároky, které problémové vyučování s sebou přináší. Některá témata vhodná pro problémové zpracování lze najít ovšem i v matematice, kterou se žáci základní školy učí podle současných osnov ([35], s. 17)."

Kniha [34] M. Jelínka mi dala odpověď na otázku, proč je zajímavé zabývat se právě shodnými zobrazeními. Podle autora tato publikace, která je pátým svazkem matematické knižnice *Nové směry ve školské matematice*, navazuje na předchozí svazky a pokračuje ve „studiu množin bodů, ale jiným způsobem než doposud ([35], s. 7)." Změna spočívá v tom, že studiem transformací „vneseme do geometrie pohyb. ... Pohybem se ozřejmí nové vlastnosti množin a brzy poznáme, že transformace mají široké užití v praxi ([35], s. 7)." Dále zde autor zmiňuje různé možné přístupy k této problematice, upozorňuje, že v publikaci se bude často pracovat „experimentálně, asi tak jako pracuje fyzik nebo chemik. Např. z papíru vystřihneme nějaký obrazec, který budeme přemisťovat... . Pokusy budou jednoduché (zpravidla stačí nůžky a kus papíru), ale pro porozumění věci značně důležité. Pohyby geometrických útvarů se dají také studovat pomocí konstrukcí. Narýsovaný obrazec se přemístí pomocí konstrukce podle určitých pravidel, a pak se vyšetří jeho nové vlastnosti ([35], s. 7 - 8)." Tímto poskytuje vlastně i jistý návod, jak je podle něj možné či vhodné při výuce geometrických transformací postupovat. Autor dospívá k závěru, že cílem studia transformací je fakt, že: „Místo přemístěných obrazců začneme studovat transformace samotné. Poznáme, že je můžeme považovat za nové matematické objekty asi tak, jako jsou čísla, množiny a funkce. Poznáme, že je můžeme skládat neboli že s nimi můžeme provádět operace a že tyto operace mají zajímavé vlastnosti ([35], s. 8)." Tolik tedy k otázce, zda a proč je zajímavé věnovat se v rozšiřujícím učivu právě geometrickým transformacím, v tomto případě přesněji shodným zobrazením a jejich skládání.

Za zmínku ještě stojí kniha [38] J. Šedivého. Jedná se sice o knihu o modernizaci matematiky, která syntetické geometrii příliš nepřála, a spíše se snažila geometrii popsat pomocí matematických struktur. Objevuje se zde ale zajímavý příklad hry, jejímž výsledkem je grupa zobrazení. Tento příklad je zde sice uveden v kontextu, který s mou prací nesouvisí, nicméně podíváme-li se na něj z jiného úhlu, vidíme, že se jedná o krásný příklad skládání zobrazení, který bez problémů hravým způsobem dokáží pochopit žáci základní školy. Zadání úlohy vychází z následující situace: „Předpokládejme, že si žáci osvojili provádění obratu na místě podle povelů 'Vpravo v bok! '. 'Vlevo v bok!', 'Čelem vzad!', že dovedou napsat písmena P, L, Č a chápat je jako symboly pro uvedené povely. Představme si na stupínku stojícího žáka, kterého spolužáci prohánějí namátkou volenými povely, např. PČLLPLČ. Žák zacvičil tuto sérii obratů na místě, nakonec včas stojí v takové poloze vzhledem ke třídě, kterou mohl zaujmout po jediném povelu 'Vlevo v bok!', můžeme proto napsat PČLLPLČ = L. Vybídneme-li žáky, aby napsali na tabuli dlouhou sérii povelů, jistě se dají s elánem do psaní a napíší třeba přes celou tabuli řádek písmen PČLLPLČLPPČLČPLLPČČPLPČLČPLČ. Jak se však dozvědí, kterým jednoduchým povelem lze celou sérii povelů nahradit ([38], s. 14)?" Je samozřejmě možné nechat žáky všechny povely provést, tato cesta k výsledku je však poměrně zdlouhavá. Naším cílem je dovést žáky k tomu, že si mohou zjednodušit práci, když si uvědomí, že jisté dvojice povelů mají vždy stejný výsledek, a je tedy možné dlouhý povel rozdělit na řadu dvojic povelů a zápis zjednodušit. Žáci si podle autora při takovém řešení uvědomí, že: „Je vhodné nahrazovat zdlouhavou tělesnou činnost myšlením. Uvědomí si též výhodu symbolického zápisu ... Přitom vycházejí od konkrétních situací a učí se je matematizovat. Na rozvíjení této dovednosti se klade veliký důraz, protože představuje to nejcennější, co může vyučování žákům dát ([38], s. 15)."

Domnívám se, že tento příklad ukazuje, že zabývat se na základní škole problematikou skládání zobrazení je nejen možné, ale i přínosné, důležité je ale přitom, aby toto vycházelo z reálné situace, či ze situace, kterou lze dobře modelovat. Je zde tedy důležitá vazba na reálný svět. Tuto vazbu zdůrazňuje i F. Kuřina v knihách [36] a [37]: „Původ geometrie v řešení praktických problémů není třeba zastírat; naopak – budeme ho při různých příležitostech připomínat. Může to sloužit jak k motivaci geometrických otázek, tak k prověření úrovně porozumění geometrickým vztahům ([37], s. 12)." V knize [36], která je doplněna řadou autorových fotografií, zdůrazňuje, že považuje „za důležité všímat si prvků geometrie v přírodě, technice a umění ([36], s. 6)".

Shrneme-li tedy stručně hlavní myšlenky této podkapitoly, můžeme konstatovat, že existuje celá řada důvodů, proč se zabývat právě problematikou shodných zobrazení a jejich skládání. Je žádoucí věnovat pozornost geometrii jakožto disciplíně, která je sice důležitá, ale ve škole často neoblíbená a zanedbávaná, a hledat k ní nové přístupy. Při tomto hledání se nabízí možnost využít problémového vyučování, samozřejmě s ohledem na jeho možnosti a meze. Studium geometrických transformací, jak se zdá, může přinést nový úhel pohledu na geometrii a vnést do ní pohyb. Problematika skládání zobrazení může být pro žáky základní školy přínosná, je však zřejmé, že je při výkladu nutné klást důraz na modelování, experimentování a vazbu na reálný svět.

1.2 Shodná zobrazení v současných učebnicích

Jak již bylo řečeno, v následujících podkapitolách se budu zabývat tím, jak je problematika shodných zobrazení pojata v současných učebnicích pro základní školu a odpovídající ročníky nižšího gymnázia. Budu se věnovat především zpracování povinného učiva, které najdeme ve všech používaných učebnicích, tj. zejména pojmu shodnost, osová a středová souměrnost a shodné zobrazení. Přitom se zaměřím na rozdíly v pojetí tohoto tématu v různých učebnicích a na úlohy související s problematikou skládání osových souměrností.

Dále zmíním učivo, které se neobjevuje ve všech učebnicích, například pojem přímé a nepřímé shodnosti, shodnost v prostoru, samodružné body a přímky. Následně se budu zabývat problematikou zavedení dalších shodných zobrazení (otočení a posunutí), zejména různými přístupy k tomuto tématu, pořadím, v jakém jsou shodná zobrazení prezentována, používanou terminologií, příklady z praxe, motivací žáků a v neposlední řadě i grafickým zpracováním.

Nakonec porovnám přístup českých učebnic a německých učebnic používaných v Bádensku-Wurttembersku a upozorním v nich na úlohy, které mě utvrzují v přesvědčení zavést další shodná zobrazení již na základní škole a využít k tomu skládání osových souměrností.

1.2.1 Shodnost

Před zaváděním shodných zobrazení autoři učebnic většinou nejprve opakují pojem shodnosti. Ta bývá demonstrována na reálných příkladech, jako je obkreslování šablony ([8]), porovnávání stejných předmětů či obrazů, jako jsou vázy, krejčovské střihy, otisky prstů ([5]). Téměř ve všech učebnicích se objevuje vystříhávání a porovnávání rovinných útvarů, jejich překreslování na průsvitku, dále pak odhad, který je ověřován pomocí průsvitky nebo měření. V některých učebnicích má shodnost pouze 'plochou podobu', v jiných je představa shodnosti rozšířena i do prostoru. Na základě těchto přístupů najdeme v učebnicích dvě základní 'definice' shodných útvarů. První z nich říká: „Shodné útvary jsou takové útvary, které se po přemístění kryjí ([8], s. 24)." Druhá definice zní: „Dva geometrické útvary jsou shodné, jestliže mají stejný tvar a velikost ([2], s.113)." V některých učebnicích se objevuje jen jedna z těchto 'definic', v ostatních se obě pojetí shodnosti více či méně doplňují (slovo 'definice' je uvedeno v uvozovkách, protože se nejedná o přesnou matematickou definici, dále ale uvozovky používat nebudeme).

První z definic sice vytváří plochou a do prostoru těžko přenosnou představu shodnosti, na druhou stranu pro shodnost v rovině ji považuji za velmi názornou. O. Odvárko a J. Kadleček v učebnici [8] pro šestý ročník upozorňují na fakt, že někdy nestačí posouvat průsvitkou po papíře, ale je třeba ji zvednout a otočit, čímž připravují pojem přímé a nepřímé shodnosti.

Druhá definice je podle mého názoru obecnější a lze ji použít jak pro shodnost v rovině, tak i pro shodnost v prostoru, nicméně je sama o sobě méně přesná, jasná a názorná než definice první. Je otázkou, co si žáci představí po pojmem „stejný tvar". Zda budou i dva nepřímo shodné útvary považovat za útvary, které mají stejný tvar nebo ne, a tudíž dojdou k závěru, že nejsou shodné. Toto je v učebnicích pracujících s touto definicí poměrně dobře ošetřeno. J. Coufalová a kol. v knize [2] hned za definicí shodných útvarů jako útvarů, jež mají stejný tvar a velikost, dodává: „To lze zjistit přenesením jednoho rovinného obrazce na druhý. Abychom je nemuseli vystřihovat ze sešitu, používáme průsvitku ([2], s. 113)." A později v textu upozorňuje, že je v některých případech „nutné průsvitku obrátit" ([2], s. 114). Tím je sice zajištěno chápání nepřímé shodnosti jako shodnosti, nicméně se úvahy opět omezí pouze na rovinu.

Líbí se mi, jak se s tímto problémem vypořádali J. Trejbal a kol. v knize [11] pro šestý ročník. Zde se v kapitole týkající se shodnosti geometrických obrazců píše: „V životě kolem nás nalézáme obrázky nebo předměty, které mají stejný tvar a stejnou velikost. ... Nebereme přitom v úvahu jejich barvu nebo nápisy na nich. V praxi hovoříme o stejných předmětech, v matematice budeme hovořit o shodných rovinných nebo prostorových útvarech ([11], s. 7)." Dále je kladena otázka, jak poznáme, že dva obrazce jsou shodné. Autoři v nabízené odpovědi sice využívají průsvitku, ale zároveň také druhou definici shodnosti, a tvrdí: „Jestliže se oba obrazce po přemístění kryjí, řekneme, že mají stejný tvar i stejnou velikost. V matematice řekneme, že obrazce jsou shodné ([11], s. 8)." Hned poté následuje příklad, v němž jsou žáci upozorněni na nutnost průsvitku „překlopit lícem na rub", a poté definice přímé a nepřímé shodnosti. Autoři se tedy také doposud věnovali pouze shodnosti v rovině, v následujícím odstavci je ale pozornost věnována shodnosti v prostoru. Je zde vysvětleno, že „rozhodovat o shodnosti obrazců pomocí průsvitky můžeme jen u rovinných obrazců", zatímco „o shodnosti prostorových útvarů (například vyrobených součástek automobilů) se lze přesvědčit měřením ([11], s. 8)." Toto tvrzení je podloženo praktickým příkladem: není sice možné přemístit dva automobily téže značky na sebe tak, aby se kryly, ale kdyby nebyly shodné, nebylo by možné vyměňovat vadné součástky za náhradní. Zavedení pojmu shodnosti v této učebnici mě zaujalo tím, že je přesné a jasné a přitom neomezuje děti na shodnost v rovině ověřovanou pomocí průsvitky, ale upozorňuje je i na shodnost v prostoru, která je v praktickém životě běžná. V této učebnici se dále objevují tvrzení o shodnosti přímek, polopřímek, úseček, úhlů, čtverců a kružnic. Tato tvrzení jsou prezentována ve formě schémat propojených šipkami zprava doleva a zleva doprava, která nahrazují použití spojky „právě tehdy když“.

Podobná tvrzení o shodnosti těchto geometrických útvarů se objevují i v učebnici [3] autorů J. Hermana a kol. pro nižší gymnázium. Zde jsou věty, které je možno vyslovit ve tvaru ekvivalence, názorněji vyřčeny pomocí dvou implikací, například: „Jestliže jsou dvě úsečky shodné, pak mají stejnou délku. Jestliže mají dvě úsečky stejnou délku, pak jsou shodné ([3], s. 15).“ Pozitivní je, že je v obou učebnicích při výkladu shodnosti na jedné straně dbáno na matematickou přesnost, na druhou stranu se tak neděje na úkor srozumitelnosti pro žáky.

Dalším zajímavým přístupem k tématu shodnost je využití čtvercové sítě a soustavy souřadnic v knize [11] autorů J. Trejbala a kol. Při zakreslování shodných útvarů do čtvercové sítě, mohou žáci, aniž by museli rýsovat, aplikovat a procvičit si dosavadní poznatky o shodnosti. V této knize mě zaujala úloha 14 ([11], s. 11, úloha 14). Žáci mají za úkol zakreslit v soustavě souřadnic body, jejichž vhodným spojením vznikne obraz parníku. Poté mají najít souřadnice těchto bodů, jestliže parník změní svoji polohu. Různé změny polohy jsou zde popsány slovně, parník o několik jednotek „odpluje“ doprava či doleva nebo „se potopí“ Na této úloze oceňuji, že vede žáky k tomu, aby slovní popis převedli na matematickou úlohu, propojuje poznatky z různých oblastí a zároveň připravuje půdu pro zavedení posunutí.

1.2.2 Osová souměrnost

Po zopakování pojmu shodnosti přichází ve většině učebnic na řadu osová souměrnost. Ta patří, jak již bylo výše řečeno, k povinnému učivu, které je probíráno v šesté třídě základní školy, respektive v primě gymnázia. Osová souměrnost se kromě knihy [7] objevuje ve všech učebnicích pro šestou třídu, které jsem prostudovala. J. Novotná a kol. toto téma zařazují spolu se středovou souměrností až v učebnici [15] pro sedmý ročník.

I k osové souměrnosti přistupují autoři jednotlivých učebnic různě. Rozdíly se týkají zejména postupu při zavedení pojmu osové souměrnosti. Někteří autoři nejprve probírají osovou souměrnost, konstrukci obrazu v osové souměrnosti a teprve pak se věnují osově souměrným obrazcům jako speciálním případům obrazců sdružených podle osy. Jiní postupují opačně, začínají výklad od osově souměrných útvarů a teprve později přecházejí k útvarům souměrně sdruženým podle osy, jejich vlastnostem a až nakonec ke konstrukci obrazu v osové souměrnosti.

V následujících odstavcích se pokusím vystihnout charakter zpracování tématu osová souměrnost v učebnicích, které jsem prostudovala. Nejprve se budu věnovat učebnicím, které volí postup od konstrukce obrazu v osové souměrnosti k osově souměrným útvarům. Jednotlivé učebnice vždy popíši z hlediska metodického přístupu k tématu, používaných příkladů, terminologie a zavedení popř. vynechání symbolického zápisu. Soustředím se zejména na aspekty, které danou učebnici odlišují od učebnic ostatních. Zmíním se také o tom, co mě na knize v pozitivním či negativním smyslu zaujalo. Poté se stejným způsobem zaměřím na učebnice, který volí opačný postup, tj. od osově souměrných obrazců k osové souměrnosti.

1.2.2.1 Od osové souměrnosti k osově souměrným útvarům

Kniha [8] autorů O. Odvárka a J. Kadlečka začíná výklad osové souměrnosti následujícím příkladem: „Anička kreslí pro malou Adélku velkého barevného motýla. Aby měl obě křídla stejná, nakreslila jedno, pak přeložila papír a propichováním jehlou si naznačila druhé křídlo ([8], s. 26)." Tento příklad je poměrně tradiční, téměř všechny učebnice využívají při výkladu osové souměrnosti přehnutého papíru, ze kterého se osově souměrný útvar buď vystřihuje, nebo se na něm s použitím špendlíku vyznačují obrazy bodů v dané osové souměrnosti. U většiny autorů po tomto hravém úvodu rovnou následuje popis geometrické konstrukce obrazu v osové souměrnosti a chybí plynulý, přirozený přechod mezi 'zábavnou fází' a vlastní geometrickou konstrukcí obrazu v osové souměrnosti. V tomto ohledu je zmíněná učebnice výjimkou. Zde je přechod a motivace ke geometrické konstrukci zajištěna jednoduchou otázkou, jak nakreslit souměrný obrázek na tvrdou překližku, kterou nelze přehnout. Tuto otázku pomáhají autoři žákům zodpovědět. Nejprve se pomocí obrázku s popisem připomíná pojem střed úsečky, který budou žáci potřebovat při řešení následující úlohy. V ní mají žáci za úkol „nakreslit druhé křídlo motýla bez překládání papíru, bez jehly i bez průsvitky". Na obrázku je polovina motýla a v ní body A, B, C, dále zde najdeme bod A', tj. obraz bodu A v osové souměrnosti s osou motýla, a slovní popis, jak tento bod sestrojit. Úkolem žáků je pak samostatně sestrojit obrazy dalších bodů a celé druhé křídlo. Nakonec se mají pomocí průsvitky přesvědčit o shodnosti takto narýsovaných křídel. Tento přístup mě zaujal tím, že se děti na příkladu mohou samy, bez abstraktních pouček, seznámit s tím, jak se obraz v osové souměrnosti sestrojuje. Zjistí, že když chtějí sestrojit obraz úsečky, stačí sestrojit obraz jejích dvou bodů. Nakonec se pomocí průsvitky přesvědčí o správnosti tohoto postupu.

Po tomto příkladu následuje výklad pojmů: „Motýl je osově souměrný. Druhé křídlo jsme sestrojili jako obraz prvního křídla v osové souměrnosti s osou o ([8], s. 27)." Tento výklad je doplněn obrázkem, na němž je vzor (bod A), osa souměrnosti, obraz (bod A'), průsečík úsečky AA' s osou o (bod A_o) a popis jejich vzájemných vztahů, tj. že „přímka AA' je kolmá k ose o: $AA' \perp o$, bod A_o je středem úsečky AA': $|AA_o| = |A_oA'|$" ([8], s. 27). Dosavadní poznatky jsou tedy shrnuty do několika pouček, které jsou zapsány jak slovně, tak symbolicky. Matematický zápis osové souměrnosti se zde nepoužívá.

V úlohách, které následují, děti procvičují konstrukci obrazů v osové souměrnosti a seznamují se dále s pojmem samodružné body. Osově souměrné útvary jsou podány v příkladu, kde si Čenda usnadní práci při rýsování obrazů v osové souměrnosti ([8], s. 29, příklad A), jako útvary, u kterých lze zvolit osu souměrnosti tak, že jejich obraz bude shodný se vzorem. Zde oceňuji propojení konstrukce obrazu v osové souměrnosti a pojmu osově souměrný útvar.

Celkově se mi metodický postup, použité příklady i práce se symbolickým zápisem v této učebnici velmi líbí. Pouze úlohu D ([8], s. 27), v níž mají žáci objevit chyby v konstrukci obrazu v osové souměrnosti, bych zařadila až později nebo ji úplně vynechala, protože se domnívám, že by při zařazení na počátku výkladu mohla vést k fixaci chyb, kterých by se žáci jinak možná vůbec nedopustili.

Učebnice [11] autorů J. Trejbala a kol. je další knihou, v níž je zvolen postup od konstrukce obrazu k osově souměrným obrazcům. Začíná výklad osové souměrnosti úlohou, v níž žáci mají sestrojit osu úsečky a osu úhlu, tato úloha je použita k připomenutí těchto pojmů, autoři se k ní znovu vrací ke konci kapitoly v části věnované osově souměrným útvarům.

V další úloze mají žáci za úkol složit podle návodu z papíru vlaštovku, tuto pak obkreslit na průsvitku, přeložit ji podle naznačené přímky (na obrázku v učebnici) a přesvědčit se, zda se „obě poloviny obrysu vlaštovky kryjí" ([11], strana 12). Nejsem příliš přesvědčena o vhodnosti tohoto přístupu, protože skládání vlaštovky je poměrně časově a technicky náročné a výsledek nemusí být přesný. Pokud se žáci při skládání nebo při obkreslování obrysu dopustí nepřesnosti, což je celkem pravděpodobné, nedojdou k požadovanému závěru. Dále se pak pracuje už pouze s obrysem, nikoli s celou vlaštovkou, a to v podstatě stejně jako kdyby to byl pouze přeložený papír, proto se domnívám, že skládání vlaštovky by bylo možné zcela vynechat.

Na obrysu vlaštovky mají žáci na 'křídle' vyznačit tři body *U, V, X* a přímku *o*, podle níž bylo možné vlaštovku přeložit tak, aby se obě její části kryly. Pomocí propichování přeloženého papíru pak tradičním způsobem sestrojí obrazy těchto bodů v osové souměrnosti s osou *o*, tj. body *U', V', X'*. Na tomto příkladu je vysvětleno, že „jsme zobrazili body *U, V, X* na body *U', V', X'*“ a že „body *U, V, X*, nazýváme vzory, body *U', V', X'* obrazy bodů *U, V, X* ([11], s. 12).“ Jako v jedné z mála knih se zde objevuje slovo zobrazit, osová souměrnost je zde prezentována jako nepřímo shodné zobrazení, tj. jako nepřímá shodnost. Dále je zde poměrně podrobně vysvětlen pojem samodružný bod.

V následujících řešených příkladech jsou objevovány vlastnosti osové souměrnosti, ty jsou pak shrnuty do zarámovaných pouček. Poučky se týkají jednak objasnění některých základních pojmů, ale i složitějších problémů, které se v jiných učebnicích nevyskytují, například: „V osové souměrnosti má každý bod roviny právě jeden obraz. Každému obrazu odpovídá právě jeden vzor. Sestrojíme-li obraz *X'* bodu *X* v osové souměrnosti a potom obraz bodu *X'* v téže osové souměrnosti, dostaneme původní bod *X* ([11], s. 14).“

Se symbolickým zápisem osové souměrnosti se v této knize nesetkáme. To mě poměrně překvapuje, protože v popisech konstrukce nebo v poučkách se jiné matematické symboly často objevují, například: „Obrazem přímky p v osové souměrnosti s osou o je přímka p', pro kterou platí: a) jestliže $p \perp o$, pak $p = p'$, b) jestliže $p \parallel o$, pak $p' \parallel o$, vzdálenosti p' od o a p od o se rovnají, c) jestliže p není $\parallel o$, pak p' není $\parallel o$ a průsečík p a p' leží na ose o; velikosti úhlů, které p a p' svírají s osou o, se rovnají ([11], s. 14).“ Toto je vlastně matematická definice obrazu přímky v osové souměrnosti s osou o, domnívám se ale, že je pro žáky šesté třídy příliš abstraktní a složitá a že ji použití symbolů namísto slovního popisu činí ještě nesrozumitelnější. Navíc je označena nápisem „zapamatujte si“. Pokud by si ji skutečně měli zapamatovat, vedlo by to nejspíš k učení nazpaměť bez pochopení smyslu. Další otázkou je, nakolik je přínosné, aby děti znaly přesnou definici obrazu přímky v osové souměrnosti. Bylo by podle mě lepší větu uvést ve zjednodušeném tvaru, v 'jazyce žáků šesté třídy', nebo ji rozdělit na několik kratších tvrzení týkajících se jednotlivých případů a tyto vždy doplnit obrázkem.

Po části věnované osové souměrnosti a jejím vlastnostem přichází na řadu osově souměrné útvary. I zde je k zapamatování určena definice, kterou pokládám za zbytečně složitou: „Jestliže se v osové souměrnosti každý bod daného obrazce zobrazí do bodu tohoto obrazce, říkáme, že obrazec je osově souměrný. Říkáme také, že má osu souměrnosti ([11], s. 17).“

Celkově na této knize oceňuji, že zmiňuje řadu obtížných problémů, objevuje se zde i shodnost v prostoru a rovinová souměrnost, v mnoha aspektech jde více do hloubky než ostatní učebnice a snaží se přitom dbát na matematickou přesnost. Na druhou stranu mi použití složitých pouček, jak jsem již napsala, nepřipadá pro žáky tohoto věku příliš účelné, není mi také zcela jasné, proč autoři nezavádějí matematický zápis osové souměrnosti, když jinak ve výkladu velice často používají matematické symboly.

Další kniha, o níž bych se chtěla zmínit, je učebnice [2] autorů J. Coufalové a kol. Využívá v úvodu do tématu intuitivní představu osové souměrnosti ‘bez osy’. Zaujala mě především svou reálností, protože osa souměrnosti je ve skutečnosti většinou pouze myšlená, nikoli viditelná přímka a žáci mají problém si ji představit, když není v obrázku vyznačena. V úloze autoři šikovně využívají čtvercové sítě, v níž je zakreslen souměrný půdorys zámku, jeho severního a jižního křídla. V jižní části je vyznačena kašna a úkolem je zakreslit druhou kašnu, která byla v minulosti odstraněna, souměrně i do severní části zámku tak, aby „celé severní křídlo i s nádvořím bylo přesným obrazem jižní části ([2], s. 116).“

Po tomto úvodu autoři opět využívají tradičního postupu se špendlíkem a přehnutým papírem. Žáci se na základě měření a porovnávání sami seznámí s vlastnostmi vzoru a obrazu v osové souměrnosti, kterých bude později využito v řešených příkladech, kde se naučí obrazy konstruovat. Po úvodním příkladu následuje krátká teoretická část: „O trojúhelnících ABC a $A'B'C'$ říkáme, že jsou souměrně sdružené podle přímky o. Ta se nazývá osa souměrnosti. Trojúhelník ABC označujeme jako vzor. Trojúhelník $A'B'C'$ je obrazem trojúhelníku ABC v osové souměrnosti s osou o ([2], s. 117).“ Následuje symbolický zápis osové souměrnosti, který je hned následně popsán slovy. Po procvičení konstrukce obrazu v osové souměrnosti je zde znovu zmíněno využití čtvercové sítě a jako v jediné učebnici je i zdůvodněna její výhoda: „Čtvercová síť usnadňuje nanášení kolmic i odměřování stejných vzdáleností ([2], s. 121).“

Ráda bych ještě zmínila úlohu, která mě zaujala, protože v sobě skrývá skládání osových souměrností, a možná by se dala využít při zavádění středové souměrnosti či otočení: „Na displeji se rozsvítilo číslo 7350. Zobrazte je dvakrát v osové souměrnosti. Nejprve podle svisié osy y, poté podle vodorovné osy x. Výsledek spadá spíše do přírodopisu než do matematiky ([2], s. 121, úloha 2)." Děti s oblibou zadávají do kalkulačky číslo 7350. Když ji „otočí vzhůru nohama", vidí na displeji hranatými písmeny napsané slovo OSEL; úloha jim ukazuje, že ke stejnému výsledku dojdou opakovaným zobrazením v osové souměrnosti.

Tato kniha mě zaujala řadou zajímavých a podnětných nápadů a názorným, ne zbytečně složitým výkladem teorie. Líbí se mi, jak pracuje se symbolickým zápisem.

Za zmínku stojí také učebnice [9] autorů Z. Rosecké a J. Růžičky. Zde výklad osové souměrnosti sice začíná obrázky osově souměrných útvarů, pak ale popisuje osovou souměrnost a konstrukci obrazu. I tato kniha používá tradičního postupu propichování přehnutého papíru, ale zadání příkladu ([9] , s. 47), na němž mají žáci získat první znalosti o obrazu v osové souměrnosti, je nejednoznačné a nejasné. Na další straně je pak v podstatě tentýž příklad ještě jednou opakován, tentokrát v přehlednější formě, s přesnějším zadáním a poučkami, které z tohoto příkladu plynou. Nakonec je věnována pozornost osově souměrným útvarům, kde je rovněž použita obvyklá metoda vystříhávání osově souměrných obrazců z přehnutého papíru a určování os souměrnosti pomocí přehýbání papírových modelů. Celkově je tato učebnice zaměřena spíše hravě, nepoužívá symbolický zápis, je velmi barevná a plná obrázků, což ale vede spíše k odvádění pozornosti. Navíc volí poměrně zvláštní úpravu, text a obrázky jsou ve dvou sloupcích, přičemž často vedle sebe stojí obrázky a text, které mají minimální nebo žádnou vzájemnou souvislost. Připadá mi to matoucí a nepřehledné.

Poslední učebnice této 'skupiny', kterou bych zde ráda zmínila, je kniha [10] autorů A Šarounové a kol. Rovněž využívá přehýbaného papíru. Žáci mají za úkol narýsovat úsečku EE' ležící na přímce p, její osu o a střed a následně papír přehnout podle přímky o a pozorovat, co se děje s vyznačenými body a přímkami. Teorie je prezentována způsobem, který staví žáky do zcela pasivní role, jsou jim předloženy obrázky s úkolem „Pozorujte!", vedle obrázku pak stojí jeho popis, někdy včetně symbolického zápisu. Možná by bylo přínosnější klást vhodné otázky či zadávat úkoly, které by žáky skutečně vedly k pozorování a samostatnému odhalování souvislostí, souhrn teorie by pak mohl následovat na dalších stránkách.

Jako jedna z mála prostudovaných učebnic nabízí tato kniha dva způsoby, jak získat obraz bodu v osové souměrnosti, a to jednak pomocí trojúhelníku s ryskou, a jednak pouze pomocí kružítka. Celkově se ale konstrukci obrazu věnuje poměrně málo. Možná by nebylo špatné na základě objevených vlastností osové souměrnosti zdůvodnit, proč obě řešení vedou ke správnému výsledku. Ke konstrukci obrazů v osové souměrnosti a nacházení osy osově souměrného útvaru i tato kniha využívá čtvercové sítě.

Poměrně zajímavá je úloha, v níž je kladena otázka: „Kolika způsoby umíte narýsovat čtverec?" Jsou zde nabídnuta dvě možná řešení a očekávána další. Líbí se mi, že je zde ukázána možnost hledat různá řešení jednoho problému, otázkou je, nakolik budou mít žákovská řešení něco společného s osovou souměrností.

Tato publikace mě ničím významně nezaujala. Ve srovnání s jinými je v ní tomuto tématu věnováno málo prostoru. Autoři se problematice osové souměrnosti věnují intenzivněji v učebnici [17] pro sedmý ročník. Zejména se zde procvičuje konstrukce obrazu v osové souměrnosti nejprve ve čtvercové či trojúhelníkové síti, pak bez ní, pak se věnují osově a rovinově souměrným útvarům.

1.2.2.2 Od osově souměrných útvarů ke konstrukci obrazu v osové souměrnosti

V následujících odstavcích bych chtěla zmínit učebnice, jejichž autoři zvolili opačný postup, tj. začínají výklad od osově souměrných útvarů.

První z nich je kniha [5] autorů J. Molnára a kol. Zde je nejprve kladena otázka: „Jsou tyto obrázky souměrné podle naznačené přímky ([5], s. 21)?" V tuto chvíli využívá intuitivní představu souměrnosti, kterou děti mají z běžného života, či znalostí o osové souměrnosti získaných na prvním stupni základní školy. Líbí se mi, že autoři nejprve aktivují znalosti, které již děti mají. Pod obrázky je pak vysvětleno, že „osově souměrný útvar má dvě části vyznačené přímkou, která se nazývá osa souměrnosti. Podle ní lze obě části na sebe překlopit tak, že se kryjí. Osová souměrnost je určena svou osou souměrnosti ([5], s. 21)." Dále je vyložen pojem vzdálenost bodu od přímky. V následujících úlohách žáci trénují schopnost rozpoznat osově souměrné obrazce a najít jejich osy souměrnosti, autoři se zde zmiňují i o rovinové souměrnosti jako prostorové analogii osové souměrnosti v rovině. Dále je v knize zmíněno, že útvary vyskytující se v přírodě, jsou většinou nedokonale souměrné.

Poté je věnována pozornost geometrickým útvarům osově souměrným, počínaje osou úsečky, její geometrickou konstrukcí a zkoumáním jejích vlastností, konče určováním os souměrnosti složitějších geometrických obrazců. To je prováděno nejprve pomocí přehýbání papírových modelů, později odhadem. V kapitole nazvané „Útvary v osové souměrnosti" je proveden přechod od známého, tj. od osově souměrných útvarů, k novému, tj. k pojmům osová souměrnost a útvary souměrně sdružené podle osy *o*: „Na obrázku vidíte dva útvary v osové souměrnosti. Původní útvar je vzor a k němu existuje útvar souměrný podle osy *o*, který je s ním shodný. Říkáme mu obraz, protože vznikl zobrazením. Je-li dvojice útvarů souměrná podle osy *o*, říkáme, že dané útvary jsou souměrně sdružené podle osy *o* ([5], s. 28)." V následujících úlohách se žáci učí rozlišit dvojice útvarů souměrně sdružených podle osy a později vyznačit osu souměrnosti.

Po těchto úlohách je pomocí obrázku a popisu konstrukce vysvětleno, jak získáme obraz bodu v osové souměrnosti, dále je zde řečeno, že „body, které leží na ose *o*, se v osové souměrnosti určené touto osou zobrazí samy na sebe. Říkáme jim samodružné body ([5], s. 30)." V následujících příkladech a úlohách žáci procvičují konstrukci obrazů různých geometrických útvarů, například čtverce, kružnice, a zkoumají přitom vlastnosti osové souměrnosti.

Tato učebnice mě zaujala svým metodickým postupem, myslím, že z dosud prostudovaných učebnic nejlépe odpovídá přirozenému postupu myšlení dětí tohoto věku. Vychází od souměrných předmětů známých z denní reality, přechází k souměrným geometrickým útvarům a poté přechází k osové souměrnosti a konstrukci obrazu, nepoužívá složité poučky, ani symbolický zápis osové souměrnosti. Překvapilo mě, že 'tradičního' postupu s přehnutým papírem využívá pouze při určování os souměrnosti a ke konstrukci obrazu v osové souměrnosti ho nevyužívá vůbec. Líbí se mi grafické zpracování této učebnice, je v ní mnoho pěkných barevných obrázků, které ji činí přitažlivější a přinášejí spoustu příkladů ze života a přitom nejsou na úkor přehlednosti.

Dále bych chtěla zmínit knihu [6] autorů J. Müllerové a kol. Tato uvádí na začátku výkladu dva obrázky osově souměrných útvarů, vázy a motýla. Žáci je mají překreslit na průsvitný papír a přeložit podle daných přímek. Na základě toho jsou obrazce osově souměrné podle přímky *o* definovány jako obrazce, jejichž části se po přeložení podle přímky *o* kryjí. Na tomto příkladu jsou vyloženy pojmy osa souměrnosti, body souměrně sdružené, body samodružné, dále vlastnosti vzoru a obrazu a jejich spojnice. Pak je definována osa úsečky, jako osa souměrnosti této úsečky, dále se žáci seznamují s osou úhlu. Tyto nové pojmy jsou procvičovány v úlohách.

Konstrukce obrazu v osové souměrnosti je ukázána na konstrukci obrazu čtverce. Nejprve je prováděna intuitivně ve čtvercové síti, v dalších obrázcích je zdůrazněna funkce čtvercové sítě, usnadnění rýsování kolmic k ose souměrnosti a nanášení vzdálenosti, v posledním obrázku je naznačeno, jak vypadá konstrukce obrazu v osové souměrnosti bez použití čtvercové sítě. Potom následuje slovní popis této konstrukce. Na dalším obrázku je znázorněna konstrukce obrazu jiného útvaru v osové souměrnosti a žáci mají za úkol popsat postup konstrukce a posléze jej sami provést v sešitě.

K osově souměrným obrazcům se autoři vrací ještě jednou v závěru kapitoly, tentokrát jiným způsobem. Ptají se, „zda existuje osová souměrnost, v níž by daný obrazec odpovídal sám sobě, tj. byl podle nalezené osy souměrný" ([6], s. 74). V následujících úlohách pak žáci hledají osy souměrnosti zadaných útvarů jednak pomocí konstrukce os úseček, jednak pomocí čtvercové sítě, dále procvičují konstrukci obrazů v osové souměrnosti.

Tato kniha mi narozdíl od předchozí publikace připadá svou grafikou poněkud strohá a jednotvárná, nejsou v ní v podstatě žádné obrázky a příklady, které by probírané téma spojovaly s reálným životem. Také metodický postup mi nepřipadá tak dobře propracovaný jako v předchozí učebnici.

J. Herman a kol. v učebnici [3] začínají výklad osové souměrnosti rovněž od osově souměrných útvarů. Zmiňují předměty, rostliny, živočichy a jiné objekty z každodenního života, které jsou osově souměrné. Autoři v úvodní fázi využívají k vysvětlení pojmů osa souměrnosti a osově souměrný útvar zrcátka. Žáci mají za úkol přiložit zrcátko k obrázku tak, aby celý obrázek sestavili z jeho nezakryté části a obrazu této části v zrcátku. Pak je vysvětleno, že „zrcátko se dotýká roviny, ve které obrázek leží, v části přímky, které říkáme osa souměrnosti ([3], s. 24)." Tento přístup je zajímavý a názorný, nevýhodou je poměrně složitý slovní popis postupu, kterému se při zachování matematické přesnosti lze stěží vyhnout. V 'definici' osově souměrného útvaru se autoři vracejí k myšlence „přehnutí roviny" tak, že se „obě shodné části kryjí" ([3], s. 25), která je běžná i v jiných učebnicích.

Pozitivní je, že se zde dále objevuje konstruktivistický přístup k učivu. Žáci mají za úkol pomocí přehnutého papíru a hrotu kružítka vyznačit bod a jeho obraz v osové souměrnosti a na základě zkoumání vlastností těchto bodů sami odvodit základní vlastnosti osové souměrnosti. Tato kniha zavádí symbolický zápis osové souměrnosti a seznamuje žáky se způsobem, jak jej číst. Důležité poučky, shrnující poznatky, které žáci získali v řešených příkladech, jsou vždy vytištěny modře a orámovány. Tyto poučky jsou formulovány matematicky přesně, ale zároveň jsou stále ještě poměrně dobře srozumitelné. Například: „Osová souměrnost je určena přímkou *o* – osou souměrnosti. Pro obraz *Y* libovolného bodu *X* roviny platí: Pokud bod *X* leží na ose *o*, pak *Y* splývá s *X*. Všechny body osy *o* jsou samodružné. Pokud bod *X* neleží na ose *o*, je přímka *XY* kolmá k ose *o* a střed úsečky *XY* leží na ose *o*. Body *X* a *Y* se nazývají souměrně sdružené podle osy ([3], s. 29)."

Samostatná podkapitola je zde věnována obrazům útvarů v osové souměrnosti. Nejprve na základě řešeného příkladu formuluje obecnou poučku: „Obrazem útvaru U v osové souměrnosti s osou *o* rozumíme útvar U′ obsahující právě ty body roviny, které jsou obrazy bodů útvaru U. Útvary U a U′ se nazývají souměrně sdružené podle osy *o* ([3], s. 31).“ Pak se žáci v dalších řešených příkladech zabývají tím, jak sestrojit obraz úsečky, přímky, polopřímky, úhlu, kružnice, mnohoúhelníku.

Na závěr se autoři znovu vrací k osově souměrným útvarům, tentokrát z jiného úhlu pohledu, ptají se: „Který útvar přechází v osové souměrnosti sám v sebe ([3], s. 37)?“ Je zde pěkně navázáno na poznatky, které již byly žákům zprostředkovány. Již dříve se naučili rozlišovat osově souměrné útvary, znalost osové souměrnosti jim umožní přesněji vyjádřit základní vlastnost osově souměrných útvarů: „Útvar U je osově souměrný podle osy *o*, jestliže jeho obraz U′ v osové souměrnosti s osou *o* splývá s útvarem U (U=U′) ([3], s. 38).“

Na této učebnici oceňuji přehlednost, jasnost a přesnost, líbí se mi, jak pracuje se symbolickým zápisem a teoretickými poučkami. Obsahuje zajímavé úlohy, které vedou žáky k hlubšímu zamyšlení nad problémem. Jediné, co bych jí vytkla, je, že se vůbec nezmiňuje o osové souměrnosti v prostoru a využívá zrcátka pouze k demonstraci osové souměrnosti v rovině.

Práce se zrcátkem je využita i v knize [19] autorů J. Trejbala a kol., a to jako možná kontrola správného obrazu v osové souměrnosti. To je sice na jednu stranu rychlá a názorná metoda, jak se o správnosti obrázku přesvědčit, ale stejně jako v předchozí učebnici využívá zrcátko pouze k demonstraci osové souměrnosti v rovině, což považuji za poněkud sporné. Odraz (v zrcadle či na vodní hladině) je v různých učebnicích prezentován různě, ploše či prostorově, přičemž prostorová představa podle mě spíše odpovídá realitě.

Standardně je osová souměrnost ve škole probírána jako první shodné zobrazení. Zcela jiný postup zvolili v pracovní učebnici [1] autoři J. Cihlář a M. Zelenka. Zavádějí již v šestém ročníku všechna čtyři ve škole probíraná shodná zobrazení. Začínají však posunutím a otočením, zřejmě se zřetelem na to, že jsou pro děti známé z praktického života jako pohyb a je možné je pokládat za méně abstraktní než osovou a středovou souměrnost. Kromě toho základní znalosti o osové souměrnosti by žáci měli mít již z prvního stupně základní školy.

V této učebnici je celá řada zajímavých úkolů k zamyšlení, nicméně pro běžnou výuku se mi zdají mnohé z nich příliš náročné. Osová souměrnost je zavedena pomocí obrazu souměrného stromu vystřiženého z přehnutého papíru. Poté je uveden návod, jak sestrojit obrazy bodů v osové souměrnosti, a pak hned následují úlohy, v nichž mají žáci za úkol sestrojit obrazy geometrických útvarů v osové souměrnosti s danou osou. V úlohách věnovaných osově souměrným útvarům mají žáci rovnou, bez předchozích řešených příkladů, dokreslit k zadané ose požadované geometrické útvary tak, aby „jejich obraz v osové souměrnosti byl roven původnímu útvaru“ ([1], s. 46), v další úloze mají určovat osy souměrnosti geometrických útvarů. Následují dva řešené příklady, které považuji také za poměrně obtížné. Prvním z nich je dráha kulečníkové koule při odrazu, druhým je známá úloha na nalezení nejkratší cesty s využitím osové souměrnosti.

Svou zajímavostí a reálností mě zaujala úloha: „A) Maruška se vidí v zrcadle zavěšeném na stěně jen po kolena. Když si chce vidět na boty, musí k zrcadlu přistoupit blíž, nebo od něj musí naopak odstoupit. Vyzkoušejte si to sami u zrcadla a narýsujte schematické obrázky! B) Jak vysoké musí být zrcadlo, aby se v něm Maruška viděla celá? Jak vysoko na stěně musí viset ([1], s. 50, úloha 71.(6))?“ Celkově se mi tato učebnice líbí jako dobrý zdroj zajímavých, nevšedních úloh, spíše ale pro zpestření výuky než pro každodenní využití. Při výkladu nové látky se v ní neobjevují žádné řešené příklady, žákům jsou rovnou kladeny úkoly, které mají sami vyřešit. Řešené jsou pouze obtížné příklady.

Poslední kniha, kterou v této podkapitole zmíním, je učebnice [15] autorů J. Novotné a kol. I zde výklad osové souměrnosti začíná od osově souměrných obrazců. Místo geometrických útvarů jsou zde zvoleny různé značky automobilů. S využitím průsvitky zkoumají žáci vlastnosti těchto obrazců. Na výkladu je zajímavé, že kromě osové souměrnosti zmiňuje i další shodná zobrazení, a to otočení a posunutí. Žáci následují Kryšpína (učebnicová postava) při objevování zajímavých vlastností značek. Hledají „body a přímky, podle nichž je Kryšpín otáčel a převracel“ ([15], s. 38) tak, aby se výsledný obrázek kryl s obrázkem původním. Dále pomocí hrotu kružítka a přehnutého papíru zobrazují body v osové souměrnosti a jsou seznámeni s pojmy zobrazit, osová souměrnost, osa souměrnosti, souměrně sdružený podle osy a samodružný bod. V následujících příkladech zkoumají žáci vlastnosti osové souměrnosti a je zde dán návod na konstrukci obrazu bodu v osové souměrnosti. Poznatky získané v těchto příkladech jsou shrnuty v zarámovaných poučkách.

V této knize mě zaujala úloha 6 ([15], s. 41), v níž mají žáci procvičit své dosavadní znalosti osové souměrnosti. Úkolem je na fotografii čelní fasády kostela mimo jiné najít dvojice vzorů a obrazů v osové souměrnosti a sestrojit osu této osové souměrnosti. Líbí se mi, že úloha pracuje s reálným příkladem osové souměrnosti. Ve většině učebnic jsou sice fotografie souměrných staveb či předmětů každodenního života otištěny, v úlohách se ale objevují většinou výhradně geometrické obrazce.

Jak již bylo řečeno, kromě osové souměrnosti je v této knize zmíněno okrajově i otočení a posunutí, obojí na příkladu značek automobilů. Není zde zdůrazněna teorie, spíš se jedná o využití intuitivní představy, kterou děti o těchto zobrazeních mají. Překvapilo mě, že tato zobrazení nejsou pojednávána ve zvláštní podkapitole, ale jsou zařazena ve výkladu osové souměrnosti. Zřejmě bylo cílem ukázat, že útvary osově souměrné mohou mít i další „zajímavé vlastnosti", na souvislosti mezi těmito zobrazeními ale autoři více neupozorňují. Myslím si, že by nebylo na škodu, kdyby bylo naznačeno skládání osových souměrností a výklad posunutí a otočení byl s výkladem osové souměrnosti více propojen, jak to autoři učinili při výkladu středové souměrnosti. O to se pokusím ve své experimentální výuce.

Celkově se mi na knize líbí zejména použité příklady z reálného života. Nezanedbává ani rovinovou souměrnost. Zaujalo mě, že ve srovnání s jinými knihami příliš neprocvičuje konstrukci obrazu v osové souměrnosti, většinou spíše využívá čtvercovou síť, popřípadě soustavu souřadnic.

1.2.2.3 Osová souměrnost - shrnutí

Na závěr této podkapitoly shrnu hlavní myšlenky analýzy zpracování tématu osová souměrnost v českých učebnicích. Zmíním zejména knihy, které mě v pozitivním či negativním smyslu nejvíce zaujaly. Přitom se zaměřím na metodický postup, grafiku, výklad teorie, práci se symbolickým zápisem, na volbu úloh a na úlohy, které mě inspirovaly při přípravě experimentálního textu.

Co se týká metodického postupu, líbí se mi nejvíce učebnice [5] autorů J. Molnára a kol., která podle mého nejlépe odpovídá přirozeným myšlenkovým pochodům. Postupuje od souměrných objektů každodenní reality ke geometrickým útvarům a poté ke konstrukci obrazu v osové souměrnosti. Kromě toho má tato kniha přehlednou úpravu a srozumitelný výklad teorie, který je vždy doplněn obrázky. Svým postupem výkladu, motivačními prvky a svou grafikou mě zaujala též učebnice [8] autorů O. Odvárka a J. Kadlečka. Nejméně se mi líbila učebnice [9] autorů Z. Rosecké a J. Růžičky, která, jak již bylo zmíněno, je velmi barevná a plná obrázků, což vede spíše k odvádění pozornosti. Navíc má nejasnou strukturu a nepřehlednou úpravu.

Některé učebnice jsou zaměřeny spíše prakticky, některé až hravě, a omezují teorii na minimum, jiné se naopak snaží podat teorii v matematicky přesných tvrzeních. V tomto ohledu mě pozitivně zaujala učebnice [3] autorů J. Hermana a kol. pro nižší gymnázium. Tvrzení zde uvedená jsou matematicky přesná a přitom srozumitelná. Naproti tomu v knize [11] autorů J. Trejbala a kol. je někdy použito matematických definic či vět, které jsou příliš složité, abstraktní a nesrozumitelné, často také plné matematických symbolů, což srozumitelnost ještě ztěžuje. Na druhou stranu na této učebnici oceňuji, že se zabývá řadou zajímavých problémů, které ostatní autoři nezmiňují.

Ve většině učebnic autoři vynechávají symbolický zápis osové souměrnosti. Je zaveden pouze v knize [2] J. Coufalové a kol. a [3] J. Hermana a kol. Zejména v první z těchto učebnic se mi líbí přehledná a srozumitelná práce s matematickým zápisem, který je vždy označen symbolem pro psaní a po němž následuje slovní 'překlad' označený symbolem pro čtení.

V některých z prostudovaných učebnic, například v knihách [6] autorů J. Müllerové a kol. a [19] J. Trejbala a kol., jsem našla zejména úlohy tradiční, spočívající hlavně v procvičování určování os souměrnosti či konstrukce obrazu útvarů v osové souměrnosti. V jiných učebnicích se ale vyskytly i úlohy netradiční, které mě zaujaly např. využitím fotografií reálných objektů, a to např. v knize [15] ([15], s. 41, úloha 6). Líbily se mi rovněž úlohy, které jsou obměnou úloh tradičních, například úloha 6 ([11], s. 22), v níž není cílem najít obraz v osové souměrnosti, nýbrž narýsovat osu, je-li dán vzor a obraz.

Celkově jsem téměř v každé z prostudovaných učebnic našla něco, co mě inspirovalo při přípravě experimentální výuky, ať už úlohy, jejichž obměny by se daly využít, nebo úlohy, kterých bych se chtěla vyvarovat.

1.2.3 Středová souměrnost

Ve zpracování tématu středová souměrnost se různé učebnice od sebe liší, stejně jako tomu bylo u souměrnosti osové. Většina autorů před výkladem tohoto učiva opakuje pojmy shodnost a osová souměrnost, někteří však začínají rovnou s výkladem středové souměrnosti. Autoři většinou zůstávají věrni metodickému postupu, který uplatňovali při výkladu osové souměrnosti, tzn. část z nich postupuje od konstrukce obrazu v středové souměrnosti, ostatní pak začínají výklad od středově souměrných obrazců. Stejně jako v části věnované osové souměrnosti se v následujících odstavcích budu věnovat jednotlivým učebnicím.

1.2.3.1 Od konstrukce obrazu ve středové souměrnosti k souměrným obrazcům

Začnu opět učebnicemi postupujícími od konstrukce obrazu ke středově souměrným obrazcům. První z nich je kniha [16] autorů O. Odvárka a J. Kadlečka. Ti nejprve připomínají osovou souměrnost na úloze, v níž mají žáci za úkol objevit chyby v konstrukci obrazu v osové souměrnosti, poté opakují vlastnosti osové souměrnosti, pojem osově souměrný útvar a osa souměrnosti. Následuje několik úloh na procvičení.

Pak bez jakéhokoli plynulého přechodu následuje podkapitola věnovaná středové souměrnosti. Ta je vyložena na příkladu, v němž je otištěna fotografie větrníku a schematický náčrtek jedné jeho lopatky. Úkolem je narýsovat „protilehlou lopatku" ([16], s. 25). Hned po zadání úlohy následuje obrázek a slovní popis konstrukce obrazu bodu ve středové souměrnosti se středem *S*. V další úloze, stejně jako v učebnici [8] týchž autorů pro šestý ročník, mají žáci najít chyby v konstrukci obrazu bodu ve středové souměrnosti. I zde bych tuto úlohu zařadila později nebo ji úplně vynechala, aby nedocházelo ke zbytečné fixaci chyb. V následující úloze je úkolem ověřit, zda jsou úsečky a jejich obrazy ve středové souměrnosti rovnoběžné a zda jsou sobě odpovídající trojúhelníky shodné. Výsledky této úlohy jsou pak shrnuty do poučky charakterizující vlastnosti středové souměrnosti. Stejně jako v učebnici [8] pro šestou třídu ani zde autoři nepoužívají symbolický zápis středové souměrnosti. Ve cvičeních žáci trénují konstrukci obrazu různých geometrických útvarů ve středové souměrnosti, pak následuje úloha, v níž mají žáci rozhodovat o platnosti výroků o středové souměrnosti, což již vyžaduje hlubší pochopení látky.

Vzhledem k tématu mojí práce mě zaujala zejména úloha 11 ([16], s. 28). V ní mají žáci sestrojit nejprve obraz trojúhelníka v osové souměrnosti s osou o_1 a tento obraz pak znovu zobrazit v osové souměrnosti s osou o_2, kde osy o_1 a o_2 jsou navzájem kolmé. Pak mají původní trojúhelník zobrazit ve středové souměrnosti se středem v průsečíku os a posléze porovnat výsledky obou postupů. Nevýhodou této úlohy je, že její názornost je závislá na přesnosti rýsování. Možná by se ale dala nějak obměnit, aby tomu tak nebylo.

Další část této kapitoly je věnována středově souměrným útvarům. Je zde definováno, že „středově souměrný útvar podle bodu *S* se ve středové souměrnosti se středem *S* zobrazí sám na sebe. Bod *S* je střed souměrnosti středově souměrného útvaru ([16], s. 29)." V následujících cvičeních se žáci učí rozpoznávat středově a osově souměrné obrazce.

Zajímavá pro mou práci je ještě úloha 9 ([16], s. 33). Zde jsou žáci upozorněni na to, že středová souměrnost určená středem *S* je vlastně otočení o 180 stupňů kolem tohoto středu. Souvislost mezi osovou a středovou souměrností ukazuje znovu poslední úloha této kapitoly ([16], s. 35, úloha 14). V ní mají žáci rozhodnout, které dílky skládanky jsou středově souměrné a které jsou souměrné podle dvou a podle jedné osy. Na těchto úlohách se mi líbí, jak pomocí naznačení souvislostí propojují poznatky o probraných shodných zobrazeních i o těch, které jsou žákům zatím známá jen intuitivně z každodenní zkušenosti. Zároveň mě tyto úlohy motivují k rozpracování myšlenky využití skládání osových souměrností při výuce shodných zobrazení.

V učebnici [18] autoři J. Trejbal a kol. nejprve opakují přímou a nepřímou shodnost, pak jsou probírány věty o shodnosti trojúhelníků a opakuje se osová souměrnost a její vlastnosti, až poté přichází na řadu středová souměrnost. Na úvod je zde otištěno několik obrázků, z nichž některé jsou středově souměrné. Hovoří se o jisté zvláštní pravidelnosti vztahující se k jednomu bodu. Aby bylo možno o této pravidelnosti dále uvažovat, je třeba ji přesně matematicky popsat, k čemuž přispějí poznatky o novém zobrazení. Pak následuje matematická definice středové souměrnosti: „Středová souměrnost je zobrazení v rovině, které má jeden samodružný bod S, nazývá se střed souměrnosti. Každému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX'.... Bod X se nazývá vzor, bod X' jeho obraz. Bodům X, X' říkáme body souměrně sdružené podle středu S ([18], s. 52).“ Po definici následují řešené příklady, řešení se skládá z obrázku a popisu postupu, využívajícího matematické symboly. Myslím si, že kdyby místo abstraktní definice byl podobně jako v předchozí učebnici nabídnut obrázek se slovním popisem středové souměrnosti a konstrukce obrazu bodu v ní, nebylo by potřeba tyto jednoduché řešené příklady uvádět, žáci by je mohli řešit již sami.

Další podkapitola je věnována středově souměrným útvarům, ty mají žáci za úkol rozpoznat a určit jejich střed. Stejně jako v učebnici těchto autorů pro šestý ročník základní školy se ani zde nepoužívá symbolický zápis středové souměrnosti, zatímco v popisech postupu a poučkách se s jinými matematickými symboly pracuje. Celkově bych knize vytkla definice, které jsou sice matematicky přesné, ale pro žáky tohoto věku zbytečně složité a nesrozumitelné.

Zcela jiným, zajímavým způsobem začíná výklad středové souměrnosti kniha [12] autorů J. Coufalové a kol. Nevrací se ke shodnosti ani osové souměrnosti, začíná novou látku úlohou, ve které ukazuje plánek čtyř linek autobusové dopravy ve městě Středová, na němž je vidět, že trasy všech linek jsou středově souměrné podle zastávky S. V zadání je řečeno, že pro linku číslo 1 je zastávka S naplánována tak, aby „byla vždy středem úsečky spojují jisté dvě zastávky“ ([12], s. 152). Otázka, kterou mají žáci zodpovědět, je, zda podobný vztah platí i pro ostatní linky. Po této úloze následuje řešený příklad. Oceňuji, že si v něm žáci sami podle popisu sestrojí obraz úsečky ve středové souměrnosti a pak při plnění dalších úkolů s využitím dosavadních znalostí sami odvodí vlastnosti středové souměrnosti. Tyto jsou pak shrnuty do teoretické poučky. V dalším řešeném příkladu je již přímo v zadání řečeno: „Ve středové souměrnosti se středem S zobrazte bod M ($M \neq S$) ([12],s. 153)". Nabídnuté řešení se pak skládá z obrázku a slovního popisu, poté následuje symbolický zápis „$S(S)$: $M \rightarrow M'$" ([12], s. 153) a vedle něj pak slovy, jak tento zápis číst. Dále je zde zmíněn střed souměrnosti jako jediný samodružný bod ve středové souměrnosti a je zde podán návod na konstrukci obrazu přímky, trojúhelníku a kružnice v středové souměrnosti. Středová souměrnost je kromě obrázku a slovního popisu vždy také symbolicky zapsána.

Zaujala mě úloha, v níž je pomocí průsvitky porovnáván vzor a obraz geometrického útvaru v osové a středové souměrnosti. Z této úlohy je učiněn závěr, že u osové souměrnosti je třeba průsvitku obrátit, jedná se tedy o nepřímou shodnost, zatímco u souměrnosti středové to nutné není, tudíž je to shodnost přímá. Myslím, že této úlohy nebo její obměny by se dalo využít při výuce skládání osových souměrností.

Pro moji práci je zajímavá též úloha 1 ([12], s. 157). Zde se opět jedná o skládání dvou osových souměrností s kolmými osami, stejně jako v již zmíněné úloze 11 ([16], s. 28), které jsem vytýkala, že její názornost je závislá na přesnosti rýsování. Tento problém je v této úloze ([12], s. 157, úloha 1) vyřešen tím, že žáci nerýsují, ale pouze vybarvují čtverečky ve čtvercové síti. Tím se zabrání nepřesnosti a neztrácí se zbytečně čas rýsováním, které v této úloze není cílem. Nakonec je věnována pozornost středově souměrným útvarům, v úlohách mají žáci rozhodnout, zda je útvar souměrný podle daného středu.

Na této učebnici se mi líbí, že v ní je řada zajímavých úloh, z nichž některé jsou poměrně náročné. Líbí se mi práce se symbolickým zápisem, který je vždy hned ‘přeložen’ slovy. Kniha pracuje konstruktivisticky, získané poznatky formuluje do srozumitelných pouček a má příjemnou, přehlednou grafickou úpravu.

Poslední učebnicí, kterou v této ‘skupině’ zmíním, je kniha [17] autorů A. Šarounové a kol. Zde je nejprve zopakována osová souměrnost. Výklad středové souměrnosti zde začíná takto: „Se středovou souměrností jste se setkali nejen ve škole. Připomeneme si její vlastnosti ([17], s. 169)." Tato skutečnost mě zarazila, protože v této knize ani v knize [10] týchž autorů se žáci doposud se středovou souměrností nesetkali. Pak následuje několik řešených příkladů, na nichž se žáci seznámí se středovou souměrností a jejími vlastnostmi. Poznatky jsou posléze shrnuty do pouček doplněných obrázky a symbolickými zápisy. Následují opět řešené příklady na konstrukci obrazu ve středové souměrnosti, z nichž první dva jsou zadány ve čtvercové a trojúhelníkové síti. Ve cvičeních je věnována pozornost nejen konstrukci obrazu ve středové souměrnosti, ale i složitějším a zajímavým problémům, např.: „Navrhněte, jak využít středovou souměrnost ke zjištění vzdálenosti dvou sloupů, mezi nimiž je překážka ([17], s. 173, cvičení 5)." Nakonec jsou probírány středově souměrné útvary. Nejprve jsou opět nabídnuty řešené příklady, pak je poskytnuta definice středově souměrného útvaru: „Útvar U je středově souměrný podle středu *S*, jestliže obraz každého jeho bodu ve středové souměrnosti se středem *S* je opět bodem útvaru U ([17], s. 174)." Následující úlohy na procvičení středově souměrných útvarů jsou věnovány netradičním problémům.

Tato kniha [17] mě zaujala především využitím trojúhelníkové sítě a dále některými náročnějšími úlohami či úlohami ukazujícími využití středové souměrnosti v praxi. Myslím si také, že je dobré, že jsou zde žáci často vyzváni něco dokázat či vysvětlit.

1.2.3.2 Od středově souměrných útvarů ke konstrukci obrazu ve středové souměrnosti

V následujících odstavcích se zaměřím na učebnice postupující 'opačným směrem', tj. od středově souměrných útvarů. První knihou volící tento postup je učebnice [3] autorů J. Hermana a kol. Zde jsou nejprve otištěny čtyři středově souměrné obrázky s komentářem, že nám některé útvary „připadají souměrné, i když nemají žádnou osu souměrnosti" ([3], s. 41). Dále autoři upozorňují na to, že tyto útvary nejsou osově souměrné, ačkoli se vždy skládají ze dvou shodných polovin, a označují je jako příklady středové souměrnosti.

Na řešeném příkladu je pak ukázáno, že tyto středově souměrné útvary vzájemně splynou, pokud je překreslíme na průsvitku a otočíme „o 180° kolem středu obrázku" ([3], s. 41). Poté je definován středově souměrný útvar pomocí otočení: „Útvar U nazveme středově souměrným, pokud existuje takový bod *S*, že při otočení o 180° kolem bodu *S* přejde útvar U sám v sebe. Bod *S* se nazývá středem souměrnosti útvaru U ([3], s. 41)." Na této definici mě zarazilo, že definuje nový pojem pomocí jiného pojmu, který ještě nebyl probrán, tj. otočení. Na druhou stranu bylo v předchozím příkladu ukázáno, co je otočení o 180° kolem středu, takže definice není nesrozumitelná. Líbí se mi, že poskytuje přesný návod, jak ověřit pomocí průsvitky, zda daný útvar je středově souměrný, to se v jiných učebnicích neobjevuje. V řešeném příkladu je pomocí průsvitky a špendlíku rozhodnuto, zda čtverec, obdélník a kruh jsou středově souměrné, zatímco trojúhelník nikoli. V následujících úlohách žáci rozlišují další středově souměrné útvary. Nejprve mají rozhodnout, pomocí průsvitky, které z útvarů otištěných v učebnici jsou středově souměrné. Poté je kladena otázka, zda je středově souměrná úsečka, polopřímka, rovina či polorovina. Zde už se očekává představivost.

Poznatků z této části využívá další podkapitola věnovaná středové souměrnosti. Nejprve jsou na obrázku středově souměrného útvaru vyznačeny body X a Y takové, že bod Y je obrazem bodu X v středové souměrnosti, a naopak a je zde řečeno, že tyto body „tvoří dvojici bodů souměrně sdružených podle středu" ([3], s. 43). V dalším odstavci jsou zkoumány vlastnosti těchto bodů vycházející z vlastností otočení, tj. že bod S leží na úsečce XY a je jejím středem. V řešeném příkladu je pak ukázáno, jak těchto vlastností využít při konstrukci obrazu bodu v středové souměrnosti, aniž by bylo třeba bod otáčet. Pod příkladem je uveden symbolický zápis středové souměrnosti a opět je zdůrazněno, že vzor ve středové souměrnosti přechází ve svůj obraz a naopak. Nakonec jsou shrnuty všechny získané poznatky o středové souměrnosti.

Stejně jako při výkladu osové souměrnosti je i zde věnována samostatná podkapitola obrazům geometrických útvarů ve středové souměrnosti. Nejprve je na příkladu řešeném s použitím průsvitky ukázáno, co je obrazem trojúhelníka ve středové souměrnosti; tato souměrnost je rovněž zapsána symbolicky. Pak následuje obecná definice: „Obrazem útvaru U ve středové souměrnosti se středem S nazýváme útvar U′ obsahující právě ty body roviny, které jsou obrazy bodů útvaru U. Útvary U a U′ jsou shodné a nazývají se souměrně sdružené podle středu S ([3], s. 47)." V následujících příkladech a úlohách se procvičuje konstrukce obrazu nejrůznějších útvarů, například úsečky, přímky, polopřímky, úhlu, kružnice, čtverce atd. ve středové souměrnosti, přičemž se mění poloha středu vůči útvaru.

Nakonec se autoři ještě jednou vrací ke středově souměrnému útvaru, a definují jej pomocí středové souměrnosti: „Útvar U je středově souměrný podle středu S, pokud jeho obraz U′ ve středové souměrnosti se středem S splývá s útvarem U (U=U′) ([3], s. 49)." Poznatky o osové a středové souměrnosti jsou pak shrnuty do přehledné tabulky, v níž si žáci připomenou a zdůrazní společné a odlišné vlastnosti obou probraných zobrazení.

Tato kniha mě velmi zaujala spojením matematického a didaktického přístupu. Matematická přesnost není na úkor srozumitelnosti pro žáky a jsou zde nabídnuty zajímavé a podnětné příklady motivující k přemýšlení.

Také kniha [14] autorů J. Müllerové a kol. začíná výklad příklady středově souměrných obrazců s komentářem, že „všechny středově souměrné obrazce mají střed souměrnosti“ ([14], s. 60). Je popsán „střed čtverce, ..., střed obdélníku“ ([14], s. 60) a „střed kruhu“ ([14], s. 61). Na obrázku kruhu a přímky je vyznačeno několik dvojic bodů souměrných podle daného středu, žáci mají za úkol vyznačit další. Tím vlastně sami bez výkladu získávají první znalosti o středové souměrnosti. Následně je vysvětleno: „V každé takové dvojici bodů nazýváme první bod (např. *A, K, X, L*) vzor a bod k němu přiřazený (např. *A′, K′, X′, L′*) jeho obraz v zobrazení, které se nazývá středová souměrnost ([14], s. 61).“ Při podrobnějším studiu obrázků žáci získávají další znalosti o středové souměrnosti, ty jsou pak rovněž shrnuty v teoretické poučce hovořící o poloze vzoru a obrazu vzhledem ke středu *S* a o středu jako samodružném bodu. Jako jedna z mála učebnic hned v tomto úvodu upozorňuje na fakt, že „libovolná přímka a její obraz ve středové souměrnosti *S* jsou rovnoběžné přímky“ ([14], s. 63). Tohoto poznatku je hned využito v prvním řešeném příkladu. Zde je úkolem sestrojit obraz trojúhelníka *KLM* ve středové souměrnosti s daným středem *S*. Líbí se mi, že autoři nabízejí dvě možná řešení jednak pomocí zobrazení všech vrcholů, jednak s využitím rovnoběžnosti přímek a jejich obrazů. Tato vlastnost je využívána i ve cvičeních. V dalším řešeném příkladu je ukázáno, jak sestrojit obraz kružnice ve středové souměrnosti; shodnost vzoru a obrazu ověřují žáci pomocí průsvitky.

Ve cvičeních žáci trénují zejména konstrukci obrazů ve středové souměrnosti. Zaujala mě úloha 2 ([14], s. 66), v níž je zadán bod a jeho obraz ve středové souměrnosti se středem *S* a úkolem je tento střed najít. Tato úloha či její obměna by se dala zařadit do mé experimentální výuky.

Na této učebnici se mi líbí úvod do tématu, který je proveden v podstatě bez slovního popisu, na základě vlastního pozorování žáků. Až poté následuje výklad teorie, který je podle mě dobře srozumitelný. Vše, co je vyloženo v teorii, je pak procvičeno ve cvičeních. Jediné, co bych vytkla, je chybějící souvislost s reálným životem.

I v učebnici [13] autorů J. Molnára a kol. mě zaujal úvod do tématu. V příkladu 1 ([13], s. 66) je otištěn obrázek kolotoče a položena otázka: „Které sedačky na kolotoči byste obsadili, abyste zachovali maximální rovnováhu?“ Při řešení žáci zřejmě využijí středu kolotoče a intuitivně vlastností středové souměrnosti. Poté je popsán středově souměrný útvar jako útvar, který má střed souměrnosti. Výklad pokračuje obrázkem středově souměrných útvarů s vyznačenými dvojicemi středově souměrných bodů a popisem jejich vzájemných vztahů a je popsán střed souměrnosti, jako „bod, který určuje středovou souměrnost“ ([13], s. 66) a je samodružný. V následujících úlohách se žáci učí rozpoznat středově souměrné obrazce a určit jejich střed souměrnosti. V poslední úloze je úkolem najít všechny souměrnosti; jsou zde propojeny znalosti o souměrnosti středové a osové.

V části nazvané „Útvary ve středové souměrnosti“ ([13], s. 69) jsou podobně jako v knize [3] autorů J. Hermana a kol. definovány středově souměrné útvary pomocí otočení. V následujících příkladech je trénována konstrukce obrazu ve středové souměrnosti, poslední dva příklady jsou věnovány středové souměrnosti v prostoru.

Na této knize se mi líbí zajímavé příklady a příklady věnované středové souměrnosti v prostoru a dále vhodná volba geometrických útvarů a reálných příkladů. Postup výkladu mi ve srovnání s ostatními učebnicemi a s knihou [5] týchž autorů pro šestý ročník připadá mírně nesystematický.

V pracovní učebnici [1] autorů J. Cihláře a M. Zelenky je, jak již bylo řečeno, zvolen poměrně netradiční postup. Středová souměrnost je probírána až po posunutí, otočení a osové souměrnosti. Nejprve jsou žáci seznámeni s pojmem středově souměrný útvar: „Když papír dvakrát přehneme a vystříháme, získáme po rozložení papíru středově souměrný útvar ([1], s. 50).“ Toto vysvětlení je doplněno obrázkem. Pak následuje návod, jak sestrojit obraz bodu ve středové souměrnosti, k němu je připojen obrázek středu a několika dvojic souměrně sdružených bodů podle tohoto středu.

Po tomto krátkém úvodu následují hned úlohy. Kromě úloh tradičních zde najdeme úlohy zajímavé, neobvyklé a poměrně obtížné. Například úloha 74.(3), v níž je kladena otázka „Můžeme otáčením útvaru získat útvar, který je s ním středově souměrný ([1], s. 52)?“ Obměnou tradičních úloh je úloha 75.(6) ([1], s. 52), v níž je zadán střed souměrnosti. Úkolem je doplnit k němu slovně zadaný geometrický útvar tak, aby jeho obraz ve středové souměrnosti s daným středem S splynul s původním útvarem.

Tato učebnice je zajímavým zdrojem náročnějších úloh, věnuje poměrně málo prostoru procvičování rutinních činností. Považuji ji za vhodný doplňkový učební materiál.

Poslední kniha, kterou představím, je učebnice [15] autorů J. Novotné a kol. Tato vychází při výkladu středové souměrnosti z myšlenky skládání osových souměrností. Učebnicové postavy Kryšpín a Betka zkoumají papírové ozdoby vystřižené z dvakrát kolmo přehnutého papíru. Nejprve je učiněn závěr, že tyto jsou souměrné podle dvou os, poté jsou zkoumány vlastnosti vystřižených obrazců vzhledem k průsečíku těchto os a je popsáno nové zobrazení, středová souměrnost. V následujících příkladech a úlohách je procvičována konstrukce obrazu ve středové souměrnosti a hledání středu souměrnosti. I zde je stejně jako v kapitole věnované osové souměrnosti využíváno zejména čtverečkovaného papíru a soustavy souřadnic.

Vzhledem k mé práci mě zde zaujal způsob výkladu středové souměrnosti, který vychází ze skládání dvou osových souměrností. Dále se mi na knize líbí, že zadání většiny úloh vychází z reality, například úloha 2 ([15], s. 51). Je v ní využito fotografie kostelní klenby. Úkolem je mimo jiné vyznačit střed středové souměrnosti této klenby a „aspoň jednu dvojici k sobě kolmých os souměrnosti klenby ([15], s. 51)." Tato úloha či její obměna by se dala využít v mé experimentální výuce.

1.2.3.3 Středová souměrnost - shrnutí

Stejně jako v části věnované osové souměrnosti i zde na závěr připojuji shrnutí analýzy zpracování tématu středová souměrnost v českých učebnicích.

Metodickým postupem mě zaujala kniha [15] autorů J. Novotné a kol., kteří při zavedení středové souměrnosti využívají skládání souměrností osových. Tak je tomu i v knize [1] J. Cihláře a M. Zelenky, která, jak již bylo zmíněno, je vhodná spíše jako doplňkový materiál se zajímavými příklady.

Poutavé příklady v úvodu do tématu středová souměrnost oceňuji v knihách [12] autorů J. Coufalové a kol. a [13] J. Molnára a kol. Vzhledem k mojí myšlence využití skládání osových souměrností při výuce dalších shodných zobrazeních mě zaujaly výše zmíněné úlohy v knihách [12], [16] a [15], poslední z těchto učebnic navíc pěkně využívá fotografií reálných objektů. Zajímavé jsou též úlohy, které jsou obměnami tradičních problémů, například hledání středu souměrnosti, je-li dán vzor a jeho obraz v této souměrnosti ([14], s. 66, úloha 2).

Výklad teorie se mi líbí v knize [16] autorů O. Odvárka a J. Kadlečka zejména pro svou jednoduchost, stručnost a jasnost, navíc je vždy doplněn obrázkem. Učebnice [3] autorů J. Hermana a kol. i v tomto tematickém celku při výkladu zachovává matematickou přesnost a zároveň srozumitelnost pro žáky. Naproti tomu v knize [18] J. Trejbala a kol. se objevují matematicky přesné, ale velmi abstraktní a složité poučky.

Co se týká grafického zpracování, zaujaly mě nejvíce knihy [12] J. Coufalové a kol. a [8] O. Odvárka a J. Kadlečka. Stejně jako u osové souměrnosti i zde zavádí symbolický zápis středové souměrnosti jen učebnice [3] a [12], obě s ním pracují stejně jako u osové souměrnosti.

I v částech věnovaných středové souměrnosti jsem našla řadu zajímavých úloh, které mě inspirovaly při přípravě experimentální výuky.

1.2.4 Další shodná zobrazení v českých učebnicích

Jak již bylo řečeno, objevují se další shodná zobrazení v rovině, tj. posunutí a otočení, v našich učebnicích pro šestý a sedmý ročník poměrně často. Tato zobrazení jsou zmíněna více či méně podrobně v pěti z analyzovaných českých učebnic. V následujícím textu popíši způsob zpracování tohoto tématu v jednotlivých učebnicích. Liší se náročností, důrazem na teorii nebo naopak na praxi, originalitou úloh či existujícími nebo naopak chybějícími vztahy k dalším probraným shodným zobrazením; na tyto body se v této podkapitole budu soustředit, poznamenám též, co mě na daných knihách pozitivně či negativně zaujalo.

Nejvíce se mi líbila učebnice [13] autorů J. Molnára a kol. Jsou zde uvedeny pěkné příklady z běžného života a zajímavé netradiční úlohy. Oceňuji, že neopomíjí teorii, ale přitom teoretický výklad není přehnaně detailní, naopak je stručný a srozumitelný. Po probrání středové souměrnosti je nejprve zavedeno otočení a pak posunutí. Na úvod je otištěn obrázek rotující krasobruslařky a obrázek trojúhelníka se dvěma jeho obrazy v otočení kolem jednoho z vrcholů. Žáci mají pomocí průsvitky a špendlíku „vykonat vyznačený pohyb trojúhelníku" ([13], s. 70). Dále je řečeno, že „otočení je určeno středem otáčení (bodem) O a úhlem otáčení α" ([13] , s. 71). Na dvou obrázcích je ještě nakresleno otočení v kladném a záporném smyslu se znaménkem plus, respektive mínus, pro snazší zapamatování je nabídnuto srovnání se směrem hodinových ručiček. Pak jsou žáci vyzváni jmenovat další příklady otočení, které znají z každodenního života.

Hned poté jsou podobným způsobem seznámeni s posunutím. Nejprve je otištěn obrázek běžkaře pohybujícího se v běžecké stopě, pak mají žáci pomocí průsvitky napodobit pohyb otištěné šipky od vzoru k obrazu. Výklad teorie se zde omezuje pouze na poučku: „Posunutí je určeno směrem posunutí, velikostí posunutí ([13], s. 71)." Je zde zmíněna i možnost znázornit posunutí pomocí orientovaných úseček. Tento pojem je krátce objasněn, ale není na něj kladen důraz. V následujících několika úlohách žáci mají zjistit velikost posunutí a jsou upozorněni na další zajímavé příklady posunutí, například na dekorativní vzory vzniklé posunutím, nebo na využití posunutí ve volném rovnoběžném promítání.

Velmi zajímavá je zejména poslední část této kapitoly nazvaná „Shodné útvary, shodnost“ ([13], s. 72). Zatímco autoři většiny učebnic uvádějí shodnost a shodné útvary ještě před začátkem výkladu shodných zobrazení, v této knize toto téma výklad shodných zobrazení završuje. Jsou zde zejména úlohy, v nichž je dán vzor a jeho obraz a úkolem žáků je zjistit, „pomocí kterých shodností“ lze „daný útvar přemístit tak, aby se kryl s vyznačeným obrazem“ ([13], s. 73). Přitom jsou útvary voleny tak, aby v některých případech existovalo více možností řešení. Podobné úlohy jsou poté prováděny v soustavě souřadnic. Celkově je v této knize kladen důraz spíše na první seznámení s dalšími shodnými zobrazeními v rovině a propojení těchto nových znalostí se znalostmi osové a středové souměrnosti. Teorie i procvičování rutinních činností, jako konstrukce obrazu v posunutí a otočení, zde nejsou příliš důležité. Spíše se vyžaduje přemýšlení. Myslím, že takovéto seznámení je pro tuto věkovou skupinu vhodné, další rozšíření je možno provést na střední škole.

Pěkným úvodním příkladem začíná výklad posunutí učebnice [12] autorů J. Coufalové a kol.: „Petr, Jirka, Katka a Romana hráli stopovací hru. Petr a Romana... zanechávali na trase zprávy s úkoly... . V jedné takové zprávě bylo napsáno: ‚Jděte podél plotu, tam najdete další úkol.‘ Jirka s Katkou se na sebe bezradně podívali. Plot viděli, ale stejně nevěděli, kde přesně zprávu hledat. Jaké důležité informace vzkaz neobsahoval ([12], s. 162)?“ Výklad posunutí pokračuje na příkladu sestrojování rovnoběžek, při kterém je třeba posunovat trojúhelníkovým pravítkem po papíře. Z příkladů děti získají poznatek, že u posunutí je třeba udat nejen jeho směr, ale i velikost a orientaci. Poměrně podrobně se kniha zabývá pojmem orientovaná úsečka, který byl v předchozí publikaci spíše okrajový. Dále jsou žáci seznámeni s tím, jak sestrojit obraz přímky, trojúhelníku a kružnice v posunutí.

Zajímavá je úloha 8 ([12], s. 166), v níž žáci mají porovnat původní trojúhelník a jeho obraz v posunutí pomocí průsvitky. Z této úlohy je učiněn závěr, že posunutí je přímá shodnost. V následujících cvičeních je pak procvičováno posunutí v soustavě souřadnic, je připravována práce s vektory. Stejně jako u předchozích shodných zobrazení probíraných v této knize je i zde zaveden symbolický zápis, najdeme zde i několik úloh, jejichž zadání je zapsáno symbolicky.

I výklad otočení začíná nejprve příkladem z praxe, pak přechází ke geometrii. Na příkladu je ukázáno, že u otočení kolem středu o úhel α nestačí zadat pouze velikost tohoto úhlu, žáci jsou seznámeni s otočením v kladném a záporném smyslu, pomůckou k zapamatování je opět směr hodinových ručiček. Uveden je zde i pojem orientovaný úhel. I u otočení je zaveden symbolický zápis, který je opět okamžitě 'přeložen' slovy. V následujícím je dán návod na sestrojení obrazu v otočení a toto je procvičováno. I zde je zařazena úloha ([12], s. 172, úloha 8), v níž žáci porovnávají původní trojúhelník a jeho obraz v otočení pomocí průsvitky a zjišťují, že i otočení je přímá shodnost. Tento typ úloh uváděli autoři v této učebnici u každého z probraných shodných zobrazení. Podobné úlohy by se daly využít v mojí experimentální výuce.

Celkově je tato učebnice více zaměřena na teorii a procvičování sestrojování obrazů v probraných zobrazeních. Ve srovnání s knihou předchozí jde více do hloubky, ale příklady mi připadají více rutinní a méně zajímavé.

I učebnice [18] J. Trejbala a kol. je ve srovnání s knihou [13] J. Molnára a kol. více teoretická. Začíná sice výklad posunutí praktickými příklady, vzápětí vyjadřuje nutnost posunutí jako geometrické zobrazení přesně popsat. I v této knize jsou žáci seznámeni s pojmem orientovaná úsečka. V tradičních řešených příkladech se pak učí, jak sestrojit obraz různých geometrických útvarů v posunutí. Pak jsou poznatky o posunutí a jeho vlastnostech shrnuty v zarámované poučce. Nakonec je uvedeno posunutí v soustavě souřadnic, souřadnice obrazů bodů v posunutí jsou určovány jak geometricky, tak početně.

I v části věnované otočení jsou nejprve zmíněny příklady ze života a pak je popsáno otočení jako geometrické zobrazení. Žáci jsou opět seznámeni s otočením v kladném a záporném smyslu. V řešených příkladech se opět učí sestrojovat obrazy bodů a geometrických útvarů v otočení a zkoumají samodružné body tohoto zobrazení. Mezi tradičními cvičeními mě zaujala úloha, v níž je úkolem porovnat otočení kolem bodu o 180° v kladném i záporném smyslu se zobrazením ve středové souměrnosti s tímto středem. Podobně jako u již zmíněné úlohy 11 v knize [16] autorů O. Odvárka, J. Kadlečka ([16], s. 28) by i zde možná bylo vhodné vymyslet jistou obměnu této úlohy tak, aby její přesvědčivost nebyla závislá na přesnosti rýsování.

Po těchto příkladech a úlohách jsou opět v poučce shrnuty poznatky o otáčení. Tato poučka se jako většina ostatních v této knize opět snaží o matematickou přesnost, i zde se mi to ale zdá být na úkor srozumitelnosti pro žáky sedmé třídy. Tato kniha stejně jako učebnice [12] J. Coufalové a kol. obsahuje také spíše rutinní příklady a hodně procvičuje sestrojování obrazu geometrických obrazců v nově probraných zobrazeních. Úlohy jsou víceméně tradiční.

Kniha [1] autorů J. Cihláře a M. Zelenky, kterou bych také chtěla zmínit, zavádí, jak již bylo řečeno, shodná zobrazení v neobvyklém pořadí: posunutí, otočení, osová a středová souměrnost. Vychází zřejmě z představy, že posunutí a otočení jsou dětem běžně známé jako pohyb z každodenní reality, zatímco osová a středová souměrnost jako zobrazení jsou založeny již na určité abstrakci. Kapitola věnovaná posunutí využívá na začátku intuitivní představy o posunutí. Žáci se učí s využitím posunutí kreslit do čtvercové sítě prostorové modely písmen a dlaždicové vzory. Návod na geometrické sestrojení obrazu v posunutí je dán pouze obrázkem, ze kterého ale není jasné, jak se konstrukce skutečně provádí. V následujících úlohách je rovnou úkolem sestrojovat obrazy geometrických obrazců, nenajdeme zde na úvod žádný řešený příklad. Stejně jako úlohy z této učebnice věnované osové a středové souměrnosti jsou i tyto úlohy poměrně náročné.

Zajímavými úlohami autoři uvádějí téma otočení: „Po přímce se kotálí úsečka, rovnostranný trojúhelník a čtverec. Narýsujte si dráhu bodu A a středu S. (Můžete použít i vystřižené papírové modely útvarů) ([1], s. 38, úloha 55.(10)).“ Tato úloha mě zaujala tím, že vyžaduje představivost, nicméně nevím, jestli není jako úvodní úloha k tématu otočení příliš obtížná. Poté jsou žáci opět pouze pomocí obrázku, na němž není zřejmý postup konstrukce, seznámeni s tím, jak sestrojit obraz bodů v otáčení. Pak opět následují hned úlohy bez řešených příkladů. I zde najdeme zajímavé a poměrně náročné úlohy vyžadující představivost a hlubší zamyšlení. Některé z nich mají více řešení, někdy je součástí jejich řešení diskuse možných řešení. Jak bylo napsáno, považuji tuto knihu spíše za zdroj nevšedních úloh pro zpestření práce s běžnými učebnicemi.

Učebnici [15] J. Novotné a kol. uvádím v této podkapitole na posledním místě, protože jsou v ní další shodná zobrazení v podstatě jen velmi okrajově zmíněna. Žáci jsou jen na příkladech značek automobilů upozorněni na to, že je možné některé z nich podle vhodného bodu otočit tak, že se zobrazí samy na sebe (např. značka Mercedesu), či že je možné je vytvořit vhodným posunutím jedné jejich části (např. značka Citroenu). Otočení není v této knize dále zmíněno, o posunutí se dozvíme, že úsečky a jejich obrazy v posunutí jsou navzájem rovnoběžné a že existuje délka posunutí.

1.2.5 Shodná zobrazení v německých učebnicích

Jak již bylo řečeno v úvodu této práce, strávila jsem při jejím psaní jeden semestr na studijním pobytu na univerzitě v Heidelbergu. Při té příležitosti jsem se rozhodla nahlédnout do německých učebnic používaných ve škole v německé spolkové zemi Bádensko-Württembersko. Netušila jsem, že v nich najdu další výraznou inspiraci pro svou experimentální výuku.

Německé učebnice postupují při výkladu shodných zobrazení poněkud odlišně než učebnice české. Již na prvním stupni ve třetím a čtvrtém ročníku základní školy se zde děti seznamují se základními vlastnostmi osové souměrnosti a učí se rozeznávat „drehsymetrische Figuren", což lze přeložit jako útvary rotačně souměrné. To slouží jako příprava na výuku otočení a středové souměrnosti. Dále se zde objevují i náznaky posunutí. V těchto začátcích se žáci s látkou seznamují převážně hravým způsobem, v podstatě jen s naprostým minimem teorie. Autoři knih používají nejrůznější zajímavé pomůcky, z nichž některé by se možná daly využít i ve vyšších ročnících při probírání tohoto tématu. Zajímavý pro mou práci byl zejména fakt, že se již v těchto učebnicích pro třetí a čtvrtou třídu objevují první počátky skládání dvou osových souměrností s kolmými a rovnoběžnými osami.

Po úvodu do problematiky shodných zobrazení ve třetím a čtvrtém ročníku se němečtí žáci k tomuto tématu vracejí v páté, šesté a ještě jednou v osmé třídě. Vzhledem k rozmanitosti německého školského systému (základní škola trvá jen čtyři roky, pak existují různé další možnosti) jsem si k analýze učebnic pro tyto ročníky vybrala ty, které jsou v Bádensku-Württembersku již mnoho let nejčastěji používány na gymnáziu. Důvodem pro tuto volbu byl fakt, že pátý až devátý ročník německého gymnázia odpovídá pátému až devátému ročníku české základní školy, a to jednak věkově, a jednak skutečností, že je zde žákům na rozdíl od jiných typů německých škol poskytováno všeobecné vzdělání. V následujících podkapitolách popíši zpracování tématu shodná zobrazení v německých učebnicích pro první stupeň základní školy a pro nižší ročníky gymnázia. Zaměřím se zejména na rozdíly mezi českými a německými učebnicemi a zdůrazním případy skládání osových souměrností a úlohy, jež by bylo možné využít v mé experimentální výuce.

1.2.5.1 Shodná zobrazení v německých učebnicích pro 3. a 4. ročník základní školy

Ve třetím ročníku základní školy se žáci v německých učebnicích seznamují se základy osové souměrnosti. Použití kapesního zrcátka je běžné i v našich učebnicích.

Z prostudovaných německých knih je zrcátka využito v učebnici [20] autorů Ch. Benze a kol. a v knize [22] autorů D. Eccaria a kol. V učebnici [28] E. Ch. Wittmann a kol. je používána zvláštní pomůcku zvaná „Spiegelbuch", v překladu „zrcadlová knížka". Jedná se o dvě zrcátka nebo dva kusy papíru polepené alobalem, které jsou spolu spojeny lepící páskou a tvoří jakousi knihu, již lze rozvírat a zavírat, tj. u níž je možné měnit úhel, který zrcadla svírají. Žáci přikládají tuto „zrcadlovou knihu" k výchozím obrazcům otištěným v učebnici a jejich úkolem je nastavit zrcadla tak, aby získali určitý požadovaný obrazec. Seznamují se vlastně s praktickým příkladem několikanásobného zrcadlení.

V knize [23] G. Hubnera a kol. mě zaujala pomůcka zvaná „Geobrett". To lze přeložit jako „geometrické prkénko". Jedná se vlastně o čtvercovou dřevěnou destičku, na níž jsou připevněny hřebíky, které představují mřížové body čtvercové sítě. Pomocí gumičky napínané mezi hřebíky žáci snadno a rychle mohou vymodelovat různé geometrické tvary. Při výuce osové souměrnosti je této pomůcky využito nejprve v práci ve dvojicích, kdy položením dvou prkének vedle sebe vznikne plocha pro modelování vzoru a obrazu v osové souměrnosti, přičemž hranice prkének tvoří osu. Jeden ze dvojice žáků vytváří na prkénku vzory, druhý příslušné obrazy v osové souměrnosti. Další možné využití prkénka je modelování osově souměrných útvarů v samostatné práci. Žáci pak vymodelované situace znovu zpracovávají, když je překreslují na čtverečkovaný papír a učí se kreslit obraz v osové souměrnosti ve čtvercové síti.

V této knize [23] se objevuje i již zmíněný náznak skládání osových souměrností, a to jednak s navzájem rovnoběžnými a pak navzájem kolmými osami. V první úloze je ve čtvercové síti předkresleno několik navzájem rovnoběžných os, úkolem je podle nich stále dál zobrazovat v osové souměrnosti („spiegeln" = zrcadlit, zobrazovat v osové souměrnosti) předkreslený domeček tak dlouho „dokud stačí čtverečkovaný papír" ([23], s. 114).

Skládání osových souměrností s navzájem kolmými osami je rovněž nejdříve modelováno pomocí „Geobrett". Tentokrát ve skupinové práci žáci spojí vždy čtyři čtvercová prkénka tak, že vznikne opět čtverec, hranice prkének pak modelují dvě navzájem kolmé osy. První žák opět vymodeluje na svém prkénku libovolný geometrický útvar. Druhý na sousedním vytvoří jeho obraz v osové souměrnosti dané hranicí mezi prkénky, třetí a čtvrtý žák vždy zobrazí podle osy výtvor svého předchůdce. Když je čtvrtý žák hotov, diskutuje se o výsledném obrazci. Poté jsou obdobné situace opět zakreslovány na čtverečkovaný papír.

Zakreslování obrazů zadaných útvarů v osové souměrnosti do čtvercové sítě se objevuje ve všech třech prostudovaných učebnicích pro čtvrtý ročník, souměrnost podle dvou os se objevuje ještě v knize [22] autorů D. Eccaria a kol.

V učebnicích pro čtvrtý ročník se jako příprava na středovou souměrnost a otočení objevuje již výše zmíněná rotační souměrnost, což je pojem, který se u nás na základní škole nezavádí. Žáci se zde učí rozlišovat útvary souměrné v otočení. Jak je poznají, jim říká poučka: „Útvar je rotačně souměrný, když po otočení kolem nějakého bodu vypadá znovu přesně tak, jako předtím. I barvy musí souhlasit ([27], s. 64)." Tuto poučku považuji za poměrně spornou, jednak kvůli nutné shodnosti barev a jednak proto, že neřeší zvlášť případ, kdy se útvar shoduje s původním po otočení kolem nějakého bodu o 360°.

Podstatně lépe s tímto pojmem pracuje učebnice [25] autorů K.-H. Kellera a kol. Zde mají žáci za úkol přiložit k obrysu geometrického útvaru v učebnici jeho papírový model, propíchnout jej ve vyznačeném bodě špendlíkem a otáčet jej kolem tohoto bodu tak, aby se modely s obrysem překrývaly, pak mají určit, u kterých se jim to povede pouze po „celém otočení" a kde naopak nejen po „celém otočení". Bez složitého a zároveň nepřesného slovního popisu se tedy učí tyto útvary rozpoznávat. Učebnice [24] G. Hübnera a kol. k demonstraci souměrnosti v otočení nejprve opět využívá geometrického prkénka a čtvercové sítě, od nichž se později odpoutává. Pěkná je úloha 8 ([24], s. 109), v níž mají žáci za úkol rozpoznat, zda je útvar osově souměrný, či souměrný v otočení; dojdou k závěru, že některé útvary mohou splňovat obojí.

Kromě této přípravy na otočení a středovou souměrnost je v učebnicích pro čtvrtou třídu dále prohloubeno skládání dvou osových souměrností. Najdeme je pod pojmem „doppelte Spiegelung", což můžeme přeložit jako „dvojité zrcadlení" nebo „dvojité zobrazení v osové souměrnosti". V učebnici [26] P. Leiningera a kol. najdeme nejprve ukázku skládání dvou osových souměrností s navzájem kolmými osami. Žáci mají za úkol pozorovat a popsat, co je jim nápadné, v dalších úlohách mají sami do čtvercové sítě zakreslit výsledek „dvojitého zrcadlení". V následující úloze mají žáci podobný úkol, osy jsou přitom navzájem rovnoběžné. Tyto úlohy jsou pro mě zajímavé tím, že s využitím skládání osových souměrností vlastně připravují půdu pro pozdější zavedení posunutí a otočení.

Kniha [25] K.-H. Kellera nezůstává u dvou os, ale pomocí opakovaného zobrazování v osové souměrnosti podle několika os vytváří ve čtvercové síti dlaždicové vzory. V této knize mě zaujala úloha 6 ([25], s. 92), v níž jsou dlaždicové vzory zadány a úkolem je zjistit, z jakého původního obrazce zrcadlením vznikly.

Nahlédnutí do těchto učebnic mě utvrdilo v přesvědčení, že je možné skládání osových souměrností při výuce dalších shodných zobrazení ve škole využít. Ostatně v německých učebnicích pro osmé ročníky se skládání osových souměrností v souvislosti s dalšími shodnými zobrazeními skutečně objevuje.

1.2.5.2 Shodná zobrazení v německých učebnicích pro nižší gymnázium

V učebnici [32] A. Schmida a kol. pro pátou třídu gymnázia (odpovídá věkově páté třídě základní školy v České Republice) se objevuje osová i středová souměrnost, zatímco v českých učebnicích jsou až na výjimky (tj. knihy [1], [3] a [15]) zařazeny postupně osová v šesté a středová souměrnost v sedmé třídě. Výklad těchto souměrností v německých učebnicích se od výkladu v učebnicích českých nijak výrazně neliší.

Nejprve je vyložena souměrnost osová. Vychází se zde od příkladů souměrnosti v reálném životě, pak se zkoumají vlastnosti vzoru a obrazu. I zde autoři využívají propichování přehnutého papíru. Nakonec je dán krátký, obrázkem doplněný slovní návod, jak sestrojit obraz bodu v osové souměrnosti: „Bod *P* zobrazíme v osové souměrnosti dané přímkou *g* tak, že: 1. rysku trojúhelníku přiložíme na přímku *g*, 2. bod *P´* odpovídající bodu *P* vyznačíme tak, aby přímka *g* půlila úsečku *PP´* ([32], s. 133).“ Pak se žáci učí rozeznávat osově souměrné obrazce a určovat jejich osy souměrnosti. V úlohách je pak procvičována osová souměrnost zejména ve čtvercové síti a soustavě souřadnic.

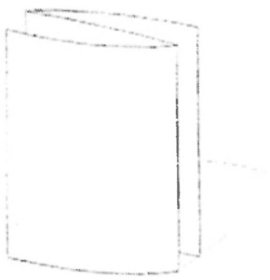
Středová souměrnost je ukázána nejdříve na příkladu obrazce vystřiženého z dvakrát kolmo přehnutého papíru. Žáci jsou upozorněni na fakt, že tento útvar má střed souměrnosti, pro nějž platí, že jím procházejí všechny spojnice sobě odpovídajících bodů ve středové souměrnosti a že tyto spojnice jsou středem půleny. Pak následuje opět návod, jak získat obraz bodu ve středové souměrnosti se středem *Z*: „Při zobrazování bodu *P* ve středové souměrnosti se středem *Z* narýsujeme: 1. přímku *g* procházející body *P* a *Z*, 2. odpovídající bod *P´* na *g* tak, že bod *Z* půlí úsečku *PP´* ([32], s. 145).“ Pak se žáci učí rozeznávat středově souměrné obrazce a procvičují středovou souměrnost opět převážně ve čtvercové síti a v soustavě souřadnic.

V knize [30] autorů A. Schmida a kol. pro šestý ročník je zavedeno posunutí a otočení a jsou zopakovány a prohloubeny znalosti osové a středové souměrnosti. U každého ze zobrazení je nejprve uveden příklad z běžného života, poté je řečeno, čím je dané zobrazení určeno, přičemž pojem orientované úsečky je zmíněn, ale ne detailně probírán, při výkladu otočení se autoři nezabývají kladným či záporným smyslem otočení. U každého z těchto zobrazení je dále dán návod na sestrojení obrazu a pak jsou ještě krátce zmíněny jeho základní vlastnosti, například: „Při posunutí jsou útvar a jeho obraz shodné. Úsečka a její obraz jsou navzájem rovnoběžné ([30], s. 110).“ Nebo se uvádí: „Při zobrazení v osové souměrnosti jsou útvar a jeho obraz shodné. Útvar ale při zobrazení v osové souměrnosti změní orientaci ([30], s. 112).“

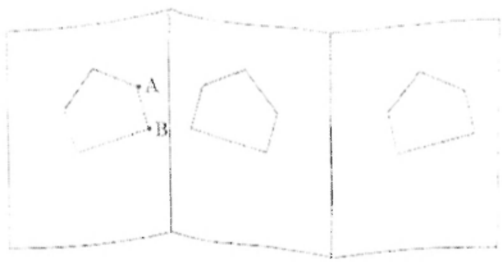
I v této knize se se shodnými zobrazeními pracuje převážně ve čtvercové síti či soustavě souřadnic. Spíše než rutinní procvičování zobrazování geometrických obrazců zde najdeme úlohy, které toto učivo propojují s jinými oblastmi matematiky a vyžadují přemýšlení. Zaujala mě například tato úloha: „V (jinak prázdném) 5 m dlouhém a 4 m širokém pokoji leží koberec, jehož okraje jsou od všech stěn vzdáleny 50 cm. a) Nakresli pokoj a koberec v měřítku 1:100. b) Jak daleko je možné koberec otáčet okolo jeho středu, než dva z jeho rohů narazí na zeď ([30], s. 116, úloha 9)?“ Kromě úloh k procvičení jsou na konci kapitoly věnované shodným zobrazením nabídnuty zajímavé možnosti jejich využití, například kreslení v počítačovém programu nebo známý příklad využití osové souměrnosti při hře kulečník.

V učebnicích pro osmou třídu již nejsou podrobněji pojednávána jednotlivá shodná zobrazení, ale je zde řeč o vlastnostech shodných zobrazeních jako celku. To je poměrně podstatný rozdíl ve srovnání s českými učebnicemi, které tento pojem většinou vynechávají či obcházejí a zmiňují je jen jako nadřazený pojem pro středovou souměrnost, osovou souměrnost, posunutí a otočení. V učebnici [31] autorů A. Schmida a kol. je tento pojem popsán přesněji: „Osové souměrnosti, posunutí, středové souměrnosti a otočení stejně jako jejich složení se nazývají shodná zobrazení. ... Při shodném zobrazení se nemění délky úseček a velikosti úhlů ([31], s. 49).“ Tato poučka je ještě před jejím vyslovením demonstrována na konkrétním příkladu. Dále je připojena přesná definice shodných útvarů: „Útvary F a G se nazývají shodné, jestliže je lze na sebe zobrazit pomocí shodného zobrazení. Pak píšeme $F \cong G$ (čti: F je shodný s G) ([31], s. 50).“ Myslím, že bližší zabývání se pojmem shodné zobrazení by také mohlo být součástí mojí experimentální výuky.

V této knize mě nejvíce zaujala poslední část kapitoly věnované shodnosti. Ta je nazvaná „O obrazu obrazu“ ([31], s. 65) a je věnována skládání osových souměrností. Na úvod je zmíněno, že v následujícím textu bude ukázáno, že mezi základními „stavebními kameny“ ([31], s. 65) shodných zobrazení, kterými jsou posunutí, otočení, osová a středová souměrnost, hraje osová souměrnost zvláštní roli. V následujícím textu je uvedena série gradovaných úloh založených na vystřihování skládaného papíru, měření a hledání souvislostí. Tato na konci vede k poznání, jak lze získat otočení a posunutí složením dvou osových souměrností a že: „Každé shodné zobrazení je složením osových souměrností ([31], s. 66).“ Jako příklad uvedu první dvě z těchto úloh. První z nich zní: „Slož list papíru dvakrát jako tahací harmoniku (obr. 1). Dbej na to, aby se části horního okraje listu překryly. Tímto způsobem vzniknou dva přehyby, které jsou navzájem rovnoběžné. Vystřihni obrazec a list opět rozlož (obr. 2). a) Vystřižení lze pojmout jako složení dvou zobrazení. Jaká zobrazení byla složena? b) Vyznač na okraji levého obrazce dva body A a B (obr. 2). Sestroj pomocí trojúhelníku s ryskou jejich obrazy A', B' (v osové souměrnosti podle prvního přehybu – pozn. autora) a obrazy A'', B'' bodů A' a B' (v osové souměrnosti podle druhého přehybu – pozn. autora). Porovnej délku a směr úseček AA'' a BB''. c) Jaká je souvislost mezi délkami AA'', popř. BB'' a vzdáleností obou přehybů? Jaké zobrazení tedy zobrazuje body levého obrazce bezprostředně na odpovídající body obrazce zcela vpravo ([31], úloha 1, s. 65)?“



Obr. 1



Obr. 2

V následující úloze ([31], s. 65, úloha 2) je postup obrácen, z listu papíru je vystřižen obrazec a jeho obraz v posunutí ve směru okraje listu. Žáci mají za úkol najít takové dva přehyby kolmé k onomu okraji papíru, které tvoří osy souměrností, na něž lze dané posunutí rozložit. Tzn. žáci mají složit papír tak, aby jedním vystřižením získali vzor i jeho obraz v posunutí. Nakonec je kladena otázka, zda je toto rozložení posunutí na dvě osové souměrnosti jednoznačné. Podobná úloha je nabídnuta i pro otočení a středovou souměrnost.

Tato série úloh či její obměna by se dala využít pro účely mojí experimentální výuky. Líbí se mi na ní, že hravým způsobem, bez předchozího teoretického výkladu žáci sami objeví souvislosti mezi probranými shodnými zobrazeními. Navíc si myslím, že odpovídá úrovni žáků osmé třídy. Jak již bylo řečeno, na závěr této kapitoly jsou poznatky ze série úloh shrnuty do jediné poučky: „Každé shodné zobrazení je složením osových souměrností ([31], s. 66).“ Není zde kladen přílišný důraz na matematickou přesnost, protože tato věta z předchozích úloh jasně nevyplývá, autoři zde nezacházejí do přílišných podrobností.

Pojmem shodnosti a problematikou skládání osových souměrností se poměrně podrobně zabývá učebnice [29] autorů Ch. Fiedlera a kol. pro osmý ročník. Narozdíl od předchozí publikace [31] A. Schmida a kol. se zde vyskytuje více teorie formulované do přesných matematických vět. Nejprve zde žáci mají pomocí průsvitky a později pomocí měření rozhodnout o shodnosti útvarů, pak je uvedena definice shodných útvarů podobná definicím vyskytujícím se v českých učebnicích: „Dva útvary A a B se nazývají shodné, pokud mají stejný tvar a velikost. Navzájem shodné obrazce se na sebe dají přesně přenést. Píšeme $A \cong B$, čteme A je shodný s B ([29], s. 44).“ Vedle této definice běžné i v našich učebnicích pro základní školy se zde objevuje ale i několik vět a definic, které obsahově či formálně odpovídají spíše českým učebnicím vysokoškolským, například: „Osové souměrnosti, posunutí, středové souměrnosti, otočení a jejich složení se nazývají shodná zobrazení ([29], s. 47),“ nebo „Útvar A je shodný s útvarem B, právě tehdy když existuje shodné zobrazení, které zobrazuje útvar A na útvar B ([29], s. 48).“

V této knize je dále vyloženo posunutí, otočení a středová souměrnost jako zobrazení vzniklé složením dvou osových souměrností. I zde se vyskytuje ve srovnání s knihou [31] autorů J. Schmida a kol. více teorie. Zatímco učebnice [31] se spokojuje s nastíněním této problematiky na několika hravých zajímavých úlohách a poznatky v nich získané pak shrnuje jednou větou, kniha [29] přináší spíše tradičnější výklad této problematiky. Teorie je formulována do vět, u nichž jsou naznačeny důkazy. Setkáme se tedy například s větou: „Jestliže jsou osy a a b rovnoběžné, pak můžeme složení dvou osových souměrností podle osy a a podle osy b nahradit posunutím. Délka tohoto posunutí je rovna dvojnásobku vzdálenosti os; její směr je kolmý na osy, a to od a k b ([29], s.51).“ V české vysokoškolské učebnici [39] J. Vyšína najdeme například definici: „Shodnost, kterou lze dostat složením dvou různých osových souměrností s neprotínajícími se osami, nazýváme posunutí v rovině ([39], s. 80).“

Nahlédnutí do této učebnice [29] pro mě bylo rovněž inspirací při přípravě experimentální výuky. Přístup autorů knihy [31] ke skládání osových souměrností mi sice připadal pro žáky osmé třídy přiměřenější než pojetí autorů učebnice [29], nicméně v mé experimentální výuce se objeví prvky obou přístupů.

1.2.5.3 Shodná zobrazení v německých učebnicích – shrnutí

Nahlédnutí do německých učebnic pro mě zcela jistě znamenalo velký přínos. Objevila jsem v nich řadu originálních nápadů, pomůcek a pracovních postupů, se kterými jsem se v našich knihách nesetkala. To se týká jak učebnic pro první stupeň, tak i učebnic pro gymnázia. Zde samozřejmě přibývá tradičních příkladů a teoretických pouček, ale jsou zařazovány i příklady netradiční, zapojující i předchozí znalosti žáků z matematiky či běžného života. Nejvíce mě zaujal výklad skládání dvou osových souměrností ve dvou učebnicích pro osmý ročník, zejména konstruktivistický přístup k tomuto učivu v učebnici [31] A. Schmida a kol. Některé úlohy mojí experimentální výuky jsou převzaty z německých knih. Kromě toho mě německé učebnice také motivovaly k využití čtvercové sítě při výuce skládání dvou osových souměrností.

1.3 Realizace požadavků didaktiků v současných učebnicích

Při studiu používaných učebnic matematiky jsem získala přehled o poměrně širokém spektru přístupů k problematice výuky shodných zobrazení ve škole. Ve všech dnešních učebnicích, které jsem prostudovala, se objevují alespoň náznaky problémového přístupu k učivu. V některých tento přístup převládá, v jiných je omezen pouze na úvodní, motivační příklady. Žáci jsou vhodnými otázkami k zadaným obrázkům a gradovanými úlohami vedeni k samostatnému objevování nejrůznějších zákonitostí. Teprve potom jsou tyto poznatky formulovány do pouček. To odpovídá již zmíněnému názoru F. Kuřiny, že je pro žáky důležitější sami něco objevit než pouze pasivně přijímat verbalizované poznatky a vytvářet z nich systém. Dalším již zmíněným přínosem tohoto přístupu je podle F. Kuřiny skutečnost, že se žáci učí „pozorovat fakta a vyvozovat z nich důsledky ([35], s. 15)", což je schopnost, kterou zcela jistě uplatní ve všech oblastech života, nejen v matematice. To, že žáci na základě řešeních vhodných úloh sami konstruují své poznatky, má za důsledek kvalitnější a trvalejší povahu těchto poznatků. Kromě toho se žáci učí přemýšlet, sami objevovat vztahy a vidět a formulovat nové souvislosti. I toto jsou schopnosti potřebné v každodenním životě. Konstruktivistický přístup k učivu je výrazně zastoupen například v knihách [8] a [16] O. Odvárka a J. Kadlečka, [2] a [12] J. Coufalové a kol., [5] a [13] J. Molnára a kol. a v učebnici [15] J. Novotné a kol.

Na druhou stranu se v našich učebnicích často objevuje tradiční přístup k učivu, který se i na základní škole snaží o systém pokud možno přesných matematických tvrzení, což se někdy daří bez újmy na srozumitelnosti pro žáky (např. v knize [3] J. Hermanna a kol.), jindy nikoli.

Je patrné, že autoři českých učebnic se snaží o problémový přístup k učivu, na druhou stranu jsou vázáni učebními osnovami a nutností probrat určité množství látky. Vzhledem k úspoře času pak uplatňují transmisívní přístup k učivu.

Až na výjimky (např. učebnice [6] a [14] J. Müllerové a kol.) se rovněž téměř ve všech učebnicích objevuje sepětí geometrie s reálným životem; toto je zejména při probírání osové a středové souměrnosti v některých učebnicích výrazně podpořeno velice pěkným využitím obrázků a fotografií. Ty se objevují jako ilustrace či jako doplnění motivačních příkladů např. v knihách [5] a [13] autorů J. Molnára a kol, ale také jako součást zadání geometrických úloh v knize [15] autorů J. Novotné a kol. U posunutí a otočení je vazba na realitu vybudována pomocí pěkných obrázků v učebnici [13].

Co se týká studia geometrických transformací, je v našich učebnicích věnována pozornost zejména osové a středové souměrnosti, tedy shodným zobrazením, která jsou svým způsobem statická. Tato skutečnost je dána obsahem učebních osnov, která posunutí a otočení zařazují na základní škole pouze jako možné rozšiřující učivo. Požadavku M. Jelínka vnést studiem transformací do geometrie pohyb je tedy vyhověno jen do určité míry v některých učebnicích. Tento požadavek plní asi nejlépe kniha [13] J. Molnára a kol., která sice v problematice dalších shodných zobrazení nezachází do detailů, ale věnuje se těmto zobrazením jakožto pohybu. Velká část českých učebnic se zabývá pouze osovou a středovou souměrností. Naproti tomu v německých učebnicích jsou žáci na základní škole v rámci povinného učiva seznámeni nejen s osovou a středovou souměrností, ale i s posunutím a otočením, mnohem více pozornosti je věnováno shodným zobrazením jako takovým a jejich vzájemným souvislostem.

Problematika skládání dvou osových souměrností s kolmými osami se v náznaku objevuje v několika českých učebnicích většinou v úlohách, které mají žáky dovést k nalezení souvislosti mezi středovou a osovou souměrností, někde též otočením o 180°. To odpovídá požadavku učit žáky vidět dosud neformulované souvislosti, což je jedním z cílů výuky geometrie podle F. Kuřiny. V německých učebnicích v problematice skládání osových souměrností autoři zacházejí výrazně dál než v českých. Je to dáno skutečností, že žáci základní školy znají všechna shodná zobrazení a zabývají se podrobněji i pojmem shodné zobrazení jako takovým. Při řešení problémových úloh pak žáci opět sami objevují dosud neznámé souvislosti, tj. souvislosti mezi skládáním osových souměrností a dalšími shodnými zobrazeními.

Celkově se domnívám, že se naše současné učebnice ubírají správnou cestou. Směřují ke konstruktivistickému přístupu k vyučování, jsou často plné pěkných obrázků, které mají jak motivační, tak didaktickou funkci, snaží se zdůrazňovat vztah geometrie s reálným světem. Výraznější vnesení pohybu do geometrie na základní škole je omezeno zejména obsahem učebních osnov, které na první místo mezi shodnými zobrazeními staví osovou a středovou souměrnost.

2. kapitola

Příprava experimentu

Přibližnou představu o tom, jak by měla experimentální výuka vypadat, jsem měla již v okamžiku, kdy jsem se začala tématem této práce zabývat. Od začátku jsem počítala s tím, že budu mít k dispozici zhruba šest vyučovacích hodin. Zvolila jsem tento počet hodin, protože se zdál být akceptovatelný pro učitele, v jehož třídě se bude experimentální výuka realizovat, to znamená nebyl příliš velký, aby výrazně nenarušil plánovaný průběh normální výuky. Zároveň mi připadalo možné v tomto čase stihnout probrat ucelený celek učiva.

S vlastní přípravou experimentu jsem začala až po prostudování všech českých a německých učebnic pro základní školu zmíněných v této práci. Během studia učebnic a psaní první kapitoly této práce jsem si vytvářela stále konkrétnější představu o plánované experimentální výuce. Kromě toho, že mě inspirovaly, či naopak odradily některé úlohy či metodické postupy, o nichž se zmiňuji v první kapitole, jsem si ujasňovala, pro který ročník bude můj experiment určen či do jaké hloubky a jakým způsobem se budu problematikou skládání osových souměrností a výkladem dalších shodných zobrazení zabývat.

Rozhodla jsem se nakonec provést svou experimentální výuku v osmém ročníku základní školy či v odpovídajícím ročníku víceletého gymnázia. Důvodem pro toto rozhodnutí byl zejména fakt, že se žáci v šestém a sedmém ročníku zabývali osovou a středovou souměrností, zatímco do devátého ročníku je učebními osnovami zařazeno učivo o podobnostech. Osmý ročník mi tedy přišel jako ideální k zopakování poznatků o osové a středové souměrnosti, jejich prohloubení a rozšíření o znalost dalších shodných zobrazení. V tomto rozhodnutí mě utvrdily i německé učebnice, zařazující do osmého ročníku prohloubení znalostí o shodných zobrazeních jako celku a seznamující žáky se skládáním osových souměrností.

Jak již bylo řečeno, na začátku přípravy experimentu jsem si tedy nejprve ujasnila věkovou skupinu žáků, pro kterou má být výuka určena. Zbývalo tedy rozhodnout, jaké konkrétní učivo pro tuto výuku zvolit a jakým způsobem je rozpracovat.

Při výběru učiva jsem si sama nejdříve problematiku skládání osových souměrností a dalších shodných zobrazení připomněla při prostudování příslušné kapitoly ve vysokoškolské učebnici [39] J. Vyšína. Nakonec jsem pro výuku zvolila pouze to nejzákladnější z této problematiky, tj. skládání dvou osových souměrností s rovnoběžnými, různoběžnými a kolmými osami. K tomuto rozhodnutí mě vedl fakt, že jsem pomocí skládání osových souměrností chtěla dojít k posunutí a otočení, k čemuž je zapotřebí pouze skládání dvou osových souměrností. Zároveň jsem se nechala inspirovat úlohami z německých učebnic, ve kterých autoři skládání dvou osových souměrností pěkně modelovali pomocí vystříhávání z dvakrát přeloženého papíru. Skládání více než dvou osových souměrností jsem využila pouze k demonstraci pojmu přímé a nepřímé shodnosti.

Co se týká způsobu rozpracování tohoto učiva, inspirovala jsem se zejména v německých, ale i v českých učebnicích. Snažila jsem se o konstruktivistický přístup k učivu, o to, aby žáci sami získávali poznatky. Původně jsem měla v úmyslu poskytnout žákům pouze hravé nahlédnutí do problematiky shodných zobrazení a souvislostí mezi nimi, podobně jako je tomu například v knize [13] autorů J. Molnára a kol. či v německé učebnici [31] A. Schmida a kol. Nakonec jsem ale svůj původní úmysl změnila. Důvodem byl fakt, že výsledek experimentu bylo třeba ověřit testem. Pokud by se v experimentu žáci zabývali pouze hravými úlohami, bylo by velice obtížné takový test sestavit a vyhodnotit.

Nakonec jsem se tedy ve svém přístupu přiklonila k učebnicím, které vykládají další shodná zobrazení podrobněji, tj. včetně teoretického výkladu a konstrukce obrazu v posunutí a otočení. Při formulaci teoretických pouček jsem se tam, kde to bylo možné, pokusila dát žákům prostor, aby je sami doplnili či odvodili. Kromě toho jsem se snažila vyvarovat příliš složitých formulací, které jsem kritizovala v některých prostudovaných učebnicích.

2.1 Výběr školy

Svou experimentální výuku jsem realizovala v rámci souvislé pedagogické praxe. Zvolila jsem tedy fakultní základní školu Jiřího Gutha-Jarkovského v Truhlářské ulici v Praze. Tato volba byla provedena na základě předchozích zkušeností na této škole během klinického semestru. Velkou roli sehrál fakt, že jak ředitel školy, tak učitel matematiky v osmé třídě byli velice vstřícní a bez problémů souhlasili s provedením experimentu.

Ačkoli jsem výuku od začátku promýšlela jako rozpracování učiva pro nadané děti, k jejímu praktickému ověření nakonec došlo na běžné základní škole. To sice bylo spojeno s řadou nevýhod, na druhou stranu se to ukázalo být ale i velice přínosné a zajímavé, jak z hlediska této práce, tak z hlediska mojí pedagogické praxe. Rozhodla jsem se v přípravě experimentální výuky neslevit z původních představ, experiment tak do jisté míry ukázal, co z probíraného učiva jsou skutečně schopni zvládnout jen nadanější žáci, kteří se samozřejmě našli i na běžné základní škole, a co je schopen zvládnout průměrný žák osmé třídy.

Na přání svého uvádějícího učitele jsem nakonec experimentální výuku realizovala nikoli v jedné, ale ve dvou osmých třídách, 8.A a 8.B, zároveň. I to bylo velmi zajímavé. Jednak mi to umožňovalo přizpůsobit výuku, přihlédnout k problémům žáků a vyložit ve druhé třídě látku lépe než v první, jednak bylo zajímavé sledovat, že stejně připravená hodina se může ve dvou různých třídách realizovat naprosto odlišně. Obě třídy se totiž výrazně lišily počtem žáků, jejich povahou, znalostmi i kázní.

Výběrem konkrétní školy a třídy jsem tedy získala poslední nutnou podmínku pro přípravu konečné podoby experimentální výuky.

2.2 Příprava učebního textu

Vzhledem k tomu, že jsem měla k dispozici pouhých šest vyučovacích hodin, které jsem chtěla co nejlépe využít, rozhodla jsem se vypracovat pro své žáky jakýsi pracovní sešit, který by výrazně zrychlil a zefektivnil jejich práci v hodinách. Díky tomuto materiálu měli žáci ušetřit čas, který by jinak strávili zapisováním teorie či obkreslování zadání, zároveň jeho použití mělo zaručit, že budou mít všichni k dispozici stejné, správné a přesně narýsované zadání, což je jinak při výuce geometrie často problém, který zabere hodně času.

2.2.1 Základní struktura experimentální výuky a učebního textu

Připravovaný učební text měl být rozčleněn do pěti částí, 'hodin', úlohy v těchto částech obsažené měly odpovídat náplni pěti vyučovacích hodin plánovaných pro výuku, šestá hodina byla vyhrazena pro závěrečný test.

V první hodině si žáci měli zopakovat a prohloubit pojem shodnost a osová souměrnost, seznámit se s pojmem přímá a nepřímá shodnost a vyzkoušet si opakované zobrazení v osové souměrnosti. Druhá hodina měla být věnována odvození posunutí jakožto shodného zobrazení vzniklého složením dvou osových souměrností se dvěma rovnoběžnými osami, seznámení s jeho vlastnostmi a s konstrukcí obrazu v posunutí. Třetí hodina pak měla být opakovací. Na čtvrtou hodinu bylo plánováno odvození otočení jako shodného zobrazení vzniklého složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami, dále opět seznámení s jeho vlastnostmi a konstrukce obrazu v otočení. Pátá hodina měla být věnována procvičování otočení a dále středové souměrnosti jako jeho speciálnímu případu.

Tuto plánovanou strukturu, odpovídající jednotlivým vyučovacím hodinám, má nakonec i výsledná podoba učebního textu. Na konci každé jeho kapitoly či 'hodiny' byla plánovaná jedna úloha jako domácí cvičení, měla to být buď úloha časově náročnější nebo úloha, na níž si zopakovali nové poznatky nabyté v hodině. Také toto bylo dodrženo i v závěrečné podobě textu.

2.2.2 Vlastní text

Moje představa o experimentální výuce a o podobě pracovního sešitu pozvolna vznikala a konkretizovala se již dlouho před tím, než jsem s jejich přípravou skutečně začala. Vzhledem k tomu pak samotný vznik tohoto materiálu trval poměrně krátkou dobu, v podstatě jen několik dní, během nichž jsem shrnula své předchozí myšlenky na papír. Vlastně jsem pouze sepsala sérii úloh, které měly vést ke stanovenému cíli jednotlivých hodin.

Až na malé změny ve formulacích pouček či změny v pořadí jednotlivých úloh jsem během tvorby tohoto materiálu neprováděla žádné výrazné úpravy. Výsledná verze textu tedy téměř zcela odpovídá původní plánované. V následujících podkapitolách představím tento učební text a objasním, proč jsem na daném místě zařadila právě tyto úlohy a co bylo jejich cílem. Některé úlohy či obrázky jsou převzaty z českých či německých učebnic nebo jsou obměnou úloh vyskytujících se v těchto učebnicích; tento fakt samozřejmě u jednotlivých úloh také zmíním.

Jak již bylo řečeno, výsledný učební text je rozdělen do pěti částí, 'hodin'. Úlohy jsou v každé 'hodině', číslovány od jedničky. K jednoznačnému určení toho, o kterou úlohu se jedná, budu tedy v této práci užívat vždy číslo 'hodiny' a číslo úlohy, například: 3. 'hodina', úloha 1.

Celý učební text je otištěn jako příloha I této práce, na niž budu v komentáři jednotlivých úloh odkazovat.

2.2.2.1 První 'hodina': Shodnost, osová souměrnost

Jak již bylo řečeno, v první hodině by si žáci měli zopakovat a prohloubit dosavadní znalosti o shodnosti a osové souměrnosti, seznámit se s pojmy přímá a nepřímá shodnost a vyzkoušet si několikanásobné zobrazení v osové souměrnosti. Zopakování a rozšíření poznatků o shodnosti jsou v první hodině věnovány úlohy 1, 2, 3 a 4 (příloha I, 1. 'hodina', úlohy 1 – 4).

V první úloze (příloha I, 1. 'hodina', úloha 1), která je převzata z knihy autorů J. Coufalové a kol. ([2], s. 114, úloha 3), mají žáci za úkol rozhodnout o shodnosti útvarů pomocí průsvitky. Nedostanou přesný návod, jak to provést, ani nejsou upozorněni na nutnost v některých případech průsvitku obrátit. Záměrně jsem vybrala úlohu takto zadanou, zajímalo mě, zda žáci dojdou ke stejným či různým výsledkům a jak budou postupovat.

Vzhledem k tomu, že ve většině tříd se žáci často liší tempem práce, což se velice výrazně projeví právě při geometrii, když musí kreslit či rýsovat, zařadila jsem pro rychlejší žáky ještě „další úkoly" a), b), c), aby měli nad čím přemýšlet, zatímco ti pomalejší ještě řeší úlohu 1.

Zatímco „další úkoly" b) a c) jsou určeny zejména rychlým žákům, kteří by se jinak nudili, plánovala jsem úlohu 1 a úkol a) probrat se všemi žáky, zkontrolovat výsledky, ke kterým došli, vyslechnout jejich odůvodnění, zeptat se, jak rozhodli o shodnosti zadaných geometrických útvarů a zda existuje ještě jiný způsob, jak o ní rozhodnout (očekávaná odpověď: měření), eventuelně zmínit shodnost v prostoru. Výsledky této diskuse pak měly být využity při formulaci definice shodných útvarů, která je otištěna v rámečku pod „dalšími úkoly". Tato definice je rovněž částečně převzata z knihy [2] ([2], s. 113, 114).

Předpokládala jsem, že v úloze 1 a následující poučce se žáci dozví, že i případ, kdy musíme průsvitku obrátit, považujeme za shodnost. V úloze 2 (příloha I, 1. 'hodina', úloha 2) mají na základě práce s průsvitkou za úkol doplnit poučku seznamující je s pojmy přímá a nepřímá shodnost. V úloze 3 (příloha I, 1. 'hodina', úloha 3) pak žáci mají rozlišit přímo shodné a nepřímo shodné útvary a v úloze 4 (příloha I, 1. 'hodina', úloha 4) sami vymyslet příklady přímo a nepřímo shodných obrazců. Již při přípravě experimentu jsem si byla vědoma, že některé úlohy možná bude nutno z časových důvodů vypustit nebo je zařadit jen pro zabavení nejrychlejších žáků. Takovou úlohou je například úloha 4.

Následují úlohy 5, 6 a 7 (příloha I, 1. 'hodina', úlohy 5, 6, 7) věnované zopakování a prohloubení znalostí o osové souměrnosti. Kromě zopakování pojmů, které se žáci učili v šestém a sedmém ročníku, a připomenutí konstrukce obrazu v osové souměrnosti bylo cílem seznámit žáky s možností modelovat osovou souměrnost pomocí vystřihávání z přeloženého papíru, aby bylo možno tohoto modelování využít při výkladu dalších shodných zobrazení.

Jako úvodní úlohu k tématu osová souměrnost jsem tedy zvolila úlohu 5 (příloha I, 1. 'hodina', úloha 5) pracující s papírovým modelem (příloha I, model 1). Vzhledem k časovému omezení žáci nebudou model sami vyrábět, ale dostanou do ruky model hotový. Jak jejich model vznikl, bude předvedeno učitelem na jednom modelu. Žáci mají za úkol model popsat a vyvodit z něj některé vlastnosti osové souměrnosti. K tomu jsou vedeni několika kladenými otázkami. Cílem této úlohy je v první řadě, aby si žáci uvědomili, že se jedná o model osové souměrnosti. Dále mají zjistit, že spojnice vzorů a jejich obrazů v osové souměrnosti jsou kolmé na osu a navzájem rovnoběžné, že obraz a vzor jsou navzájem shodné a že se jedná o nepřímou shodnost.

Dosavadní poznatky o osové souměrnosti a důležité pojmy shrnuje obrázek (příloha I, 1. 'hodina', obr. 4) se slovním popisem; tento je vytvořen podle obrázku z knihy [16] autorů O. Odvárka a J. Kadlečka ([16], s. 21) a je doplněn symbolickým zápisem osové souměrnosti a návodem, jak jej číst. Tento způsob práce se symbolickým zápisem je převzat z knihy [2] autorů J. Coufalové a kol.

V úloze 6 (příloha I, 1. 'hodina', úloha 6) je úkolem sestrojit obraz daného čtyřúhelníku *ABCD* v osové souměrnosti s osou *o*. Jak čtyřúhelník, tak osa jsou v zadání narýsovány. Jsou zadány tak, že dvě ze stran čtyřúhelníku protínají osu. Děje se tak proto, aby samodružné body sloužily jako kontrola přesnosti rýsování.

Úloha 7 (příloha I, 1. 'hodina', úloha 7) je méně tradiční, je v ní dán vzor a obraz v osové souměrnosti a úkolem je najít její osu. Úloha je navíc zadána tak, aby si žáci zopakovali pojmy osa úsečky a osa úhlu.

Pojem skládání osových souměrností jsem ve výuce nepoužívala, opisovala jsem jej termínem postupné zobrazení v několika osových souměrnostech, v této práci pojem skládání budu používat, protože je to značně jednodušší než tento pojem stále zdlouhavě opisovat. Problematice skládání několika osových souměrností a jejímu propojení s pojmy přímá a nepřímá shodnost je v této části výuky věnována úloha 8 (příloha I, 1. 'hodina', úloha 8) a úloha následující zamýšlená jako domácí cvičení.

Úloha 8 je převzatá z německé učebnice pro třetí ročník základní školy ([23], s. 114) autorů G. Hübnera a kol. Žáci v ní mají zobrazovat domeček zakreslený ve čtvercové síti „opakovaně v několika osových souměrnostech podle zadaných os" (příloha I, 1. 'hodina', úloha 8), dokud vystačí čtverečkovaný papír. Tato úloha je zde oproti německé knize rozšířena o poučku, kterou mají žáci na základě zkušeností získaných v úloze 8 sami doplnit a zobecnit. Cílem je, aby si uvědomili, že zobrazí-li útvar postupně v několika osových souměrnostech, je výsledný útvar s výchozím přímo či nepřímo shodný podle toho, zda je počet těchto osových souměrností lichý nebo sudý.

V úloze určené za domácí cvičení je zadán čtyřúhelník $KLMN$ a osy o_1, o_2 a o_3. Úkolem je zobrazit zadaný čtyřúhelník v osové souměrnosti podle osy o_1, tento jeho obraz v osové souměrnosti podle osy o_2 a tento v osové souměrnosti podle osy o_3 a obrazy označit po řadě $K'L'M'N'$, $K''L''M''N''$ a $K'''L'''M'''N'''$. Dále pak žáci mají vyplnit do tabulky, které ze zadaných dvojic čtyřúhelníků jsou přímo a které nepřímo shodné. Tento úkol byl plánován jako domácí cvičení, protože opakované rýsování obrazu v osové souměrnosti je poměrně časově náročné, takže by se s ním ve škole strávilo příliš mnoho času. Na druhou stranu příklad není nijak náročný na postup a žáci si při něm procvičí sestrojování obrazu a zopakují si poznatky o přímé a nepřímé shodnosti v souvislosti se zobrazením v osové souměrnosti.

2.2.2.2 Druhá 'hodina': Posunutí

Cílem druhé hodiny je přivést žáky na myšlenku, že složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami vznikne nové přímo shodné zobrazení, ke kterému je možné se dopracovat i jinou, 'přímou' cestou. Žáci by se měli seznámit s některými vlastnostmi tohoto zobrazení, s pojmy posunutí a vektor, a s tím, čím je toto posunutí určeno. Dále by se měli naučit zkonstruovat obraz v posunutí daném vektorem.

Úvodní úloha (příloha I, 2. 'hodina', úloha 1) k tématu posunutí je obdobou úlohy z německé učebnice autorů A. Schmida a kol. ([31], s. 65, úloha 1). Žáci zde opět pracují s hotovým modelem (příloha I, model 2), vznik tohoto modelu vystřižením trojúhelníku z dvakrát přehnutého papíru je jim pouze demonstrován, zatímco mají v ruce hotový model. Je zde navázáno na fakt, že žáci již pracovali s podobným modelem osové souměrnosti, a očekává se, že rozpoznají, že u vystřižení z dvakrát přehnutého papíru se jedná o model opakovaného zobrazení v osové souměrnosti. Cílem této úlohy je, aby zjistili, že složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami vznikne nové shodné zobrazení, a že se jedná o přímou shodnost. Dále se mají seznámit s některými vlastnostmi tohoto nového zobrazení a s tím, čím je toto zobrazení určeno, a odvodit s pomocí učitele, jaká je souvislost mezi vzdáleností os a délkou posunutí, mezi polohou os a směrem posunutí a pořadím os a orientací posunutí.

V následujících poučkách jsou tyto poznatky shrnuty, pak je dán prostor zdůvodnění tvrzení, že velikost posunutí je rovna dvojnásobku vzdálenosti os. V zadání je předtištěn pouze bod A a osy o_1, o_2 (příloha I, 2. 'hodina', obr. 10). Od žáků se očekává, že si samostatně doplní obraz bodu A v osové souměrnosti s osou o_1, označí jej A' a tento zobrazí v osové souměrnosti s osou o_2 a označí jej A''. Za sledování výkladu učitele si žáci mají zaznamenat náznak zjednodušeného důkazu. Jak je zřejmé z obrázku, je zdůvodňován jen nejjednodušší případ, který je možno modelovat pomocí dvakrát přeloženého papíru. V následujících poučkách jsou žáci seznámeni s pojmem vektor, mají za úkol zakreslit do obrázku vektor určující dané posunutí, je-li dán vzor a obraz. Dále je ještě jednou zdůrazněno, že posunutí je přímá shodnost.

Úlohy 2 a 3 (příloha I, 2. 'hodina', úlohy 2 a 3) se zabývají již posunutím jako takovým, nikoli jeho vznikem složením dvou osových souměrností. Cílem úlohy 2 (příloha I, 2. 'hodina', úloha 2) je, aby žáci získali jistou zkušenost s posunutím. Na obrázku (příloha I., 2. 'hodina', obr. 12) je dán geometrický útvar a jeho obraz v posunutí a úkolem je vyznačit „do obrázku vektor určující toto posunutí, tj. jeho směr, velikost a orientaci" (příloha I, 2. 'hodina', úloha 2). Počítá se s tím, že žáci k řešení této úlohy mohou použít průsvitku, na níž obkreslí výchozí geometrický útvar a posun po papíře skutečně provedou, což jim pomůže uvědomit si, kam se jednotlivé body útvaru zobrazí.

V úloze 3 (příloha I, 2. 'hodina', úloha 3) mají žáci za úkol sestrojit obraz daného čtyřúhelníku $PQRS$ v posunutí daném zadaným vektorem. Tato úloha má být řešena učitelem ve spolupráci se žáky. Na základě zkušeností s posunutím prováděným průsvitkou po papíře by mohli žáci sami dát nějaký návrh, jak obraz čtyřúhelníka v posunutí sestrojit.

Úloha 4 (příloha I, 2. 'hodina', úloha 4) se opět vrací k posunutí jako k zobrazení vzniklému složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami. Je to úloha 'inverzní' k úloze 1 (příloha I, 2. 'hodina', úloha 1) a je rovněž převzatá z německé učebnice ([31], s. 65, úloha 2). Zde si žáci při práci s modelem (příloha I, model 3) mají experimentálně ověřit, že dané posunutí lze rozložit na dvě osové souměrnosti s rovnoběžnými osami a že toto rozložení není jednoznačné.

V úloze plánované jako domácí cvičení na konci této 'hodiny' je cílem, aby si žáci situace, které v úlohách 1 a 4 (příloha I, 2. 'hodina', úlohy 1 a 4) modelovali a rozebírali, doma narýsovali. Tím si mají jednak zopakovat a procvičit to, co se v hodině naučili, a jednak oba případy ještě jednou jiným způsobem zpracovat a propojit poznatky získané při modelování s rýsováním a teoretickými poznatky.

2.2.2.3 Třetí 'hodina': Procvičování shodnosti, osové souměrnosti a posunutí

Zatímco druhá 'hodina' je věnována vesměs nové látce, cílem 'hodiny' třetí je tuto novou látku procvičit a uvést do souvislostí s předchozími poznatky o shodnosti. Zároveň je více zaměřena na posunutí vzniklé jako složení dvou osových souměrností.

V úloze 1 (příloha I, 3. 'hodina', úloha 1) je vždy dán vzor a jeho obraz a úkolem je rozhodnout, jakým zobrazením přejde vzor na obraz a zda se jedná o přímou či nepřímou shodnost. Záměrem této úlohy, doplněné vhodnými otázkami učitele, je zopakovat dosavadní poznatky o přímé a nepřímé shodnosti, posunutí a osové souměrnosti.

Úlohy 2 a 3 (příloha I, 3. 'hodina', úlohy 2 a 3) jsou zadány ve čtvercové síti, aby jejich řešení žáci nemuseli rýsovat, ale využili čtvercové sítě k usnadnění své práce. V úloze 2 je úkolem složit dvě osové souměrnosti s rovnoběžnými osami, určit, jaké zobrazení složením těchto dvou osových souměrností vznikne, a vyznačit v obrázku, čím je toto zobrazení určeno.

Úloha 3 je k úloze 2 opět 'inverzní'. Je v ní vždy dán vzor a jeho obraz v posunutí, žáci mají zakreslit do obrázku vektor určující toto posunutí a najít osy osových souměrností, jejichž složením lze toto posunutí získat. Úloha 2 má tři, úloha 3 pak čtyři části a), b), c), resp. d) s rostoucí obtížností.

Úloha 4 (příloha I, 3. 'hodina', úloha 4) má dvě části a) a b). Jedná se v podstatě o velmi podobné úlohy, liší se pouze tím, že část a) je zadána ve čtvercové síti a je možno její řešení pouze načrtnout, zatímco řešení úlohy b) je nutno narýsovat. V obou úlohách je úkolem sestrojit obraz čtyřúhelníka v posunutí daném vektorem 1, tento obraz pak znovu zobrazit v posunutí daném vektorem 2. Cílem je zde procvičit konstrukci obrazu v posunutí a upozornit na možnost skládání posunutí. To je zde jen lehce naznačeno bez veškeré teorie. Očekává se, že žáci překreslí daný čtyřúhelník na průsvitku, vykonají posunutí určené vektorem 1 a následně posunutí určené vektorem 2 a pak posunutí vzniklé složením těchto dvou posunutí a na základě toho zodpoví položenou otázku.

Jako domácí cvičení je plánovaná obměna úlohy 4b) (příloha I, 3. 'hodina', úloha 4b)). Jejím cílem je, aby si žáci znovu procvičili konstrukci obrazu v posunutí daném vektorem a aby zjistili, že ať zobrazují nejprve v posunutí daném vektorem 1 a pak v posunutí daném vektorem 2 či naopak, dojdou vždy ke stejnému výsledku. Zvídavější z nich by mohli přijít na to, proč je tomu tak.

2.2.2.4 Čtvrtá 'hodina': Otočení

Analogicky jako ‘hodina’ druhá začíná i tato ‘hodina’ úvodní úlohou 1 (příloha I, 4. ‘hodina’, úloha 1), která je obdobou úlohy uvedené v německé učebnici [31] autorů A. Schmida a kol. ([31], s. 66, úloha 3). V úloze 1 (příloha I, 4. ‘hodina’, úloha 1) žáci opět pracují s hotovým papírovým modelem (příloha I, model 4), jehož vznik předvede učitel u tabule. Tentokrát se jedná o model vzniklý vystřižením z dvakrát přehnutého papíru, kde přehyby jsou různoběžné. Podobně jako v předchozích úlohách, kde žáci pracovali s modely (příloha I, 1. ‘hodina’, úloha 5; příloha I, 2. ‘hodina’, úlohy 1 a 4), mají i zde na základě vlastního měření a porovnávání dojít k závěru, že složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne nové přímo shodné zobrazení, a mají se dozvědět něco o jeho vlastnostech.

V následujících poučkách jsou opět shrnuty a doplněny poznatky získané v úvodní úloze. Je zde uvedeno, že novému zobrazení říkáme otočení a čím je toto zobrazení určeno. Další poučka hovoří o vlastnostech otočení jakožto zobrazení vzniklém složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami. I zde je dán prostor pro zjednodušené zdůvodnění (příloha I, 4. ‘hodina’, obr. 22), které analogicky jako u posunutí provede učitel ve spolupráci se žáky. Nakonec je ještě jednou zdůrazněno, že otočení je přímá shodnost.

Cílem úlohy 2 (příloha I, 4. ‘hodina’, úloha 2) je, aby žáci získali jistou zkušenost s otočením, aby dokázali vyznačit orientovaný úhel, jímž je otočení určeno, změřit tento úhel a rozhodnout, zda se jedná o otočení v kladném či záporném smyslu. Je zde počítáno s tím, že žáci za začátku budou využívat průsvitky a hrotu kružítka, vykonají pohyb otočení a přesvědčí se, jakým způsobem se jednotlivé body při otočení útvaru přemístí. Úloha 3 (příloha I, 4. ‘hodina’, úloha 3) je zaměřena na konstrukci obrazu v otočení. Stejně jako u posunutí má být tato úloha řešena učitelem ve spolupráci se žáky. Očekává se, že žáci mají z předchozích úloh představu o tom, že se body při otočení pohybují po kružnici se středem ve středu otočení a že se všechny body otočí o stejný orientovaný úhel. Lze tedy od žáků očekávat návrhy, jak sestrojit obraz v otočení.

Úloha 4 (příloha I, 4. ‘hodina’, úloha 4) je opět ‘inverzní’ k úloze 1 (příloha I, 4. ‘hodina’, úloha 1). Žáci opět pracují s papírovým modelem (příloha I, model 5). Cílem této úlohy je, aby si uvědomili, že otočení lze rozložit na dvě osové souměrnosti a že toto rozložení není jednoznačné.

V úloze „domácí cvičení“ žáci opět mají situace, které v úlohách 1 a 4 (příloha I, 4. ‘hodina’, úlohy 1 a 4) popisovali na papírovém modelu, doma narýsovat. Cílem je, aby tyto situace ještě jednou jiným způsobem zpracovali.

2.2.2.5 Pátá 'hodina': Procvičování otočení, středová souměrnost

Cílem páté 'hodiny' je procvičit novou látku probranou v rámci čtvrté 'hodiny'. Je opět více zaměřena na otočení jakožto zobrazení vzniklé složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami.

Úloha 1 (příloha I, 5. 'hodina', úloha 1) je opět zadána ve čtvercové síti a má čtyři části a) až d). Žáci zde mají za úkol složit dvě osové souměrnosti s navzájem různoběžnými osami, rozhodnout, jaké shodné zobrazení jejich složením vznikne, a vyznačit do obrázku, čím je toto zobrazení určeno. Pak mají sami doplnit poučku, která je upozorňuje na fakt, že v případě c) a d) jsou osy zadaných souměrností navzájem kolmé a jejich složením vznikne otočení o 180° se středem v průsečíku os, což je vlastně středová souměrnost s tímto středem. Dále je zde zmíněno, že středová souměrnost je přímá shodnost.

V úloze 2 (příloha I, 5. 'hodina', úloha 2) se žáci opět setkají se středovou souměrností jakožto speciálním případem otočení a s faktem, že je možné ji rozložit na dvě osové souměrnosti s kolmými osami.

Úloha 3 (příloha I, 5. 'hodina', úloha 3) je opět zadána ve čtvercové síti. Je zde otištěn pravoúhlý trojúhelník, jeho obraz v otočení kolem bodu S a bod S. Úkolem je vyznačit orientovaný úhel určující toto otočení a najít dvojici os osových souměrností, na něž lze dané otočení rozložit.

Úloha 4 (příloha I, 5. 'hodina', úloha 4) je určena zejména na procvičení konstrukce obrazu daného geometrického útvaru v otočení o zadaný úhel. V této úloze budou žáci otáčet dvakrát. Nejprve mají sestrojit obraz zadaného čtyřúhelníku $MNOP$ v otočení o -60° kolem bodu S a tento jeho obraz $M'N'O'P'$ znovu otočit kolem téhož středu o +90°. Je zde tedy uveden příklad složení dvou otočení kolem téhož středu a pro zvídavější žáky je kladena otázka, co je výsledkem.

3. kapitola

Průběh experimentu

Po podrobném promyšlení experimentální výuky a přípravě učebního materiálu následovala realizace experimentu. V následujících podkapitolách podám nejprve obecné informace o tom, jak tato realizace probíhala. Zmíním krátce charakteristiku obou experimentálních tříd, skutečný počet a rozvržení vyučovacích hodin věnovaných experimentu, pomůcky, kterých bylo při výuce využito, a další faktory, které výuku nějakým způsobem ovlivnily. Pak se budu věnovat konkrétnímu průběhu jednotlivých hodin, zaměřím se zejména na to, které úlohy z připraveného textu byly ve výuce skutečně realizovány a jak tato realizace dopadla ve srovnání s původním očekáváním. Rovněž v této kapitole uvedu zpětnou vazbu od žáků podloženou rozborem jejich vyplněných pracovních sešitů a chováním v hodině. Zmíním také některé zajímavé či podnětné konkrétní reakce žáků v hodině. V závěru práce uvedu, co bych na základě této zpětné vazby a na základě vyhodnocení závěrečného testu při opětovné realizaci této výuky změnila a proč.

3.1 Obecné informace

Jak již bylo řečeno, experimentální výuka byla realizována ve třídách 8.A a 8.B. fakultní základní školy Jiřího Gutha-Jarkovského v Truhlářské ulici v Praze. Hodina matematiky probíhala vždy nejprve v 8.A a poté v 8.B, bylo tedy možno se v 8.B více zaměřit na úlohy, které se v 8.A ukázaly jako problematické, nebo pozměnit způsob výkladu tak, aby žáci lépe porozuměli. To bylo jedním z důvodů, proč se mi ve třídě 8.B pracovalo lépe, ačkoli se, slovy jejich učitele, jedná o třídu „méně nadějnou“. Dalším důvodem bylo, že v této třídě je pouze osmnáct žáků, zatímco v paralelní 8.A osmadvacet. Měla jsem zde tedy možnost individuálnějšího přístupu k žákům a výrazně menší kázeňské problémy.

Podle plánu měla výuka proběhnout během pěti vyučovacích hodin. Vyučující matematiky byl ochoten eventuelně umožnit prodloužení tohoto času, pokud by to bylo třeba. Jak je vidět i z učebního textu, byl program plánovaných pěti hodin skutečně hodně nabitý; na vině jsou zde moje nedostatečné pedagogické zkušenosti. Bylo pro mě těžké odhadnout, co žáci osmé třídy za hodinu zvládnou. Navíc jsem při plánování zcela zanedbala existenci rušivých vlivů přímo nesouvisejících s matematikou, jako je nekázeň, změny v rozvrhu atd..

Realizace experimentu tedy v mnohém byla konfrontací naivních ideálů začínajícího učitele s realitou. Počet hodin byl nakonec o jednu navýšen, experimentální výuce tedy bylo věnováno šest hodin a při sedmé hodině byl napsán závěrečný test. Ve třídě 8.B do realizace výuky negativně zasáhl fakt, že v důsledku změn v rozvrhu proběhly poslední dvě hodiny výuky v jeden den těsně po sobě, takže žáci v druhé hodině byli viditelně unavení. Navíc pak mezi poslední výukovou hodinou a testem následovala dvoudenní pauza.

Při realizaci výuky byl výbornou pomůckou zpětný projektor. U úloh zadaných ve čtvercové síti neexistovala v podstatě jiná možnost, jak zkontrolovat se žáky správnost řešení, u dalších by bylo příliš zdlouhavé a nepřesné přenášet zadání, které měli žáci před sebou, na tabuli. Využití fólií, na kterých bylo nakopírováno zadání příkladů, a lihového fixu, kterým bylo možno zakreslovat či rýsovat řešení, umožnilo zcela jistě přehlednější a přesnější výsledek než rýsování na tabuli. Klasické rýsovací pomůcky a barevné křídy jsem samozřejmě využívala také, zejména při konstrukci obrazu v posunutí a otočení.

3.2 Realizace učebního textu

Vzhledem k tomu, že jsem poměrně podrobně popsala strukturu učebního textu a tedy i plánovanou strukturu jednotlivých vyučovacích hodin, zaměřím se v této podkapitole zejména na to, v čem se realizace experimentální výuky od plánu výrazně lišila, nebo na to, kde naopak byla naplněna má očekávání. Popíši průběh jednotlivých vyučovacích hodin, zmíním způsob práce s učebním textem, papírovými modely a se zpětným projektorem a upozorním na úlohy, se kterými měli žáci problémy. Zmíním i další faktory, které ovlivnily výsledky výuky. V příloze II, na kterou budu v následujícím textu odkazovat, uvedu k vybraným úlohám ukázky správných a pěkných nebo naopak chybných či nějak zajímavých žákovských řešení.

3.2.1 První vyučovací hodina: Shodnost, osová souměrnost

První vyučovací hodina byla jediná, která proběhla naprosto v souladu s plánem, bylo během ní probráno veškeré učivo první 'hodiny' učebního textu (pozn.: v následujícím textu budou používány termíny hodina či vyučovací hodina ve smyslu hodina skutečně realizované výuky a termín 'hodina' ve významu kapitola učebního textu). I zde se již od začátku sice vyskytovaly kázeňské problémy, ale byly výrazně menší než v následujících hodinách. Důvodem bylo, že první hodina experimentální výuky probíhala od osmi hodin ráno, kdy žáci byli vždy klidnější a soustředěnější než při hodinách pozdějších.

Práce se všemi úlohami proběhla tak, jak jsem očekávala, žáci velmi dobře spolupracovali. Při hodině využívali průsvitku a přesně podle návodu pracovali i s přiloženým papírovým modelem. Výsledky úloh 1 až 5 (příloha I, 1. 'hodina', úloha 1-5) jsme kontrolovali pouze ústně, úlohu 6 přerýsováním na tabuli. Úlohu 7 (příloha I, 1. 'hodina', úloha 7) vypracovali jen ti rychlejší, výsledek ukázali na tabuli ostatním. Obrázek popisující osovou souměrnost (příloha I, 1. 'hodina', obr. 4) a zadání úlohy 8 (příloha I, 1. 'hodina', úloha 8) byly nakopírovány na fólii, a bylo tedy možno je promítnout a společně s žáky popsat.

Za zmínku stojí realizace úlohy 1 (příloha I, 1. 'hodina', úloha 1), při níž žáci skutečně došli k různým výsledkům a začali spontánně diskutovat o správném řešení a následující definice shodných útvarů byla skutečně výsledkem či shrnutím této diskuse, jak bylo plánováno.

Ukázalo se, že žáci již poznatky o shodnosti a osové souměrnosti pozapomněli, ale velice rychle si je znovu oživili. S rozlišením přímo a nepřímo shodných útvarů pomocí průsvitky a později ani bez ní neměli problém. Do úlohy 8 (příloha I, 1. 'hodina', úloha 8) se pustili se značným nadšením, v obou třídách se našel dobrovolník, který úlohu řešil na fólii. Kreslení domečku do čtvercové sítě se žákům zdálo jednoduché a zábavné, přesto se však ukázalo, že není tak jednoduché, jak se na první pohled zdá (příloha II, obr. 1 a 2). Po opakovaném zobrazení v osové souměrnosti žáci bez problémů dokázali doplnit poučku, týkající se počtu osových souměrností a přímé a nepřímé shodnosti.

Začali během hodiny dokonce i s řešením domácího cvičení (příloha I, 1. 'hodina', domácí cvičení). Většina žáků si stačila narýsovat obraz v osové souměrnosti s osou o_1. Přitom se hned ukázala záludnost zadání, která mě při vymýšlení této úlohy vůbec nenapadla. Spočívala v tom, že zadaný čtyřúhelník byl nekonvexní. Velká část žáků sice správně zobrazila jeho jednotlivé vrcholy, ty pak ovšem chybně pospojovala. Na tuto chybu jsem tedy hned při hodině žáky upozornila. Za domácí cvičení pak měli dorýsovat další dva obrazy v osové souměrnosti a vyplnit tabulku. Ukázky správného a chybného řešení této úlohy jsou uvedeny v příloze (příloha II, obr. 3 a 4).

Celkový dojem z první hodiny byl velmi pozitivní. Žáky se podařilo zaujmout a kázeňsky zvládnout, čehož jsem se po několika hospitacích obávala od samého začátku, protože zejména třída 8.A byla poměrně hlučná. Překvapil mě příjemně i fakt, že se podařilo probrat veškeré plánované učivo.

3.2.2 Druhá vyučovací hodina: Zopakování osové souměrnosti a shodností, posunutí

Ačkoli do 2. 'hodiny' učebního textu nebylo žádné opakování zahrnuto, považovala jsem za nutné krátce připomenout, co bylo náplní předchozí hodiny. K tomu jsem použila otázky, například: „Jak poznám, že dva útvary jsou shodné?" či „Jestliže je třeba průsvitku převrátit, o jakou shodnost se jedná?" atd. Dále jsem využila fólie z minulé hodiny. Na obrázku popisujícím osovou souměrnost (příloha I, 1. 'hodina', obr. 4) jsem zakryla popisky a nechala žáky obrázek znovu popsat. K připomenutí opakovaného skládání osové souměrnosti jsem použila fólii s domečky ve čtvercové síti a kladla otázky typu: „Jestliže zobrazíme domeček dvakrát v osové souměrnosti, je s původním přímo či nepřímo shodný?" atd.

Pak bylo nutno provést kontrolu domácího cvičení (příloha I, 1. 'hodina', domácí cvičení), která trvala déle, než jsem očekávala. Dále bylo na programu odvození posunutí jakožto shodného zobrazení vzniklého složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami. Po matematické stránce práce s úvodní úlohou 1 (příloha I, 2. 'hodina', úloha 1) probíhala tak, jak byla plánována, výsledky, k nimž žáci dospěli i závěry, které z této úlohy vyplynuly, odpovídaly mým očekáváním. Problémem bylo pouze, že využití modelu bylo poměrně náročné na čas a udržení kázně, což značně zpomalilo práci v hodině.

Co se týká metodického přístupu k úloze 1 (příloha I, 2. 'hodina', úloha 1), vytvořila jsem u tabule zvětšený model podobný tomu, jaký měli k dispozici žáci, a na něm společně s nimi zakreslovala výsledky jejich měření a porovnávání. Zpětně si myslím, že by bylo přehlednější a názornější sice pracovat s papírovým modelem, ale zároveň natisknout na fólii jeho kopii a kopii zadání úlohy 1 (příloha I, 2. 'hodina', úloha 1) a získané údaje zakreslovat do obrázku a zapisovat do kopie zadání. Práce s modelem ale proběhla podle mých představ, žáci samostatně objevili vše, co jsem předpokládala.

Jak již bylo zmíněno v kapitole věnované učebnímu textu, po shrnutí nových poznatků slovy následoval náznak důkazu, který jsem prováděla na tabuli ve spolupráci se žáky. Žáci měli nejprve doplnit zadání o další dva body a pak spoluvytvářet a zaznamenat si odůvodnění předchozího tvrzení. Toto již bylo poněkud náročnější a vyžadovalo skutečnou pozornost. Analýza vyplněných pracovních sešitů žáků ukazuje, že někteří si zdůvodnění přehledně zaznamenali a snad i pochopili (příloha II, obr. 5). Byli samozřejmě ale tací, u nichž je pravdou pravý opak (příloha II, obr. 6).

Následující poučku a obrázek (příloha I, 2. 'hodina', obr. 11) jsem překopírovala na fólii. Žáci se zde měli seznámit s pojmem vektor určující dané posunutí. Zadán byl čtyřúhelník *ABCD*, jeho obraz v posunutí (vrcholy nejsou popsány) a vektor určující toto posunutí. Úkolem bylo určit, kam se zobrazí který z vrcholů čtyřúhelníka *ABCD*; žáci to měli vyznačit v obrázku umístěním vektoru určujícího dané posunutí a popsat vrcholy obrazu *A′B′C′D′*. Kromě toho si měli uvědomit, že všechny vektory, které mají stejnou velikost, stejný směr a orientaci, určují stále totéž posunutí. Při výuce mě žáci zaskočili, když začali tvrdit, že zadané čtyřúhelníky nejsou shodné. Požádala jsem je tedy, aby se o jejich shodnosti, či neshodnosti přesvědčili pomocí průsvitky. Zjistili, že čtyřúhelníky jsou skutečně shodné, že se jedná o optický klam. Dále jsem je pobídla, aby si uvědomili, jaký pohyb vykonají průsvitkou, když přemísťují vzor na obraz, a kam se přemístí jednotlivé vrcholy zadaného čtyřúhelníka. Pak již bez problémů popsali vrcholy čtyřúhelníka, který byl obrazem čtyřúhelníka *ABCD* v posunutí, a vyznačili několik možných umístění vektoru určujícího dané posunutí.

Úlohu 2 (příloha I, 2. 'hodina', úloha 2) žáci řešili v samostatné práci, mohli přitom využít průsvitku. Správné řešení pak dobrovolníci nakreslili na fólii (příloha II, obr. 7). Úkolem zde bylo vyznačit do obrázku vektor určující dané posunutí, je-li dán vzor a jeho obraz v tomto posunutí. Vyvolaní žáci obvykle zakreslili jedno nebo dvě možná umístění tohoto vektoru, většinou vektor umísťovali do některého z vrcholů zadaného obrazce. Ptala jsem se vždy, zda existují jiné možnosti, a snažila jsem se žáky dovést znovu k tomu, že nezáleží na umístění vektoru, ale na jeho velikosti, směru a orientaci. Při analýze sešitů se ukázalo, že ne všichni si zaznamenali správné řešení (příloha II, obr. 8).

Na úlohu 3 (příloha I, 2. 'hodina', úloha 3) došlo bohužel až na konci hodiny, kdy žáci byli již velmi málo pozorní. Řešila jsem tuto úlohu s využitím tradičních rýsovacích pomůcek na tabuli, aby žáci postup dobře viděli a rýsovali zároveň se mnou do svých pracovních sešitů. Dříve než jsme začali úlohu řešit, ptala jsem se žáků, zda mají nějaký návrh řešení. Snažila jsem se přitom navázat na zkušenosti, které žáci získali v předchozích příkladech, zejména na zkušenosti s posouváním obrazce na průsvitce a s vyznačováním vektoru určujícího toto posunutí. Při vyznačování vektoru a provádění posunutí útvaru přeneseného na průsvitku si měli žáci uvědomit, že při posunutí se všechny body útvaru pohybují po přímkách rovnoběžných s tímto vektorem, že se všechny posunou o stejnou délku (délku vektoru) a se stejnou orientací jako je orientace vektoru.

Protože pomalejší žáci tento příklad nestačili dokončit, bylo třeba se k němu vrátit příští hodinu. Domácí cvičení jsem tentokrát žádné nezadala, důvodem bylo, že plánované domácí cvičení (příloha I, 2. 'hodina', domácí cvičení) navazovalo na úlohu 4 (příloha I, 2. 'hodina', úloha 4), kterou jsme nestačili probrat.

Celkový dojem z této hodiny byl ve srovnání s první hodinou poměrně negativní, zejména ve třídě 8.A, kde jsem narážela na mnohem horší nekázeň než předchozí hodinu.

3.2.3 Třetí vyučovací hodina: Procvičování posunutí jako zobrazení vzniklého složením dvou osových souměrností

Na začátku této hodiny jsem se ještě jednou vrátila k úloze 3 (příloha I, 2. 'hodina', úloha 3). Pro tento účel jsem tuto úlohu vyřešila na fólii, promítla správné řešení a znovu zopakovala a naznačila pomocí rýsovacích pomůcek na meotaru, jak se k němu došlo. Pak jsem zadaný čtyřúhelník ještě obkreslila na další fólii, která představovala průsvitku, již používali žáci, a demonstrovala pohybem od vzoru k obrazu, jak toto posunutí probíhá a že se všechny body tohoto geometrického útvaru posunou 'po vektoru určujícím toto posunutí', tj. stejným směrem o stejnou vzdálenost se stejnou orientací.

Pak jsme společně se žáky vyřešili úlohu a) (příloha I, 2. 'hodina', domácí cvičení) určenou původně za domácí úkol, poté s použitím papírového modelu úlohu 4 (příloha I, 2. 'hodina', úloha 4) a následně úlohu b) z domácího cvičení. Až na časový skluz vše proběhlo bez problémů. Někteří žáci se dokonce již sami doma pokusili úlohu označenou jako domácí cvičení vyřešit, což se jim zpravidla u části a) podařilo (příloha II, obr.9), u části b) většinou osy narýsovali chybně (příloha II, obr. 10). Mile mě ale tato snaha překvapila, protože jsem postřehla, že žáci nebyli zvyklí dělat na hodiny matematiky žádné domácí úkoly. Vyřešením těchto úloh jsme tedy dokončili náplň 2. 'hodiny' učebního textu a začali s 'hodinou' třetí.

V úloze 1 (příloha I, 3. 'hodina', úloha 1) žákům nedělalo problém určit, zda se jedná o přímou či nepřímou shodnost, někteří ale měli potíže rozlišit, zda se jedná o posunutí nebo osovou souměrnost, z čehož je jasné, že si neuvědomili dostatečně souvislosti mezi těmito pojmy. V případě, že správně určili, zda se jedná o posunutí či osovou souměrnost, měli problém zakreslit, čím je toto zobrazení určeno. U osové souměrnosti byly tyto problémy menší, většina žáků dokázala najít osu osové souměrnosti, nicméně se objevily i případy, kdy žáci šipkou vyznačili, kam se v osové souměrnosti zobrazí jeden z vrcholů obrazce, a bylo zřejmé, že mají za to, že tato šipka je vektor určující dané zobrazení (příloha II, obr. 11). U posunutí se objevily problémy výraznější, někteří žáci dokázali bez problémů vyznačit vektor určující toto posunutí, někteří věděli, že mají vyznačit vektor, nicméně tento určili chybně. Někteří si vzpomněli, že posunutí má něco společného s osovými souměrnostmi a hledali osu. Bylo tedy zřejmé, že tyto pojmy nejsou u všech žáků dostatečně osvojeny a správně pochopeny. Na druhou stranu se ozvaly i zajímavé návrhy, například kromě vektoru zakreslit do obrázku dvojici rovnoběžných os kolmých ke směru posunutí. Tyto naopak svědčily o tom, že jsou ve třídě žáci, kteří souvislosti chápou. Ukázka správného žákovského řešení je uvedena v příloze (příloha II, obr. 12).

Úloha 2 (příloha I, 3. 'hodina', úloha 2) je, jak již bylo zmíněno, zadána ve čtvercové síti, aby usnadnila žákům práci s rýsováním, které by zde nebylo cílem, ale pouze prostředkem. Velice mě udivilo, že většina žáků ze začátku vůbec nedokázala využít čtvercové sítě k ulehčení své práce a raději bez ohledu na čtvercovou síť obrazy v osové souměrnosti rýsovala. Postupem času těchto žáků ale k mému potěšení ubylo.

Kromě toho, co je požadováno v zadání úlohy, jsem od žáků vždy chtěla vědět, jaká je vzájemná poloha, vzdálenost a pořadí zadaných os a jaký je vzhledem k tomu směr, velikost a orientace výsledného posunutí. Snažila jsem se žáky přimět k tomu, aby velikosti udávali nikoli v centimetrech, ale v počtu čtverečků čtvercové sítě, popř. jejich úhlopříček. Na tento požadavek přistoupili pouze někteří žáci, pochopitelně jen ti, kteří i jinak využívali čtvercové sítě a nerýsovali obrazy nezávisle na ní.

Části a) a c) této úlohy se většině žáků podařilo vyřešit bez problémů (příloha II, obr. 13 a 14), což jsem u části a) předpokládala, u části c) nikoli. Část c) jsem z hlediska využití čtvercové sítě považovala za náročnější. Ale vzhledem k tomu, že velká část žáků čtvercovou síť nevyužila vůbec a obrazy v osové souměrnosti narýsovala bez ohledu na ni, nečinila jí část c) větší problémy než část a). Potíže měli žáci naopak s částí b), většina z nich si nedokázala uvědomit, podle které osy musí nejdříve zobrazit. Problémy s tímto příkladem jsem očekávala, ale nečekala jsem, že budou tak velké.

Část b) byla zadána s cílem přesvědčit žáky, že když v zadání části a) změníme pouze pořadí os, změní se orientace výsledného posunutí. Našli se žáci, kteří i tuto úlohu vyřešili správně (příloha II, obr. 15), vzhledem k její náročnosti jich ale bylo poměrně málo, spíše se objevovala nejrůznější chybná řešení (příloha II, obr. 16). Na druhou stranu se vyskytla také zajímavá reakce na tuto úlohu, která svědčí o tom, že jí žák porozuměl:

„Stačí tedy, když si uvědomím, že výsledek bude posunutí o osm kostiček doleva, a pak nemusím dvakrát dělat osovou souměrnost a neudělám tak snadno chybu!“

Ve třídě 8.B se podařilo dokončit v průběhu třetí vyučovací hodiny celou úlohu 3 (příloha I, 3. ‘hodina’, úloha 3), ve třídě 8.A jsme vzhledem k opětovné nekázni zvládli pouze části a) a b). Části c) a d) jsem v této třídě ponechala za domácí cvičení. Při jeho kontrole další hodinu se ukázalo, že zřejmě kvůli nekázni na konci třetí hodiny nemá většina žáků správně ani první dvě části této úlohy a je třeba se k nim znovu vrátit.

Každopádně patřila úloha 3 k nejnáročnějším úlohám celého učebního textu a při opakování experimentální výuky bych ji zřejmě na běžné základní škole zcela vynechala. I zde se však objevila reakce jednoho žáka, která mě mile překvapila, zněla asi takto: „Takže výsledkem mohou být dvě rovnoběžné osy, které splňují tyhle podmínky (vzdálenost, směr, pořadí – pozn. autora) a jsou třeba úplně mimo sešit? To si doma vyzkouším!“

V příloze uvádím příklady špatných a vzácnější ukázky správných žákovských řešení (příloha II, obr. 17 a 18).

3.2.4 Čtvrtá vyučovací hodina: Dokončení posunutí, otočení

Po dokončení úloh věnovaných posunutí jako zobrazení vzniklému složením dvou osových souměrností se žáci v úlohách 4 a 5 (příloha I, 3. ‘hodina’, úloha 4 a 5) znovu vrátili ke konstrukci obrazu v posunutí, a to v úloze 4 ve čtvercové síti, v úloze 5 bez ní. V průběhu výuky jsem uznala, že zatěžovat žáky ještě problematikou skládání dvou posunutí je časově neúnosné. Myslím si, že by jim nedělalo problémy si tuto situaci představit, s její obdobou se setkávají denně v reálném životě. Tato problematika by pro ně nejspíš byla snazší než skládání osových souměrností, ale neměli jsme již dostatek času se jí zabývat. Nechala jsem žáky tedy pouze opakovaně zobrazit zadaný útvar v daném posunutí, aniž bych se ptala, čím je možné toto zobrazení nahradit. Tyto úlohy tedy sloužily pouze k procvičení konstrukce obrazu v posunutí a nečinily žákům zvláštní potíže. V 8.B jsme stačili udělat obě úlohy (příloha I, 3. ‘hodina’, úloha 4 a 5) celé, v 8.A jsme z části a) i b) stačili pouze obraz v posunutí daném vektorem 1. Zbytek obou úloh měli žáci udělat za domácí cvičení.

Tím jsme tedy zakončili práci se 3. ‘hodinou’ textu a začali s problematikou ‘hodiny’ čtvrté, tedy s otočením. Vzhledem k tomu, že do konce experimentu zbývalo již jen dvě a půl vyučovací hodiny, bylo jasné, že budu-li postupovat stejným způsobem jako dosud, nestihneme zejména v problematičtější 8.A plánované učivo probrat. Z tohoto důvodu jsem se rozhodla ve zbytku výuky rezignovat na práci s papírovými modely. Sice ji považuji za velice přínosnou, nicméně zkušenost mě přesvědčila, že je zřejmě vhodná spíše pro práci v menší skupině a musí na ni být dostatek času. Navíc je při ní obtížnější žáky kázeňsky zvládnout.

S úvodní úlohou do problematiky otočení (příloha I, 4. 'hodina', úloha 1) jsme tedy pracovali jinak, než bylo plánováno. Místo práce s modelem měli žáci situaci modelovanou v úloze 1 rovnou narýsovat a poté zodpovědět otázky kladené v úloze 1. K narýsování této situace jsme využili zadání části a) domácího cvičení (příloha I, 4. 'hodina', domácí cvičení). Správnost narýsovaných obrazů jsme společně zkontrolovali promítnutím fólie. Výsledky měření a porovnávání jsme pak zanesli, jak bylo plánováno, do zadání úlohy 1 (příloha I, 4. 'hodina', úloha 1). Žáci si pak měli vyzkoušet pomocí průsvitky a hrotu kružítka, že je možné přejít od výchozího trojúhelníku ABC k výslednému $A''B''C''$ přímo otočením. Já jsem otočení demonstrovala pomocí další fólie, která nahrazovala průsvitku. Žáci tedy pohyb otočení mohli sledovat ne meotaru i si jej sami vyzkoušet, což nadšeně komentovali: „Ono to vážně funguje!" Zároveň jsem na fólii vyznačila dráhy, po kterých se pohybovaly vrcholy čtyřúhelníka při otočení.

Po této úloze si žáci měli být vědomi toho, že složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne nové, přímo shodné zobrazení, kterému se říká otočení. Viděli a vyzkoušeli si, jak lze k tomuto zobrazení dojít 'přímou cestou' bez skládání osových souměrností a že se v otočení všechny body pohybují po kružnici kolem středu S o stejný úhel. V dalším výkladu se pak dozvěděli, čím je toto zobrazení určeno, a seznámili se s pojmy kladný a záporný smysl otočení, okrajově byl zmíněn též pojem orientovaný úhel. Na konci hodiny byly shrnuty souvislosti mezi skládanými osovými souměrnostmi a otočením a bylo provedeno zdůvodnění. Žáci měli opět, podobně jako u posunutí, odůvodnění spoluvytvářet a zaznamenat si je do sešitu. Zdůvodňován byl zase pouze nejzákladnější případ, který je možno modelovat pomocí vystřihování z překládaného papíru. Žáci byli seznámeni s tím, že v jiných případech tvrzení také platí, ale zdůvodnění je složitější. I zde se našli žáci, kteří výklad sledovali, spolupracovali, vše si správně zaznamenali (příloha II, obr. 19) a naopak (příloha II, obr. 20). Aby ti žáci, kteří měli o výuku skutečně zájem nebyli o práci s modelem zcela ochuzeni, dostali nevystřižený model, jehož výrobu a práci s ním si mohli doma vyzkoušet, což někteří skutečně udělali.

3.2.5 Pátá vyučovací hodina: Otočení v kladném a záporném smyslu, konstrukce obrazu

Na začátku páté vyučovací hodiny jsme zopakovali vše, co jsme se zatím dozvěděli o shodných zobrazeních: pojem přímá a nepřímá shodnost, osová souměrnost, souvislost mezi opakovaným zobrazením v osové souměrnosti a přímou a nepřímou shodností, posunutí jako přímo shodné zobrazení vzniklé složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami, způsob, jak získat obraz v posunutí 'přímou cestou', tj. bez použití osových souměrností, pojem vektor a fakt, že posunutí je určeno vektorem. Dále jsme zopakovali vše, co jsme během čtvrté hodiny zjistili o otočení. Teprve po tomto opakování jsme pokračovali dále s úlohami učebního textu.

V úloze 2 (příloha I, 4. 'hodina' úloha 2), kde bylo úkolem vyznačit do obrázku orientovaný úhel určující toto otočení a určit jeho velikost a smysl, měli žáci největší problém s vyznačením tohoto úhlu. Správné určení smyslu bylo pouze otázkou cviku a zdálo se, že je poměrně dobře zvládli. Nečekaným problémem bylo, že se často nemohli shodnout na velikosti naměřeného úhlu. Ačkoli všichni měli přesné zadání narýsované počítačovým programem, naměřené velikosti se často o jeden až dva stupně lišily, protože žáci úhel nepřesně vyznačili. Zde byl na vině i fakt, že obrázky v zadání byly poměrně malé.

V úloze 3 se žáci měli naučit zkonstruovat obraz daného geometrického útvaru v otočení. Tato úloha byla opět řešena na tabuli, žáci měli rýsovat do svých sešitů. Nutno říci, že u této úlohy jsem měla značné problémy s použitím rýsovacích pomůcek na tabuli. Možná je i tato skutečnost příčinou toho, že ne všichni žáci konstrukci obrazu pochopili, jak je vidět z jejich sešitů i ze závěrečného testu.

Poslední úloha, kterou jsme se v této hodině zabývali, je úloha 4 (příloha I, 4. 'hodina', úloha 4). Opět jsme nepoužili model, ale řešili ji pouze konstrukčně do zadání určeného původně pro část b) domácího cvičení (příloha I, 4. 'hodina', domácí cvičení). Žáci byli nejprve tázáni, co víme o hledaných osách, pak jednu osu zvolili a dorýsovali druhou tak, aby splňovala předchozí jmenované požadavky. Pak si měli ověřit, zda skutečně opakovaným zobrazením v osových souměrnostech s těmito osami získají zadané otočení.

3.2.6 Šestá vyučovací hodina: Procvičování otočení, opakování

V průběhu poslední hodiny experimentální výuky si žáci měli nejprve v úloze 2 (příloha I, 5. 'hodina', úloha 2) procvičit skládání dvou osových souměrností s různoběžnými osami. Tato úloha byla zadána ve čtvercové síti. Po zkušenostech s podobnými úlohami na posunutí jsem se rozhodla část b) této úlohy vypustit, protože se mi zdála příliš náročná. K mému překvapení ji však žáci, kteří úspěšně vyřešili části a), c) a d), začali sami řešit a většinou bez větších problémů (příloha II, obr. 21). Na částech c) a d) si žáci uvědomili, že složením dvou osových souměrností s kolmými osami vznikne otočení o 180°, které lze též považovat za středovou souměrnost. Na tuto skutečnost poukázali sami ještě dříve, než byli tázáni, společně jsme doplnili poučku: „V případě c) a d) se jedná o otočení o .... ° kolem středu *S*, jež můžeme také považovat za .... se středem *S* (příloha I, 5. 'hodina')."

V úloze 2 (příloha I, 5. 'hodina', úloha 2) žáci měli určit, o jaké zobrazení se jedná; to jim nečinilo obtíže, jmenovali jak otočení o 180°, tak středovou souměrnost. Problematické už bylo najít dvojici os. Tuto úlohu bych v příští realizaci výuky nejspíše vynechala nebo obměnila, stejně jako další úlohy na rozklad shodných zobrazení na osové souměrnosti.

Totéž tedy platí i o úloze 3. (příloha I, 5. 'hodina', úloha 3). Většina žáků měla s jejím řešením problémy jak při hodině, tak v testu. Domnívám se, že to bylo způsobeno jednak tím, že nebyl čas problematiku více procvičovat, jednak náročností a abstraktností této úlohy. Velkou roli zde sehráli jistě i nekázeň v 8.A a únava v 8.B. Kromě toho jsem až při realizaci této úlohy, nebo spíše až při opravě testu, zjistila, že použití čtvercové sítě zde nebylo příliš vhodné, ale naopak spíše matoucí.

Poslední úlohu, kterou jsme se žáky řešili, byla úloha 4 (příloha I, 5. 'hodina', úloha 4). Ta byla původně zadána tak, aby vedla na skládání dvou otočení, a žáci měli zjistit, co je výsledkem. I zde jsem, podobně jako u posunutí, usoudila, že tato úloha je příliš náročná. Požádala jsem tedy žáky, aby vyškrtli druhou část zadání a provedli pouze první část úlohy, tzn. pouze zkonstruovali obraz zadaného čtyřúhelníka v otočení kolem středu *S* o úhel -60°. Tímto se z úlohy stala běžná úloha na konstrukci obrazu v otočení. Překvapilo mě, že někteří žáci doma dorýsovali i druhou část úlohy, zřejmě v rámci přípravy na test, a učinili i správný závěr, co vzniklo složením daných dvou otočení.

Na závěr poslední hodiny experimentu jsem oznámila žákům, že příklady v testu budou typové úlohy podobné těm, které jsme dělali v hodině, a že je vhodné si materiály doma znovu projít. Žáci věděli, že budou muset složit dvě osové souměrnosti a říci, o jaké výsledné zobrazení se jedná a čím je určeno, že se objeví příklady na rozklad zadaného zobrazení na osové souměrnosti, konstrukce obrazu v posunutí či otočení a pojmy přímá a nepřímá shodnost. Cílem tohoto sdělení bylo, aby žáci věděli, na co se mají při přípravě na test zaměřit. Důsledkem sdělení ale bylo, že si někteří žáci poznamenali do svých sešitů, co mají v testu napsat jako správnou odpověď, aniž by museli přemýšlet (příloha II, obr. 22), proto bych se napříště podobným sdělením vyvarovala.

3.3 Zpětná vazba žáků

Jak vyplynulo z předchozího textu, nejnápadnějším projevem žáků během experimentální výuky byla nekázeň. Její příčiny by samozřejmě bylo možné vidět ve skutečnosti, že učební látka byla pro žáky nezajímavá či příliš obtížná, což na ně mělo demotivující vliv a vedlo ke ztrátě zájmu a snahy látku pochopit. Tato skutečnost by samozřejmě znamenala, že navržené experimentální učivo není pro žáky základní školy naprosto vhodné. Domnívám se ale, že tomu tak není. V každé třídě se objevili žáci, které látka skutečně zaujala. Od těchto žáků se mi dostávalo velice pozitivní odezvy. Ta spočívala jednak v jejich aktivní spolupráci v hodině a vzorné domácí práci, jednak v několika výše zmíněných konkrétních připomínkách či dotazech, které tito žáci v hodině pronesli. Z nich bylo patrné, že o věci přemýšlí, snaží se hledat svoje řešení a experimentovat, a že látce rozumí.

Kromě těchto momentů se objevili i výroky přímo hodnotící obsah a formu výuky: „To se mi líbí a je to fakt jednoduchý!“ (po první hodině). Tentýž žák po dalších hodinách: „No, už je to trochu těžší, ale už se těšim na ten test, to bude dobrý!“ (pozn. autora: Tento žák skutečně napsal test na jedničku). Jiní žáci: „Paní učitelko, nechcete tu zůstat učit, Vy to umíte tak dobře vysvětlit!“ nebo: „Tady kamarád konečně jednou něco chápe, Vy se to snažíte vysvětlit tak, aby to pochopili všichni a taky aby to všichni slyšeli...!“ Za zmínku stojí i reakce některých žáků po testu: „Bylo to lehký, vůbec jsem se na to neučil.“ nebo naopak: „Ten Váš test nám teda pěkně zkazí průměr!“ Pozitivně hodnotím fakt, že jsem se ani jednou nesetkala s otrávenou otázkou: „A k čemu nám to bude?“, kterou jsem od těchto žáků během hospitací slyšela opakovaně.

Velmi zajímavé pro mě byly ještě reakce žáka, který dostal z testu pětku a ani jeho běžné známky z matematiky nejsou jiné. Při prvních hodinách výuky přitom měl všechny úkoly jako první správně hotové a byl velice aktivní. Bylo evidentní, že ho problematika zaujala. Když ale úkoly začaly být obtížnější, jeho zájem ochabl a v testu bylo patrné, že se na něj doma nijak nepřipravoval. Přestože dostal špatnou známku, což u něj v matematice není nic neobvyklého, přišel se po hodině, kdy jsme testy opravovali, ještě jednou zeptat, jestli správně pochopil, jak se měl jeden z příkladů správně řešit. To mě velice překvapilo, protože tento žák, zapsaný jako pětkař, projevil i po testu skutečný zájem, pochopit, jak to má být správně. Myslím si, že to svědčí o faktu, že rozšiřující učivo probírané v rámci experimentální výuky by se možná nechalo zpracovat tak, aby i méně nadané žáky nejen oslovilo, ale aby je i dokázali lépe zvládnout. Samozřejmě by zde byla nutná výrazná redukce probíraného učiva.

Již během realizace experimentální výuky na základě této zpětné vazby žáků jsem si učinila představu o tom, co bych při další realizaci učinila jinak. Tato představa se ještě precizovala při opravování a vyhodnocování závěrečného testu, který žáci psali. Zadání a vyhodnocení testu je věnována následující kapitola. Závěrem této práce pak zhodnotím svůj experiment jako celek a na základě vyhodnocení výsledků testu a zpětné vazby žáků navrhnu možné či nutné změny.

4. kapitola

Závěrečný test a jeho vyhodnocení

Jak již bylo řečeno, byla experimentální výuka zakončena závěrečným testem. V příloze (příloha III) je otištěno jeho zadání. V této kapitole nejprve krátce okomentuji toto zadání a uvedu obecné informace týkající se napsání a vyhodnocení testu. Pak se budu věnovat předpokládané a skutečné úspěšnosti žáků při řešení jednotlivých úloh. Nakonec se zamyslím nad příčinami úspěchu či neúspěchu žáků v jednotlivých úlohách, v příloze (příloha IV) uvedu ukázky správných či zajímavých chybných řešení vybraných úloh.

4.1. Zadání závěrečného testu

Žáci obou osmých tříd, které se zúčastnily experimentální výuky, psali test v jeden den. Obě třídy měly stejné zadání, které mělo dvě varianty A a B. Tyto se od sebe lišily pouze minimálně, obsahovaly typově stejné úlohy. Pokud v následujícím textu nebude výslovně řečeno, že se jedná o úlohu z varianty A či B, pak budou míněny úlohy z obou variant testu, v tomto případě uvedu vždy pouze číslo testové úlohy, v opačném případě budu uvádět, o kterou variantu se jedná, a úlohy budu značit např. A1, tzn. varianta A, úloha 1.

Test (příloha III) se skládal se šesti úloh, z nichž první měla části a) a b). První tři úlohy (příloha III, úlohy 1 - 3) byly zadány ve čtvercové síti a týkaly se posunutí a otočení jakožto shodných zobrazení vzniklých složením dvou osových souměrností. V první úloze (příloha III, úloha 1) měli žáci složit dvě osové souměrnosti, určit, jak se nazývá výsledné zobrazení, a vyznačit do obrázku, čím je toto zobrazení určeno. V části a) byly osy zadaných souměrností rovnoběžné, v části b) různoběžné.

Úlohy 2 a 3 (příloha III, úlohy 2 a 3) byly zaměřeny na rozklad posunutí a otočení na dvě osové souměrnosti. Nejprve zde žáci ještě měli vyznačit, čím jsou tato zobrazení určena; byl tím míněn u posunutí vektor a u otočení střed a orientovaný úhel. Jejich vyznačení do obrázku bylo tak jako tak důležité pro správné řešení zbytku úlohy. Fakt, že toto bylo zdůrazněno přímo v zadání, mohl žákům trochu pomoci k úspěšnému řešení.

Další dvě úlohy 4 a 5 (příloha III, úlohy 4 a 5) byly věnovány konstrukci obrazu v posunutí určeném zadaným vektorem a v otočení kolem daného středu o určitý úhel. Původně byly tyto úlohy plánovány jinak, mělo jít o složení dvou posunutí či dvou otočení kolem téhož středu, v průběhu výuky byly však tyto úlohy vzhledem k nedostatku času změněny.

Poslední úloha (příloha III, úloha 6) byla více teoretická, žáci měli napsat alespoň jeden příklad nepřímo, resp. přímo shodného zobrazení.

Čas určený na vypracování testu byl cca 35-40 minut, tj. celá vyučovací hodina bez času nutného k zadání testu a vysvětlení zadání. Ve třídě 8.A se testu zúčastnilo dvacet pět žáků, dvanáct z nich psalo variantu A, třináct pak variantu B. V 8.B test psalo patnáct žáků, osm z nich variantu A a zbývajících sedm variantu B. V podkapitole věnované vyhodnocení testu a úspěšnosti žáků při řešení jednotlivých úloh se budu zabývat každou variantou zvlášť. Vzhledem k malému počtu testovaných žáků zejména ve třídě 8.B budu hodnotit výsledky žáků obou tříd dohromady.

4.2 Vyhodnocení testu

Při vyhodnocování testu budu vycházet ze způsobu, jakým byl test opravován pro klasifikaci žáků ve škole. Osobně jsem byla proti tomu, aby byl test známkován a aby se známky žákům započítávaly do běžné klasifikace, protože se jednalo o experiment určený navíc původně pro nadané děti a některé části experimentálního učiva zřejmě skutečně možnosti průměrných žáků přesahovaly. Protože můj uvádějící učitel trval na započtení známek z tohoto testu do celkového hodnocení žáků, byli žáci ohodnoceni běžnou klasifikační stupnicí 1-5. Při vyhodnocování výsledků testu v této práci využiji systému bodování, který jsem použila při klasifikaci. Výsledné školní známky jednotlivých žáků nepovažuji pro tuto práci za podstatné.

4.2.1 Bodové ohodnocení testu

Jednotlivé testové úlohy byly obodovány, bod byl udělen za každý dílčí krok řešení. Obě varianty testu byly bodovány stejně. U některých úloh, kde žáci učinili jen část bodovaného kroku, získali za daný krok řešení pouze půl bodu (například když měli vyznačit orientovaný úhel určující dané otočení kolem daného středu a určit jeho velikost a přitom nevyznačili orientaci ani neurčili smysl otočení, ale uvedli pouze velikost úhlu).

Jak již bylo řečeno, měla úloha 1 (příloha III, úloha 1) dvě části a) a b). V každé z těchto částí mohli žáci získat maximálně čtyři, dohromady tedy maximálně osm bodů. V každé z obou částí dostali po bodu za správné zobrazení v osové souměrnosti, za správné opakované zobrazení tedy dva body. Dále jeden bod za správný název výsledného zobrazení a jeden za správné vyznačení vektoru, popřípadě středu a orientovaného úhlu, resp. pouze středu, jednalo-li se o středovou souměrnost.

V úloze 2 (příloha III, úloha 2) bylo možno získat maximálně tři body. Jeden bod za správné vyznačení vektoru posunutí, jeden za správný směr a vzdálenost os a jeden za jejich správné pořadí.

Za úlohu 3 (příloha III, úloha 3) bylo rovněž možno získat tři body. Jeden bod za správné vyznačení orientovaného úhlu a určení jeho velikosti a po bodu za správný úhel, který osy svírají, a za správné pořadí os.

Úlohy 4 a 5 (příloha III, úlohy 4, 5) byly ohodnoceny maximálně čtyřmi body. V úloze 4 bylo možno získat jeden bod za to, že posunutí bylo provedeno ve správném směru a se správnou orientací, další za správnou velikost posunutí. Třetí bod za správné pospojování obrazů jednotlivých bodů a čtvrtý za přesnost rýsování. Podobně u úlohy 5. Zde byl udělen jeden bod za správný obraz každého z bodů a jeden bod za přesnost rýsování.

V úloze 6 (příloha III, úloha 6) bylo možné získat jeden bod za jeden správný příklad přímo, resp. nepřímo shodného zobrazení. Pokud bylo uvedeno příkladů víc, bylo možno získat maximálně dva body. Pokud byl uveden jeden příklad správný a jeden špatný, nebyl udělen žádný bod. Na tento fakt byli žáci předem upozorněni.

Celkem tedy z testu bylo možno získat maximálně dvacet čtyři bodů.

4.2.2 Předpokládaná úspěšnost v řešení jednotlivých úloh

Protože jsem se snažila vypracovat obě varianty testu tak, aby byly co možná nejvíce vyrovnané, předpokládala jsem zhruba stejnou úspěšnost žáků při řešení obou variant. U úlohy 1 (příloha III, úloha 1) jsem u obou variant očekávala poměrně vysokou úspěšnost řešení, cca 90 %. Domnívala jsem se, že opakované zobrazení v osové souměrnosti nebude žákům činit problémy, za obtížný jsem nepovažovala ani úkol určit, jak se nazývá výsledné zobrazení. Jednak se žáci oběma zobrazeními několik hodin zabývali, jednak jejich názvy znají z běžného života a navíc se tyto názvy objevují v zadání dalších úloh. Za poněkud obtížnější jsem považovala úkol zakreslit do obrázku, čím je dané zobrazení určeno. Očekávala jsem problémy spíše u otočení, resp. středové souměrnosti než u posunutí.

Rovněž u úlohy 2 (příloha III, úloha 2) byla očekávána celkem vysoká úspěšnost, i když nižší než u úlohy 1. Předpokládala jsem, že tuto úlohu by mohlo správně vyřešit

70 % řešitelů, očekávala jsem, že téměř všichni dokáží správně zakreslit vektor určující dané posunutí.

Vzhledem k tomu, že problematika rozkladu otočení nebyla dostatečně procvičena a je poměrně náročná, očekávala jsem u úlohy 3 (příloha III, úloha 3) malou úspěšnost, předpokládala jsem, že ji vyřeší správně asi 20 % řešitelů. Očekávala jsem zde zejména problémy s určením os. Domnívala jsem se, že většina, cca 75 % řešitelů správně změří velikost orientovaného úhlu určujícího dané otočení a správně jej vyznačí do obrázku (včetně orientace), problémy jsem předpokládala u určení, zda se jedná o otočení v kladném či záporném smyslu.

U úlohy 4 (příloha III, úloha 4) byla očekávaná úspěšnost okolo 70 %, protože byla v hodině opakovaně vysvětlena, demonstrována a procvičena a pak už žákům nečinila výraznější potíže. U úlohy 5 (příloha III, úloha 5) jsem předpokládala úspěšnost kolem 50 % vzhledem k vyšší technické náročnosti konstrukce a méně důkladnému procvičení této problematiky v důsledku nedostatku času.

V úloze 6 (příloha III, úloha 6) byla předpokládaná úspěšnost vysoká, cca 90 %. Důvodem mého předpokladu bylo, že žáci neměli při určování přímé a nepřímé shodnosti potíže, ať už o ní rozhodovali s využitím průsvitky či bez ní. Byla jsem přesvědčena, že správnou odpověď mohou lehce odvodit z předchozích příkladů nebo když si sami načrtnou vzor a jeho obraz v nějakém ze známých zobrazení a rozhodnou, o jakou shodnost se jedná. Uvedení více než jednoho správného příkladu přímé či nepřímé shodnosti jsem očekávala pouze od některých žáků, cca 10 %, předpokládala jsem, že ti, kteří si nejsou jistí, uvedou raději pouze jeden příklad, o jehož správnosti jsou přesvědčeni.

4.2.3 Skutečná úspěšnost a její možné příčiny

Při vyhodnocení závěrečného testu jsem tedy využila výše popsaného bodového systému, výsledky vyhodnocení jsou shrnuty v následujících tabulkách 1 a 2. Tabulka 1 se týká varianty A, tabulka 2 pak varianty B závěrečného testu. V každé z tabulek je vždy uveden počet procent žáků, kteří za příslušnou úlohu získaly určitý počet bodů, tzn. například kolik procent žáků získalo za úlohu 1 dva body, kolik jeden bod atd. V případě, že za danou úlohu nebylo nějaký počet bodů možno získat (například za úlohu 2 mohli žáci získat maximálně tři body a ne více), jsou odpovídající pole tabulky proškrtnuta. U každé úlohy je dále zvýrazněno pole, v němž je uveden počet procent žáků, kteří danou úlohu zcela úspěšně vyřešili. U úloh 1-5 obou variant (příloha III, úlohy 1 - 5) jsou to žáci, kteří získali maximální možný počet bodů, u úlohy 6 (příloha III, úloha 6) pak ti, kteří získali jeden nebo dva body, protože i v případě, že získali jeden bod, splnili požadovaný úkol.

Varianta A

	úloha 1a)	**úloha 1b)**	**úloha 2**	**úloha 3**	**úloha 4**	**úloha 5**	**úloha 6**
0 bodů	0 %	0 %	10 %	20 %	5 %	25 %	60 %
0,5 bodu	-	-	-	30 %	-	-	-
1 bod	5 %	5 %	20 %	20 %	0 %	5 %	**30 %**
1,5 bodu	-	-	-	5 %	-	-	-
2 body	25 %	35 %	10 %	0 %	0 %	10 %	**10 %**
2,5 bodu	-	0 %	-	10 %	-	-	-
3 body	35 %	30 %	**60 %**	**15 %**	25 %	0 %	-
3,5 bodu	-	15 %	-	-	-	-	-
4 body	**35 %**	**15 %**	-	-	**70 %**	**60 %**	-

Tab. 1

Varianta B

	úloha 1a)	**úloha 1b)**	**úloha 2**	**úloha 3**	**úloha 4**	**úloha 5**	**úloha 6**
0 bodů	0 %	0 %	15 %	20 %	5 %	15 %	30 %
0,5 bodu	-	-	-	10 %	-	-	-
1 bod	5 %	5 %	10 %	30 %	5 %	0 %	**55 %**
1,5 bodu	-	-	-	0 %	-	-	-
2 body	5 %	20 %	25 %	5 %	0 %	5 %	**15 %**
2,5 bodu	-	5 %	-	10 %	-	-	-
3 body	45 %	55 %	**50 %**	**25 %**	0 %	10 %	-
3,5 bodu	-	-	-	-	-	-	-
4 body	**45 %**	**15 %**	-	-	**90 %**	**70 %**	-

Tab. 2

4.2.3.1 Úloha 1

Oproti původnímu očekávání byla úspěšnost žáků při řešení části a) úlohy 1 (příloha III, úloha 1, část a)) mnohem nižší. U varianty A (příloha III, úloha A1, část a)) 35 % a u varianty B (příloha III, úloha B1, část a)) 45 % (viz tab. 1 a 2). Jak jsem předpokládala, opakované zobrazení v osové souměrnosti nečinilo žákům potíže, zvládlo je jak u varianty A, tak u varianty B 95 % žáků, tj. ti žáci, kteří získali alespoň dva body (viz tab. 1 a 2). Výraznější problémy však žáci měli s názvem výsledného zobrazení. Objevilo se zde například, že se jedná o zobrazení „přímo shodné“ či „přímé“, o „převrácení“, nebo žáci nenapsali vůbec nic. To mě udivilo, protože při hodině s určením výsledného zobrazení problém neměli. Navíc se slovo posunutí objevuje několikrát v zadání následujících příkladů. Příčinou může být fakt, že žáci při experimentální výuce neměli dostatek času si tyto pojmy dobře osvojit, popř. skutečnost, že bylo teorii věnováno příliš málo pozornosti. Správně odpověděli zřejmě převážně ti žáci, kteří si doma při přípravě na test teorii v pracovním sešitě ještě jednou zopakovali. Problémem zřejmě bylo též nedostatečné vytvoření vztahu mezi geometrickým zobrazením posunutí a reálným pohybem posunutí, který žáci znají z běžného života.

Menší problém měli žáci s vyznačením vektoru určujícím toto posunutí, pokud jej zakreslili, pak většinou správně. Domnívám se, že většina žáků, kteří vektor nezakreslili, nepochopili ze zadání, že úkolem je zakreslit vektor. Při hodině sice byly řešeny analogické úlohy, zadané podobným způsobem v pracovním sešitě, nicméně žákům kromě písemného zadání bylo vždy poskytnuto slovní vysvětlení a případná pomoc.

U části b) této úlohy (příloha III, úloha 1, část b)) bylo procento žáků, kteří ji vyřešili, zcela správně velmi nízké, u obou variant pouze 15 %. Ani zde nebylo problémem opakované zobrazení v osové souměrnosti, v něm chybovalo u každé varianty pouze 5 % žáků. Většina žáků, kteří získali více než dva body, bez problému určila, že se jedná o otočení či středovou souměrnost, největší potíže žákům činilo vyznačit v obrázku, čím je toto zobrazení určeno. Většinou zapomněli vyznačit střed středové souměrnosti nebo otočení či úhel určující dané otočení, popřípadě střed i úhel určující dané otočení. Pokud vyznačili pouze střed nebo pouze úhel, získali jen polovinu bodu. I zde je zřejmě možným důvodem, že si žáci přesně neuvědomili, co znamená zadání. V této úloze se opět ukazuje, že pojmy nejsou správně chápány a osvojeny. V odpovědích se objevilo například, že se jedná o „přímo shodné zobrazení", „nepřímo shodné zobrazení", „otočení průsvitky", „osovou souměrnost", „obrácení" nebo „posunutí", v tomto případě, ale i v případech, kde bylo uvedeno, že jde o otočení, žák vyznačil dokonce i vektor, který podle něj výsledné zobrazení určuje. Vyskytl se i případ, kdy žák chyboval již při opakovaném zobrazení, výsledné zobrazení pak pojmenoval 'správně', tj. otočení, ačkoli vlastně jeho výsledné zobrazení otočením nebylo. Ukázky chybných řešení obou částí této úlohy jsou uvedeny v příloze (příloha IV, obr. 1- 4).

4.2.3.2 Úloha 2

Úloha 2 (příloha III, úloha 2) dopadla oproti očekávání výrazně lépe než úloha 1 (příloha III, úloha 1), i její úspěšnost však byla nižší než očekávaná. Zcela správně variantu A této úlohy (příloha III, úloha A2) vyřešilo 60 %, variantu B (příloha III, úloha B2) pak 50 % žáků. Předpokládaná úspěšnost u této úlohy byla 70 %. U obou variant většina žáků správně vyznačila vektor určující dané posunutí, což odpovídá předpokladu. Překvapilo mě, že se objevili žáci, kteří správně vyznačili dvojici os a přitom nevyznačili vektor. Tito žáci buď vektor zapomněli vyznačit, ale mají o něm jistou představu, pomocí níž zbytek úlohy správně vyřešili, nebo experimentovali. Příkladem druhé možnosti je řešení, při němž žák zřejmě zvolil první osu, načrtl obraz zadaného útvaru v osové souměrnosti dané touto osou a pak našel osu druhou (příloha IV, obr. 5). Tento experimentální přístup mě velmi potěšil, domnívám se, že kdyby bylo při výuce více času, v němž by žáci mohli experimentovat, dosáhlo by možná více z nich tímto způsobem správného výsledku. Většina žáků, kteří nezískali plný počet bodů, chybovala ve vzdálenosti, popřípadě v pořadí os (příloha IV, obr. 6), objevila se však i řešení vypovídající o naprostém nepochopení látky (příloha IV, obr. 7, 8). Domnívám se, že kdyby při výuce bylo věnováno více času experimentování, dokázali by mnozí z nich odhalit chybu ve svém výsledku tím, že by se přesvědčili, co je výsledkem opakovaného zobrazení v osové souměrnosti.

4.2.3.3 Úloha 3

Třetí testová úloha (příloha III, úloha 3) byla v souladu s předpokladem úlohou, kterou zcela správně vyřešilo nejméně žáků, variantu A této úlohy (příloha III, úloha A3) 15 %, variantu B (příloha III, úloha B3) pak 25 % žáků. Očekávaná úspěšnost u této úlohy byla 20 %. Domnívám se, že nízká úspěšnost žáků při řešení této úlohy vypovídá o její značné náročnosti a abstraktnosti, s úlohami tohoto typu, zejména s nalezením správné dvojice os měli žáci problémy i při výuce. Dalším problémem je zde zřejmě nevhodné zadání ve čtvercové síti, která řešení nijak nenapomáhá, spíše žáky ve správném řešení blokuje. V neposlední řadě hraje roli, že tato problematika byla probírána až v poslední hodině výuky, tedy těsně před testem, a nebyla tedy dostatečně procvičena.

Oproti předpokladu činilo žákům velké problémy vyznačit správně orientovaný úhel určující dané otočení, ačkoli v hodině s tím problémy neměli. Za příčinu neúspěchu v tomto kroku řešení považuji buď neporozumění zadání či nedostatečné procvičení této problematiky. Potíže mohla i zde působit čtvercová síť. Ukázka správného a dvou chybných řešení jsou uvedeny v příloze (příloha IV, obr. 9, 10, 11).

4.2.3.4 Úloha 4

U této úlohy (příloha III, úloha 4) byla předpokládána poměrně vysoká úspěšnost, skutečný výsledek však tento předpoklad ještě předčil. Variantu A (příloha III, úloha A4) této úlohy správně vyřešilo 70 % a variantu B (příloha III, úloha B4) dokonce 90 % žáků. V této úloze se objevovali pouze dva druhy chyb. Problémy činil fakt, že žáci měli zobrazit v posunutí nekonvexní čtyřúhelník, často se dopouštěli stejné chyby jako v hodině, tj. správně zobrazili jednotlivé vrcholy čtyřúhelníka a pak tyto obrazy nesprávně pospojovali (příloha IV, obr. 12). Tato chyba svědčí jednak o jisté nepozornosti, ale hlavně o skutečnosti, že si žáci při řešení této úlohy neuvědomují ostatní souvislosti, například, že výsledný čtyřúhelník musí být shodný se zadaným vzorem, což u jejich řešení na první pohled neplatí.

Další chybou, která se v řešení této úlohy opakovaně vyskytla, bylo, že žáci posunovali ve směru kolmém na zadaný vektor (příloha IV, obr. 13). Tato chyba zřejmě vypovídá o tom, že žákům činí problémy vidět souvislost a zároveň rozlišovat mezi posunutím určeným daným vektorem a posunutím vzniklým složením dvou osových souměrností. Na vině je zde nedostatek zkušeností s posunutím, nedostatečné propojení s posunutím tak, jak jej žáci znají z běžného života. Metodický postup, který byl při výuce zvolen, tj. zavedení posunutí nejprve pomocí skládání dvou osových souměrností a pak teprve hledání 'přímé' cesty od vzoru k obrazu byl zřejmě pro mnohé žáky příliš složitý. Činilo jim problém uvědomit si, že se jedná o tentýž problém ze dvou různých perspektiv, že jde o dvě různé cesty k témuž cíli. Na druhou stranu se mezi žáky určitě našli tací, kteří toto velmi dobře zvládli.

Vysoká úspěšnost žáků při řešení této úlohy ukazuje, že je pro žáky skládání osových souměrností mnohem obtížnější a abstraktnější než běžný přístup k posunutí. Tato skutečnost se projevila i přesto, že skládání a rozkladu bylo při výuce věnováno více prostoru než klasickým úlohám na posunutí.

4.2.3.5 Úloha 5

I při řešení předposlední testové úlohy (příloha III, úloha 5) dosáhli žáci lepších výsledků, než jsem očekávala. Oproti předpokládaným 50 % úspěšných řešitelů vyřešilo variantu A této úlohy (příloha III, úloha A5) 60 % a variantu B (příloha III, úloha B5) dokonce 70 % řešitelů.

Část žáků s řešením této úlohy vůbec nezačala; domnívám se, že je to způsobeno faktem, že konstrukce obrazu v posunutí nebyla pří výuce dostatečně osvojena a procvičena; žáci, kteří si ji doma nezopakovali, zřejmě úplně zapomněli, jak ji provést. Na vině je zřejmě i nedostatečné propojení s realitou, žáci si neuvědomují, co je vlastně otočení.

U žáků, kteří úlohu začali řešit, se objevilo několik typů chyb, které bych zde ráda zmínila. První chyba, které se žáci dopouštěli, je, že často správně narýsovali rameno úhlu, o který se daný vrchol trojúhelníka otočí, jeho obraz pak ale narýsovali na kružnici, po níž se otáčel jiný z vrcholů. Tato chyba vypovídá opět o nedostatečném osvojení otočení, nedostatečné představě o jeho vlastnostech a propojení s reálným životem. Opět je zde vidět, že si žáci neuvědomují souvislosti, nezarazilo je, že výsledný trojúhelník na první pohled není shodný se zadaným vzorem.

Další chyba, která se v řešení této úlohy vyskytla, mě nejprve velice překvapila a až když se objevila po několikáté, zjistila jsem její pravděpodobnou příčinu. Několik žáků totiž sice narýsovalo obraz v otočení s daným středem, ale o nesprávný úhel. Nejprve jsem se domnívala, že žáci chybovali při práci s úhloměrem, když například žák otočil daný trojúhelník o 120° místo o zadaných 60° (příloha IV, obr. 14). Když se však v dalším testu objevilo otočení o 30°místo o zadaných 60°, uvědomila jsem si, že chyba je zřejmě opět v chápání otočení ze dvou možných úhlů pohledu. Žáci, kteří takto chybovali, si zřejmě formálně zapamatovali, že když otáčím, tak je nějaký úhel dvojnásobný nebo poloviční, což se týká problematiky skládání osových souměrností, a tuto 'znalost' použili v nesprávnou chvíli a nesprávným způsobem. Tato skutečnost opět potvrzuje, že žáci při experimentální výuce nezískali dostatečný nadhled nad touto problematikou. Zvolený metodický postup při zavedení otočení tedy opět činil žákům potíže, ačkoli se i zde našli tací, kteří danou problematiku dokázali zvládnout.

Celkově však i tato úloha dopadla lépe než úlohy 1 b) (příloha III, úloha 1 b)) a úloha 3 (příloha III, úloha 3) věnované skládání a rozkladu otočení. Opět je tedy vidět, že tradiční přístup k otočení je pro žáky snazší.

Nicméně objevil se i případ, kdy se žákyně pokusila úlohu 5 (příloha III, úloha 5) vyřešit tak, že ji převedla na složení dvou osových souměrností (příloha IV, obr. 15). Řešení však nedokázala dovést do konce, zůstala pouze u vyznačení správné dvojice os osových souměrností, jejichž složením by získala dané otočení. Fakt, že žákyně zadanou úlohu dokázala převést na úlohu o skládání osových souměrností, může na jednu stranu svědčit o hlubším porozumění problému. Na druhou stranu ale skutečnost, že pak nebyla schopna pomocí opakovaného zobrazení v osové souměrnosti dojít k výsledku, poukazuje na možnost, že se pouze naučila, jak najít správnou dvojici os, ale již nevidí další souvislosti a neví, jak této znalosti využít.

4.2.3.6 Úloha 6

Poslední testová úloha (příloha III, úloha 6) měla předpokládanou úspěšnost 90 %, skutečná úspěšnost je však nižší a výrazně se liší v závislosti na tom, o kterou variantu se jedná. Variantu A této úlohy (příloha III, úloha A6) správně vyřešilo 40 %, variantu B (příloha III, úloha B6) pak 70 % žáků.

Příčina obtíží při řešení této úlohy spočívá zřejmě v jejím zadání. Žáci neměli při hodinách problém rozhodnout, zda zadané geometrické útvary jsou přímo či nepřímo shodné a následně zda dané zobrazení je přímo, či nepřímo shodné. Kdyby tedy v testu měli rozhodnout, zda se jedná o přímo či nepřímo shodné útvary, rozhodli by zřejmě správně. Úloha, tak jak byla formulována v textu, však pro ně byla příliš abstraktní. Očekávala jsem, že si při jejím řešení vypomohou obrázkem, což se však nestalo u žádného z řešitelů.

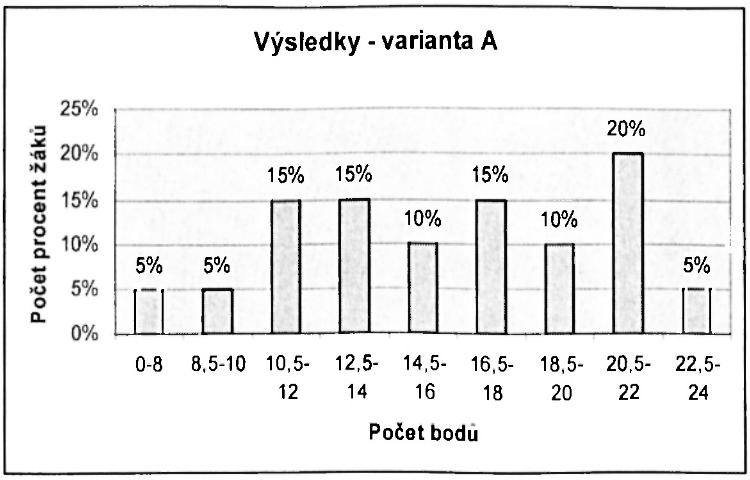
Další chybou v zadání této úlohy byla nevyrovnanost obou variant. Přímo shodných zobrazení totiž žáci znají více, a byla tedy větší pravděpodobnost, že ti, kteří řešili variantu B, budou úspěšní, což se také stalo. Objevili se ale i žáci, kteří i za obtížnější variantu A získali dva body, tzn. uvedli více než jeden příklad nepřímo shodného zobrazení; většinou napsali, že takovým zobrazením je opakované zobrazení v osové souměrnosti, jestliže zobrazíme jednou, třikrát, pětkrát atd.

Nejvíce mě překvapilo, že velký počet žáků nezískal ani jeden bod, protože uvedli jeden správný a jeden či více chybných příkladů přímo, resp. nepřímo shodného zobrazení (příloha IV, obr. 16). Domnívám se, že kdyby problematiku skutečně dobře chápali, tak by k tomu nedošlo.

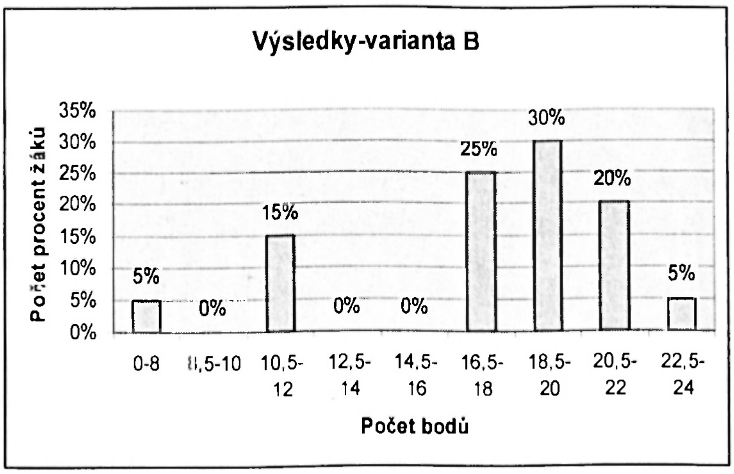
V souladu s předpokladem uvedla pouze malá část žáků více než jeden správný příklad přímo či nepřímo shodného zobrazení (příloha IV, obr. 17, 18). I zde bylo vidět, že obě varianty této úlohy zřejmě nebyly vyrovnané, dva body získalo 10 % řešitelů varianty A a 15 % varianty B. Jedná se sice samozřejmě o příliš malý vzorek testovaných žáků na to, aby bylo možné objektivně hovořit o vyrovnanosti či nevyrovnanosti variant, zde jsou však jasné výše zmíněné důvody ukazující tuto nevyrovnanost.

4.2.4 Vyhodnocení testu jako celku

Výsledky jednotlivých variant testu jsou zaneseny v následujících grafech (graf 1 a graf 2). Žáci jsou podle dosažených výsledků rozděleni do devíti skupin. První skupinu tvoří žáci, kteří získali méně než osm bodů, další skupiny jsou odstupňovány po dvou a půl bodech, poslední skupinu tvoří žáci, kteří získali dvacet dva a půl až dvacet čtyři bodů. Z grafu je patrné, že varianta B dopadla lépe než varianta A, což může být zapříčiněno nevyrovnaností obou variant nebo se může jednat o náhodu, protože počet testovaných žáků byl příliš malý. Do skupiny s nejvyšším a nejnižším počtem bodů spadá u obou variant nejmenší procento žáků, což připomíná Gaussovu křivku, jinak se objevují výkyvy, vzhledem k malému počtu testovaných žáků lze z výsledku testu těžko vyvozovat nějaké statistické výsledky.



Graf 1



Graf 2

Z výsledků testu je vidět, že se našli žáci, kteří probírané učivo velmi dobře zvládli. I u těchto žáků se však místy objevilo nepochopení souvislostí nebo pouze formální osvojení některých poznatků, což je zřejmě způsobeno velkým množstvím látky probraným za krátkou dobu. Většina žáků dosáhla v testu průměrných výsledků, malá část učivo zjevně naprosto nezvládla. Ukázalo se, že někteří žáci řešili úlohy naprosto bez porozumění.

Je zřejmé, že aby navržené rozšiřující učivo bylo vhodné pro běžnou základní školu, bylo by nutné provést velké změny, zejména výraznou redukci učiva, ale i změny metodické. Pro žáky nadané na matematiku by podle mě bylo možné probíranou látku ponechat v podstatě v původním rozsahu, změnit však do určité míry metodický postup a formy práce. Každopádně by na takovýto celek učiva bylo nutné vyhradit více času. Změny, které považuji za nutné, uvedu v závěru této práce.

Závěr

Realizace experimentální výuky, zpětná vazba žáků a výsledky závěrečného testu ukázaly mnohé nedostatky mnou navrženého rozšíření pojmu shodné zobrazení ve škole. Nad těmito nedostatky je nutné se zamyslet, vyvodit z nich důsledky a navrhnout změny rozpracování tohoto učiva. Na závěr tedy zmíním tyto změny a pokusím se o zhodnocení hlavních záměrů a myšlenek celé práce.

V úvodu byla vyslovena domněnka, že žáci základní školy dokáží pochopit základy skládání osových souměrností, že toto učivo je vhodné k experimentování a problémovému vyučování, a že je lze efektivně využít při výuce dalších shodných zobrazení ve škole. Tato základní domněnka se ukázala být z části správná a z části mylná. Od přehodnocení této domněnky se odvíjejí změny, které bych v rozpracování tohoto učiva provedla. Vyjádřím se tedy nejprve k otázkám, zda jsou žáci základní školy schopni pochopit skládání osových souměrností, zda je toto učivo vhodné k problémovému vyučování a zda je možné je efektivně využít při výuce dalších shodných zobrazení. Pak navrhnu konkrétní změny v rozpracování tohoto učiva.

Jak se ukázalo, žáci jsou schopni pochopit skládání osových souměrností do určité míry. Technicky jim opakované zobrazení v osové souměrnosti nečiní výraznější potíže, také propojení tohoto opakovaného zobrazení a pojmů přímá a nepřímá shodnost bylo celkem bez problémů. Obtíže nastaly ve chvíli, kdy si žáci měli uvědomit souvislost mezi složením dvou osových souměrností a posunutím či otočením.

Skládání osových souměrností podle mého názoru skutečně je vhodné pro problémové vyučování a dává žákům možnost, aby sami popisovali a objevovali nové souvislosti, což je pro ně silně motivující. Jestliže mají možnost sami něco objevit, neptají se „A k čemu nám to bude?“, ale mají ze svého objevu radost.

Skládání osových souměrností je možno velmi pěkně a názorně modelovat. Práce s papírovými modely se ukázala jako velmi přínosná. Mohla by být pro žáky samozřejmě zajímavější, kdyby si tyto modely vytvářeli sami. Na to však nebyl dostatek času a v hodinách věnovaných otočení nezbyl čas již ani na práci s modely. To se zjevně negativně projevilo na kvalitě poznatků žáků. Základním problémem mojí experimentální výuky byl tedy nedostatek času či přesněji příliš velké množství látky na příliš krátkou dobu.

Tím nemohla být splněna jedna ze základních podmínek problémového vyučování, tj. dát žákům dostatek času na to, aby experimentovali, pozorovali a vytvářeli si své vlastní poznatky.

Kromě nedostatku času byl dalším hlavním problémem mé experimentální výuky zvolený metodický postup. Využití skládání osových souměrností při zavedení posunutí a otočení zjevně není vhodné. Tento přístup je pro žáky příliš náročný a abstraktní, jedná se vlastně o způsob, jak velmi složitě vysvětlit velmi jednoduchou věc známou z každodenního života. Největší problémy žákům činil chybějící nadhled nad danou problematikou. Většinou si nedokázali uvědomit, že otočení či posunutí lze chápat jako pohyby známé z reálného světa a že k nim zároveň lze dojít i složením dvou osových souměrností. Pouze nadanější z nich si dokázali bez problémů uvědomit, že se jedná o dvě různé cesty k témuž cíli. Tento nadhled průměrní žáci během experimentální výuky získat nemohli, protože měli příliš málo zkušeností s posunutím a otočením jako s reálnými pohyby. Zde byla na vině nedostatečná vazba na reálný svět a nedostatek času. Nadaní žáci však tento problém zvládli.

Shrneme-li odpovědi na tři výše položené otázky, dojdeme k závěru, že skládání osových souměrností je vhodné k problémovému vyučování a že je možné s ním žáky seznámit již na základní škole. Není ale příliš vhodné využít jej k výuce dalších shodných zobrazení. Vhodnější by bylo spíše seznámit žáky s těmito zobrazeními, tj. posunutím a otočením tak, jak je známe v běžném životě, a teprve pak by bylo možné naznačit jejich souvislost s osovými souměrnostmi, podobně jako je tomu v německých učebnicích. Je důležité klást při takovém seznámení důraz na vazbu na reálný svět, modelování a experimentování.

Z výše napsaného tedy vyplývá, že bych při opakované realizaci na běžné základní škole provedla výraznou redukci probíraného učiva a tomu bych pak věnovala více času. Problematiku přímé a nepřímé shodnosti v souvislosti s opakovaným zobrazením v osové souměrnosti bych ponechala v podobě, v jaké byla probírána. Dále bych žáky nejprve seznámila s otočením a posunutím, jak je známe z běžného života. Kladla bych důraz na to, aby získali s otočením co nejvíce praktických zkušeností a seznámili se důkladně s jeho vlastnostmi. Na závěr bych při práci s modely vedla žáky k tomu, aby sami objevili zajímavé souvislosti mezi opakovaným zobrazením v osové souměrnosti a dalšími shodnými zobrazeními. K tomu bych využila úlohy z učebního textu (příloha I, 2. 'hodina', úlohy 1, 4 a domácí cvičení; 4. 'hodina', úlohy 1, 4 a domácí cvičení). Možná bych zařadila i některé úlohy na skládání osových souměrností, vyhnula bych se ale zřejmě dalším úlohám týkajících se rozkladu posunutí a otočení na dvě osové souměrnosti

Při realizaci experimentu ve třídě žáků nadaných na matematiku by podle mého názoru bylo možno realizovat experimentální výuku v plném rozsahu. I zde by ale bylo nutné věnovat problematice mnohem více času, aby žáci měli dostatek času na konstrukci vlastních poznatků. Metodický postup bych i pro nadané žáky změnila stejným způsobem jako u výuky na běžné základní škole, tzn. probrala bych nejprve posunutí a otočení a až potom poukázala na jejich souvislost s osovými souměrnostmi. Oproti běžné základní škole bych zařadila náznak důkazů tvrzení, jak tomu bylo v mé experimentální výuce, a více úloh na skládání osových souměrností. Bylo by možné zařadit i úlohy týkající se rozkladu posunutí či otočení na dvě osové souměrnosti. U obou typů úloh bych ale kladla větší důraz na experimentování a na to, zda žáci skutečně chápou souvislosti a nemají pouze formální znalosti. Problémy by podle mého názoru neměly činit ani úlohy na skládání dvou posunutí či dvou otočení kolem stejného středu.

Na úplný závěr bych tedy ještě ráda zodpověděla otázku kladenou na počátku práce, tedy zda takto zpracované učivo může mít pro žáky nějaký přínos. Domnívám se, že ano. Kromě již zmíněné skutečnosti, že se žáci učí vidět a formulovat nové souvislosti, pokládám za podstatný i zmíněný nadhled a schopnost uvědomit si více možných cest k jednomu cíli. Tu mohou využít například ke kontrole své práce nejen v geometrii při skládání osových souměrností, ale především v životě.

Literatura

Učebnice pro šestý ročník

[1] Cihlář, J., Zelenka, M.: *Matematika pro šestou třídu: pracovní učebnice. Díl 2.* Fortuna, Praha 1995.

[2] Coufalová, J., Pěchoučková, Š., Lávička, M., Potůček, J.: *Matematika pro šestý ročník základní školy.* Fortuna, Praha 1998.

[3] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., Šimša, J.: *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií. Osová a středová souměrnost.* Prometheus, Praha 2003.

[4] Mäsiar, P., Bureš, F., Koman, M.: *Matematika pro 6. ročník základní školy. Doplňující text pro třídy s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů.* Prometheus, Praha 1992.

[5] Molnár, J., Kopecký, M., Lišková, H., Novák, B., Slouka, J.: *Matematika 6.* Prodos, Olomouc 1998.

[6] Müllerová, J., Rádl, J., Macháček, V., Brant, J.: *Matematika pro 6. ročník základní školy, Geometrie.* Kvarta, Praha 1998.

[7] Novotná, J., Kubínová, M., Sýkora, V., Sinková, M.: *Matematika s Betkou 1.* Scientia, Praha 1996.

[8] Odvárko, O., Kadleček, J.: *Matematika pro 6. ročník základní školy, 3. díl, Úhel, trojúhelník, osová souměrnost, krychle, kvádr.* Prometheus, Praha 1999.

[9] Rosecká, Z., Růžička, J.: *Geometrie 6.* Nová škola, Brno 1997.

[10] Šarounová, A., Mareš, J., Růžičková, J., Väterová, V.: *Matematika 6, 1. díl.* Prometheus, Praha 1996.

[11] Trejbal, J., Jirotková, D., Sýkora, V.: *Matematika pro 6. ročník základní školy, 2. díl.* SPN, Praha 1998.

Učebnice pro 7. ročník

[12] Coufalová, J., Pěchoučková, Š., Hejl, J., Lávička, M.: *Matematika pro sedmý ročník základní školy.* Fortuna, Praha 1999.

[13] Molnár, J., Lepík, L., Lišková, H., Slouka, J.: *Matematika 7.* Prodos, Olomouc 1999.

[14] Müllerová, J., Macháček, V., Brant, J., Kůst, J., Macháň, F.: *Matematika pro 7. ročník základní školy. Geometrie.* Kvarta, Praha 1998.

[15] Novotná, J., Kubínová, M., Sýkora, V., Hanková, J.: *Matematika s Betkou 2.* Scientia, Praha 1996.

[16] Odvárko, O., Kadleček, J.: *Matematika pro 7. ročník základní školy, 3. díl, Shodnost, středová souměrnost, čtyřúhelníky, hranoly.* Prometheus, Praha 1999.

[17] Šarounová, A., Růžičková, J., Väterová, V.: *Matematika 7, 2. díl.* Prometheus, Praha 1998.

[18] Trejbal, J., Jirotková, D., Sýkora, V.: *Matematika pro 7. ročník základní školy, 1. díl.* SPN, Praha 1999.

[19] Trejbal, J., Kučinová, E., Vintera, F., Veselý, M.: *Sbírka úloh z matematiky pro 6. a 7. ročník.* SPN, Praha 2004.

Německé učebnice používané v Bádensku-Württembersku

Učebnice pro základní školu (v SRN do 4. ročníku)

[20] Benz, Ch., Klöpfer, D., Nassal, A. a kol.: *Denken und Rechnen 3.* Westermann Schulbuchverlag, Braunschweig 2002.

[21] Eccarius, D., Foliech-Presečki, R., Kurhofer, D. a kol.: Lollipop *Mathematik 4*, Cornelsen-Verlag, Berlin 2002.

[22] Eccarius, D., Kurhofer, D., Manthey, R. a kol.: *Lollipop Mathematik 3*, Cornelsen-Verlag, Berlin 2001.

[23] Hübner, G., Kleinschmidt, D., Knolle, H. a kol.: *Mathebaum 3. Mathematik für Grundschulen.* Schroedel Verlag, Hannover 2000.

[24] Hübner, G., Kleinschmidt, D., Knolle, H. a kol.: *Mathebaum 4 (Matematik für Grundschulen).* Schroedel Verlag, Hannover 2000.

[25] Keller, K.-H., Pfaff, P., Behrens, J. a kol.: *Das Mathebuch 4.* Mildenberger Verlag, Offenburg 2002.

[26] Leininger, P., Ernst, G., Kistella, A. a kol.: *Nussknacker. Unser Rechenbuch für Klasse 4. Baden Württemberg Ausgabe C.* Ernst Klett Grundschulverlag, Leipzig 2001.

[27] Mosel-Göbel, D., Stein, M., Armbruster, C. a kol.: *Leonardo Mathematik 4.* Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt am Main 2001.

[28] Wittmann, E. Ch., Miller, G. N., Berger, A. a kol.: *Das Zahlenbuch. Mathematik im 4. Schuljahr.* Ernst Klett Grundschulverlag, Leipzig 1999.

Učebnice pro nižší gymnázium (v SRN od pátého ročníku)

[29] Fiedler, Ch., Kind, R., Ladenthin, W., a kol: *Elemente der Mathematik. Baden-Württemberg, 8. Schuljahr.* Schroedel Verlag, Hannover 2002.

[30] Schmid, A., Bürker, M., Freudigman, H. a kol.: *Lambacher Schweizer 6. Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium. Ausgabe Baden-Württemberg.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1999.

[31] Schmid, A., Bürker, M., Freudigmann, H a kol.: *Lambacher Schweizer 8. Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium. Ausgabe Baden-Württemberg.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1997.

[32] Schmid, A., Freudigmann, H., Niederernk-Felgner, C. a kol.: *Lambacher Schweizer 5. Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium. Ausgabe Baden-Württemberg.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1999.

Další literatura

[33] Hejný, M., a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava 1989.

[34] Jelínek, M.: *Nové směry ve školské matematice, svazek 5: Transformace.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1976.

[35] Kuřina, F.: *Problémové vyučování v geometrii.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1976.

[36] Kuřina, F.: *10 geometrických transformací.* Prometheus, Praha 2002.

[37] Kuřina, F.: *10 pohledů na geometrii.* ALBRA, Praha 1996.

[38] Šedivý, J.: *O modernizaci školské matematiky.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1969.

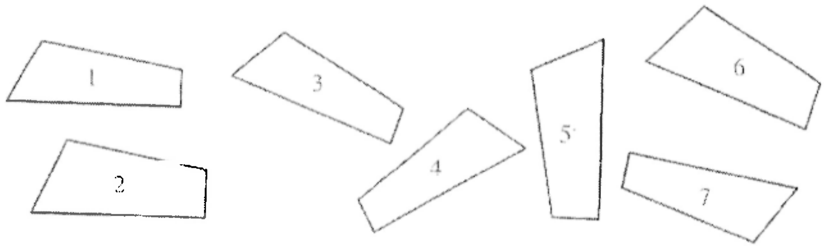
[39] Vyšín, J.: *Elementární geometrie 1.* Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952.

Příloha I

Jméno a příjmení:
Datum:

Shodnost

1. Vyberte shodné obrazce (použijte průsvitku):



Obr.1

další úkoly (můžete diskutovat se sousedem):

a) Jak jste určili, že dva obrazce jsou shodné?
b) Narýsujte příklad dvou shodných obrazců, zdůvodněte, proč jsou shodné.
c) Ověřte jejich shodnost pomocí průsvitky.

Dva geometrické útvary jsou **shodné**, jestliže mají **stejný tvar a velikost**. To lze zjistit **přenesením** jednoho obrazce na druhý **pomocí průsvitky**. Porovnáváme-li dva obrazce pomocí průsvitky, **v některých případech musíme průsvitku obrátit**.

2. Pozorujte obrázky, doplňte chybějící slova:

Obr.2

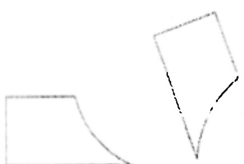
.... třeba průsvitku obrátit.
Říkáme, že útvary jsou **přímo shodné**.

('směr' značení se nezmění)

.... třeba průsvitku obrátit.
Říkáme, že útvary jsou **nepřímo shodné**.
('směr' značení se změní)

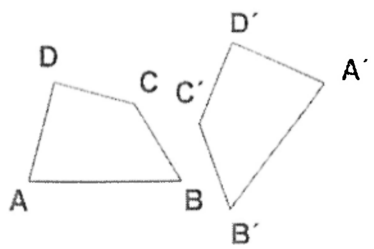
3. Pozorujte zadané geometrické útvary a rozhodněte, zda jsou přímo či nepřímo shodné. Pokuste se výsledek odhadnout, průsvitku použijte pouze ke kontrole.

a)



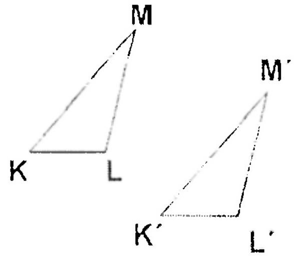
.... shodné

b)



.... shodné

c)



.... shodné

Obr. 3

4. Vymyslete příklad dvou přímo shodných a dvou nepřímo shodných geometrických útvarů a narýsujte je. Přesvědčte se pomocí průsvitky, zda jste našli správné příklady.

přímo shodné útvary **nepřímo shodné útvary**

5. Přeložíme arch papíru napůl, na takto přehnutém papíru narýsujeme trojúhelník ABC. Poté co nejpřesněji vystřihneme narýsovaný trojúhelník ABC do obou částí přehnutého papíru najednou (viz přiložený model 1).

Přehyb papíru označíme jako přímku o, a nově vzniklý trojúhelník označíme $A'B'C'$ tak, že se bod A' při přehnutí papíru 'dotýká' bodu A, bod B' bodu B a bod C' bodu C. Čárkovanou čarou vyznačíme úsečky AA', BB' a CC'. Jejich průsečíky s přímkou o označíme po řadě A_o, B_o a C_o.

__**Úkoly:**__

a) Pozorujte svůj model. Co na něm vidíte? Připomíná vám něco, s čím jste se již v matematice setkali?

b) Určete vzájemnou polohu následujících přímek a úseček a doplňte: || (rovnoběžné), ⊥ (kolmé) či X (různoběžné).

příklad: $AA_o \perp o$

AA' .... o	AA' .... BB'	AB .... $A'B'$
BB' .... o	AA' .... CC'	BC .... $B'C'$
CC' .... o	BB' .... CC'	AC .... $A'C'$

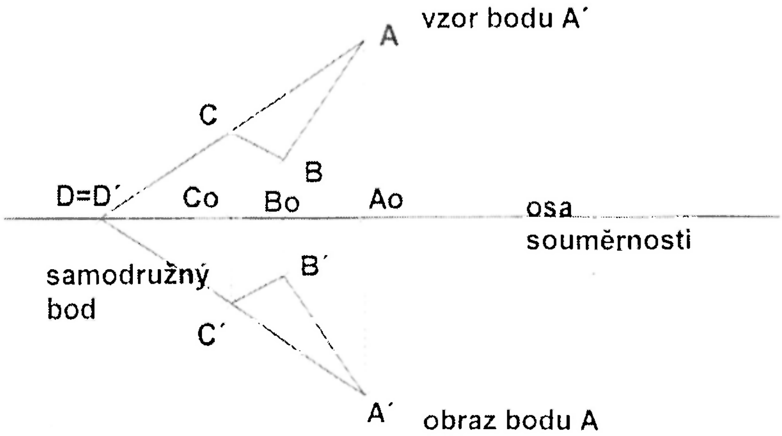
c) Porovnejte délky úseček a velikosti úhlů a doplňte vhodný znak (<, >, =):

$\lvert AA_o\rvert$ .... $\lvert A'A_o\rvert$	$\lvert AB\rvert$ .... $\lvert A'B'\rvert$	$\lvert\angle ABC\rvert$ .... $\lvert\angle A'B'C'\rvert$
$\lvert BB_o\rvert$ .... $\lvert B'B_o\rvert$	$\lvert BC\rvert$ .... $\lvert B'C'\rvert$	$\lvert\angle BAC\rvert$ .... $\lvert\angle B'A'C'\rvert$
$\lvert CC_o\rvert$ .... $\lvert C'C_o\rvert$	$\lvert AC\rvert$ .... $\lvert A'C'\rvert$	$\lvert\angle ACB\rvert$ .... $\lvert\angle A'C'B'\rvert$

d) Jsou trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ shodné?

e) Jestliže ano, jedná se o přímou či nepřímou shodnost?

Osová souměrnost



Obr.4

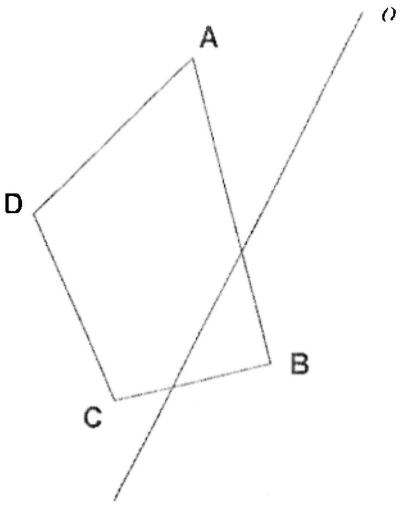
Zápis:
$O(o)$: ΔABC —> $\Delta A'B'C'$

Čteme:
V osové souměrnosti podle osy *o* přejde trojúhelník *ABC* do trojúhelníku *A´B´C´*.

V **osové souměrnosti** je
- obrazem úsečky úsečka s ní **shodná**,
- obrazem úhlu úhel s ním **shodný**,
- obrazem trojúhelníku trojúhelník s ním **shodný**.

Osová souměrnost je příkladem **shodného zobrazení**. Je to **nepřímá shodnost**.

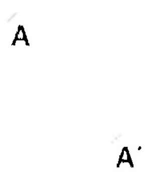
6. Je dán čtyřúhelník *ABCD* a přímka *o*. Sestrojte obraz tohoto čtyřúhelníka v osové souměrnosti s osou *o* a označte jej *A´B´C´D´*.



Obr.5

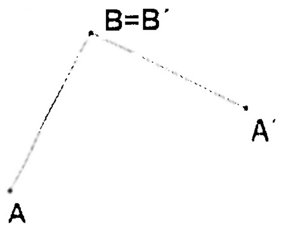
7. Najděte osu souměrnosti, jestliže je dán

a) bod A a jeho obraz A' v této osové souměrnosti,



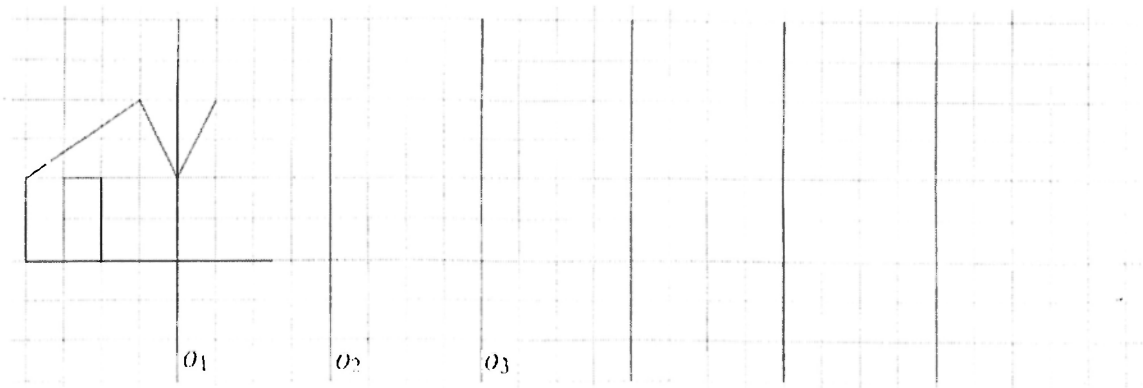
Obr.6

b) úsečka AB a její obraz $A'B'$ v této osové souměrnosti.



Obr. 7

8. Zobrazujte domeček postupně v několika osových souměrnostech podle zadaných os, dokud vám vystačí čtverečkovaný papír. Prohlédněte si obrázek. Které útvary jsou s výchozím přímo a které nepřímo shodné?



Obr.8

Zobrazíme-li útvar postupně v několika osových souměrnostech

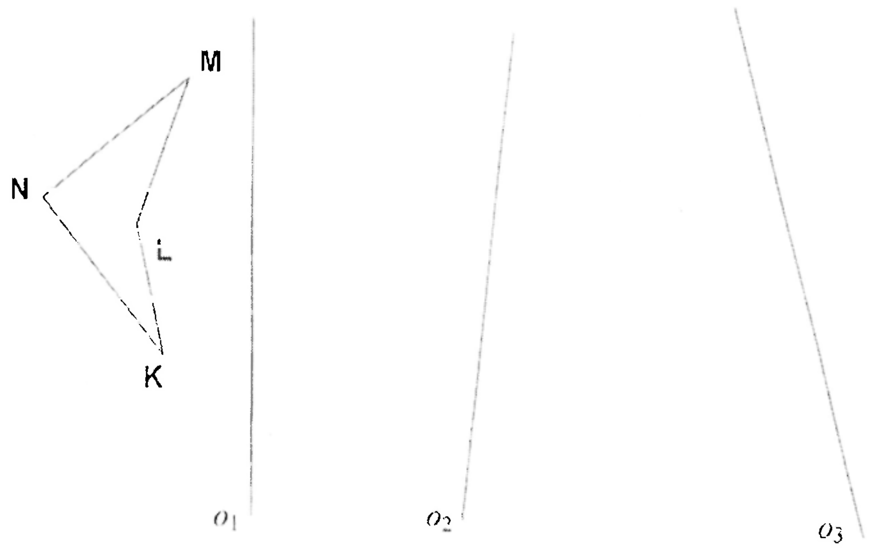
- **jednou**, pak jsou obraz a vzor **nepřímo** shodné,
- **dvakrát**, pak jsou obraz a vzor .... shodné,
- **třikrát**, pak jsou obraz a vzor .... shodné,
- **čtyřikrát**, pak jsou obraz a vzor .... shodné,
- **desetkrát**, pak jsou obraz a vzor .... shodné,
- **sedmnáctkrát,** pak jsou obraz a vzor .... shodné.

Zobrazíme-li útvar postupně v několika osových souměrnostech,

- jejichž počet je ...., pak jsou vzor a obraz **přímo shodné**.
- jejichž počet je ...., pak jsou vzor a obraz **nepřímo shodné**.

Domácí cvičení:

Je dán čtyřúhelník *KLMN* a přímky o_1, o_2 a o_3. Zobrazte tento čtyřúhelník v osové souměrnosti podle osy o_1, tento jeho obraz označte $K'L'M'N'$ a zobrazte jej v osové souměrnosti podle osy o_2 . Tento obraz označte $K''L''M''N''$ a zobrazte jej v osové souměrnosti podle osy o_3. Výsledný útvar označte $K'''L'''M'''N'''$. Do tabulky zapište, zda jsou dané čtyřúhelníky přímo či nepřímo shodné.



Obr. 9

čtyřúhelníky	**přímo / nepřímo shodné**
$KLMN$, $K'L'M'N'$	
$K'L'M'N'$, $K''L''M''N''$	
$KLMN$, $K''L''M''N''$	
$K''L''M''N''$, $K'''L'''M'''N'''$	

Jméno a příjmení:
Datum:

1. Složíme list papíru dvakrát jako tahací harmoniku. Dáme pozor, aby se části horního okraje papíru přesně překrývaly. Tímto způsobem vzniknou dva přehyby, které jsou navzájem rovnoběžné. Na krajní části složeného listu papíru narýsujeme trojúhelník ABC a vystřihneme jej co nejpřesněji do všech tří částí papíru najednou. Přeložené části držíme při stříhání co nejtěsněji u sebe. Papír rozložíme a budeme zkoumat vlastnosti vystřižených obrazců (viz přiložený model 2).

Úkoly:

a) Toto vystřižení modeluje opakovaná zobrazení. O jaká zobrazení se jedná? Vyznačte na modelu, čím jsou tato zobrazení určena.

b) Najděte obrazy jednotlivých vrcholů trojúhelníka ABC v prvním zobrazení a označte je A', B', C'. Pak najděte obrazy bodů A', B', C' ve druhém zobrazení a označte je A'', B'', C''.

c) Je možno 'dostat se' od trojúhelníku ABC rovnou k trojúhelníku $A''B''C''$, aniž bychom použili opakovaného zobrazení? Jak? Překreslete trojúhelník ABC na průsvitku a přeneste jej na trojúhelník $A''B''C''$. Jaký pohyb jste při tom vykonali?

d) Porovnejte vzdálenost přehybů papíru (os souměrností) a délky úseček $|AA''|$, $|BB''|$ a $|CC''|$. Co jste zjistili?

e) Doplňte chybějící údaje (||, X, ⊥) o vzájemné poloze přímek a úseček:

o_1 .... o_2	AA'' .... BB'' .... CC''
AA''.... o_1	AB .... $A''B''$
AA'' .... o_2	BC .... $B''C''$
BB''.... o_1	AC .... $A''C''$
BB'' .... o_2	
CC''.... o_1	
CC''.... o_2	

f) Porovnejte délky úseček a velikosti úhlů a doplňte znak (<, >, =):

$\|AB\|$ .... $\|A''B''\|$	$\|\angle ABC\|$ .... $\|\angle A''B''C''\|$
$\|BC\|$ .... $\|B''C''\|$	$\|\angle BCA\|$ .... $\|\angle B''C''A''\|$
$\|AC\|$ .... $\|A''C''\|$	$\|\angle BAC\|$ .... $\|\angle B''A''C''\|$

f) Jsou trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ a $A''B''C''$ shodné? Jedná se o přímou či nepřímou shodnost? Výsledek zapište do tabulky:

g)

trojúhelníky	**shodné/neshodné**	**přímo/nepřímo**
ABC, $A'B'C'$		
$A'B'C'$, $A''B''C''$		
ABC, $A''B''C''$		

Pohyb, který vykonáme od trojúhelníku ABC k trojúhelníku $A''B''C''$, nazýváme **POSUNUTÍ.**

Chceme-li něco někam **posunout** (v geometrii i v běžném životě), ptáme se **„kam?"**. To znamená **kterým směrem** a **o kolik** je třeba daný objekt posunout.

Posunutí je určeno: **směrem**
velikostí
orientací

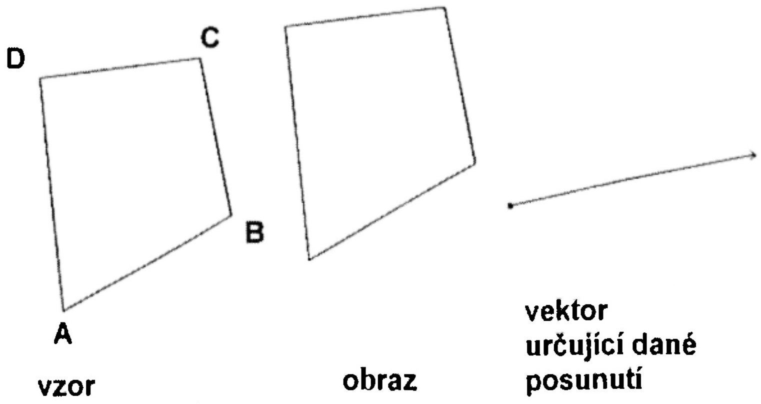
Jestliže nějaký geometrický útvar **zobrazíme** postupně **pomocí dvou osových souměrností**, jejichž **osy** jsou **rovnoběžné**, získáme **posunutí**, jehož:

- **směr** je **kolmý na osy** souměrnosti,
- **velikost** je rovna **dvojnásobku vzdálenosti** os,
- **orientace** je od první osy ke druhé ose.

Zdůvodnění:

Obr. 10

Směr, velikost a orientaci posunutí můžeme znázornit tzv. **vektorem**, tj. orientovanou úsečkou **od bodu k jeho obrazu** v posunutí. Nezáleží na tom, kterou dvojici bodů (vzor a obraz) zvolíme, směr, velikost a orientace vektoru se tím nezmění.



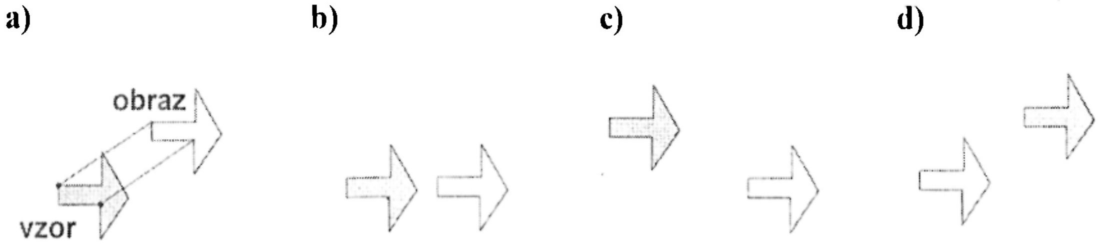
Obr. 11

V **posunutí** je

- obrazem úsečky úsečka s ní **shodná**,
- obrazem úhlu úhel s ním **shodný**,
- obrazem trojúhelníku trojúhelník s ním **shodný**.

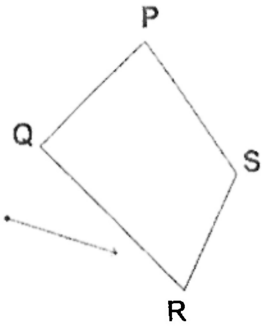
Posunutí je příkladem **shodného zobrazení**. Je to **přímá shodnost**.

2. Na obrázku jsou dány geometrické útvary a jejich obrazy v posunutí. Vyznačte do obrázku vektor určující toto posunutí, tj. jeho směr, velikost a orientaci.



Obr. 12

3. Na obrázku je dán čtyřúhelník *PQRS*. Sestrojte jeho obraz v posunutí daném vektorem:

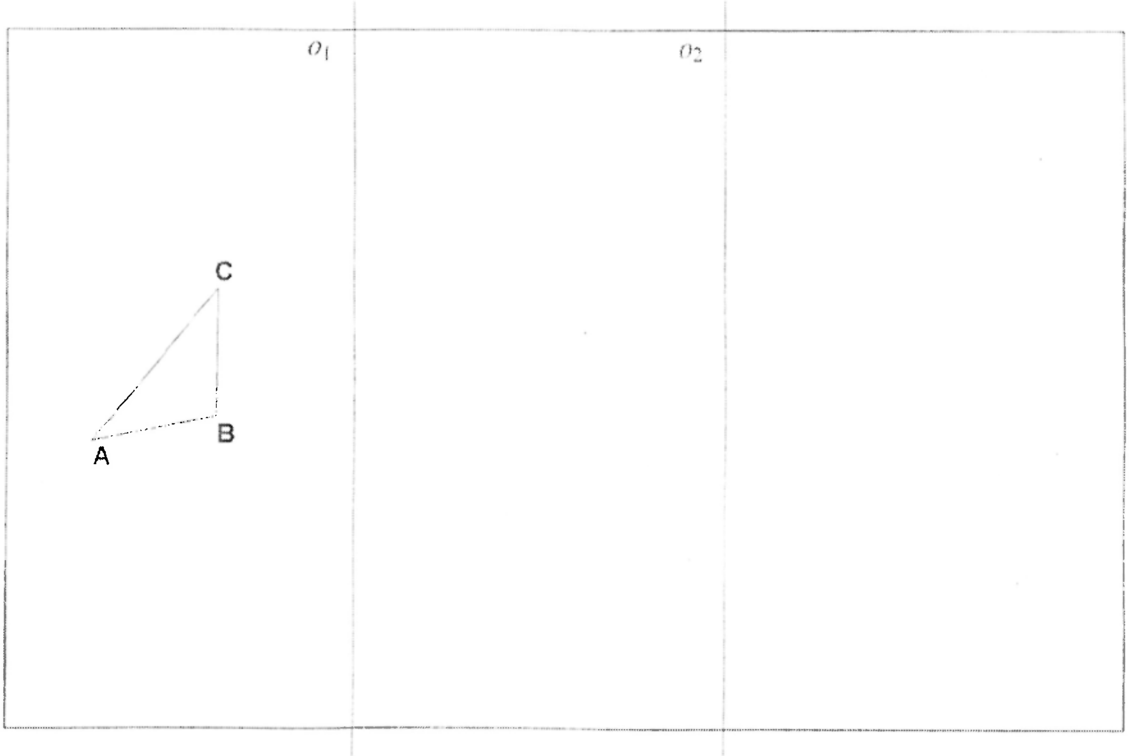


Obr. 13

4. Z listu papíru je vystřižen čtyřúhelník *KLMN* a jeho obraz v posunutí (viz přiložený model 3). Označte tento obraz $K''L''M''N''$, vyznačte vektor určující toto posunutí a změřte jeho velikost. Najděte způsob, jak složit papír, abyste jedním vystřižením získali vzor i jeho obraz v posunutí.
Porovnejte výsledky se spolužáky. Co jste zjistili?

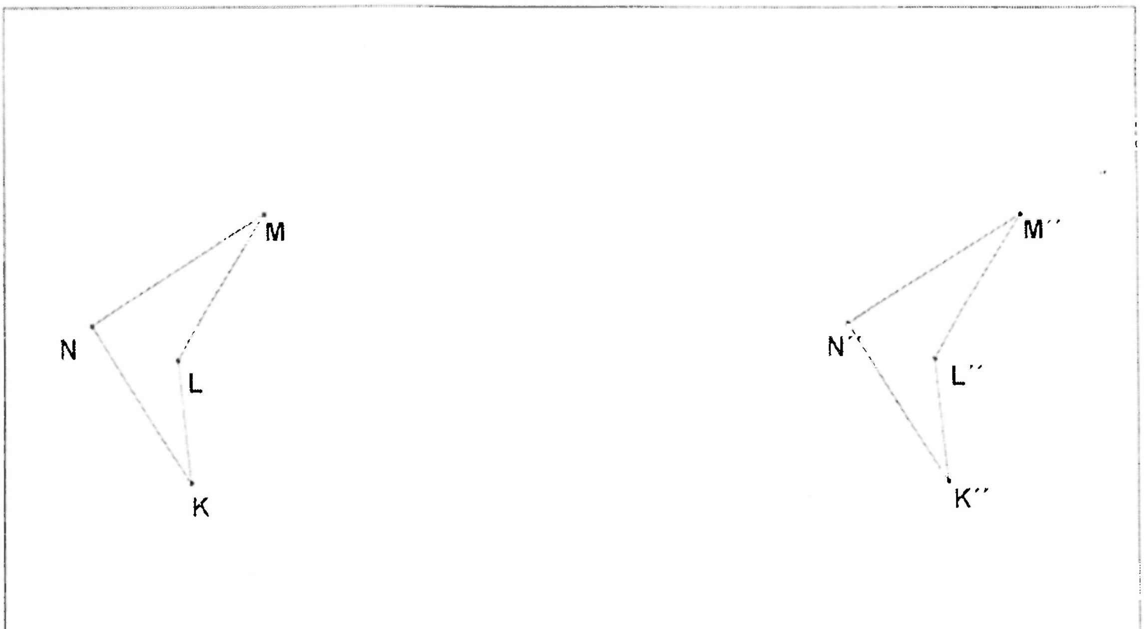
<u>Domácí cvičení:</u>
Situace, které jste v příkladech 1 a 4 modelovali na překládaném papíru,doma narýsujte. Využijte návod a předkreslené zadání.

a) Je dán trojúhelník *ABC*. Zobrazte jej v osové souměrnosti s osou o_1, tento obraz označte $A'B'C'$, zobrazte jej znovu, tentokrát v osové souměrnosti s osou o_2. Výsledný trojúhelník označte $A''B''C''$. Určete zobrazení, v němž čtyřúhelník *ABC* přejde rovnou na čtyřúhelník $A''B''C''$, a vyznačte v obrázku, čím je toto zobrazení určeno.



Obr.14

b) Je dán čtyřúhelník *KLMN* a jeho obraz v posunutí, čtyřúhelník *K''L''M''N''*. Vyznačte vektor určující toto posunutí a změřte jeho velikost. Narýsujte osy o_1 a o_2 dvou osových souměrností, jejichž postupným použitím získáme zadané posunutí.



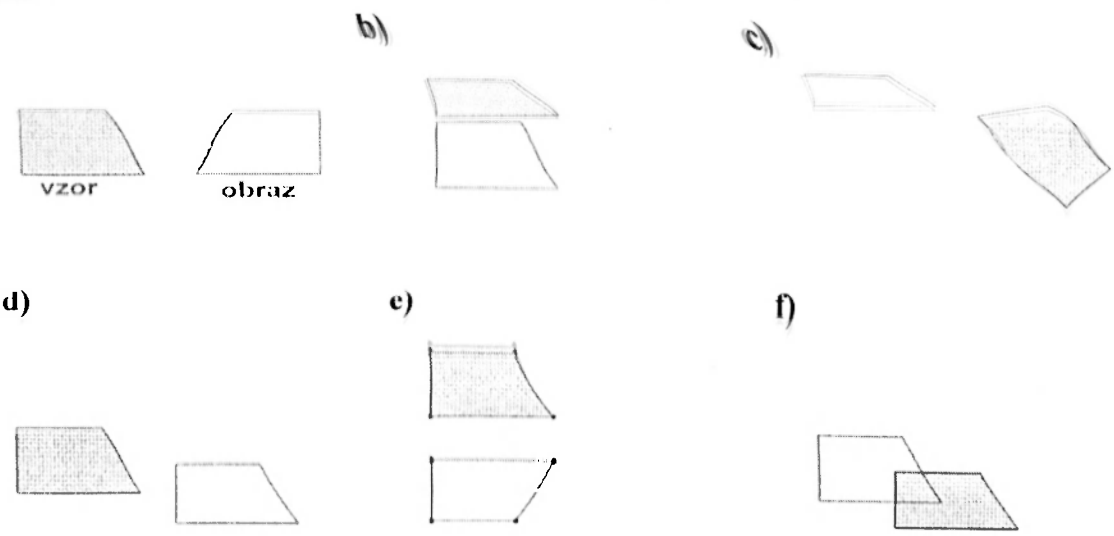
Obr.15

Hodina č. 3

Jméno a příjmení:

Datum:

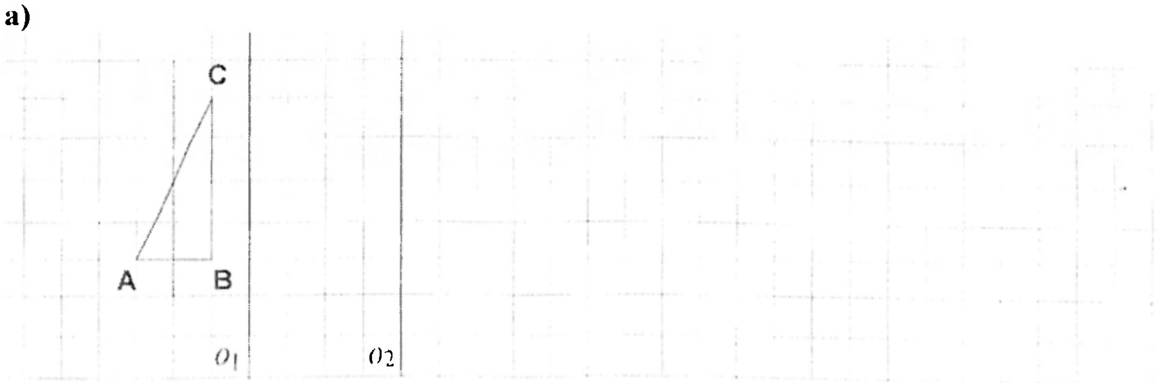
1. Rozhodněte, jakým zobrazením přejde vzor v obraz, a vyznačte, čím je toto zobrazení určeno. Jedná se o přímou či nepřímou shodnost?



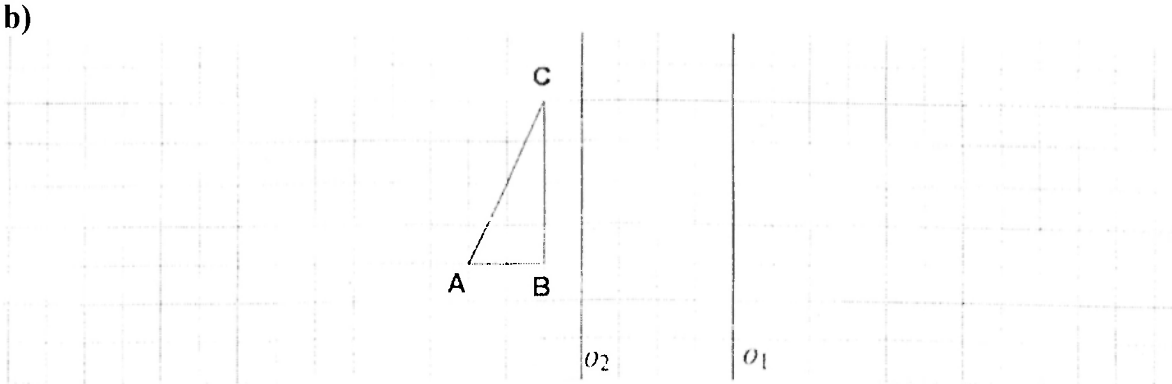
Obr. 16

2. Ve čtvercové síti je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Zobrazte jej v osové souměrnosti podle osy o_1, tento jeho obraz označte $A'B'C'$ a pak jej zobrazte v osové souměrnosti podle osy o_2. Výsledný útvar označte $A''B''C''$.
Určete zobrazení, ve kterém přejde ΔABC rovnou do $\Delta A''B''C''$. V obrázku vyznačte, čím je toto zobrazení určeno.

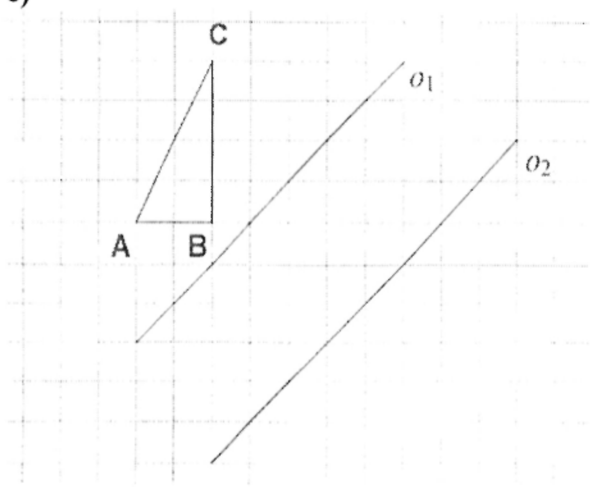
a)



b)



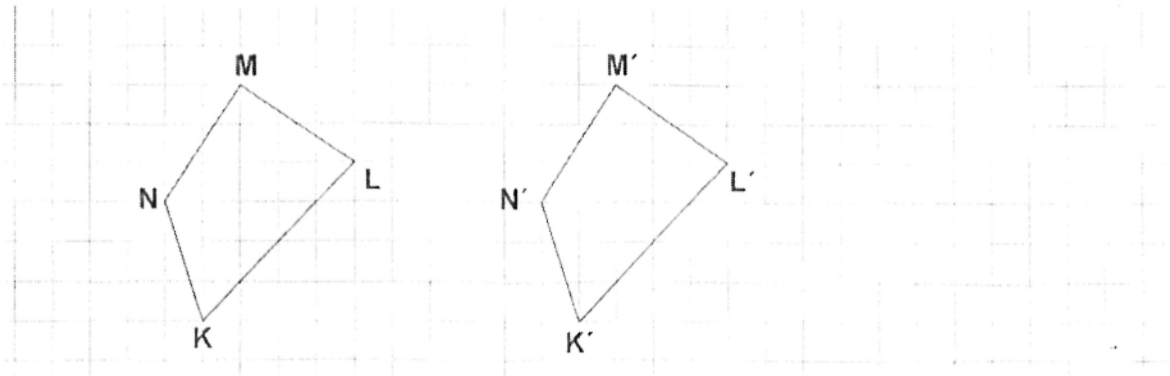
c)



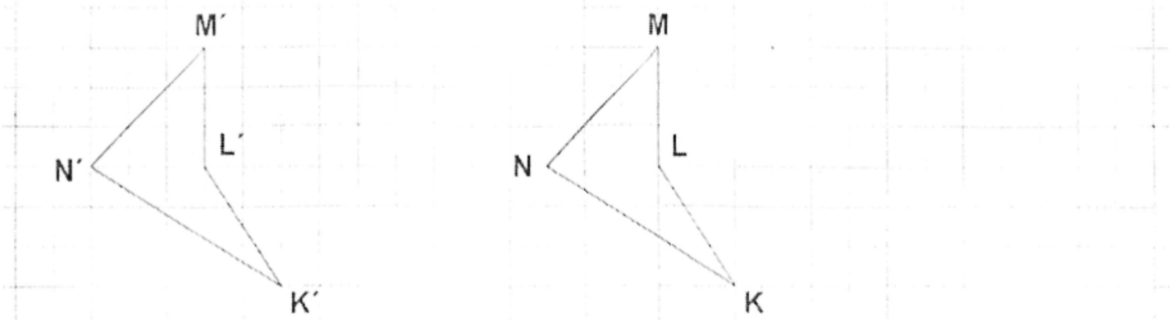
Obr. 17

3. Ve čtvercové síti je dán čtyřúhelník *KLMN* a jeho obraz *K′L′M′N′* v posunutí. Vyznačte v obrázku směr, velikost a orientaci tohoto posunutí a najděte osy dvou osových souměrností, jejichž opakovaným použitím lze získat dané posunutí. Určete velikost posunutí a vzdálenost os (zvolte vhodnou jednotku).

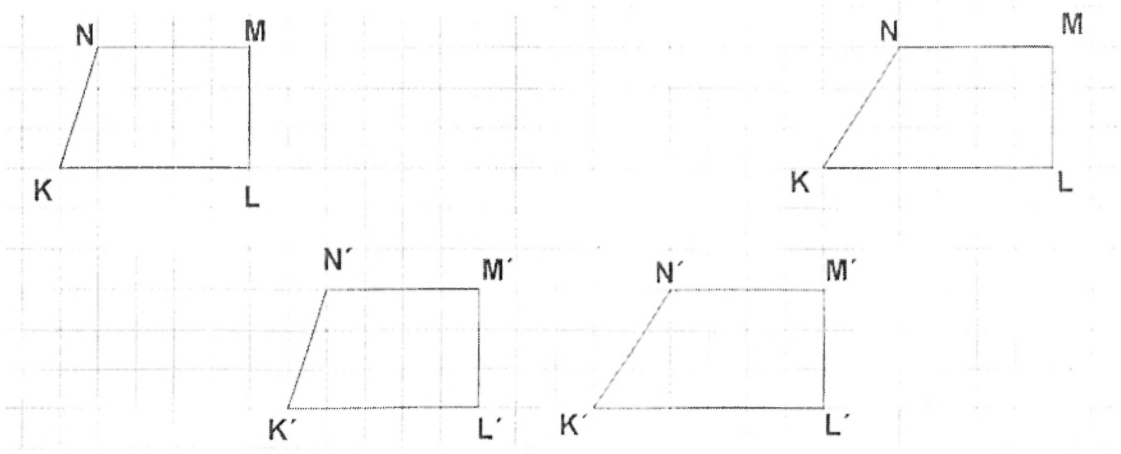
a)



b)



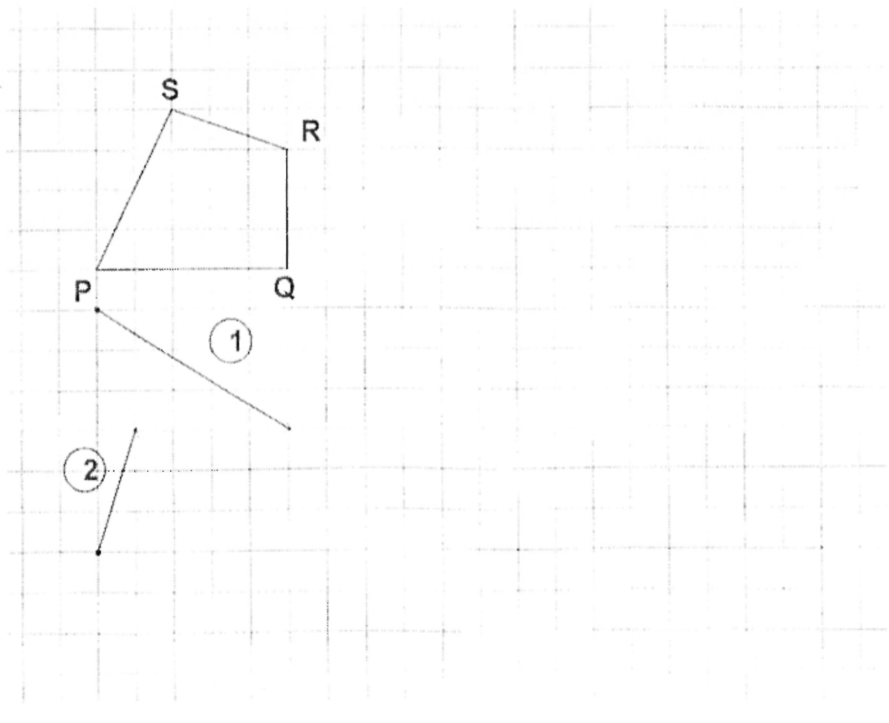
c) **d)**



Obr. 18

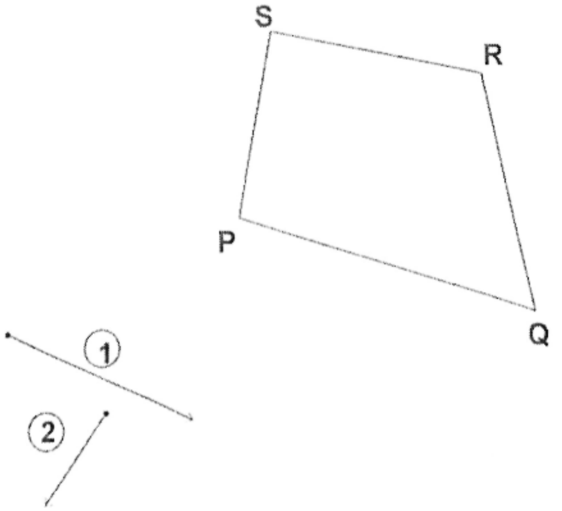
4. Je dán čtyřúhelník *PQRS* a vektory 1 a 2 určující posunutí. Zobrazte čtyřúhelník *PQRS* nejprve v posunutí určeném vektorem 1. Tento jeho obraz označte *P´Q´R´S´* a zobrazte jej v posunutí daném vektorem 2. Výsledný útvar označte *P´´Q´´R´´S´´*. Existuje zobrazení, které převádí čtyřúhelník *PQRS* rovnou na čtyřúhelník *P´´Q´´R´´S´´*? Jestliže ano, pojmenujte je a vyznačte, čím je toto zobrazení určeno.

a)



Obr. 19

b)



Obr. 20

<u>Domácí cvičení</u>
Obměňte úlohu 4a), zakreslete do stejného obrázku: čtyřúhelník *PQRS* zobrazte tentokrát nejprve v posunutí určeném vektorem 2 a tento obraz pak zobrazte v posunutí určeném vektorem 1. K jakému výsledku jste došli a proč?

Jméno a příjmení:
Datum:

1. Složíme list papíru jako vějíř tak, aby se přehyby papíru protínaly na jeho okraji. Na krajní části složeného papíru narýsujeme trojúhelník ABC a vystřihneme jej co nejpřesněji do všech tří částí papíru najednou (viz přiložený model 4). List papíru opět rozložíme a budeme zkoumat vlastnosti vystřižených útvarů.

Úkoly:

a) Toto vystřižení modeluje opakovaná zobrazení. O jaká zobrazení se jedná? Vyznačte na modelu, čím jsou tato zobrazení určena. Průsečík přehybů papíru označte S.

b) Najděte obrazy jednotlivých vrcholů trojúhelníka ABC v prvním zobrazení a označte je A', B', C'. Dále najděte obrazy bodů A', B', C' ve druhém zobrazení a označte je A'', B'', C''.

c) Je možno 'dostat se' od trojúhelníka ABC rovnou k trojúhelníku $A''B''C''$, aniž bychom použili opakované zobrazení? Jak? Překreslete trojúhelník ABC na průsvitku a přeneste jej na trojúhelník $A''B''C''$. Jaký pohyb jste přitom vykonali?

d) Jaká je vzájemná poloha přímek o_1 a o_2 (doplňte vhodný znak: ||, $\perp$ či X)?
$o_1 \ldots o_2$

e) Vyznačte na modelu úsečky AS, $A''S$, BS, $B''S$, CS, $C''S$ a změřte jejich velikost. Výsledek měření zapište:
$|AS|$ = ... cm $|BS|$ = ... cm $|CS|$ = ... cm
$|A''S|$ = ... cm $|B''S|$ = ... cm $|C''S|$ = ... cm
Porovnejte výsledky. Co jste zjistili?

f) Změřte velikost úhlu, který svírají osy o_1 a o_2 a doplňte:
osa o_1 svírá s osou o_2 úhel o velikosti ...... °

g) Změřte velikosti úhlů. Výsledek měření zapište:
$|\angle ASA''|$ = ... °
$|\angle BSB''|$ = ... °
$|\angle CSC''|$ = ... °
Velikosti těchto úhlů porovnejte s velikostí úhlu, který svírají osy o_1, o_2. Co jste zjistili?

h) Porovnejte velikosti úseček a úhlů a doplňte znak (<, >, =):
$|AB|$ .... $|A''B''|$ $|\angle ABC|$ .... $|\angle A''B''C''|$
$|BC|$ .... $|B''C''|$ $|\angle BAC|$ .... $|\angle B''A''C''|$
$|AC|$ .... $|A''C''|$ $|\angle BCA|$ .... $|\angle B''C''A''|$

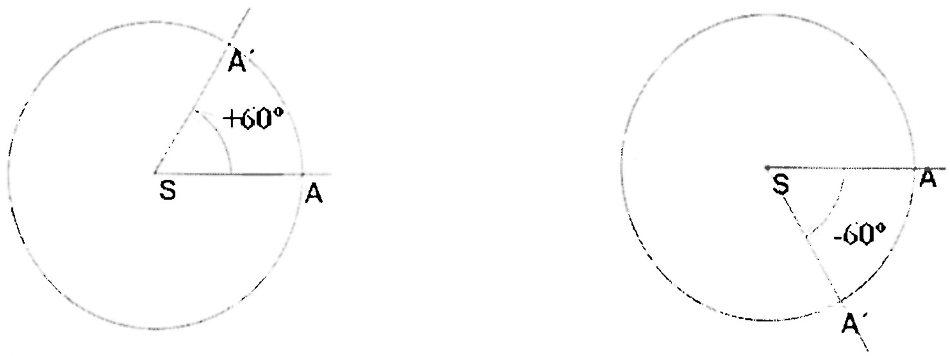
g) Jsou trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ a $A''B''C''$ shodné? Jedná se o přímou či nepřímou shodnost? Porovnejte všechny dvojice trojúhelníků, výsledek zapište do tabulky.

trojúhelníky	**shodné/neshodné**	**přímo/nepřímo**
ABC, $A'B'C'$		
$A'B'C'$, $A''B''C''$		
ABC, $A''B''C''$		

Pohyb, který vykonáme od trojúhelníku ABC k trojúhelníku $A''B''C''$ nazýváme **OTOČENÍ**.

Chceme-li něco (v geometrii či v běžném životě) otočit, ptáme se vždy **okolo čeho**, o jaký **úhel** je třeba daný útvar otočit.

<u>**Otočení**</u> je určeno: **středem otočení**
orientovaným úhlem —> **velikostí úhlu otočení**
—> **smyslem otočení**



Obr. 21

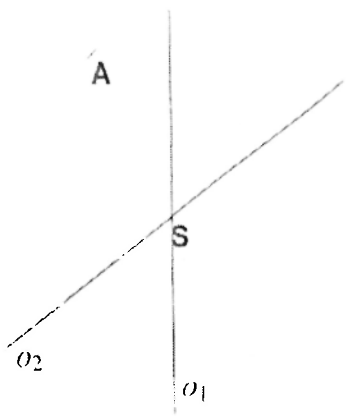
otočení v kladném smyslu
(proti směru hodinových ručiček)

otočení v záporném smyslu
(po směru hodinových ručiček)

Jestliže geometrický útvar **zobrazíme** postupně **pomocí dvou osových souměrností**, jejichž **osy** jsou **různoběžné** a **svírají úhel** α, získáme otočení:

- kolem **středu** S, který je **průsečíkem os** těchto osových souměrností
- o **úhel**, jehož: **velikost** je rovna **dvojnásobku úhlu** α, který svírají osy a jehož **orientace** je **od první ose ke druhé ose**

<u>**Zdůvodnění:**</u>



Obr. 22

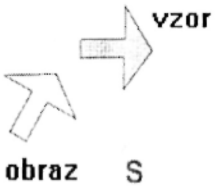
V **otočení** je

- obrazem úsečky úsečka s ní **shodná**,
- obrazem úhlu úhel s ním **shodný**,
- obrazem trojúhelníku trojúhelník s ním **shodný**.

Otočení je příkladem **shodného zobrazení**. Je to **přímá shodnost**.

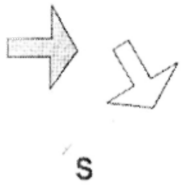
2. Jsou dány útvary a jejich obrazy v otočení kolem daného středu S. Vyznačte do obrázku orientovaný úhel α určující toto otočení. Zapište jeho velikost a smysl.

a)



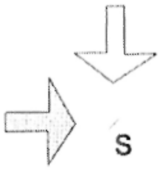
$\alpha =$ ..... °

b)



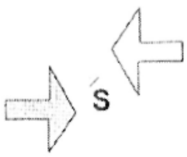
$\alpha =$ ..... °

c)



$\alpha =$ ..... °

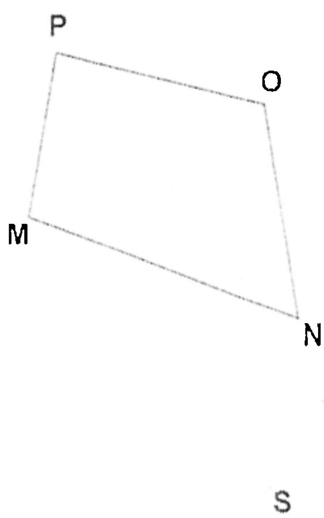
d)



$\alpha =$ ..... °

Obr. 23

3. Je dán čtyřúhelník $MNOP$ a bod S. Sestrojte obraz čtyřúhelníku $MNOP$ v otočení kolem bodu S o úhel -45° a označte jej $M'N'O'P'$.



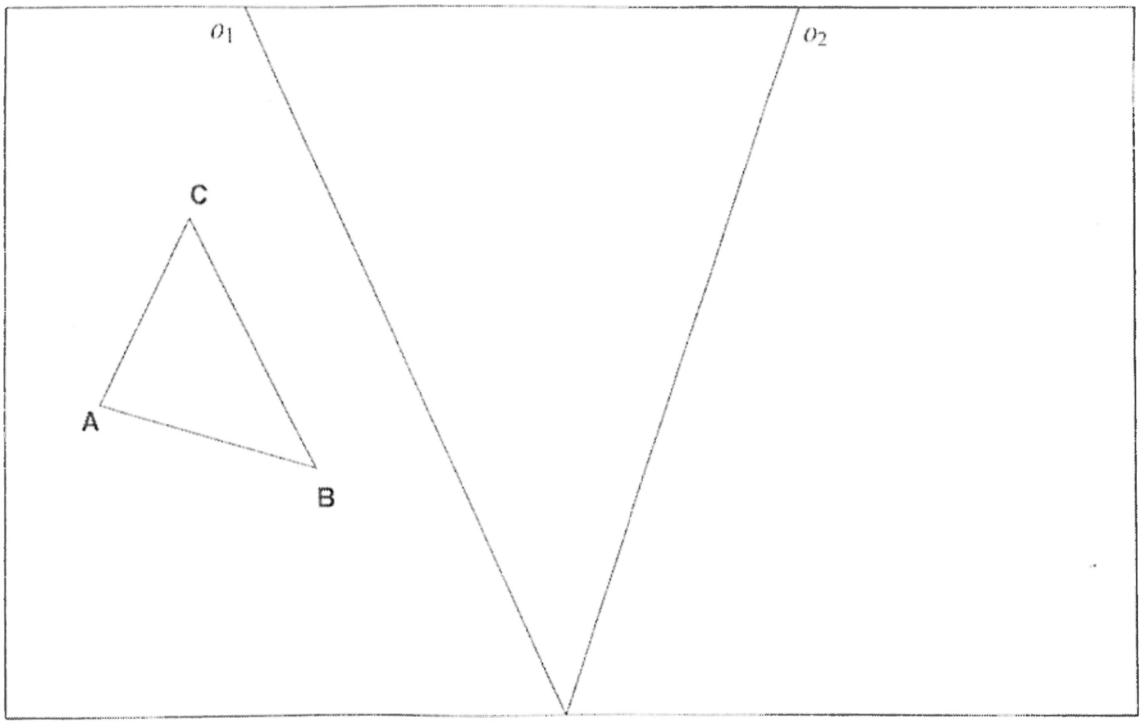
Obr. 24

4. Z listu papíru je vystřižen čtyřúhelník *KLMN* a jeho obraz v otočení podle vyznačeného středu S (viz přiložený model 5). Označte tento obraz $K''L''M''N''$ a vyznačte orientovaný úhel určující otočení. Najděte způsob, jak složit papír tak, abyste jedním vystřižením získali čtyřúhelník *KLMN* i jeho obraz $K''L''M''N''$.
Porovnejte výsledky se spolužáky. Co jste zjistili?

Domácí cvičení

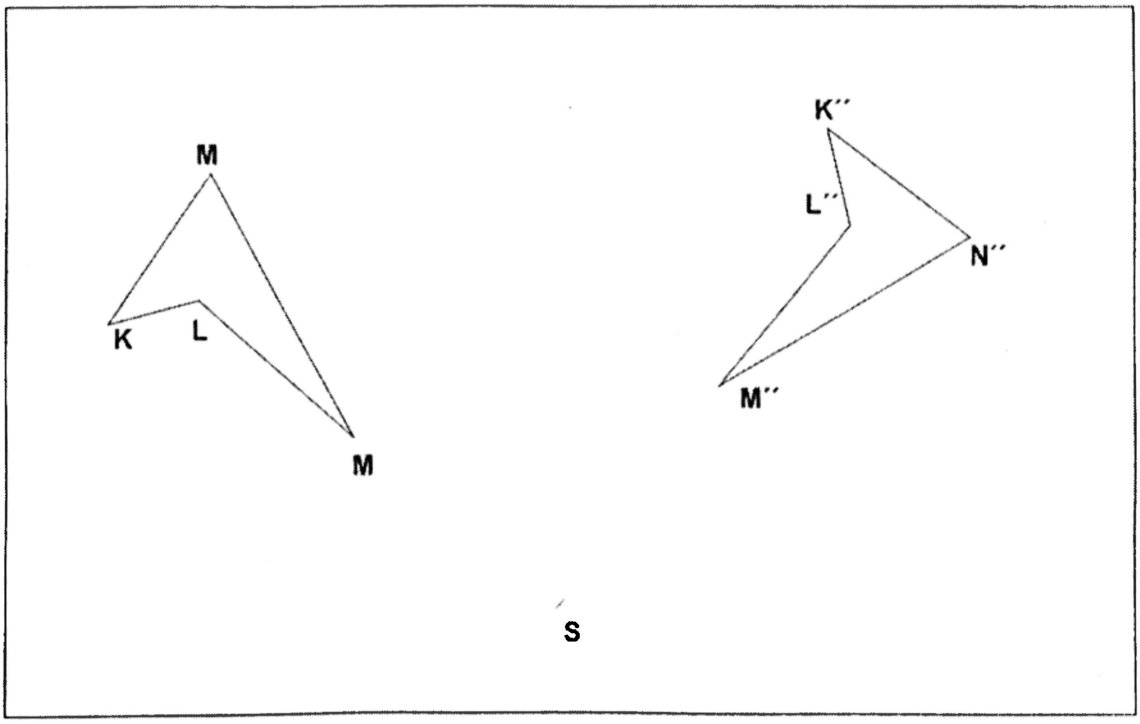
Situace, které jste v příkladech 1 a 4 modelovali pomocí překládaného papíru, doma narýsujte. Využijte návod a předkreslené zadání.

a) Je dán trojúhelník *ABC*. Zobrazte jej v osové souměrnosti podle osy o_1, tento obraz označte $A'B'C'$ a zobrazte jej znovu, tentokrát v osové souměrnosti podle osy o_2. Výsledný trojúhelník označte $A''B''C''$. Určete zobrazení, v němž trojúhelník *ABC* přejde rovnou na trojúhelník $A''B''C''$, a vyznačte v obrázku, čím je toto zobrazení určeno.



Obr. 25

b) Je dán čtyřúhelník $KLMN$ a jeho obraz v otočení kolem bodu S, čtyřúhelník $K''L''M''N''$. Vyznačte orientovaný úhel určující toto otočení a změřte jeho velikost. Narýsujte osy o_1 a o_2 dvou osových souměrností, jejichž postupným použitím získáme zadané otočení.

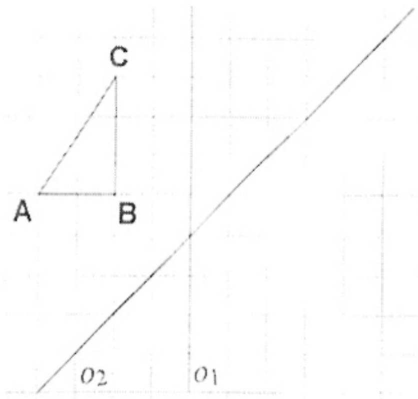


Obr. 26

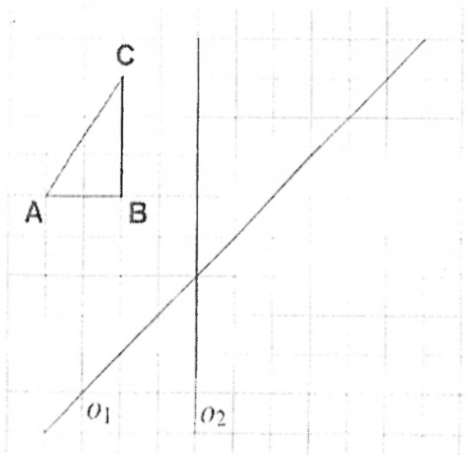
Jméno a příjmení:
Datum:

1. Ve čtvercové síti je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Zobrazte jej v osové souměrnosti podle osy o_1, tento jeho obraz označte $A'B'C'$, a pak jej zobrazte v osové souměrnosti podle osy o_2. Výsledný útvar označte $A''B''C''$.
Určete zobrazení, ve kterém přejde ΔABC rovnou do $\Delta A''B''C''$. V obrázku vyznačte, čím je toto zobrazení určeno.

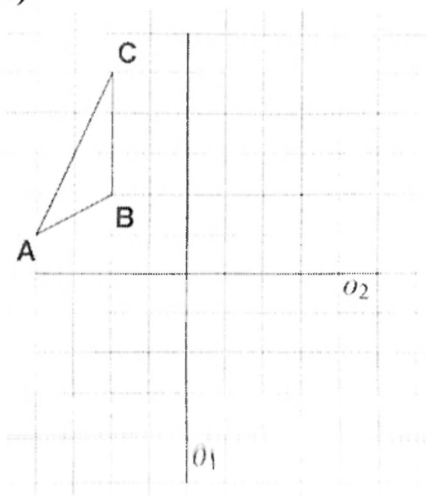
a)



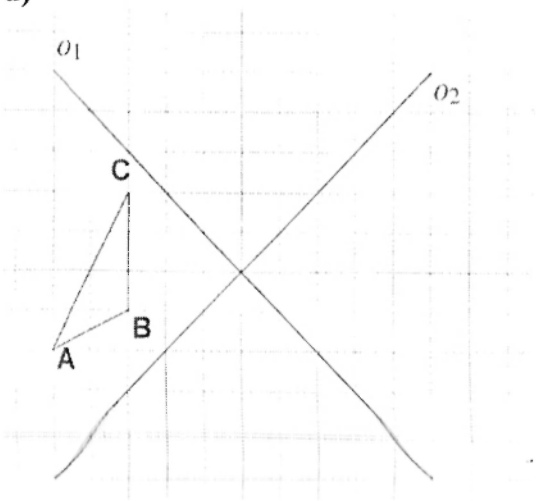
b)



c)



d)



Obr. 27

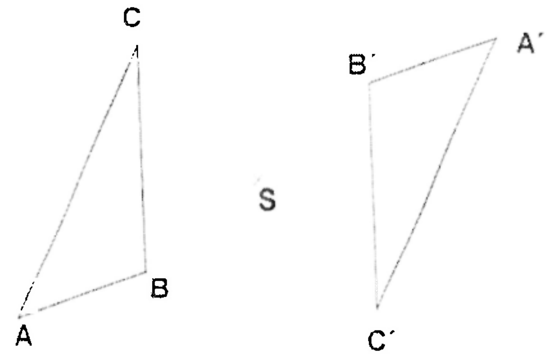
V případě c) a d) se jedná o otočení o .... ° kolem středu S, jež můžeme také považovat za .... se středem S.

Ve **středové souměrnosti** je
- obrazem úsečky úsečka s ní **shodná**,
- obrazem úhlu úhel s ním **shodný**,
- obrazem trojúhelníku trojúhelník s ním **shodný**.

Středová souměrnost je příkladem **shodného zobrazení**. Je to **přímá shodnost**.

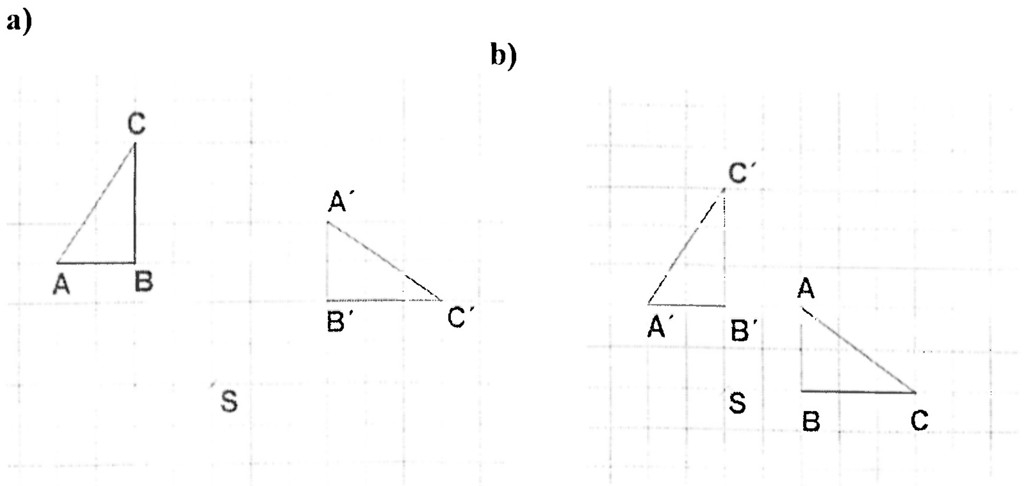
Jestliže nějaký geometrický útvar **zobrazíme** postupně **pomocí dvou osových souměrností**, jejichž **osy** jsou **kolmé**, získáme **otočení o 180°** kolem průsečíku os neboli **středovou souměrnost,** jejíž **střed** leží **v průsečíku os.**

2. Je dán trojúhelník ABC a jeho obraz $A'B'C'$ a bod S. V jakém zobrazení přejde trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$? Lze toto zobrazení získat použitím dvou osových souměrností? Jestliže ano, najděte jejich osy.



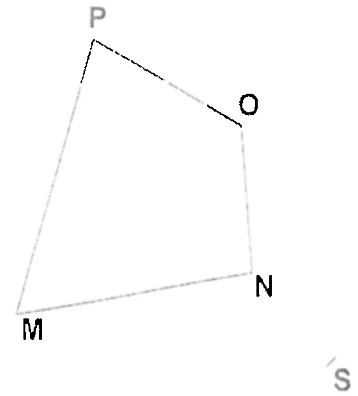
Obr. 28

3. Ve čtvercové síti je dán trojúhelník ABC a jeho obraz $A''B''C''$ v otočení kolem středu S. Vyznačte v obrázku orientovaný úhel určující toto otočení a určete jeho velikost. Najděte osy dvou osových souměrností, jejichž opakovaným použitím lze získat dané otočení.

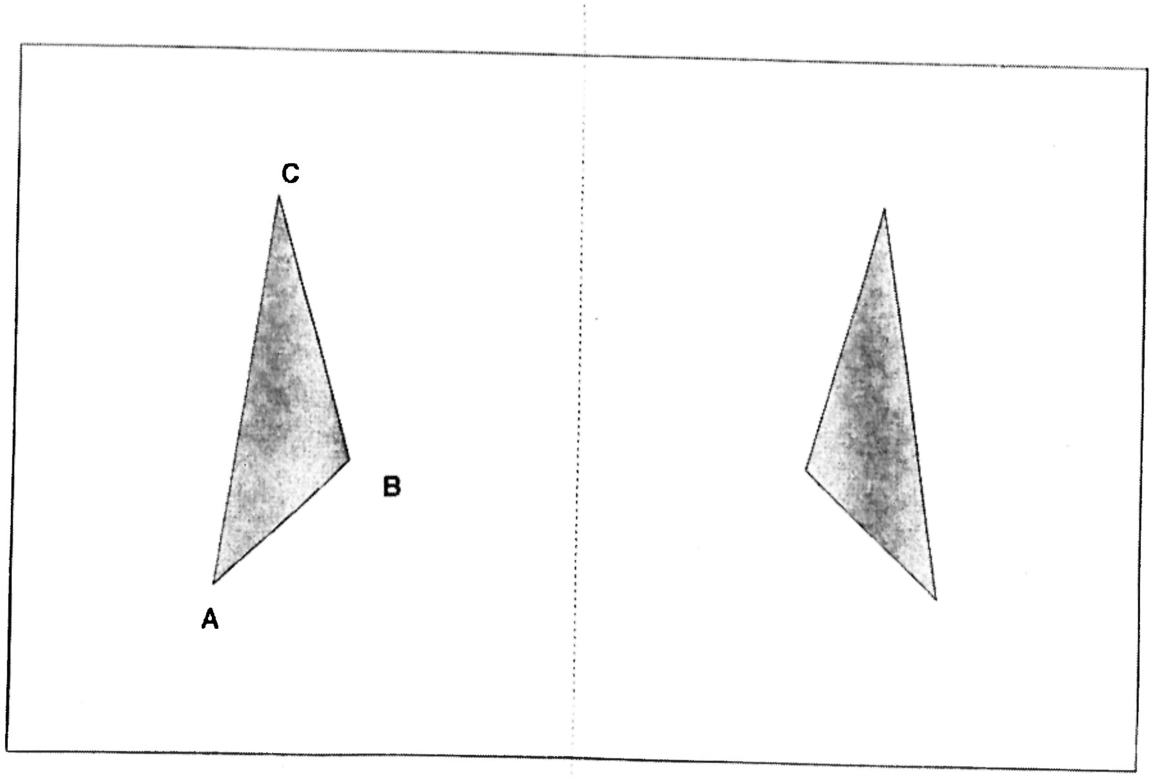


Obr. 29

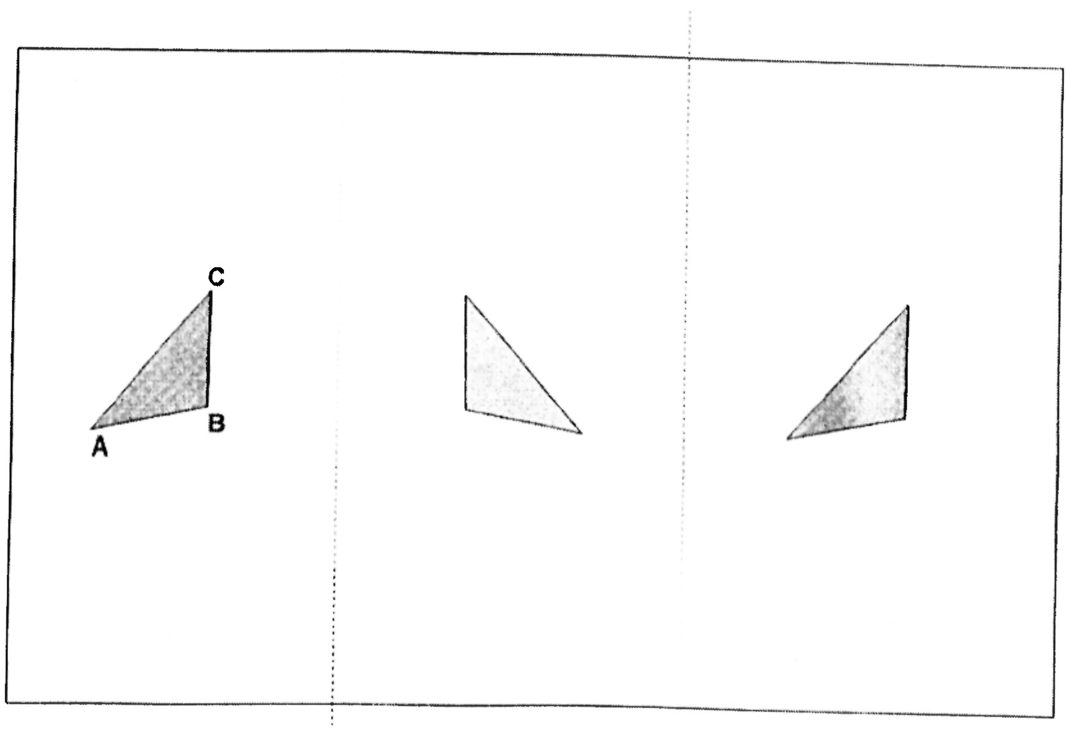
4. Je dán čtyřúhelník $MNOP$ a bod S. Zobrazte tento čtyřúhelník v otočení kolem bodu S o -60° a tento jeho obraz označte $M'N'O'P'$. Čtyřúhelník $M'N'O'P'$ zobrazte v otočení kolem bodu S o +90° a výsledný útvar označte $M''N''O''P''$. Existuje zobrazení, které převádí čtyřúhelník $MNOP$ rovnou na čtyřúhelník $M''N''O''P''$? Jestliže ano, pojmenujte je a vyznačte, čím je toto zobrazení určeno.



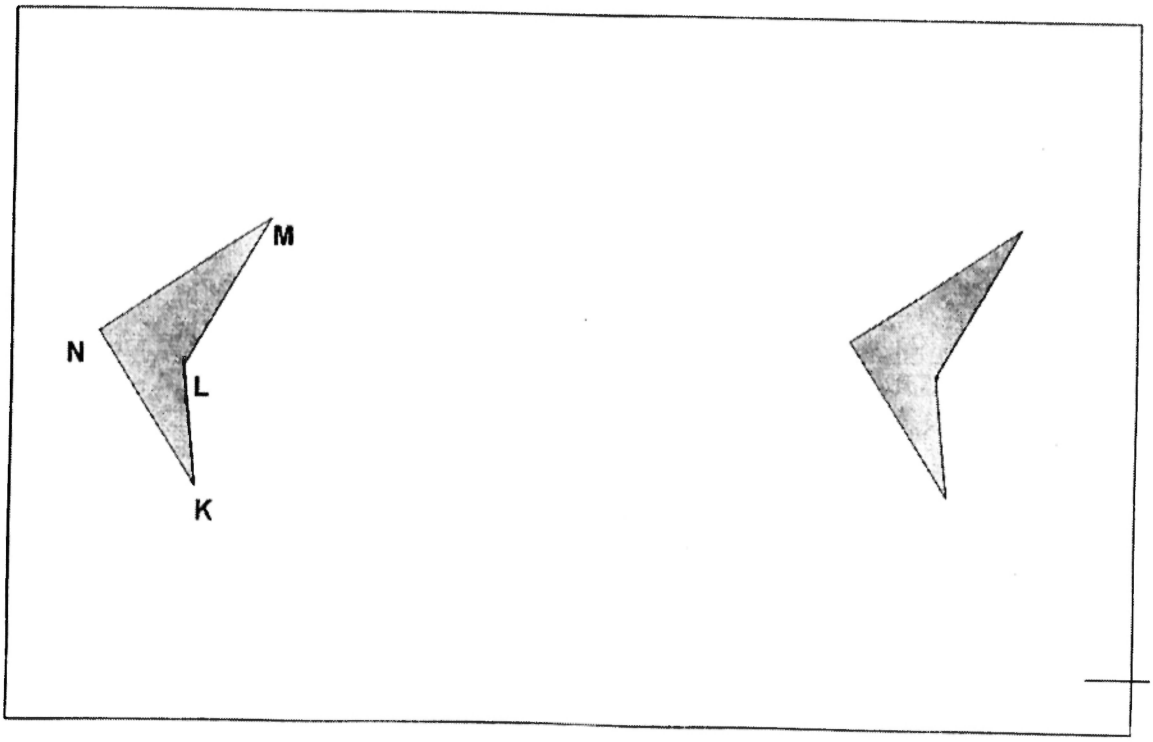
Obr. 30



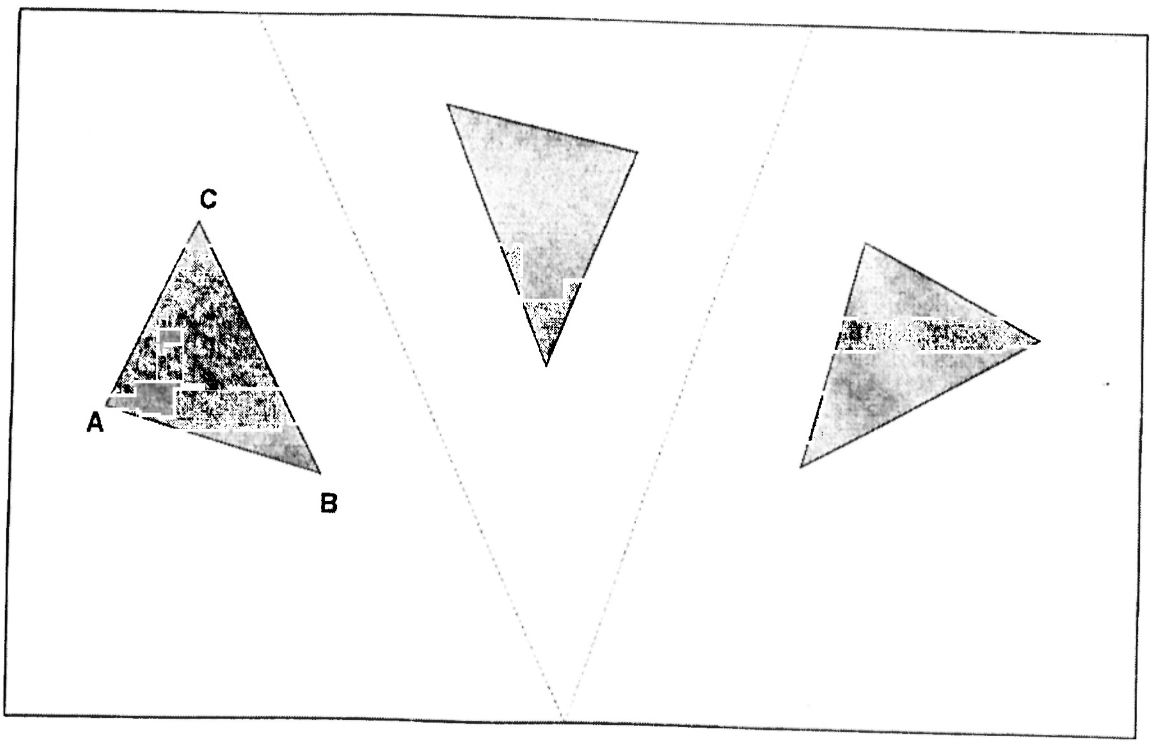
Model 1 (čárkované čáry značí přehyby papíru, šedá plocha pak vystřiženou část)



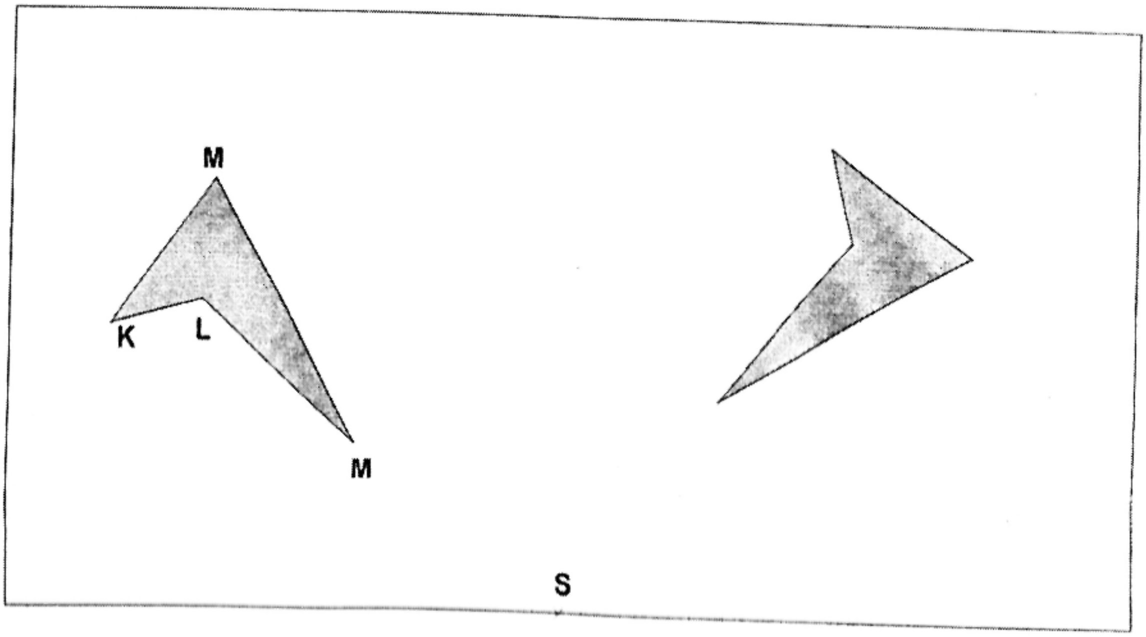
Model 2



Model 3

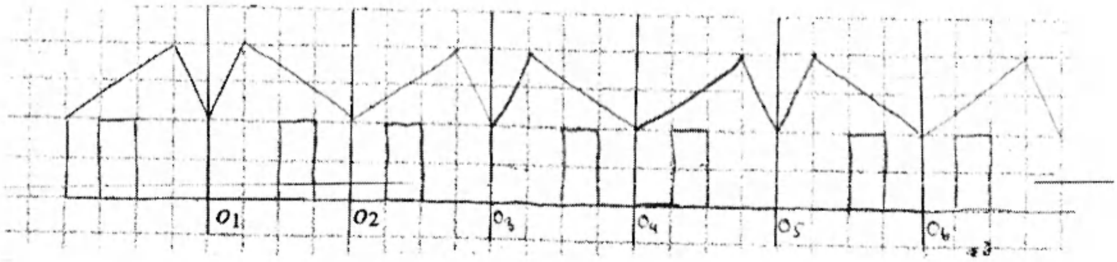


Model 4

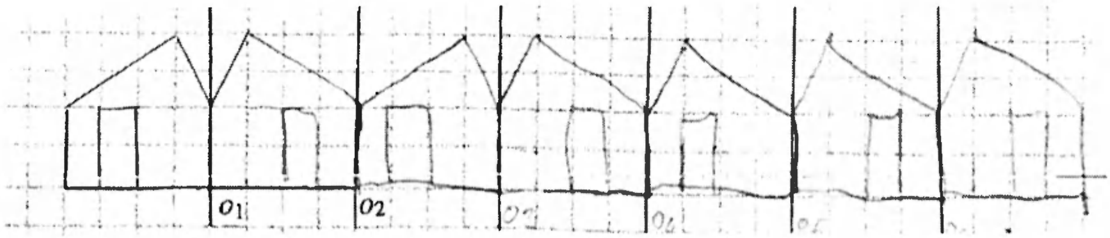


Model 5

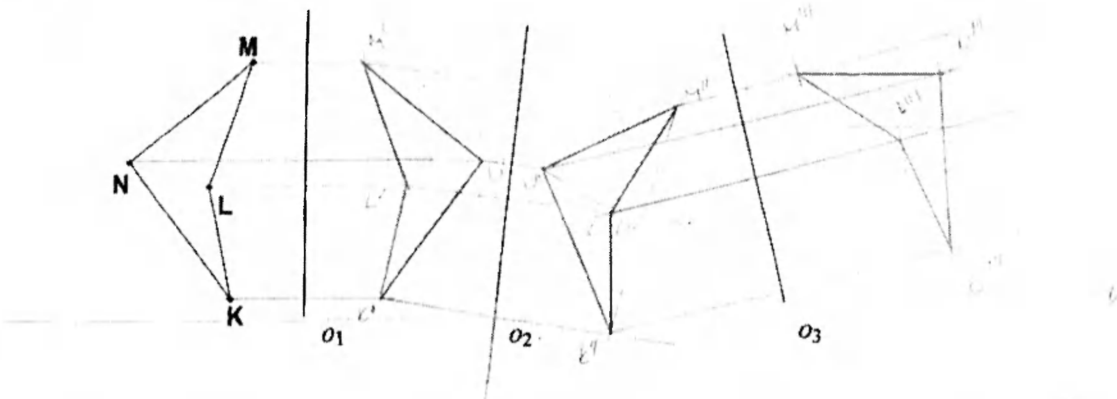
Příloha II



Obr. 1

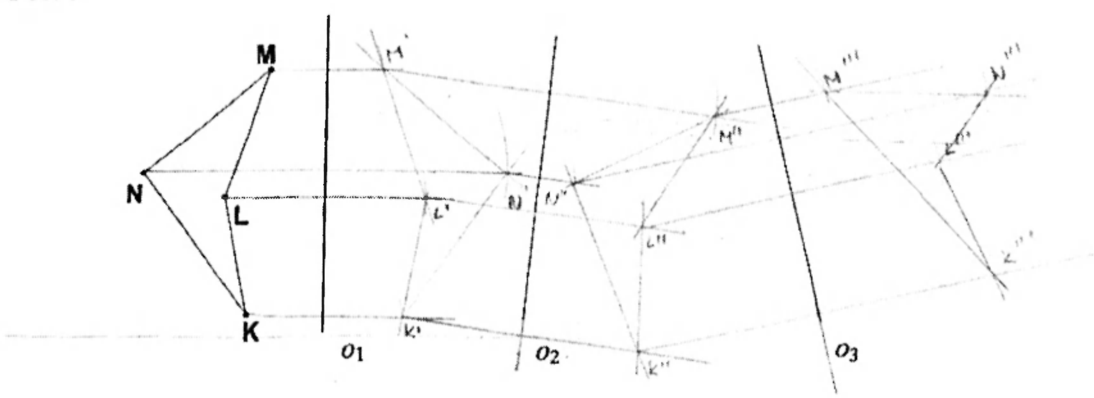


Obr. 2



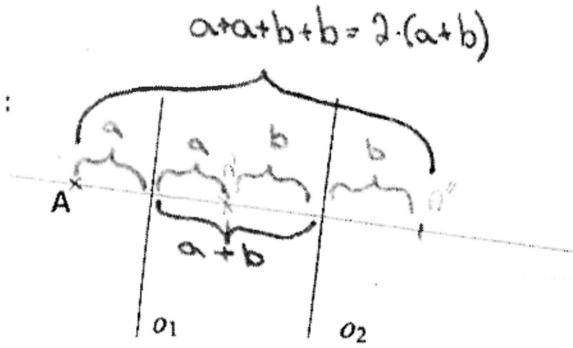
čtyřúhelníky	přímo / nepřímo shodné
KLMN, K L M N	nepřímo
K L M N, K L M N	nepřímo
KLMN, K L M N	přímo
K L M N, K L M N	nepřímo

Obr. 3



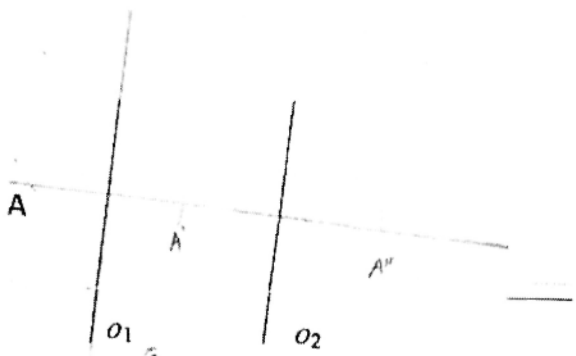
Obr. 4

Zdůvodnění:

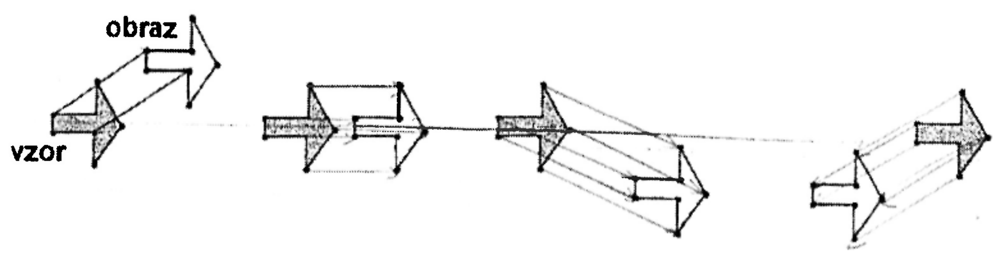


Obr. 5

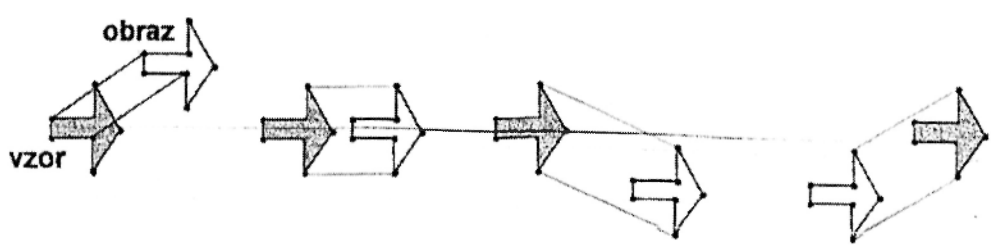
Zdůvodnění:



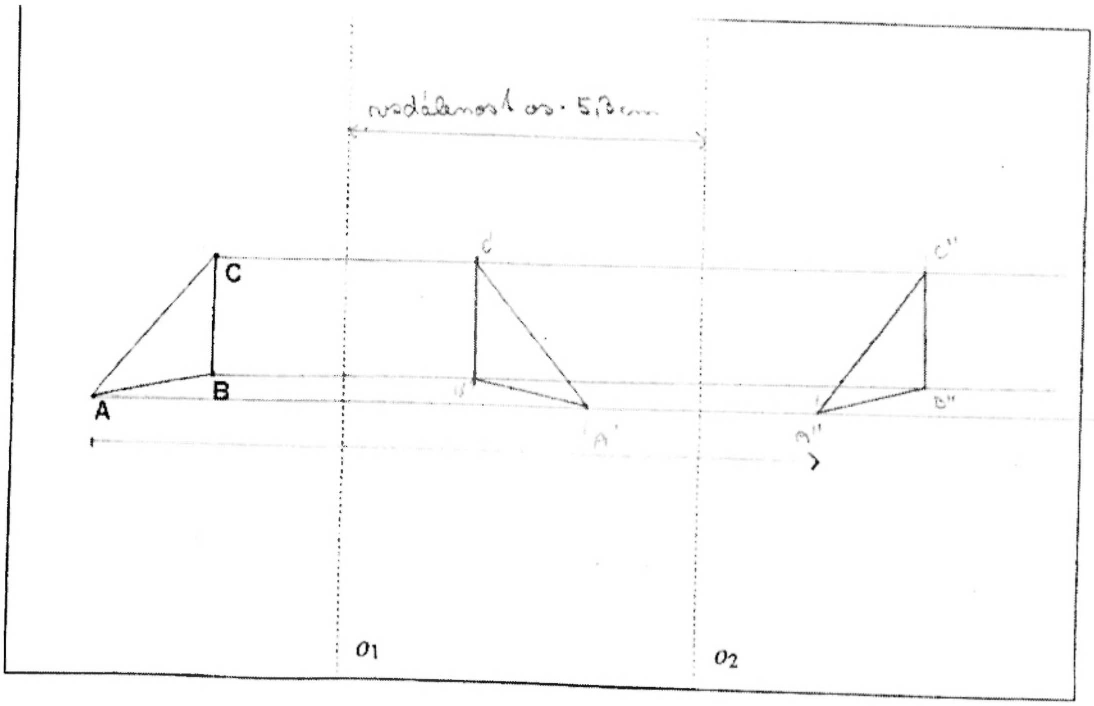
Obr. 6



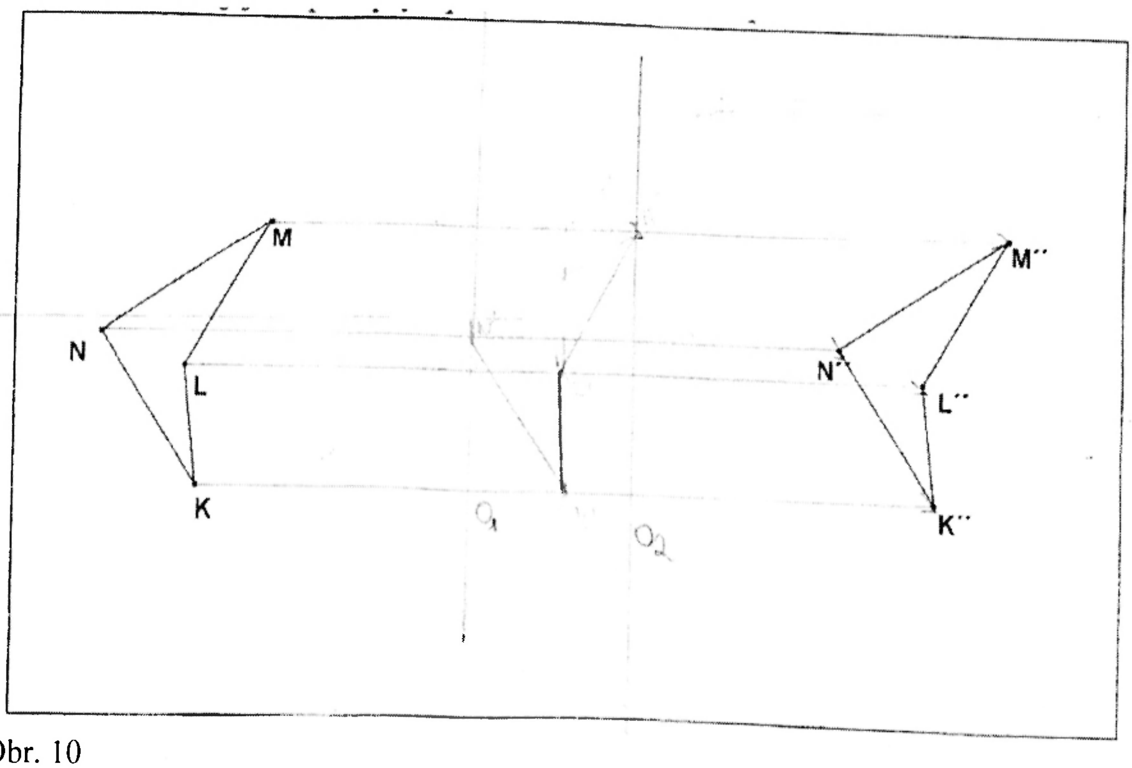
Obr. 7



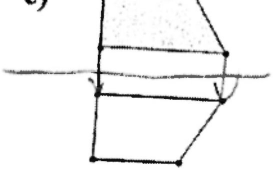
Obr. 8



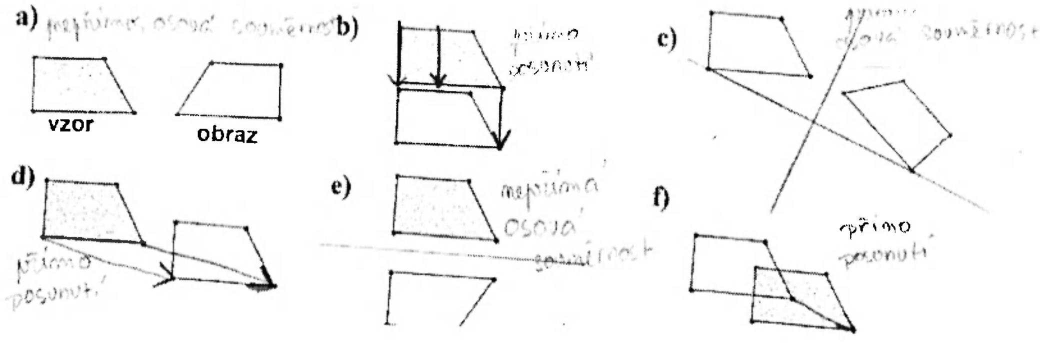
Obr. 9



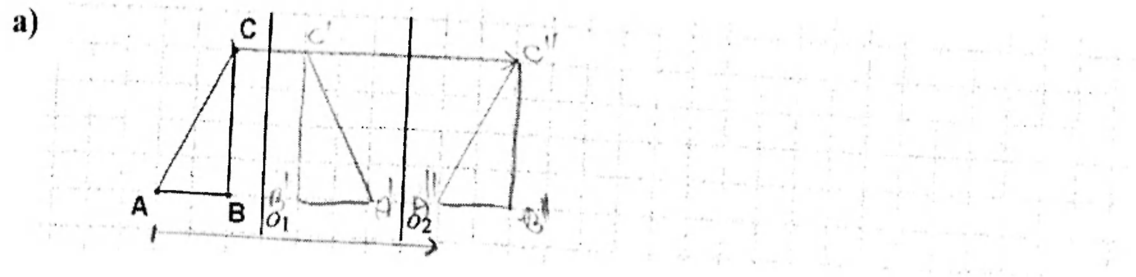
Obr. 10



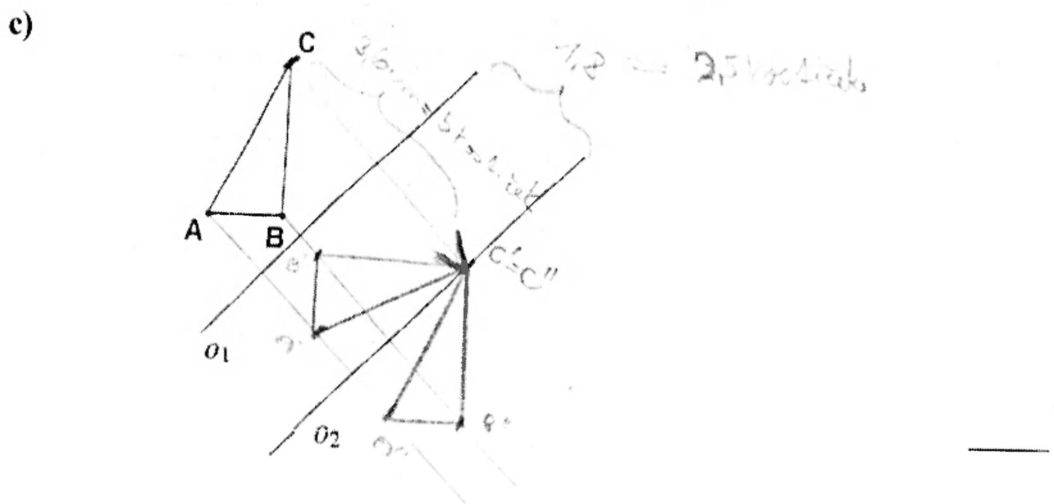
Obr. 11



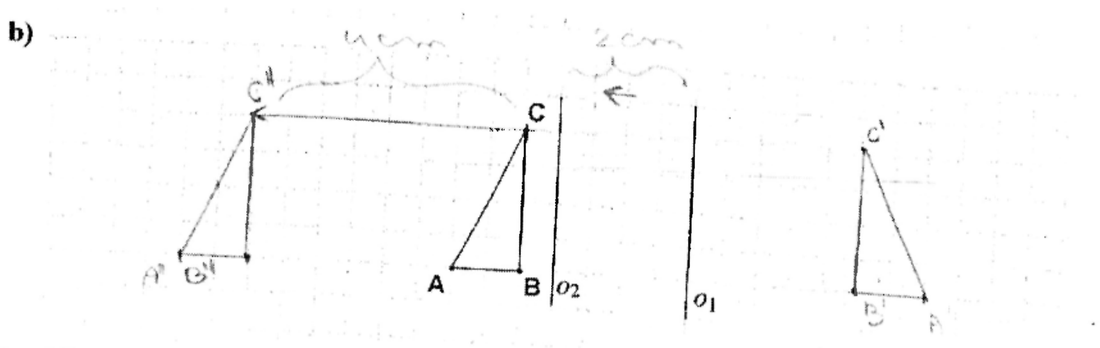
Obr. 12



Obr. 13

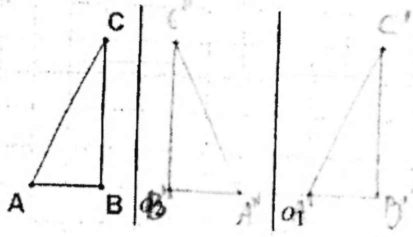


Obr. 14

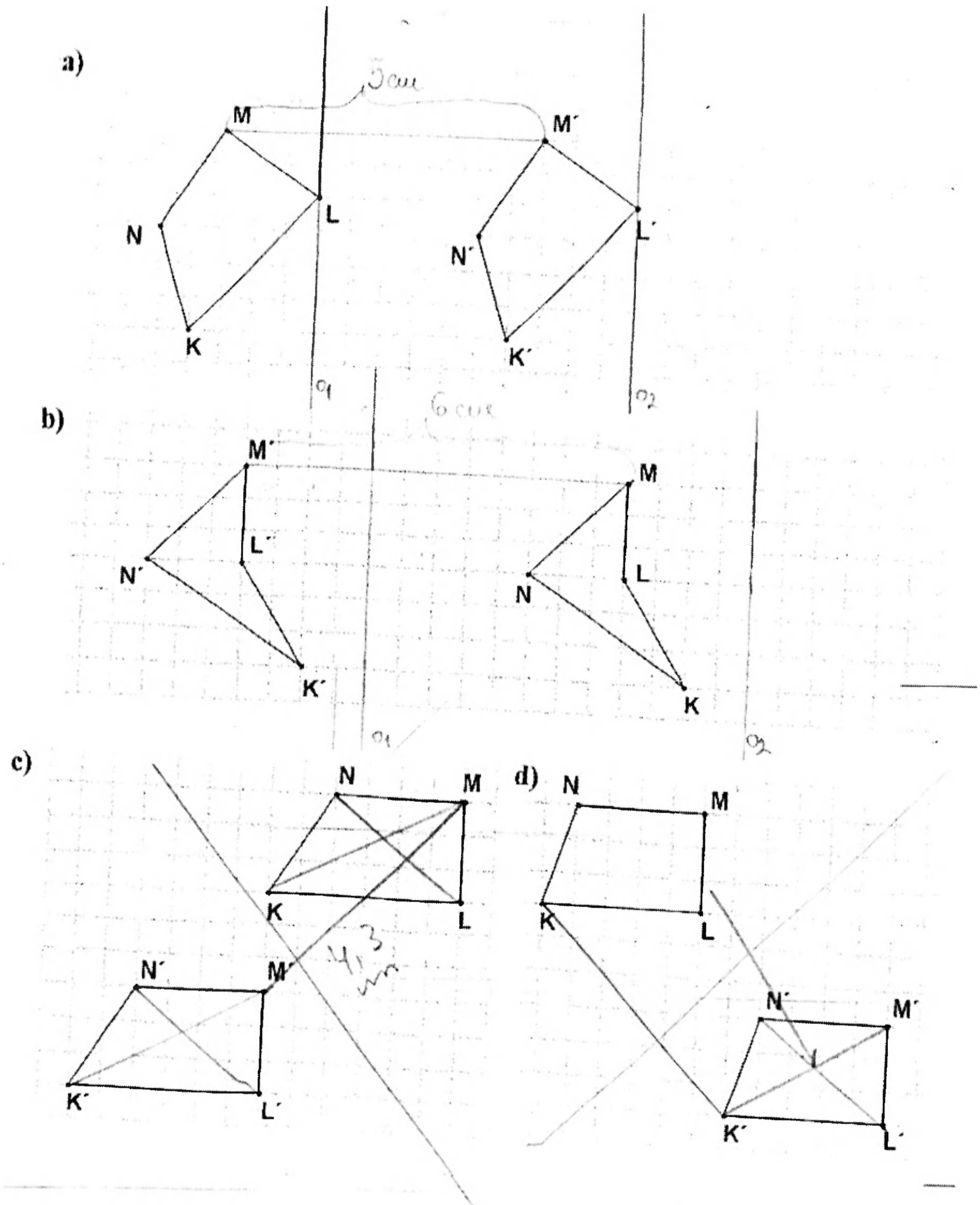


Obr. 15

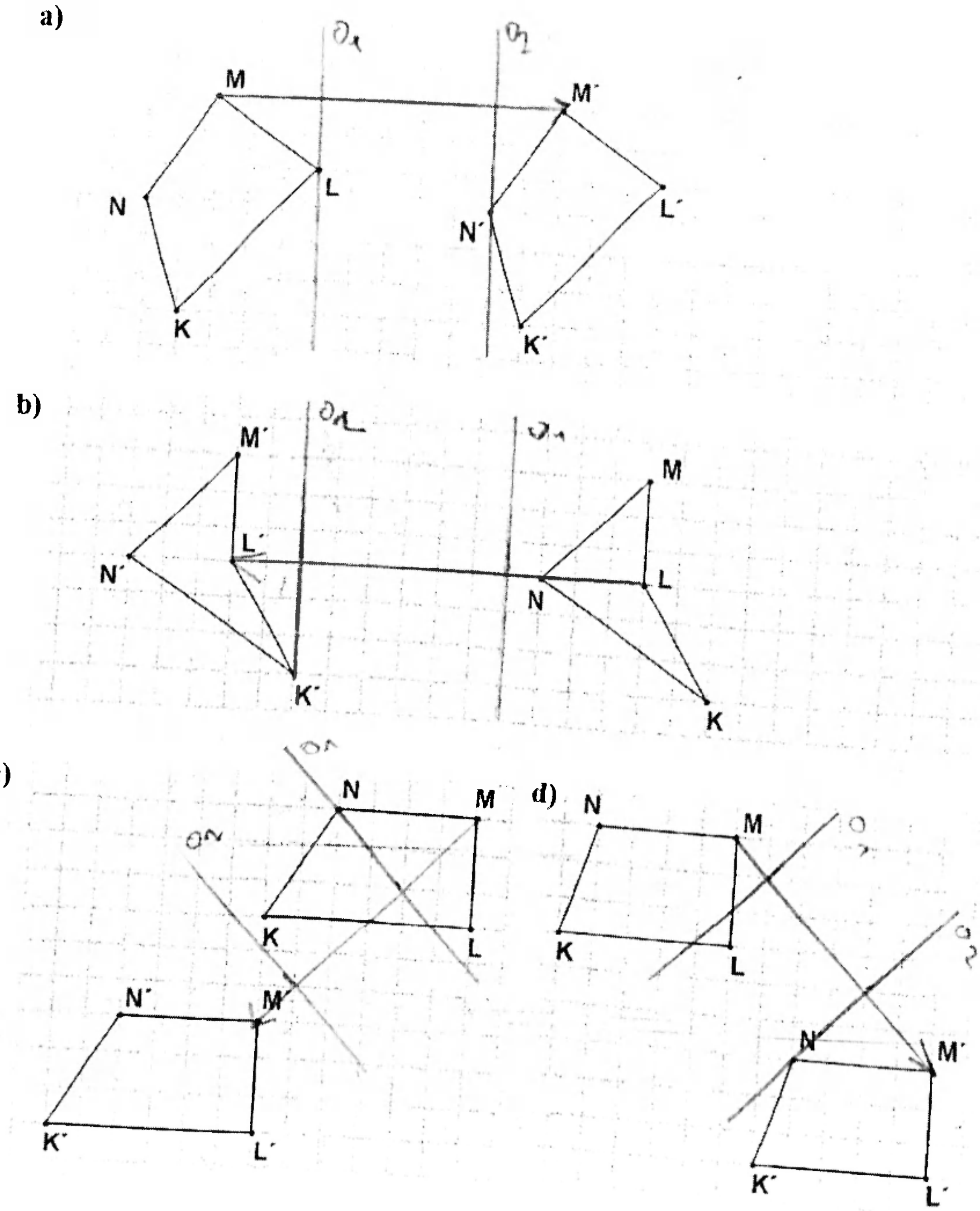
b)



Obr. 16

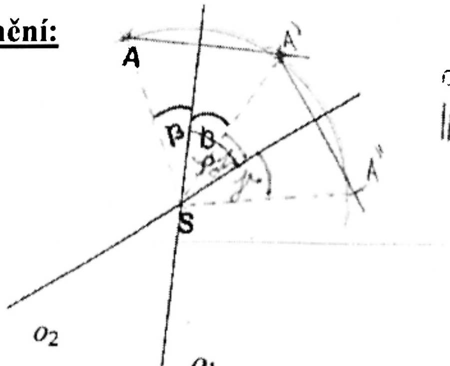


Obr. 17



Obr. 18

Zdůvodnění:

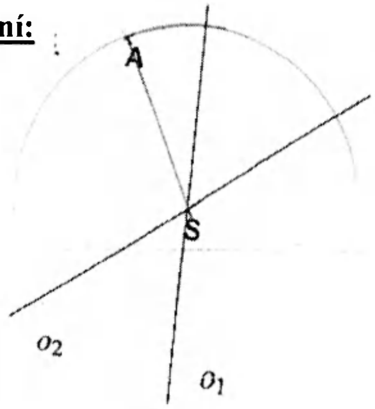


$\alpha = \beta + \gamma$

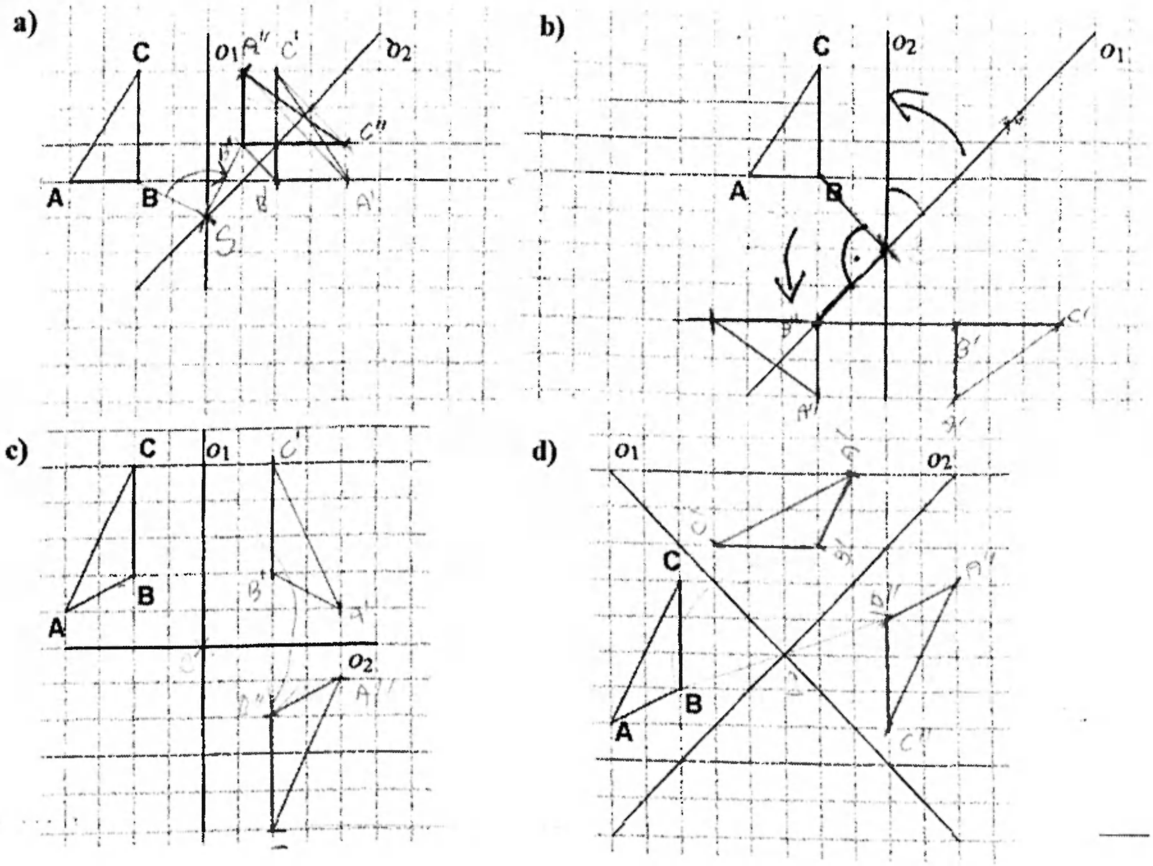
$|ASA''| = \beta + \beta + \gamma + \gamma = 2\cdot\beta + 2\cdot\gamma = 2\cdot(\beta + \gamma)$

Obr. 19

Zdůvodnění:

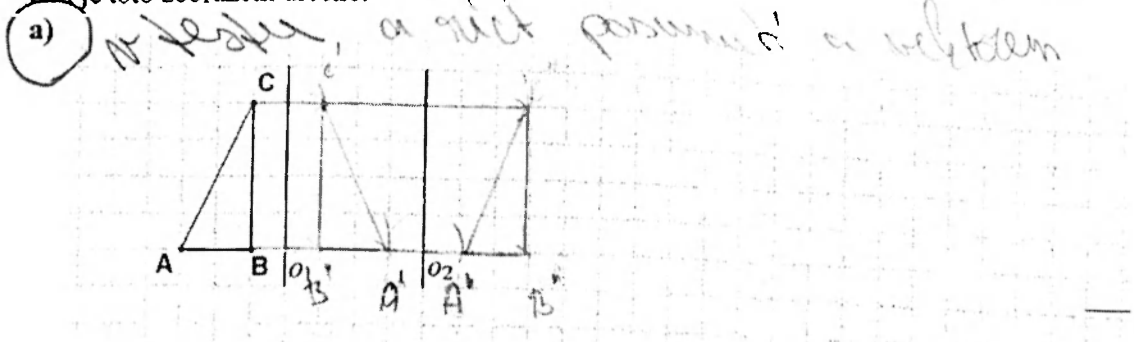


Obr. 20



Obr. 21

čím je toto zobrazení určeno.



Obr. 22

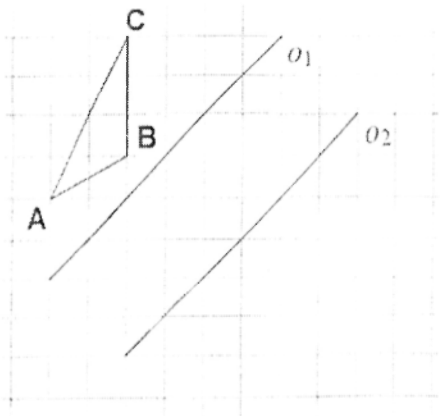
Příloha III

Varianta A

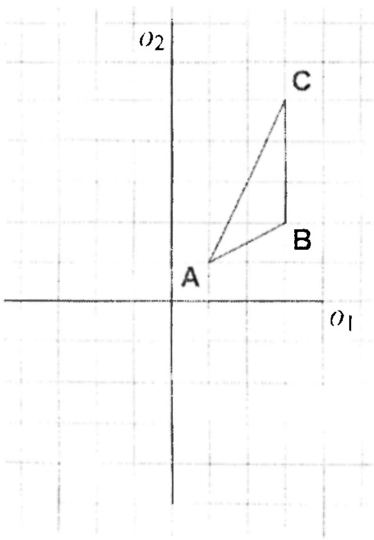
Jméno a příjmení:
Třída:
Datum:

A1. Ve čtvercové síti je dán trojúhelník ABC a přímky o_1, o_2. Zobrazte trojúhelník ABC v osové souměrnosti podle osy o_1, tento jeho obraz označte $A'B'C'$ a zobrazte jej v osové souměrnosti podle osy o_2. Výsledný útvar označte $A''B''C''$. Zapište pod obrázek název zobrazení, v němž trojúhelník ABC přejde rovnou do trojúhelníku $A''B''C''$. V obrázku vyznačte, čím je toto zobrazení určeno.

a)



b)

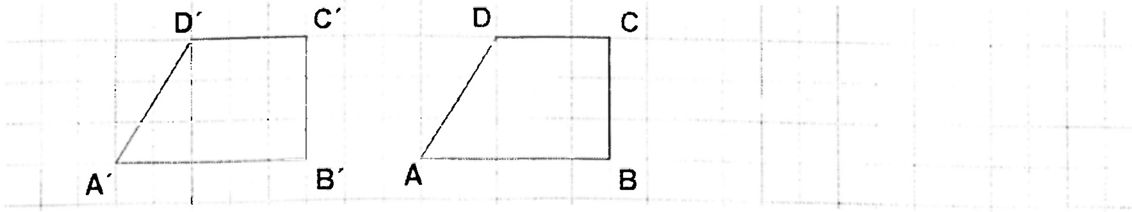


zobrazení se nazývá:

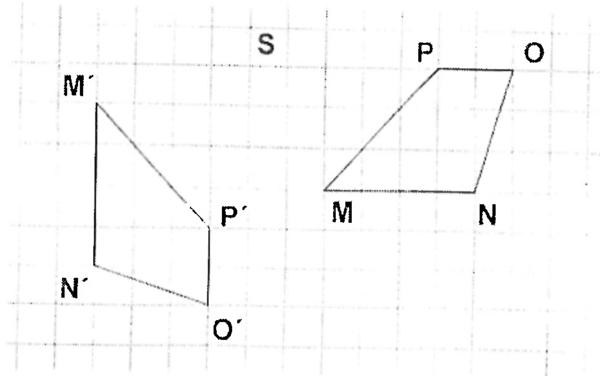
a) ....

b) ....

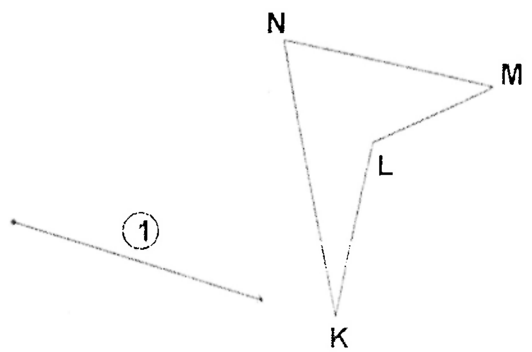
A2. Ve čtvercové síti je dán čtyřúhelník $ABCD$ a jeho obraz $A'B'C'D'$ v posunutí. Vyznačte do obrázku vektor určující toto posunutí. Najděte osy o_1, o_2 dvou osových souměrností, jejichž postupným použitím vznikne dané posunutí.



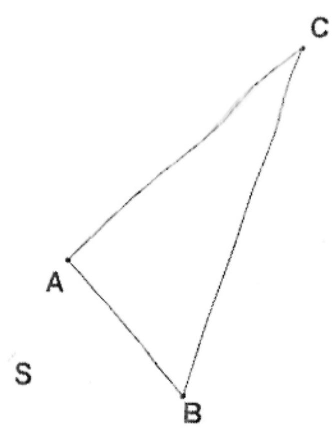
A3. Je dán čtyrúhelník $MNOP$ a jeho obraz $M'N'O'P'$ v otočení kolem středu S. Vyznačte v obrázku orientovaný úhel určující toto otočení a určete jeho velikost. Najděte osy o_1, o_2 dvou osových souměrností, jejichž postupným použitím lze získat dané otočení.



A4. Je dán čtyřúhelník $KLMN$ a vektor $\underline{1}$. Zobrazte čtyřúhelník $KLMN$ v posunutí daném vektorem $\underline{1}$. Tento jeho obraz označte $K'L'M'N'$.



A5. Je dán trojúhelník ABC a bod S. Zobrazte tento trojúhelník v otočení o +80° kolem bodu S a tento jeho obraz označte $A'B'C'$.



A6. Jaké znáte nepřímo shodné zobrazení (napište alespoň jeden příklad)?

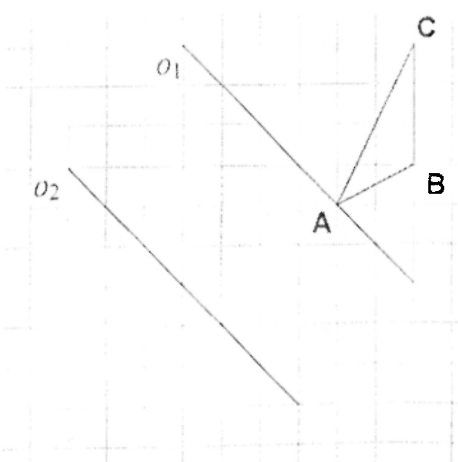
....

Varianta B

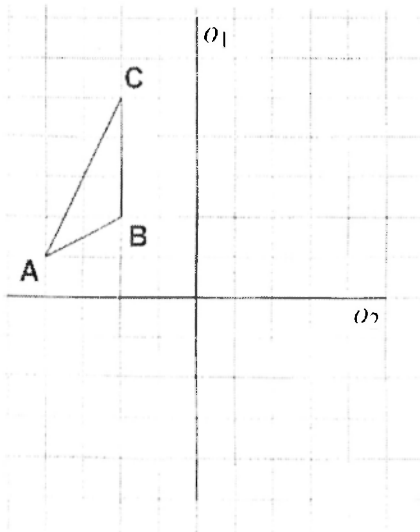
Jméno a příjmení:
Třída:
Datum:

B1. Ve čtvercové síti je dán trojúhelník ABC a přímky o_1, o_2. Zobrazte trojúhelník ABC v osové souměrnosti podle osy o_1, tento jeho obraz označte $A'B'C'$ a zobrazte jej v osové souměrnosti podle osy o_2. Výsledný útvar označte $A''B''C''$. Zapište pod obrázek název zobrazení, v němž trojúhelník ABC přejde rovnou do trojúhelníku $A''B''C''$. V obrázku vyznačte, čím je toto zobrazení určeno.

a)



b)

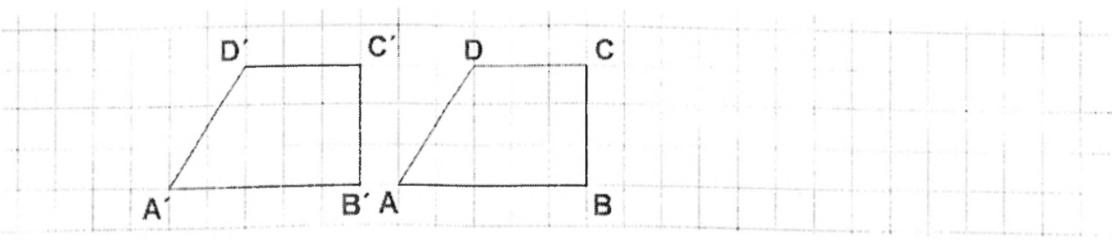


zobrazení se nazývá:

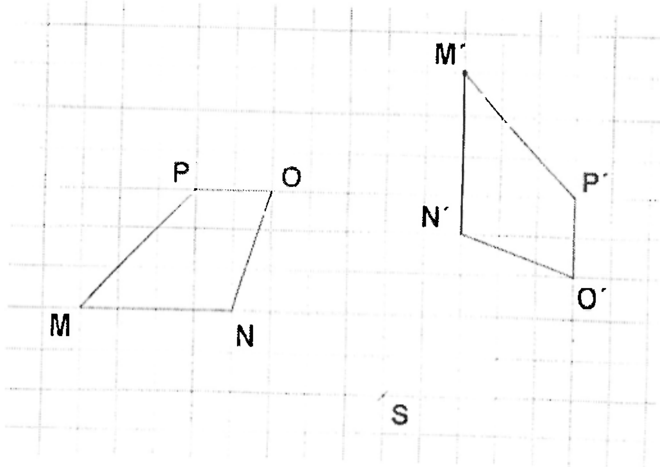
a) ....

b) ....

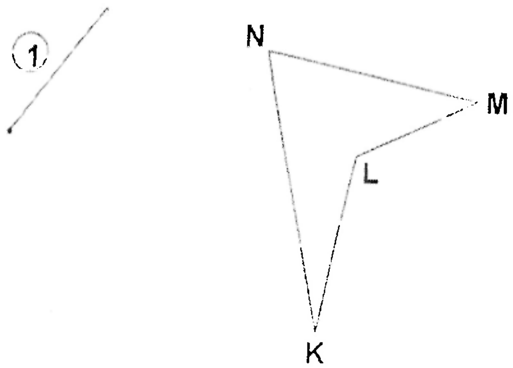
B2. Ve čtvercové síti je dán čtyřúhelník $ABCD$ a jeho obraz $A'B'C'D'$ v posunutí. Vyznačte do obrázku vektor určující toto posunutí. Najděte osy o_1, o_2 dvou osových souměrností, jejichž postupným použitím vznikne dané posunutí.



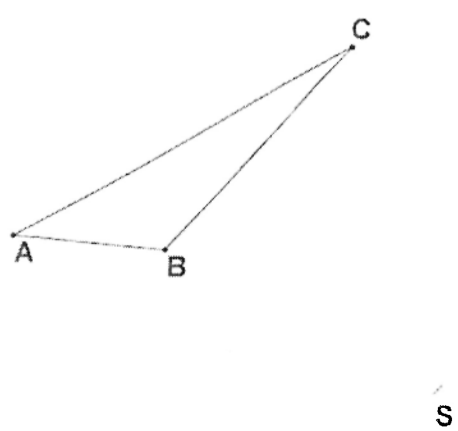
B3 Je dán čtyrúhelník $MNOP$ a jeho obraz $M'N'O'P'$ v otočení kolem středu S. Vyznačte v obrázku orientovaný úhel určující toto otočení a určete jeho velikost. Najděte osy o_1, o_2 dvou osových souměrností, jejichž postupným použitím lze získat dané otočení.



B4. Je dán čtyřúhelník $KLMN$ a vektor $\underline{1}$. Zobrazte čtyřúhelník $KLMN$ v posunutí daném vektorem $\underline{1}$. Tento jeho obraz označte $K'L'M'N'$.



B5. Je dán trojúhelník ABC a bod S. Zobrazte tento trojúhelník v otočení o -60° kolem bodu S a tento jeho obraz označte $A'B'C'$.

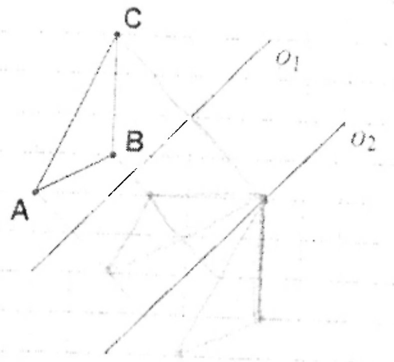


B6. Jaké znáte přímo shodné zobrazení (napište alespoň jeden příklad)?

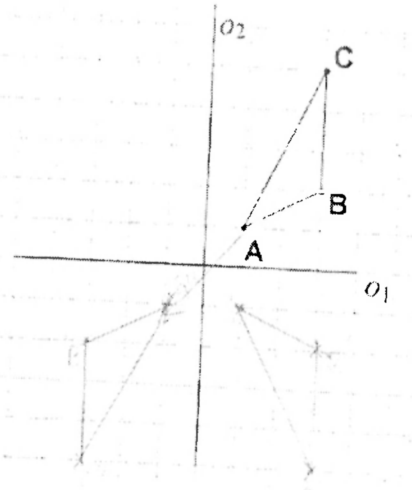
....

Příloha IV

a)



b)



zobrazení se nazývá:

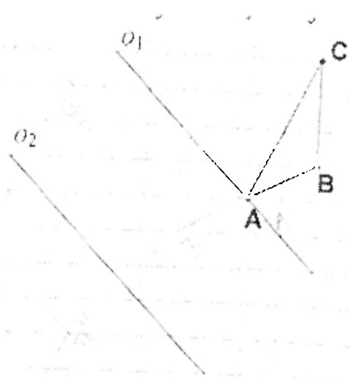
a) ....

b) otáčení
je ~~[illegible]~~ ....

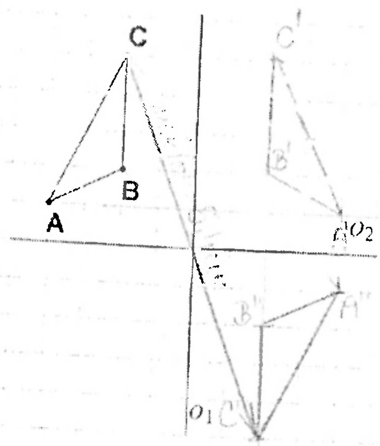
Obr. 1

Obr. 2

a)



b)



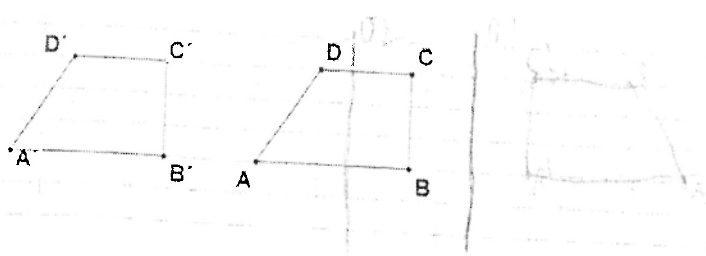
zobrazení se nazývá:

a) ....

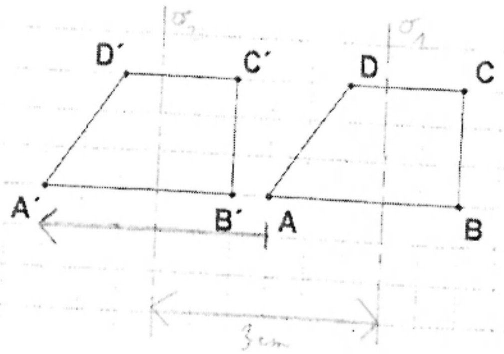
b) přímo-shodné / zobrazení – můžeme otočit

Obr. 3

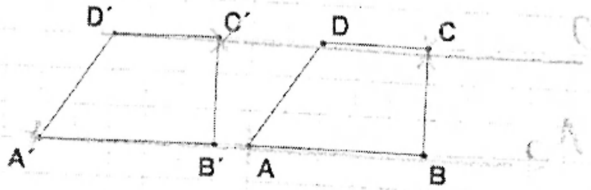
Obr. 4



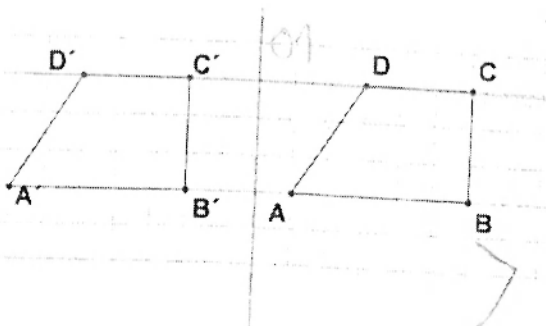
Obr. 5



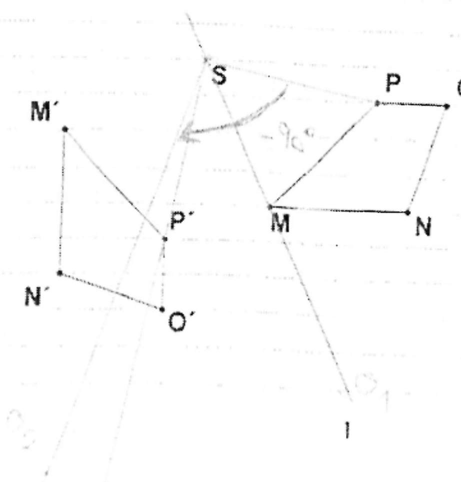
Obr. 6



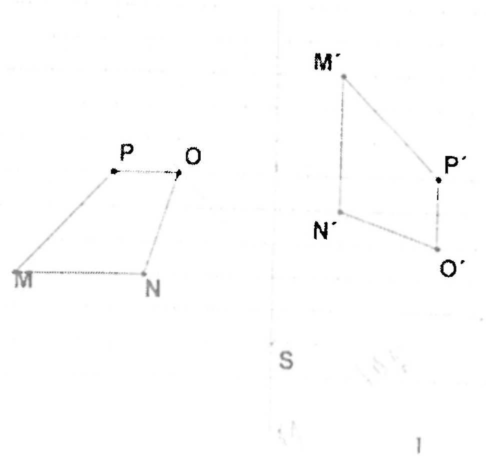
Obr. 7



Obr. 8

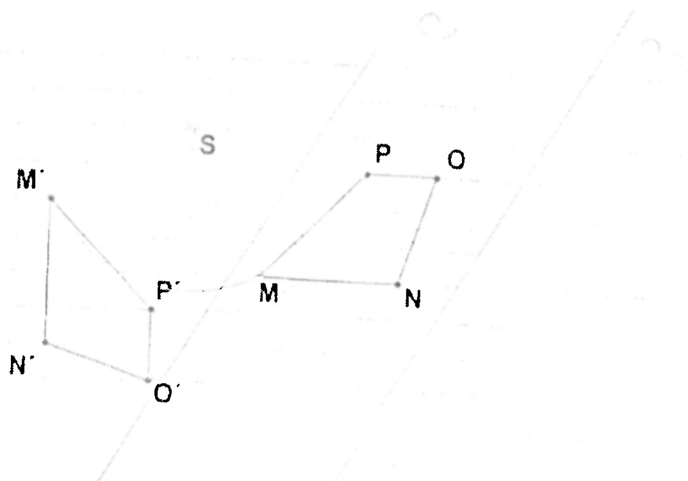


Obr. 9

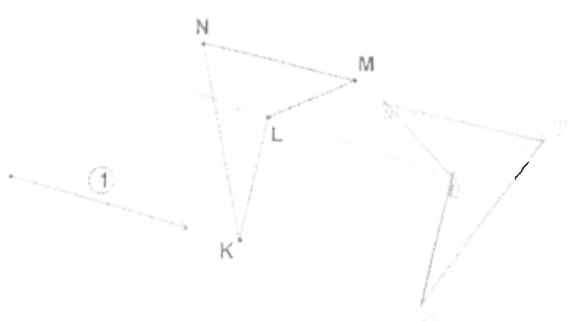


velikost úhlu otočení [illegible] je – 150°

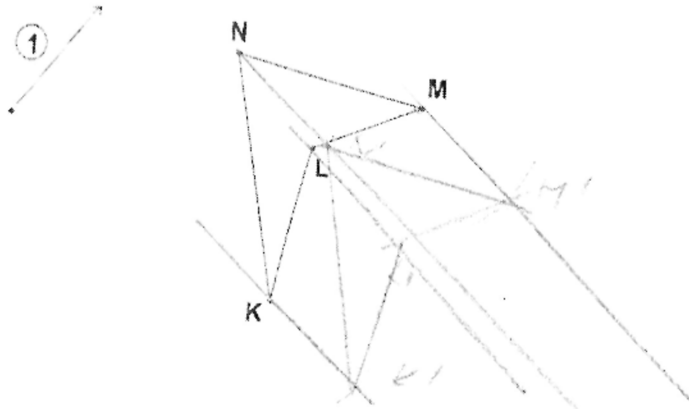
Obr. 10



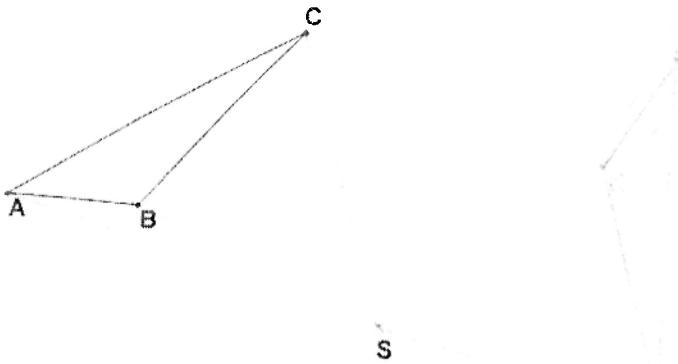
Obr. 11



Obr. 12

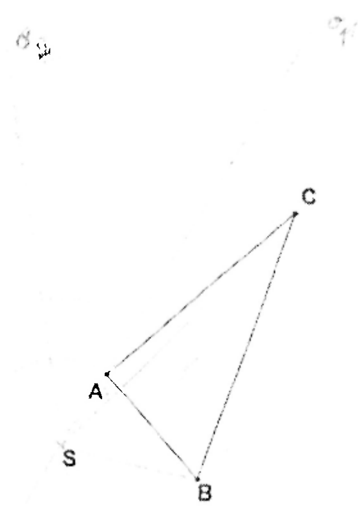


Obr. 13



6. Jaké znáte přímo shodné zobrazení (napište alespoň jeden příklad)?

Obr. 14



Obr. 15

6. Jaké znáte přímo shodné zobrazení (napište alespoň jeden příklad)?

osová souměrnost, středová souměrnost, otočení

Obr. 16

6. Jaké znáte přímo shodné zobrazení (napište alespoň jeden příklad)?

posunutí, otočení, osová souměrnost, ale až [illegible] obraz - obraz ~~vzor - vzor~~ podle O, S ke vzoru

Obr. 17

6. Jaké znáte nepřímo shodné zobrazení (napište alespoň jeden příklad)?

osová souměrnost - [illegible] (1, 3, 5, ...)

Obr. 18