Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Kruhová inverze a její využití

Circle inversion and its utilization

autor práce: Petr Vach

vedoucí práce: RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.

Praha 2011

Prohlašuji, že jsem tuto práci sepsal samostatně pod vedením RNDr. Jaroslava Zhoufa, Ph.D. Všechny poznatky jsou čerpány z odborné literatury a psány na úrovni středoškolské matematiky. Seznam odborné literatury je uveden na konci této práce.

V Praze dne 8.4.2011 *Petr Vach*

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu RNDr. Jaroslavu Zhoufovi, Ph.D. za jeho pomoc při psaní této práce. Především za jeho připomínky, postřehy a rady, které mi velice pomohly práci dodělat až do konce.

Dále bych chtěl poděkovat svému příteli Mgr. Martinu Scholtzovi za jeho pomocné rady nejen při hledání správných výsledků a odvozování rovností v této práci.

Abstrakt

Cílem této práce je seznámit čtenáře se zobrazením jménem kruhová inverze. Definice tohoto zobrazení hned v úvodu a následný popis včetně důkazů všech vlastností tohoto zobrazení ve dvou rovinách, a sice syntetické a analytické s komplexní proměnnou, připraví čtenáře pro řešení příkladů a úloh v druhé kapitole této práce. Snahou je seznámit čtenáře s kruhovou inverzí natolik, aby pochopil veškeré její vlastnosti a byl schopen je využít nejen v příkladech, ale i v praxi.

Abstract

The objective of this paper is to make reader acquainted with the depiction known as ring inversion. A definition of the depiction set forth in the introduction and a subsequent description including proofs of all characteristics of this depiction in two planes, namely a synthetic and an analytic plane with a complex variable, shall enable a reader to solve problems and tasks which are contained in the second part of this paper. The aim of this work is to familiarize a reader with the ring inversion in such a degree so that he will understand all of the characteristics and will be able to make use of this knowledge not only to solve theoretical problems but also in practice.

Obsah

Použité značky

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
E^2	dvojrozměrný Euklidovský prostor
M^2	Möbiův prostor $E^2 \cup \infty$
$I(k) : X \to X'$	zobrazení bodu X do bodu X' v kruhové inverzi s určující kružnicí k
$k(S, r)$	určující kružnice kruhové inverze
$\vec{u}, \overrightarrow{SX}$	vektor

Úvod

Již v hodinách matematiky na střední škole se učíme, co je to zobrazení. Je to předpis, který každému bodu z definičního oboru, přiřadí právě jeden bod z oboru hodnot. Je vysvětleno, že některá zobrazení jsou tzv. vzájemně jednoznačná. Znamená to, že každý vzor má právě jeden obraz a každý obraz má právě jeden vzor. Zobrazení je častým tématem středoškolské matematiky. Funkce, posloupnosti, řady a mnohá další témata odpovídají předpisu zobrazení. Mě osobně tento předpis a vlastnost vzájemné jednoznačnosti okouzlily svoji dokonalostí.

Problém nastal při příchodu na vysokou školu, kde jsem se seznámil s pojmem kruhová inverze. Dozvěděl jsem se, že jednou ze základních vlastností kruhové inverze je, že dokáže přímku, resp. kružnici zobrazit buďto na přímku, nebo na kružnici. Tato informace mě naprosto uchvátila, poněvadž popírá dokonalost zobrazení. Samozřejmě, že jedna konkrétně zadaná přímka, resp. kružnice v E^2 má jeden konkrétní obraz (kružnici nebo přímku), ale obecně se nedá tvrdit, že obrazem přímky, resp. kružnice je přímka, nebo kružnice (bez možnosti sjednocení). Napadlo mě okamžitě, že tento jev musí mít velké využití v praxi. Toto je důvod, proč jsem si téma kruhové inverze zvolil za téma své bakalářské práce.

Ponořením hlouběji do tohoto tématu jsem zjistil, že existuje řada odborných knich, které se tímto tématem zabývají. Každý autor píše podle své chuti, a tak se v každé literatuře objevuje definice kruhové inverze pokaždé trochu jinak. Pro pozorného čtenáře to není žádný velký problém vyčíst informace z jedné knihy a přidat je k informacím z knihy druhé. I já jsem si takto pospojoval spousty znalostí. Nenašel jsem totiž žádnou knihu, ve které by bylo napsáno vše, co jsem do té doby už nastudoval z jiných knih. V každé literatuře jsem našel pouze definici kruhové inverze, pár dokázaných vlastností a nějaké příklady. Moji snahou tedy je sjednocení řady těchto vědomostí do jednoho textu. Mojí hlavní prioritou je, aby veškeré informace napsané v této práci pokrývaly co největší spektrum vědomostí o kruhové inverzi. Je zřejmé, že to není úplně jednoduchý úkol, poněvadž každá definice je trochu odlišná od odstatních. Snažil jsem se tedy nalézt takovou definici, pod kterou bude spadat co nejvíce definic z nastudované literatury. Sepsání všech vlastností a jejich důkazů včetně příkladů je už spíše mravenčí práce.

Práci strukturuji v klasickém pořadí. V první kapitole je uvedena definice kruhové inverze a poté její vlastnosti. Vše provedeno v rovině analytické. V kapitole druhé budou následují příklady, které jsem vybral tak, aby je bylo možné použít nejen v matematických limitních prostorech, ale i v praxi.

Kapitola 1

Teoretická část o kruhové inverzi

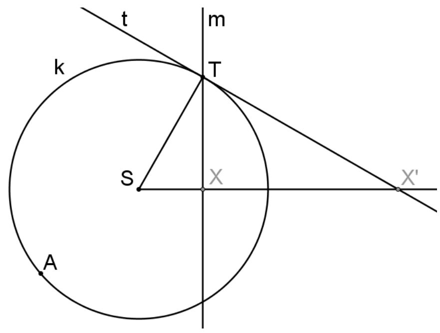
1.1 Syntetické vyjádření

V Euklidovské rovině E^2 je dána kružnice $k(S,r)$. Zvolme libovolně bod $X \neq S$. Sestrojme obraz X' bodu X podle následujícího postupu:

1. $r > |SX|$ (obr. 1.1)
   (a) sestrojíme polopřímku SX
   (b) bodem X vedeme kolmici m k polopřímce SX
   (c) získáme bod T jako průsečík kolmice m s kružnicí k
   (d) bodem T vedeme tečnu t ke kružnici k
   (e) tečna protne polopřímku SX v jednom bodě X'; tento bod je obrazem bodu X
2. $r < |SX|$
   (a) sestrojíme polopřímku SX
   (b) bodem X vedeme tečnu t ke kružnici k
   (c) získáme bod T jako bod odtyku tečny t s kružnicí k
   (d) bodem T vedeme kolmici m k polopřímce SX
   (e) bod X', čili obraz bodu X, leží na prusečíku kolmice m s polopřímkou SX

3. $r = |SX|$

Případ, kdy $X \in k$, je distribuován v textu níže.



Obr. 1.1

Z obr. 1.1 je patrné, že podle Pythagorovy věty platí vztah

$$|ST|^2 + |TX'|^2 = |SX'|^2.$$

Provedeme úpravu

$$\begin{aligned}
|ST|^2 + |TX'|^2 &= |SX'|^2, \\
|ST|^2 + |TX|^2 + |XX'|^2 &= |SX'|^2, \\
|ST|^2 + |ST|^2 - |SX|^2 + (|SX'| - |SX|)^2 &= |SX'|^2, \\
2|ST|^2 - |SX|^2 + |SX'|^2 - 2|SX'| \cdot |SX| + |SX|^2 &= |SX'|^2, \\
|SX'| \cdot |SX| &= |ST|^2,
\end{aligned}$$

kde $|ST| = r$, proto můžeme napsat

$$|SX'| \cdot |SX| = r^2. \tag{1.1}$$

Rovnost (1.1) definuje zobrazení jménem **kruhová inverze**. Tato rovnost je definovaná pro všechna $X \neq S$. Abychom mohli dodefinovat zobrazení pro bod S, je nutné zavést tzv. Möbiovu rovinu M^2 ([2] a [5]). Pokud k E^2 přidáme jeden prvek, a sice nevlastní bod ∞, vznikne nám Möbiova rovina. Platí tedy $M^2 = E^2 \cup \infty$. Shrňme tedy veškeré poznatky a použijme definici z [3].

KRUHOVÁ INVERZE V M^2 je dána určující kružnice $k(S,r)$, kde $S \in E^2$ a $r \in \mathbb{R}^+$. Zobrazení kruhová inverze přiřadí každému bodu roviny $X \neq S$ bod X' tak, že platí:

1. Polopřímky SX a SX' jsou totožné.
2. Délka $|SX'|$ se určí na základě vztahu $|SX| \cdot |SX'| = r^2$.

Kružnice $k(S,r)$ je určující kružnicí kruhové inverze, kde bod S je střed kruhové inverze a r^2 její koeficient. Píšeme $I(k) : X \to X'$.
Zároveň platí $I(k) : S \to \infty \wedge \infty \to S$.

Kruhová inverze je prosté zobrazení roviny M^2 zpět na celou rovinu M^2. Kruhová inverze je involutorní zobrazení, tedy platí $I(k) : X \to X' \;\wedge\; I(k) : X' \to X$. Nyní do rovnosti (1.1) dosaďme bod $X \in k$:

$$\begin{aligned} |SX| \cdot |SX'| &= r^2, \\ r \cdot |SX'| &= r^2, \\ |SX'| &= r. \end{aligned}$$

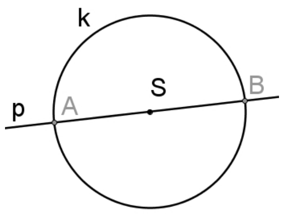
Musí platit, že polopřímka SX je totožná s polopřímkou SX'. Zároveň ale platí také rovnost $|SX| = |SX'| = r$. Z toho je zřejmé, že $X = X'$. Je to tedy samodružný bod. Bod X jsme na kružnici k zvolili libovolně, vlastnost tedy platí pro všechny body kružnice. Kružnice k je tedy množinou samodružných bodů.

Další důležitou vlastností kruhové inverze je, že body uvnitř určující kružnice se zobrazují do vnější oblasti kružnice a naopak. Vyplývá to z definice kruhové inverze, resp. ze vzorce (1.1). Pokud je $|SX| < r$, musí nezbytně platit $|SX'| > r$, a naopak. Jak už bylo napsáno výše, body kružnice jsou samodružné.

Některá literatura (např. [1] a [2]) uvádí definici kruhové inverze, kde se vyskytuje i záporný koeficient zobrazení. V našem případě je koeficient r^2, což nám zaručuje vždy kladné hodnoty. Rovnice $|SX| \cdot |SX'| = |\lambda|$ je ale taktéž rovnicí kruhové inverze s koeficientem λ, kde ale $\lambda \in \mathbb{R}$. Je zřejmé, že pokud $\lambda = -1$, jedná se o středovou souměrnost, pokud $\lambda = 0$, zobrazí se celá rovina do středu kruhové inverze, a pokud platí $\lambda = 1$, jedná se o identitu. U kruhové inverze s kladným koeficientem platí, že polopřímky SX, SX' jsou totožné. V případě záporného koeficientu je tomu naopak, bod X' se zobrazí na polopřímku opačnou polopřímce SX. Jedná se tedy o složení kruhové inverze s kladným koeficientem a středové souměrnosti se středem v bodě S. V důsledku toho se v tomto textu nezmiňuji o případech zobrazení se záporným koeficientem.

1.1.1 Zobrazení přímky a kružnice

V M^2 je dána určující kružnice $k(S, r)$ a libovolná přímka p tak, že $S \in p$. Body $A, B \in p \cap k$ (obr. 1.2). Pokud tuto přímku zobrazíme v kruhové inverzi, zobrazí se opět na přímku. Polopřímka SA, resp. SB, se zobrazí zase na polopřímku SA, resp. SB, což vyplývá z definice kruhové inverze. Můžeme tedy tvrdit, že přímka p se zobrazí sama na sebe. Pouze body A, B jsou ale samodružné (poněvadž leží na kružnici k), nejedná se tedy o přímku samodružných bodů.

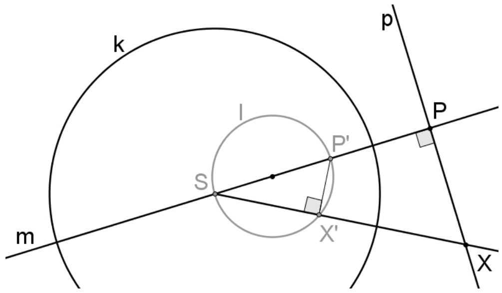


Obr. 1.2

Jak se tedy ale zobrazí přímka, která neprochází bodem S? Vezměme v potaz přímku, která nemá s kružnicí žádný společný bod a leží zcela vně určující kružnice. Musí tedy platit, že její obraz bude ležet uvnitř kružnice. Přímka zcela jistě v M^2 prochází bodem ∞. Její obraz tedy musí procházet bodem S.

Vyslovme tvrzení, že přímka, která neprochází bodem S se zobrazí na kružnici, která prochází středem S kruhové inverze. Nyní se pokusme toto tvrzení dokázat (obr. 1.3).

V M^2 si zvolme kružnici $k(S, r)$ a přímku p, která neprochází bodem S. Sestrojme kolmici m k přímce p tak, aby $S \in m$. Bod P je patou kolmice, tedy $P \in m \cap p$. Sestrojme obraz bodu P, $I(k) : P \to P'$, a kružnici l nad průměrem SP'. Nyní zvolme libovolně bod $X \in p, X \neq P$. Polopřímka SX protne kružnici l ve dvou bodech, a sice S a X', kde X' je obrazem bodu X. Platí vztah $|SP| \cdot |SP'| = r^2$, musíme tedy



Obr. 1.3

dokázat, že platí i vztah $|SX| \cdot |SX'| = r^2$. Ekvivalentně upravíme rovnost

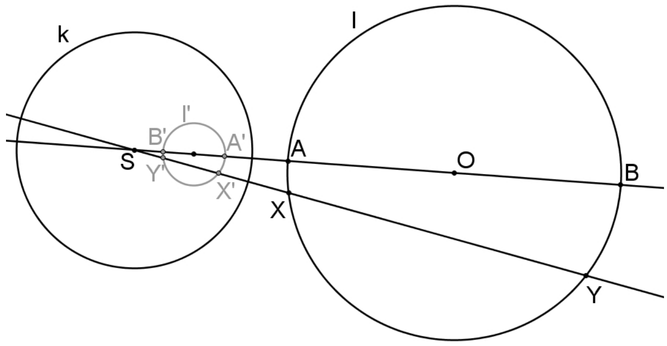
$$\begin{aligned} |SP| \cdot |SP'| &= |SX| \cdot |SX'|, \\ \frac{|SP'|}{|SX'|} &= \frac{|SX|}{|SP|}. \end{aligned}$$

Tento výsledný vztah ale platí. Vyplývá to z podobnosti trojúhelníků SPX a $SX'P'$. Poněvadž $|\angle P'X'S| = \frac{\pi}{2}$, leží bod X' nad kružnici l. Tím je důkaz hotov. Přímka, která neprochází středem S kruhové inverze, se tedy zobrazí na kružnici, která prochází bodem S. Předcházející dvě úlohy (zobrazení přímky, která prochází, resp. neprochází středem kruhové inverze) jsou popsány v [1].

Jak už bylo řečeno, kruhová inverze je involutorní zobrazení. Znamená to tedy, že kružnice procházející středem S kruhové inverze se zobrazí zpět na přímku, která neprochází bodem S. Vzniká zde tedy otázka, na co se zobrazí kružnice, která středem S neprochází. Zvolme stejný postup jako u předchozí otázky. Vyslovme tvrzení, které se pokusíme následně dokázat.

Můžeme tvrdit, že pokud vzor (kružnice) leží zcela vně určující kružnice, resp. uvnitř, její obraz leží zcela uvnitř určující kružnice, resp. vně. Přímku, jako obraz kružnice, můžeme tedy vyloučit. Můžeme zkusit tvrdit, že se zadaná kružnice zobrazí zase na kružnici, která neprochází středem kruhové inverze (obr.1.4). Toto tvrzení i jeho důkaz jsou popsány v [2].

V rovině je dána určující kružnice kruhové inverze $k(S, r)$ a kružnice $l(O, r_1)$, pro kterou platí $S \notin l$. Zvolme body A, B tak, že $A, B \in \overleftrightarrow{OS} \cap l$. $I(k) : A \to A' \ \wedge \ B \to B'$, tedy $I(k) : AB \to A'B'$. Sestrojme kružnici $l'(P, r_2)$ nad průměrem $A'B'$. Z definice lze odvodit vztah $|SA| : |SB'| = |SB| : |SA'|$. Úsečky AB a $A'B'$ jsou tedy stejnolehlé ve stejnolehlosti se středem v bodě S. Tedy i kružnice l a l' jsou navzájem



Obr. 1.4

stejnolehlé dle středu S. Na kružnici l zvolme body X, Y tak, aby trojice bodů S, X, Y byla navzájem kolineární. Přímka XY nám kružnici l' protne ve dvou bodech. Ty označíme X', Y' tak, aby ve výše zmíněné stejnolehlosti byl bod Y' obraz bodu X a bod X' obraz bodu Y. Z mocnosti bodu ke kružnici plyne rovnost $|SA| \cdot |SB| = |SX| \cdot |SY|$. Ze stejnolehlosti kružnic plyne rovnost $|SB| : |SA'| = |SY| : |SX'|$. Z první rovnosti můžeme vyjádřit

$$|SB| = \frac{|SX| \cdot |SY|}{|SA|}.$$

Dosadíme do druhé rovnosti a upravíme

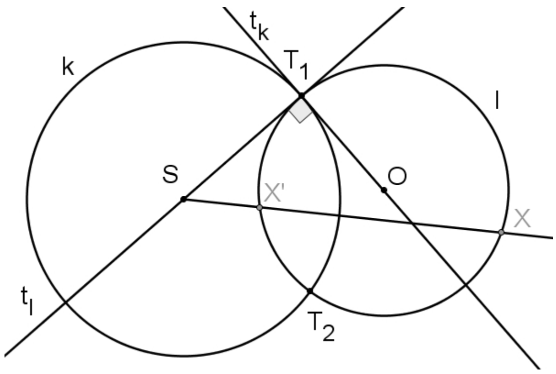
$$\begin{aligned} \frac{|SX| \cdot |SY|}{|SA|} \cdot \frac{1}{|SA'|} &= \frac{|SY|}{|SX'|}, \\ \frac{|SX|}{|SA| \cdot |SA'|} &= \frac{1}{|SX'|}, \\ |SX| \cdot |SX'| &= |SA| \cdot |SA'|. \end{aligned}$$

Výsledná rovnost dokazuje, že v kruhové inverzi určené kružnicí $k(S, r)$ je obrazem bodu X bod X'. Tvrzení, že kružnice neprocházející středem kruhové inverze se zobrazí na kružnici, která taktéž neprochází středem S, je tedy dokázáno.

V předcházejících dvou úvahách (přímka, resp. kružnice, neprocházející středem kruhové inverze) byly brány v potaz pouze případy, kdy kružnice i přímka ležely zcela ve vnější oblasti určující kružnice. Je ale zřejmé, že stejné podmínky platí i pro případy, kdy útvary mají s určující kružnicí společné některé body, nebo leží uvnitř určující kružnice. Společné body jsou samodružné a stále platí pravidlo, že body z vnitřní oblastni určující kružnice se zobrazí vně této kružnice a naopak. Uvedené geometrické útvary zůstanou i tak zachovány.

1.1.2 Další vlastnosti

Přímka procházející bodem S je samodružná. Můžeme se tedy ptát, zda existuje i kružnice, která by byla samodružná. Nejedná se ovšem o určující kružnici. Ta je totiž zároveň množinou samodružných bodů, což pro přímku procházející středem kruhové inverze neplatí. Tuto podmínku samodružnosti splňuje pouze kružnice, která je ortogonální[1] k určující kružnici (obr. 1.5).



Obr. 1.5

Zvolme určující kružnici $k(S, r)$ a k ní ortogonální kružnici $l(O, r_1)$. Existují body $T_1, T_2 \in k \cap l$, kde platí $|\angle ST_1O| = |\angle ST_2O| = \pi/2$. Na kružnici l zvolme libovolně bod $X \neq T_1, T_2$. Polopřímka SX protne kružnici l v dalším bodě X'. Z mocnosti bodu ke kružnici platí $|SX| \cdot |SX'| = |ST_1|^2 = |ST_2|^2 = r^2$. Bod X' je tedy obrazem bodu X v kruhové inverzi s určující kružnicí k. Tento důkaz je taktéž propracován v [5].

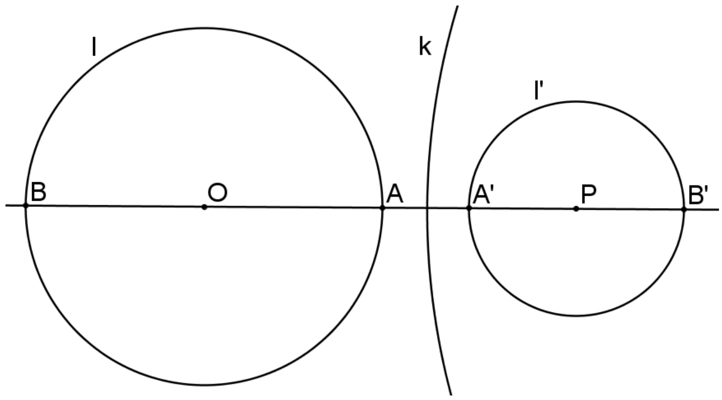
V rovině je dána určující kružnice kruhové inverze $k(S, r)$ a dva geometrické útvary m, n a bod P, pro které platí $P \in m \cap n$. Zůstává otázkou, zda existuje bod $P' \in m' \cap n'$, kde $K(S) : m \to m' \wedge n \to n'$ a zároveň platí $I(k) : P \to P'$. Tento problém je taktéž řešený v [3].

Kruhová inverze je prosté zobrazení, tedy obraz bodu P je určen jednoznačně. Zobrazení nám zaručuje, že pokud $P \in m$, resp. $P \in n$, pak také $P' \in m'$, resp. $P' \in n'$. Obraz P' je tedy bodem průniku útvarů m', n' a platí $I(k) : P \to P'$.

V důsledku řešení předchozí otázky, zda společný bod vzorů se zobrazí na společný bod obrazů, vzniká otázka další. Zda se střed kružnice l (vzor) zobrazí na střed kružnice

[1] Dvě kružnice jsou ortogonální, právě když tečny vedené společným bodem svírají úhel $\frac{\pi}{2}$.

l' (obraz). Tento případ je znázorněn na obr. 1.6 a je řešen v [3] nebo [1].



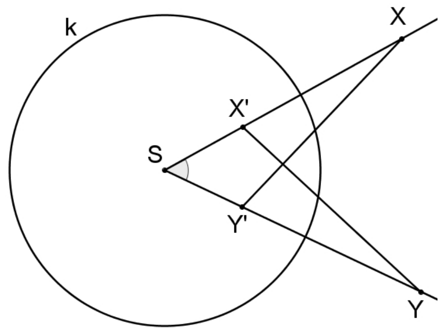
Obr. 1.6

V rovině je dána kružnice $l(O, r_1)$ a její obraz $l'(P, r_2)$ v kruhové inverzi s určující kružnicí $k(S, r)$. Body A, B leží na průsečíku kružnice l a spojnice středů kružnic l, l'. Pokud zvolíme $|SA| = a, |SB| = b$, pak $|SO| = \frac{a+b}{2}$. Z rovnosti (1.1) můžeme dopočítat $|SA'| = \frac{r^2}{a}, |SB'| = \frac{r^2}{b}$, $|SP| = \frac{2r^2}{a+b}$. Nyní vyjádřeme $|SP|$ jako střed vzdáleností $|SA'|$ a $|SB'|$, tedy $|SP| = \frac{r^2(a+b)}{2ab}$. Aby se bod O zobrazil do bodu P, musela by platit rovnost

$$\begin{aligned} \frac{2r^2}{a+b} &= \frac{r^2(a+b)}{2ab} \\ 4abr^2 &= (a+b)^2 r^2 \\ r^2[4ab - (a+b)^2] &= 0 \\ -r^2(a-b)^2 &= 0. \end{aligned}$$

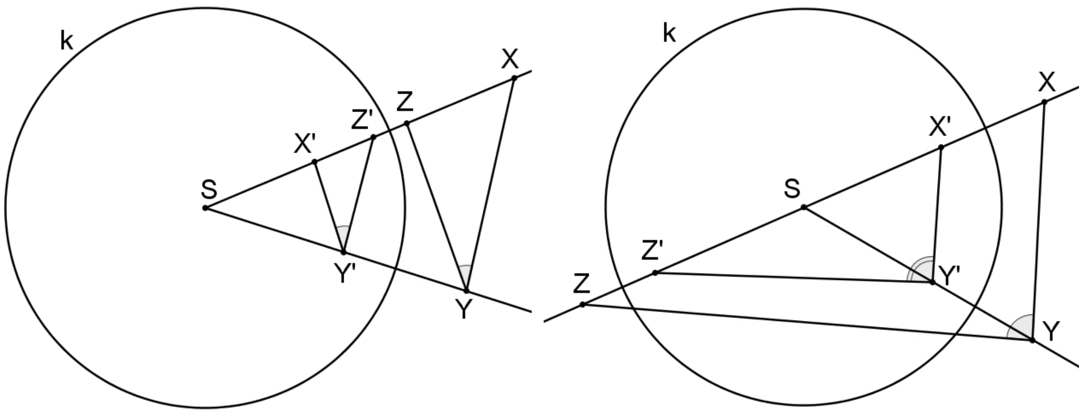
Ta ovšem neplatí, tedy bod P není obrazem bodu O. V důsledku tohoto tvrzení je chybným postupem při sestrojování obrazu kružnice v kruhové inverzi zobrazit jeden bod kružnice a její střed.

Další důležitou vlastností kruhové inverze je podobnost trojúhelníků SXY' a SYX' z obr. 1.7, kde $k(S, r)$ je určující kružnicí, $X, Y \in E^2 - \{S\}$ a body X', Y' jsou obrazy bodů X, Y. Platí rovnosti $|SX| \cdot |SX'| = r^2$ a $|SY| \cdot |SY'| = r^2$, tedy můžeme psát $\frac{|SX|}{|SY|} = \frac{|SY'|}{|SX'|}$, a poněvadž $\angle XSY$ je pro oba trojúhelníky společný, jsou trojúhelníky podobné podle věty sus.



Obr. 1.7

Důsledkem předchozího důkazu je tvrzení, že kruhová inverze zachovává ortogonalitu. Pokud jsou k sobě navzájem dva geometrické útvary ortogonální, pro jejich obrazy platí stejná podmínka. Pokusme se nyní toto tvrzení dokázat (obr. 1.8).



Obr. 1.8

Zvolme určující kružnici $k(S, r)$ a libovolně body $X, Y \neq S$. Zvolme libovolně bod Z, který leží na polopřímce SX. Body X', Y', Z' jsou popořadě obrazy bodů X, Y, Z. Platí $\triangle SYX \sim \triangle SX'Y'$ a $\triangle SYZ \sim \triangle SZ'Y'$. Pomocí orientovaných úhlů můžeme zapsat rovnost

$$\angle XYZ = \angle XYS + \angle SYZ = \angle SX'Y' + \angle Y'Z'S = \angle Z'Y'X'.$$

Tedy úhel α, který svírají dva geometrické útvary, se zobrazí na úhel stejné velikosti avšak opačně orientovaný. V případě neorientovaného úhlu platí mezi vzorem a obrazem rovnost.

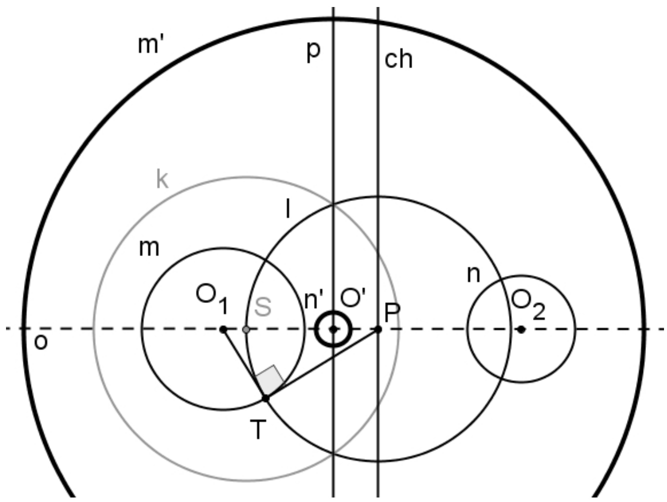
Tato vlastnost ale platí pro každý úhel, nejen pro úhel $\pi/2$. Problém nastává v situaci, kdy Z leží na polopřímce opačné polopřímce SX. Zde platí

$$\angle ZYX = \angle ZYS + \angle SYX = \angle SZ'Y' + \angle Y'X'S = \pi - \angle Z'Y'X'$$

tedy $\angle ZYX = \pi - \angle Z'Y'X'$. Tuto rovnost už nesplňuje libovolný úhel, ale pouze úhel o velikosti $\pi/2$, poněvadž pro něj platí rovnost $\alpha = \pi - \alpha$. Tím je tvrzení, že kruhová inverze zachovává ortogonalitu, dokázano.

Tento i předcházející důkaz jsou provedeny v [5].

Poslední vlastnost, kterou se v této práci budeme zabývat, vyplývá z předchozích dvou tvrzení, a sice zachování ortogonality a zobrazení společného bodu dvou geometrických útvarů. Dokažme, že ke dvěma nesoustředným kružnicím lze vždy nalézt střed kruhové inverze S tak, že se zadané dvě kružnice zobrazí na kružnice soustředné. Poloměr určující kružnice nemusí být jednoznačný. Naopak, tvrzení platí pro všechna $r \in \mathbb{R}^+$ (obr. 1.9).



Obr. 1.9

V rovině jsou dány kružnice $m(O_1, r_1), n(O_2, r_2)$, kde $O_1 \neq O_2$. Sestrojme kružnici l ortogonální k oběma zadaným kružnicím. Kružnice má střed v bodě $P \in o \cap ch$, kde o je spojnice středů kružnic m, n a ch je chordála těchto kružnic. Poloměr kružnice je roven vzdálenosti $|PT|$, kde T je bod dotyku tečny vedené z bodu P ke kružnici m, resp. n. Získáme bod $S \in l \cap o$. V kruhové inverzi $k(S, r), r \in \mathbb{R}^+$, se kružnice l vždy zobrazí na přímku, poněvadž prochází bodem S. Obraz kružnice l je tedy přímka p. Obrazy bodů průniků kružnic m, l a n, l se zobrazí na přímku p, což nám zaručuje dříve dokázaná vlastnost kruhové inverze. Poněvadž kružnice l je k těmto dvěma kružnicím ortogonální, i kružnice m', n' musí svírat s přímkou p pravý úhel. Aby byla tato vlastnost zachována, musí přímka p procházet středy kružnic m', n'. Osa o prochází středy kružnic m, n, tedy na ní musí ležet i středy obrazů těchto kružnic. Tedy $O' \in o \cap p$, kde O' je společný střed kružnic m', n'.

1.2 Analytické vyjádření

Vraťme se nyní k naší rovnosti (1.1). Kruhová inverze je synteticky definována jako rovnost součinu vzdáleností bodů (vzoru a obrazu) od středu kruhové inverze a druhé mocnině poloměru určující kružnice. Pokud se chceme zabývat analytickým vyjádřením, musíme určit soustavu souřadnic. V této soustavě jsou body X, X', jakožto vzor a obraz, zapsány pomocí souřadnic. Můžeme se tedy zajímat o to, zda se dá rovnost (1.1) zapsat pomocí vektorů, a sice zda platí

$$\overrightarrow{SX} \cdot \overrightarrow{SX'} = r^2. \tag{1.2}$$

Obraz bodu X leží na polopřímce SX, tedy můžeme psát, že $\lambda \cdot \overrightarrow{SX} = \overrightarrow{SX'}, \lambda \in \mathbb{R}^+$. Pro ulehčení výpočtů můžeme bez újmy na obecnosti střed kruhové inverze vždy posunout do počátku soustavy souřadnic.

Zvolme libovolně určující kružnici $k(S, r)$ a bod $X \neq S$. Dále platí $S[0, 0]$, $X[x, y]$, $X'[x', y']$, kde $I(k) : X \to X'$. Dopočítejme vektory $\overrightarrow{SX} = (x, y), \overrightarrow{SX'} = (x', y')$, neboli také $\overrightarrow{SX'} = \lambda \cdot (x, y)$. Dosaďme zpět do rovnice (1.2), dostaneme

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{SX} \cdot \overrightarrow{SX} \cdot \lambda &= r^2, \\
(x^2 + y^2)\, \lambda &= r^2, \\
\lambda &= \frac{r^2}{x^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{SX'} &= \frac{r^2}{x^2 + y^2} \cdot \overrightarrow{SX}, \\
(x', y') &= \frac{r^2}{x^2 + y^2} \cdot (x, y),
\end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x \cdot r^2}{x^2 + y^2}, \\ y' &= \frac{y \cdot r^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Rovnice (1.3) jsou analytickým vyjádřením kruhové inverze s určující kružnicí $k(S, r)$, $S[0, 0]$. Odvození analytického vyjádření kruhové inverze je taktéž popsáno v [3].

Pro odvození vzorce (1.3) jsme použili podmínky, kdy $S = [0, 0]$. Nyní se tedy zabývejme případem, kdy $S = [m, n]$, $m, n \in \mathbb{R}$. Jedná se pouze o analogické odvození z předchozího výpočtu.

Stále platí podmínka $\lambda \cdot \overrightarrow{SX} = \overrightarrow{SX'}$. Poněvadž ale $S = [m, n]$, pak $\overrightarrow{SX} = (x - m, y - n)$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SX} \cdot \overrightarrow{SX} \cdot \lambda &= r^2, \\ \left[(x-m)^2 + (y-n)^2\right] \lambda &= r^2, \\ \lambda &= \frac{r^2}{(x-m)^2 + (y-n)^2}. \end{aligned}$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SX'} &= \frac{r^2}{(x-m)^2 + (y-n)^2} \cdot \overrightarrow{SX}, \\ (x' - m, y' - n) &= \frac{r^2}{(x-m)^2 + (y-n)^2} \cdot (x - m, y - n), \end{aligned}$$

tedy

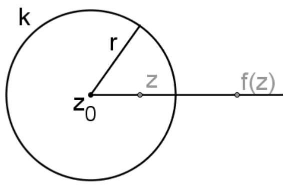
$$\begin{aligned} x' &= \frac{(x-m) \cdot r^2}{(x-m)^2 + (y-n)^2} + m, \\ y' &= \frac{(y-n) \cdot r^2}{(x-m)^2 + (y-n)^2} + n. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Rovnice (1.4) jsou analytickým vyjádřením kruhové inverze s určující kružnicí $k(S, r)$, kde platí $S = [m, n], X[x, y], X'[x', y']$ a kde $I(k) : X \to X'$.

1.3 Kruhová inverze jako komplexní funkce komplexní proměnné

V této kapitole se budeme zabývat kruhovou inverzí vyjádřenou jako komplexní funkce komplexní proměnné (dále jen funkce). Pohybujeme se tedy ve čtyřrozměrném prostoru, poněvadž se jedná o zobrazení z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$, kde každý prvek z $\mathbb{C}$ je vyjádřen jako komplexní číslo $z = a + b\,i$, nebo jako bod Gaussovy roviny v souřadnicovém tvaru $z = [a, b],\ a, b \in\ \mathbb{R}$. Graficky budeme část tohoto prostoru vyjadřovat jako zobrazení Gaussovy roviny zpět do Gaussovy roviny.

Vraťme se nyní k naší rovnosti (1.1), kterou jsme odvodili na základě Pythagorovy věty o pravoúhlém trojúhelníku. Z této rovnosti jsme odvodili analytické vyjádření kruhové inverze a nyní vyjádříme předpis funkce, který by odpovídal kruhové inverzi. Obr. 1.10 je grafickým znázorněním kruhové inverze v Gaussově rovině.



Obr. 1.10

Než přistoupíme k samotnému odvození předpisu funkce představující kruhovou inverzi, dokážeme platnost rovnosti $|z\ -\ z_0|^2 = (z - z_0)(\overline{z - z_0})$. Zvolme obecně $z = a + b\,i$ a $z_0 = m + n\,i,\ a, b, m, n \in \mathbb{R}$.
Levá strana rovnosti je rovna

$$|z - z_0|^2 = |(a + b\,i) - (m + n\,i)|^2 = |(a - m) + (b - n)\,i|^2 = (a - m)^2 + (b - n)^2.$$

Pravá strana dokazované rovnosti je rovna

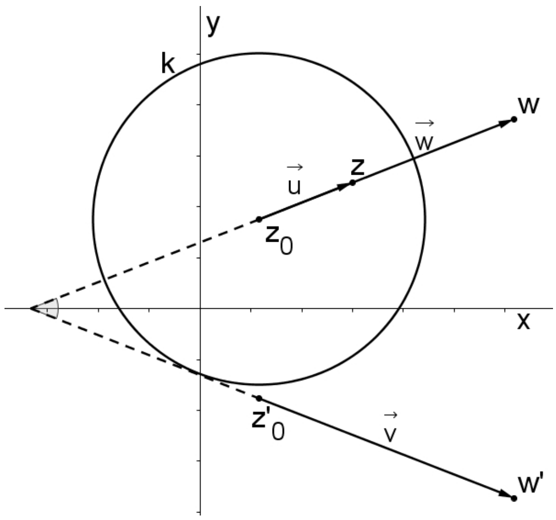
$$\begin{aligned} & (a + b\,i - m - n\,i)(a - b\,i - m + n\,i) = \\ = \ & [(a - m) + (b - n)\,i]\,[(a - m) - (b - n)\,i] = \\ = \ & (a - m)^2 + (b - n)^2. \end{aligned}$$

Obě strany se rovnají, rovnost tedy platí.

Přistupme nyní k samotnému odvození předpisu komplexní funkce komplexní proměnné představující kruhovou inverzi. Kruhová inverze je dána předpisem funkce komplexní proměnné, tedy $f(z) = w,\ z, w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Rovnost (1.1) můžeme přepsat do tvaru $|z - z_0| \cdot |w - z_0| = r^2$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ je střed kruhové inverze, a upravit

$$\begin{aligned}(z - z_0)(\overline{z - z_0})(w - z_0)(\overline{w - z_0}) &= r^4,\\ (w - z_0)(z - z_0)(\overline{w - z_0}) &= \frac{r^4}{\overline{z - z_0}}. \qquad (1.5)\end{aligned}$$

Zkoumejme blíže součin $(z - z_0)(\overline{w - z_0})$. Obě komplexní čísla můžeme vyjádřit jako vektory $\vec{u} = z - z_0, \vec{v} = \overline{w - z_0}$. Definujme vektor $\vec{w} = w - z_0$, který je osově souměrný s vektorem $\vec{v}$ podle osy x. Vektory $\vec{u}, \vec{w}$ svírají s kladnou částí reálné osy stejný úhel, poněvadž body z_0, z, w jsou kolineární. Jestliže tedy vektor $\vec{u}$ svírá s kladnou částí reálné osy úhel α, pak vektor $\vec{v}$ musí svírat úhel $2\pi - \alpha$. Pokud (graficky) násobíme dva vektory, pak sčítáme jejich argumenty, které svírají s kladnou částí reálné osy, a násobíme jejich délky. Pokud tedy sečteme $\alpha + (2\pi - \alpha)$, výsledný úhel je 2π. Musí tedy platit, že součin $(z - z_0)(\overline{w - z_0}) \in \mathbb{R}$ (obr. 1.11).



Obr. 1.11

Zbývá vynásobit délky vektorů, tedy $|z - z_0| \cdot |\overline{w - z_0}| = |z - z_0| \cdot |w - z_0|$. Výsledek je podle předpokladu roven r^2. Dosaďme zpět do rovnosti (1.5) a upravme

$$\begin{aligned}(w - z_0) \cdot r^2 &= \frac{r^4}{\overline{z - z_0}},\\ w &= z_0 + \frac{r^2}{\overline{z - z_0}}. \qquad (1.6)\end{aligned}$$

Funkce (1.6) definuje obraz bodu $z, \ z \neq z_0$. Pro úplnost můžeme opět dodefinovat $f(z_0) = \infty \wedge f(\infty) = z_0$, čímž definujeme obraz bodu z, kde $z = z_0$. Vyslovme tedy následující definici.

KRUHOVÁ INVERZE Nechť $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, pak ke každému bodu z je přiřazen právě jeden bod w na základě předpisu

$$f(z): \quad w = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z - z_0}}.$$

Bod z_0 je střed kruhové inverze a r^2 její koeficient, pro které platí $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r \in \mathbb{R}^+$.

Dále definujeme $f(z_0) = \infty$ a $f(\infty) = z_0$.

Předpis funkce kruhové inverze včetně jejích základních vlastností i dokazovaná rovnost $|z - z_0|^2 = (z - z_0)(\overline{z - z_0})$ jsou též zmíněny v [4].

Pokud máme kruhovou inverzi používat při výpočtech, můžeme si vždy vhodně zvolit počátek soustavy souřadnic do středu kruhové inverze. V případě, že máme soustavu pevně zadanou, můžeme ji vždy vhodně posunout do středu kruhové inverze. Zvolme tedy kruhovou inverzi se středem v bodě $z_0 = [0, 0]$ a poloměrem $r = 1$. Z původního předpisu funkce dostaneme předpis

$$f(z): \quad w = \frac{1}{\bar{z}}, \tag{1.7}$$

který budeme využívat v následujících výpočtech a příkladech.

1.3.1 Důkaz involuce a zobrazení okolí bodu z_0

V tomto oddíle si dokážeme, že kruhová inverze je involutorní zobrazení, a ukážeme si, jak se zobrazí okolí bodu z_0 vzhledem k poloměru určující kružnice $|z - z_0| = r$, kde v našem případě $r = 1$.

V zobrazení, které je složeno ze dvou stejných kruhových inverzí, se libovolný bod z zobrazí sám do sebe. Pokud w je obraz bodu z, musí platit

$$w = \frac{1}{\overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}} = z.$$

Ze vztahu $w = \frac{1}{\bar{z}}$ je zřejmé, že pokud $|z| < 1$, pak $|w| > 1$. Absolutní hodnota komplexního čísla a čísla k němu komplexně sdruženého je stejná. Okolí $U_{z_0}\,\langle 0, 1)$ se tedy zobrazí do okolí $U_{z_0}\,(1, \infty\rangle$ a naopak.

Příklad

Zobrazte bod $z = 3 - 2\,i$ v kruhové inverzi $w = \frac{1}{\bar{z}}$. Vypočítejte hodnoty $|z|, |w|$ a bod w zobrazte zpět v této kruhové inverzi. Výsledky porovnejte.

Řešení

Platí $f(z) = w$ a $f(w) = w'$, tedy

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{3 + 2\,i} = \frac{3 - 2\,i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}\,i, \\ |z| &= \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \doteq 3,6, \\ |w| &= \sqrt{\frac{9}{169} + \frac{4}{169}} = \frac{\sqrt{13}}{13} \doteq 0,277, \\ w' &= \frac{1}{\frac{3}{13} + \frac{2}{13}\,i} = \frac{\frac{3}{13} - \frac{2}{13}\,i}{\frac{13}{13^2}} = 3 - 2\,i. \end{aligned}$$

Bod w se zobrazí zpět do bodu z. Vzdálenost $|z - z_0| > 1$ a $|w - z_0| < 1$, bod z tedy leží vně určující kružnice a bod w uvnitř.

1.3.2 Samodružnost určující kružnice

Jako první dokážeme, že určující kružnice kruhové inverze $|z - z_0| = r$, kde $z_0 = [0, 0]$ a $r = 1$, je samodružná. Bod z náleží určující kružnici. Je-li $z = a + b\,i,\ a, b \in \mathbb{R}$, pak $a^2 + b^2 = 1$. Můžeme vypočítat $b = \pm\sqrt{1 - a^2}$. Vezmeme např. $b = \sqrt{1 - a^2}$, tedy $z = a +\, i\sqrt{1 - a^2}$. Bod z zobrazíme v kruhové inverzi, tedy

$$w = \frac{1}{\overline{a +\, i\sqrt{1 - a^2}}} = \frac{1}{a -\, i\sqrt{1 - a^2}} = \frac{a +\, i\sqrt{1 - a^2}}{a^2 + 1 - a^2} = a +\, i\sqrt{1 - a^2}.$$

Vidíme, že libovolný bod z náležící určující kružnici se zobrazí sám na sebe. Určující kružnice je tedy samodružná.

Příklad

Zobrazte kružnici $|z| = 1$ v kruhové inverzi $w = \frac{1}{\bar{z}}$.

Řešení

Označme $z = a + b\,i,\ a, b \in \mathbb{R}$. Podmínka $|z| = 1$ nám zaručuje, že $a \neq 0 \vee b \neq 0$. Do rovnice kružnice dosadíme obraz bodu z v kruhové inverzi a upravíme

$$1 = |z| = \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{1}{a - b\,i}\right| = \left|\frac{a + b\,i}{a^2 + b^2}\right| = \frac{|z|}{a^2 + b^2}.$$

Musí tedy platit podmínka $a^2 + b^2 = 1$. Tu však splňuje pouze již zmíněná kružnice $|z| = 1$. Kružnice se tedy zobrazí sama na sebe.

Příklad

Zobrazte bod $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ v kruhové inverzi $w = \frac{1}{\bar{z}}$.

Řešení

Platí

$$w = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

Bod z je samodružný.

1.3.3 Zobrazení přímky

Pro zobrazení bodu $z \in \mathbb{C} - \{0\},\ z = x + y\,i,\ x, y \in \mathbb{R}$, v kruhové inverzi $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ můžeme odvodit obecný vzorec

$$f(z) = \frac{1}{x - y\,i} = \frac{x + y\,i}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2}\,i,$$

kde $f(z) = w$, $w = u + v\,i$, tedy $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{y}{x^2+y^2}$. Jedná se o zobrazení bodu $[x, y]$ z množiny $\mathbb{C}$ do bodu $[u, v]$ z množiny $\mathbb{C}$. Platí

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{u}{x} = \frac{v}{y},$$

inverzní zobrazení je tedy definováno pro složky u, v jako $x = \frac{u}{u^2+v^2}$, $y = \frac{v}{u^2+v^2}$.

Jak už víme, rozlišujeme dvě polohy přímky vůči určující kružnici, a sice kdy $z_0 \in p$ a $z_0 \notin p$. Přímku procházející středem kruhové inverze můžeme v případě $z_0 = [0, 0]$ napsat ve směrnicovém tvaru $y = kx$. Dosaďme nyní za x, y a dopočítejme obraz přímky p:

$$p: \quad y = kx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v}{u^2 + v^2} = k\,\frac{u}{u^2 + v^2} \qquad \Rightarrow \qquad q: \quad v = ku,$$

což je shodná přímka, poněvadž bod $z_0 = [0,0]$ a směrnice k zůstávají zachovány. Tedy $p = q$.

Speciálním případem je přímka $x = 0$, kde směrnice k není definovaná. Dosadíme za x a dopočítáme

$$p: \quad x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{u}{u^2+v^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q: \quad u = 0,\ v \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Přímka $x = 0$ se tedy zobrazí taktéž sama na sebe.

Příklad

Zobrazte přímku p, která prochází počátkem soustavy souřadnic $[0,0]$ a bodem $z_1 = 3 + q\,i$, $q \in \mathbb{R}$. Ověřte, zda se obraz rovná vzoru.

Řešení

Jestliže je směrový vektor přímky p roven $\overrightarrow{s_p} = (3,q)$, pak normálový vektor je ve tvaru $\overrightarrow{n_p} = (q,-3)$, tedy

$$p: \quad qx - 3y = 0.$$

Body na přímce p jsou např. $z_1 = 3 + q\,i$, $z_2 = 1 + \frac{q}{3}\,i$. Pak

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{1}{3 - q\,i} = \frac{3}{9+q^2} + \frac{q}{9+q^2}\,i, \\ f(z_2) &= \frac{1}{1 - \frac{q}{3}\,i} = \frac{1 + \frac{q}{3}\,i}{\frac{9+q^2}{9}} = \frac{9}{9+q^2} + \frac{3q}{9+q^2}\,i. \end{aligned}$$

Směrový vektor přímky $f(p)$ je roven

$$\overrightarrow{s_{f(p)}} = \left(\frac{6}{9+q^2}, \frac{2q}{9+q^2}\right) \approx (3,q),$$

tedy normálový vektor přímky je $\overrightarrow{n_{f(p)}} = (q,-3)$. Můžeme psát

$$f(p): \quad qx - 3y = 0.$$

V případě přímky neprocházející středem kruhové inverze jsou výpočty podobné. Směrnicový tvar takové přímky je $y = kx + q$, $q \neq 0$. Dosaďme i zde za x, y a dopočítejme

$$\begin{aligned} y &= kx + q, \\ \frac{v}{u^2+v^2} &= k\,\frac{u}{u^2+v^2} + q, \\ v &= ku + (u^2+v^2)q, \\ 0 &= qu^2 + qv^2 + ku - v. \end{aligned}$$

Upravme dále z obecného tvaru rovnice

$$\begin{aligned}
qu^2 + qv^2 + ku - v &= 0,\\
\left(u^2 + \frac{k}{q}u\right) + \left(v^2 - \frac{1}{q}v\right) &= 0,\\
\left(u^2 + \frac{k}{q}u + \frac{k^2}{4q^2}\right) - \frac{k^2}{4q^2} + \left(v^2 - \frac{1}{q}v + \frac{1}{4q^2}\right) - \frac{1}{4q^2} &= 0,\\
\left(u + \frac{k}{2q}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2q}\right)^2 &= \frac{k^2+1}{4q^2}.
\end{aligned}$$

Výsledkem je tedy rovnice kružnice, která prochází počátkem soustavy souřadnic, středem kružnice je bod $O\left[-\frac{k}{2q}, \frac{1}{2q}\right]$ a její poloměr $r_1 = \frac{\sqrt{k^2+1}}{2q}$.

Příklad

V kruhové inverzi $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ zobrazte přímku $p:\ 3x - 7y + 5 = 0$. U výsledné kružnice vyšetřete její střed a poloměr.

Řešení

Provádíme úpravy jako v předchozích případech

$$\begin{aligned}
3\,\frac{u}{u^2+v^2} - 7\,\frac{v}{u^2+v^2} + 5 &= 0,\\
5u^2 + 5v^2 + 3u - 7v &= 0,\\
\left(u^2 + \frac{3}{5}u\right) + \left(v^2 - \frac{7}{5}v\right) &= 0,\\
\left(u^2 + \frac{3}{5}u + \frac{9}{100}\right) - \frac{9}{100} + \left(v^2 - \frac{7}{5}v + \frac{49}{100}\right) - \frac{49}{100} &= 0,\\
\left(u + \frac{3}{10}\right)^2 + \left(v - \frac{7}{10}\right)^2 &= \frac{29}{50}.
\end{aligned}$$

Výsledkem je kružnice $l(O, r_1)$, kde $O\left[-\frac{3}{10}, \frac{7}{10}\right]$ a $r_1 = \frac{\sqrt{58}}{10}$.

1.3.4 Zobrazení kružnice

Polohu kružnice l taktéž rozlišujeme na dva případy, a sice kdy $z_0 \in l$ a kdy $z_0 \notin l$. Jak už víme (a máme dokázané), obrazem kružnice procházející bodem z_0 je přímka p, pro kterou platí $z_0 \notin p$.

Zbývá tedy v komplexní rovině dokázat, že kružnice neprocházející bodem z_0 se zobrazí na jinou kružnici se stejnou vlastností. K výpočtu využijeme vzorce pro zobrazení bodu z předchozího odstavce.

V komplexní rovině je dána kružnice $l_1(O_1, r_1)$, $O_1 = m + n\,i$ a libovoný bod kružnice $z = x + y\,i$. Rovnici kružnice můžeme zapsat ve tvaru

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r_1^2.$$

Středovou rovnici kružnice přepišme do obecného tvaru

$$\begin{aligned} x^2 - 2mx + m^2 + y^2 - 2ny + n^2 - r_1^2 &= 0, \\ x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0, \end{aligned}$$

kde $p = m^2 + n^2 - r_1^2$. Nyní zobrazme bod z v kruhové inverzi a výpočet upravme

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} - 2m\frac{u}{u^2+v^2} - 2n\frac{v}{u^2+v^2} + p &= 0, \\ \frac{1}{u^2+v^2} - \frac{2mu}{u^2+v^2} - \frac{2nv}{u^2+v^2} + p &= 0, \\ 1 - 2mu - 2nv + pu^2 + pv^2 &= 0, \\ u^2 + v^2 - \frac{2m}{p}u - \frac{2n}{p}v + \frac{1}{p} &= 0. \end{aligned}$$

Výsledkem může být kružnice $l_2(O_2, r_2)$, která neprochází bodem z_0. Abychom zjistili, že se jedná o kružnici, převedeme obecný tvar rovnice do středového tvaru

$$\begin{aligned} \left(u^2 - \frac{2m}{p}u\right) + \left(v^2 - \frac{2n}{p}v\right) &= -\frac{1}{p}, \\ \left(u^2 - \frac{2m}{p}u + \frac{m^2}{p^2}\right) - \frac{m^2}{p^2} + \left(v^2 - \frac{2n}{p}v + \frac{n^2}{p^2}\right) - \frac{n^2}{p^2} &= -\frac{1}{p}, \\ \left(u - \frac{m}{p}\right)^2 + \left(v - \frac{n}{p}\right)^2 &= \frac{m^2+n^2-p}{p^2}, \\ \left(u - \frac{m}{p}\right)^2 + \left(v - \frac{n}{p}\right)^2 &= \frac{r_1^2}{p^2}. \end{aligned}$$

Obrazem kružnice $l_1(O_1, r_1)$ je tedy kružnice $l_2(O_2, r_2)$, kde $O_2 = \frac{m}{p} + \frac{n}{p}\,i$ a $r_2 = \frac{r_1}{p}$.

Příklad

Zobrazte kružnici se středem v bodě $O = \frac{4}{5} + \frac{7}{10}\,i$ a poloměrem $r = \frac{1}{10}$ v kruhové inverzi $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. U obrazu vyšetřete střed a poloměr.

Řešení

Ze zadaných infomací můžeme napsat středovou rovnici kružnice

$$\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}.$$

Nyní ji upravme na obecnou rovnici

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{16}{25} + y^2 - \frac{14}{10}y + \frac{49}{100} &= \frac{1}{100}, \\ x^2 + y^2 - \frac{8}{5}x - \frac{7}{5}y + \frac{28}{25} &= 0. \end{aligned}$$

Dosaďme za x, y a upravme:

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} - \frac{8}{5} \cdot \frac{u}{u^2+v^2} - \frac{7}{5} \cdot \frac{v}{u^2+v^2} + \frac{28}{25} &= 0, \\ 1 - \frac{8}{5}u - \frac{7}{5}v + \frac{28}{25}u^2 + \frac{28}{25}v^2 &= 0, \\ u^2 + v^2 - \frac{10}{7}u - \frac{5}{4}v + \frac{25}{28} &= 0. \\ \left(u^2 - \frac{10}{7}u + \frac{25}{49}\right) - \frac{25}{49} + \left(v^2 - \frac{5}{4}v + \frac{25}{64}\right) - \frac{25}{64} + \frac{25}{28} &= 0, \\ \left(u - \frac{5}{7}\right)^2 + \left(v - \frac{5}{8}\right)^2 &= \frac{25}{3136}. \end{aligned}$$

Zadaná kružnice se tedy zobrazí na kružnici se středem v bodě $O' = \frac{5}{7} + \frac{5}{8}\,i$ a poloměrem $r' = \frac{5}{56}$.

1.3.5 Skládání kruhových inverzí

Posledním tématem, kterým se budeme v této práci zabývat, je skládání kruhových inverzí. V potaz budeme brát dva případy, a sice skládáme dvě kruhové inverze, když středy určujících kružnic splývají a když ne.

Jako první rozebereme případ, kdy $z_0 = z_1$ a $z_0 = z_2$, kde z_1, z_2 jsou středy určujících kružnic. Soustavu souřadnic zvolme tak, aby $z_0 = [0, 0]$. Pro lepší názornost zvolme poloměry určujících kružnic různé od 1, tedy $r_1 \neq 1, r_2 \neq 1$ a $r_1 \neq r_2$, poněvadž v případě dvou kružnic o stejném poloměru vznikne identita, jak už bylo psáno dříve. V komplexní rovině jsou dány dvě soustředné kružnice $l_1(z_0, r_1)$, $l_2(z_0, r_2)$. Zobrazení určené těmito kružnicemi jsou

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{r_1^2}{\overline{z}}, \\ f_2(z) &= \frac{r_2^2}{\overline{z}}. \end{aligned}$$

Jak víme, skládání zobrazení není komutativní, tedy uvažujme dva obrazy

$$\begin{aligned} (f_1 \circ f_2)(z) = \frac{r_2^2}{\overline{\left(\frac{r_1^2}{\overline{z}}\right)}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot z, \\ (f_2 \circ f_1)(z) = \frac{r_1^2}{\overline{\left(\frac{r_2^2}{\overline{z}}\right)}} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot z. \end{aligned}$$

Výsledkem je tedy vždy stejnolehlost se středem v bodě z_0. Koeficient stejnolehlosti se rovná podílu druhých mocnin poloměrů kružnic, kde čitatel i jmenovatel zlomku je závislý na pořadí skládání.

V druhém případě máme dvě nesoustředné určující kružnice. Jednu ze dvou kružic můžeme umístit do počátku soustavy souřadnic a její poloměr vzít jako jednotku, tedy dvě určující kružnice $k_1([0,0], 1)$, $k_2(z_0, r)$, kde $z_0 \neq [0,0]$, a zobrazení

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{\overline{z}}, \\ f_2(z) &= z_0 + \frac{r^2}{\overline{z - z_0}}. \end{aligned}$$

Výsledné zobrazení jsou ve tvaru

$$\begin{aligned} (f_1 \circ f_2)(z) = z_0 + \frac{r^2}{\overline{\frac{1}{\overline{z}} - z_0}}, \\ (f_2 \circ f_1)(z) = \frac{1}{\overline{z_0 + \frac{r^2}{\overline{z - z_0}}}}. \end{aligned}$$

Obě tyto složeniny nepopisují žádné běžně známé zobrazení. Jedná se o tzv. obecně lineárně lomené zobrazení s předpisem

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}; \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0.$$

Kruhová inverze, ale také další známá zobrazení, jako např. rotace a stejnolehlost, jsou podmnožinou obecně lineárně lomeného zobrazení ([6]).

Kapitola 2

Kruhová inverze a její využití

V této kapitole se budeme zabývat užíváním kruhové inverze v geometrii. Celou kapitolu si rozdělíme na dvě části.

V první části bude naším zájmem zkoumání Apolloniových úloh, ovšem ne z hlediska řešitelnosti, ale budeme sledovat využití kruhové inverze při postupu řešení těchto úloh.

V druhé části si vyjmenujeme některé další možné využití kruhové inverze. Nastíníme i možnosti využití kruhové inverze v praxi.

2.1 Apolloniovy úlohy

Mějme tři geometrické útvary: bod (B), přímku (p), kružnici (k). Vytvořme všechny možné tříprvkové kombinace s opakováním tvořené z těchto tří prvků. Naším úkolem je sestrojit takovou kružnici, která se dotýká všech tří zadaných geometrických útvarů.

Řešení těchto úloh lze dohledat v mnoha knihách, skriptech a především na internetu. Opětovným popisem postupů řešení nepřínášíme nic nového. Krom toho se tato práce vztahuje ke kruhové inverzi a nikoliv k Appolloniovým úlohám. Zmiňujeme je ovšem proto, protože nejčastější využití kruhové inverze je právě při řešení Apolloniových úloh.

Podívejme se na to tedy z jiné stránky. Kruhová inverze je vzájemně jednoznačné zobrazení. Jednomu bodu roviny odpovídá právě jeden bod roviny. Vezmeme-li ale obecně obraz přímky, resp. kružnice, nemůžeme s jistotou říci, na co se tento útvar zobrazí. Je to určitým způsobem jedinečná vlastnost tohoto zobrazení. Pokusme se toho využít. Naše zadání pracuje se třemi prvky, a sice s bodem, přímkou a kružnicí. Jak už bylo řečeno, bod zobrazí kruhová inverze na bod, ale přímku zobrazí na přímku, nebo kružnici a kružnici taktéž na přímku, nebo kružnici. Máme tedy jedinečnou možnost měnit pomocí kruhové inverze geometrické útvary mezi sebou, a tím zároveň měnit i zadání příkladu. Poněvadž, jak už víme, v kruhové inverzi platí, že dotýkají-li se dva geometrické útvary vzorů, dotýkají se i jejich obrazy. Změníme-li pomocí kruhové inverze geometrické útvary zadání a poté nalezneme kružnici odpovídající zadání Apolloniovy úlohy, tato kružnice se v téže kruhové inverzi zobrazí na kružnici, která splňuje podmínky v původním nezměněném zadání.

Rozdělme si tedy úlohy podle toho, kolik bodů se vyskytuje v zadání.

0 bodů	**1 bod**	**2 body**	**3 body**
ppp	Bpp	BBp	BBB
ppk	Bpk	BBk	
pkk	Bkk		
kkk			

Budeme se nyní snažit převést libovolné zadání do všech ostatních případů ve stejném sloupci tabulky.

Naším úkolem je nalezení středu kruhové inverze S tak, aby nám po zobrazení vzniklo jiné zadání. Poloměr kružnice už není určující, poněvadž mění pouze tvar výsledného obrazu, geometrické útvary zůstanou již zachovány. Volme střed S vždy tak, aby nebyl roven žádnému ze zadaných bodů B. Stále se pohybujeme v rovině M^2.

2.1.1 Tři body

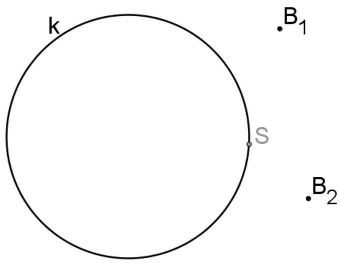
V tomto případě nemůže kruhová inverze pomoci, poněvadž se v zadání nevyskytuje žádná přímka ani kružnice pouze body. Zároveň zde máme jen jedno zadání. Převod na jiné zadání tedy není už jen z tohoto důvodu vůbec možný. Tímto případem se nebudeme více zbývat.

2.1.2 Dva body

B_1B_2k

Zde i v následujících příkladech už může kruhová inverze pomoci, poněvadž nepracujeme pouze s body, ale i s kružnicí (kružnicemi), resp. přímkou (přímkami). Musíme tedy toto zadání převést na jediný případ, a sice B_1B_2p. Kružnice se na přímku zobrazí tehdy, leží-li na ní střed kruhové inverze. Konkrétní polohy bodů B_1, B_2 nejsou pro zobrazení důležité. Můžeme tedy psát podle obr. 2.1

$$B_1B_2k \rightarrow B_1B_2p \;\Leftrightarrow\; S \in k.$$

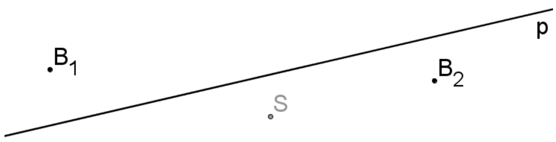


Obr. 2.1

B_1B_2p

Opětovně převádíme na jediný případ, a sice na zadání B_1B_2k. Střed kruhové inverze S volme tak, aby neležel na přímce p. Přímka se tak v kruhové inverzi zobrazí na kružnici. Jako v předchozím případě nemá poloha bodů B_1, B_2 vliv na výsledné zobrazení. Platí (obr. 2.2)

$$B_1B_2p \rightarrow B_1B_2k \;\Leftrightarrow\; S \notin p.$$



Obr. 2.2

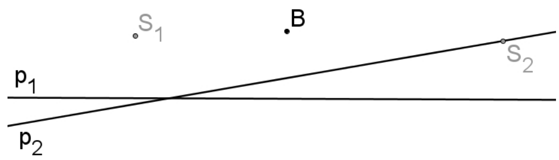
2.1.3 Jeden bod

Bp_1p_2

Jako první rozebere nejjednodušší ze tří případů, dvě přímky a jeden bod. Chceme-li přejít na zadání Bk_1k_2, volíme střed S tak, aby neležel ani jedné ze zadaných přímek. Pokud střed kruhové inverze umístíme na právě jednu z přímek, získáme tak zadání Bpk.

V tomto případě, na rozdíl od následujících, existuje vždy řešení, poněvadž nezáleží na tom, zda existuje průnik zadaných útvarů či ne. Sepišme poznatky (obr. 2.3)

$$Bp_1p_2 \to Bk_1k_2 \;\Leftrightarrow\; (S_1 \notin p_1 \wedge S_1 \notin p_2),$$
$$Bp_1p_2 \to Bpk \;\Leftrightarrow\; [(S_2 \in p_1 \vee S_2 \in p_2) \wedge (S_2 \notin p_1 \cap p_2)].$$



Obr. 2.3

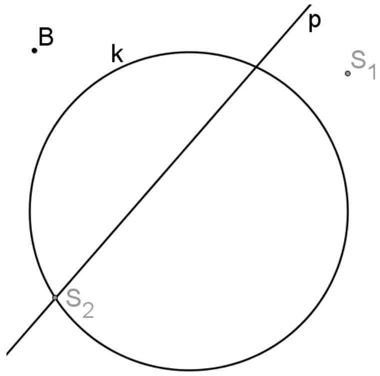
Bpk

Druhý případ je už poněkud složitější. Záleží totiž na konkrétním postavení zadaných útvarů. Bod S volíme tak, aby neležel na kružnici ani přímce, pokud chceme převést zadání do tvaru Bk_1k_2. Při převedení na případ Bp_1p_2 musí střed kruhové inverze ležet v průniku přímky a kružnice. Tento bod ovšem neexistuje, pokud přímka leží zcela vně zadané kružnice. Ne vždy lze tedy převést zadání Bpk na zadání Bp_1p_2. Těchto situací bude v dalších případech špíše přibývat. Píšeme podle obr. 2.4

$$Bpk \to Bk_1k_2 \;\Leftrightarrow\; (S_1 \notin p \wedge S_1 \notin k),$$
$$Bpk \to Bp_1p_2 \;\Leftrightarrow\; S_2 \in p \cap k.$$

Bk_1k_2

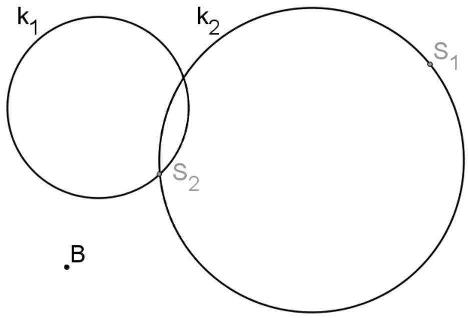
Třetí a poslední případ je podobný předchozímu. Pokud bod S leží na právě jedné ze zadaných kružnic, obrazem je zadání Bpk. Abychom dostali případ Bp_1p_2, musí střed kruhové inverze ležet v bodě průniku těchto dvou kružnic. Tento bod průniku



Obr. 2.4

ovšem nemusí vždy existovat. Tyto případy existence či neexistence průniků zadaných geometrických útvarů nebudeme v dalších zadáních zmiňovat. Zamyšlení nad konkrétním zadáním přenecháme čtenáři. Platí tedy (obr. 2.5)

$$Bk_1k_2 \to Bpk \;\Leftrightarrow\; [(S_1 \in k_1 \vee S_1 \in k_2) \wedge (S_1 \notin k_1 \cap k_2)],$$
$$Bk_1k_2 \to Bp_1p_2 \;\Leftrightarrow\; S_2 \in k_1 \cap k_2.$$



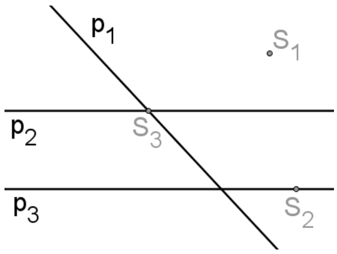
Obr. 2.5

2.1.4 Žádný bod

$\boldsymbol{p_1p_2p_3}$

V potaz nyní přichází zadání složená pouze z přímek a kružnic. Jako první rozebereme případ tří přímek. Zadání $k_1k_2k_3$ dostaneme, jestliže bod S zvolíme tak, aby neležel ani na jedné ze zadaných přímek. Naopak, pokud bod S leží na právě jedné přímce, po zobrazení získáme zadání pk_1k_2. Jako poslední zbývá průnik dvou zadaných přímek. Pokud bude střed kruhové inverze ležet v tomto průniku, dostaneme se k zadání p_1p_2k. Podle obr. 2.6 může psát

$$
\begin{aligned}
& p_1p_2p_3 \rightarrow k_1k_2k_3 \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;\; & (S_1 \notin p_1 \wedge S_1 \notin p_2 \wedge S_1 \notin p_3), \\
& p_1p_2p_3 \rightarrow pk_1k_2 \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;\; & [(S_2 \in p_1 \vee S_2 \in p_2 \vee S_2 \in p_3) \wedge (S_2 \notin p_1 \cap p_2 \wedge S_2 \notin p_1 \cap p_3 \wedge S_2 \notin p_2 \cap p_3)], \\
& p_1p_2p_3 \rightarrow p_1p_2k \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;\; & [(S_3 \in p_1 \cap p_2 \vee S_3 \in p_1 \cap p_3 \vee S_3 \in p_2 \cap p_3) \wedge (S_3 \notin p_1 \cap p_2 \cap p_3)].
\end{aligned}
$$

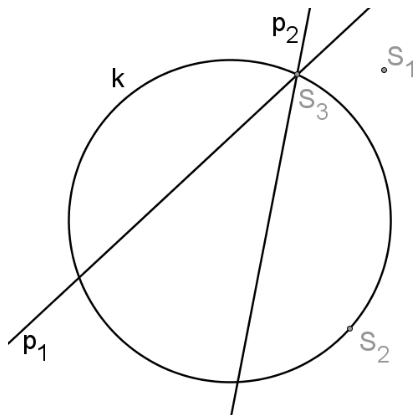


Obr. 2.6

$\boldsymbol{p_1p_2k}$

Jako další v pořadí rozebereme případ dvou přímek a jedné kružnice. Pokud střed kruhové inverze neleží ani na jednom ze zadaných geometrických útvarů, přejdeme tak k zadání $k_1k_2k_3$. Jestliže bod S leží na právě jedné z přímek, nebo na kružnici, dostaneme zadání pk_1k_2. Bod průniku všech tří útvarů volíme tehdy, chceme-li přejít na zadání $p_1p_2p_3$. Shrňme tedy poznatky (obr. 2.7)

$$
\begin{aligned}
& p_1p_2k \rightarrow k_1k_2k_3 \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;\; & (S_1 \notin p_1 \wedge S_1 \notin p_2 \wedge S_1 \notin k), \\
& p_1p_2k \rightarrow pk_1k_2 \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;\; & [(S_2 \in p_1 \vee S_2 \in p_2 \vee S_2 \in k) \wedge (S_2 \notin p_1 \cap p_2 \wedge S_2 \notin p_1 \cap k \wedge S_2 \notin p_2 \cap k)], \\
& p_1p_2k \rightarrow p_1p_2p_3 \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;\; & (S_3 \in p_1 \cap p_2 \cap k).
\end{aligned}
$$



Obr. 2.7

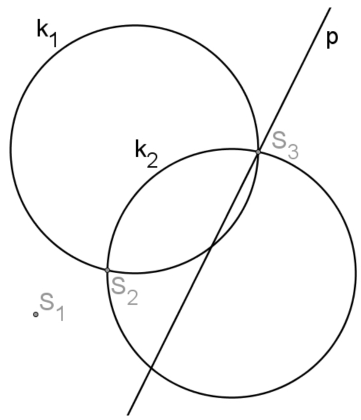
$\boldsymbol{pk_1k_2}$

I v případě přímky a dvou kružnic platí, že pokud chceme přejít na zadání $k_1k_2k_3$, musíme bod S volit tak, aby neležel ani na jednom ze zadaných geometrických útvarů. Pokud zvolíme za střed kruhové inverze průnik právě dvou zadaných útvarů, přejdeme tak na zadání p_1p_2k. Kruhová inverze se středem v průniku všech tří zadaných útvarů nám převede zadání do tvaru $p_1p_2p_3$. Tedy (obr. 2.8)

$$
\begin{aligned}
& pk_1k_2 \rightarrow k_1k_2k_3 \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;\; & (S_1 \notin p \wedge S_1 \notin k_1 \wedge S_1 \notin k_2), \\
& pk_1k_2 \rightarrow p_1p_2k \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;\; & [(S_2 \in p \cap k_1 \vee S_2 \in p \cap k_2 \vee S_2 \in k_1 \cap k_2) \wedge (S_2 \notin p \cap k_1 \cap k_2)], \\
& pk_1k_2 \rightarrow p_1p_2p_3 \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;\; & (S_3 \in p \cap k_1 \cap k_2).
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{k_1k_2k_3}$

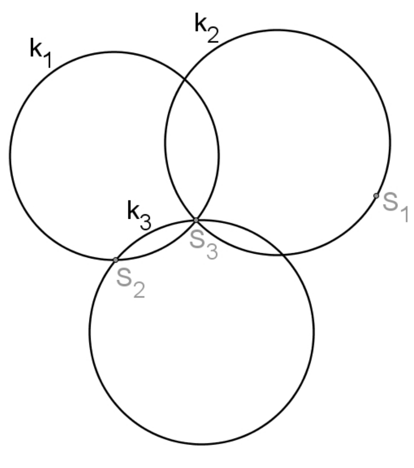
Jako poslední rozebereme případ tří kružnic. Pokud bod S leží na právě jedné ze zadaných kružnic, kruhová inverze převede zadání do tvaru pk_1k_2. Pokud leží bod S v průniku právě dvou ze zadaných kružnic, získáme zadání p_1p_2k. A jako poslední volíme za střed kruhové inverze průnik všech tří kružnic. Dostaneme tak zadání $p_1p_2p_3$. Ve všech třech zadáních lze sledovat určitou pravidelnost, např. pro převod na zadání tří kružnic leží bod S vždy mimo zadané geometrické útvary. Naopak leží-li střed kruhové inverze v průniku všech tří útvarů, dostaneme případ tří přímek. Hlubší zkoumání těchto



Obr. 2.8

pravidelností (i v předcházejících zadáních) přenecháme čtenáři. Můžeme podle obr. 2.9 psát

$$
\begin{aligned}
& k_1k_2k_3 \to pk_1k_2 \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;& [(S_1 \in k_1 \vee S_1 \in k_2 \vee S_1 \in k_3) \wedge (S_1 \notin k_1 \cap k_2 \wedge S_1 \notin k_1 \cap k_2 \wedge S_1 \notin k_2 \cap k_3)], \\
& k_1k_2k_3 \to p_1p_2k \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;& [(S_2 \in k_1 \cap k_2 \vee S_2 \in k_1 \cap k_3 \vee S_2 \in k_2 \cap k_3) \wedge (S_2 \notin k_1 \cap k_2 \cap k_3)], \\
& k_1k_2k_3 \to p_1p_2p_3 \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\;& (S_3 \in k_1 \cap k_2 \cap k_3).
\end{aligned}
$$



Obr. 2.9

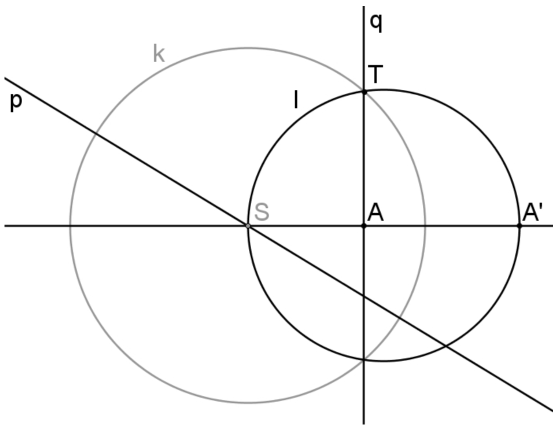
Ukázali jsme si, jak lze z jakéhokoliv zadání Appoloniovy úlohy přejít do jiného zadání se stejným počtem zadaných bodů. Jak už bylo psáno výše, ne všechny změny lze vždy provést, poněvadž nemusí vždy existovat průniky některých zadaných geometrických útvarů, které jsou nezbytné pro převod do jiného zadání.

2.2 Další využití kruhové inverze

V poslední části této práce si ukážeme další využití kruhové inverze v příkladech. Pokusíme se úvest i některá přirovnání do praxe, kdy se dají postupy z těchto příkladů využít. Všechny tyto příklady lze dohledat v [7].

1. příklad *V rovině je dána samodružná přímka p, bod A a jeho obraz A', kde $A \neq A'$. Vyšetřete určující kružnici k a střed S kruhové inverze.*

Je zřejmé, že bod S leží na přímce p. Stejně tak musí ležet i na přímce AA'. Tedy $S \in p \cap AA'$. Bodem A' prochází tečna k určující kružnici k. Pokud tedy sestrojíme Thaletovu kružnici l nad průměrem SA', musí na ní ležet bod T (bod dotyku tečny). Stačí sestrojit kolmici q k přímce AA', která prochází bodem A. Platí, že $T \in q \cap l$, tedy $k(S, |ST|)$ (obr. 2.10).



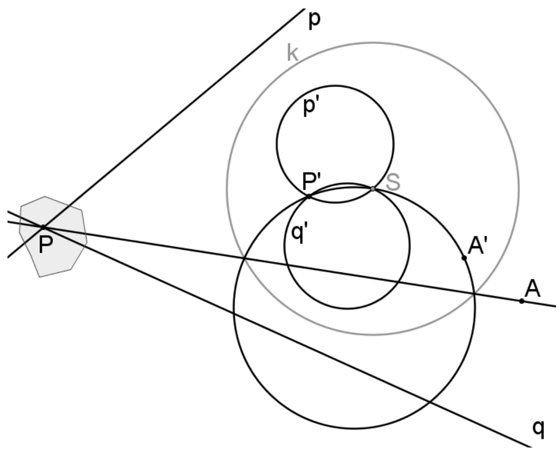
Obr. 2.10

Kruhová inverze se řídí pomocí určující kružnice $k(S, r)$, jak bylo psáno v první kapitole této práce. Chceme-li v zadané kruhové inverzi zobrazovat geometrické útvary, je pro nás nezbytné znát tuto určující kružnici. Tento příklad nás měl naučit, jak určující kružnici nalezneme, známe-li pouze některé výsledné vzory a obrazy kruhové inverze. Samozřejmě existuje více podobných zadání, ze kterých se dá zjistit určující kružnice, jako např. známe-li pouze body (vzory) A, B a (obrazy) A', B'. Další případy v této práci neuvádíme. Zamyšlení nad nimi přenecháváme čtenáři.

2. příklad *V rovině jsou dány dvě různoběžky p, q, jejichž průsečík P je nepřístupný. Je dán libovolný bod A. Sestrojte přímku PA.*

Různoběžné přímky v rovině mají jeden společný bod. Tato vlastnost je zachována, i když tento průsečík není přístupný. Zobrazíme-li tedy přímky p, q v kruhové inverzi se středem v bodě S, kde $S \notin p \wedge S \notin q$, a libovolným poloměrem, získáme tím dvě kružnice p', q', které se protínají ve dvou bodech, a sice S a P'. Poloměr určující kružnice k lze volit tak, aby bod P' byl přístupný. Zároveň získáme obraz A' bodu A. Kružnice dána třemi body S, P', A' se zobrazí na přímku PA. Tento postup je zobrazen na obr. 2.11.

Lze postupovat i tak, že $S = A$. Postup je stejný, akorát hledaná přímka PA má v kruhové inverzi jako obraz přímku a nikoliv kružnici, poněvadž prochází středem kruhové inverze. Obrazem je tedy přímka $P'A$, která je ovšem samodružná.



Obr. 2.11

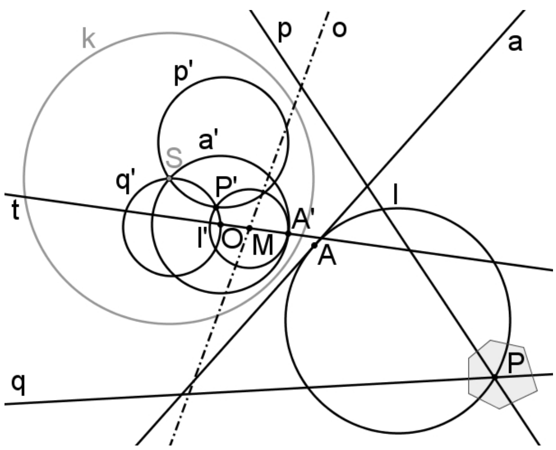
Příklad v praxi

Pan Štětečka, malíř z povolání, který se právě stal otcem, se rozhodl vyzdobit narychlo dětský pokojíček. Rozhodl se namalovat na strop místnosti duhu, ovšem v trochu netradičním stylu. Nakreslil na strop místnosti dvě různoběžné přímky s nepřístupným průsečíkem, čímž rovinu stropu rozdělil na tři části. V každé z těchto částí zvolil náhodně jeden bod a těmito body vedl další přímky, které prochází nepřístupným průsečíkem. Ve výsledku je tedy strop rozdělen na šest částí svazkem pěti přímek, jejichž průsečík je nepřístupný. Pan Drahuš nakonec tyto jednotlivé části postupně vymaloval barvami duhy, a sice červenou, oranžovou, žlutou, zelenou, modrou a fialovou.

Strop pana Štětečky je znázorněn v obrazové příloze 1.

3. příklad *V rovině jsou dány dvě různoběžky p, q s nepřístupným průsečíkem P. Je dána přímka a a bod A, kde $A \in a$. Sestrojte kružnici l takovou, že se dotýká přímky a v bodě A a prochází bodem P.*

Zvolme určující kružnici kruhové inverze $k(S, r)$ s libovolným poloměrem r, kde $S \notin p \wedge S \notin q \wedge S \notin a$. Získáme kružnice a', p', q', které jsou popořadě obrazy přímek a, p, q. Označme bod $P' \in p' \cap q'$ a $P' \neq S$. Zároveň se bod A zobrazí do bodu $A' \in a'$. Hledáme takovou kružnici l', která prochází bodem P' a dotýká se kružnice a' v bodě A'. Střed této kružnice leží na ose o úsečky $P'A'$ a na přímce $A'O = t$, kde O je střed kružnice a'. Můžeme tedy psát $l'(M, |MP'|), M \in o \cap t$, kde l' je obrazem, resp. vzorem hledané kružnice l (obr. 2.12).



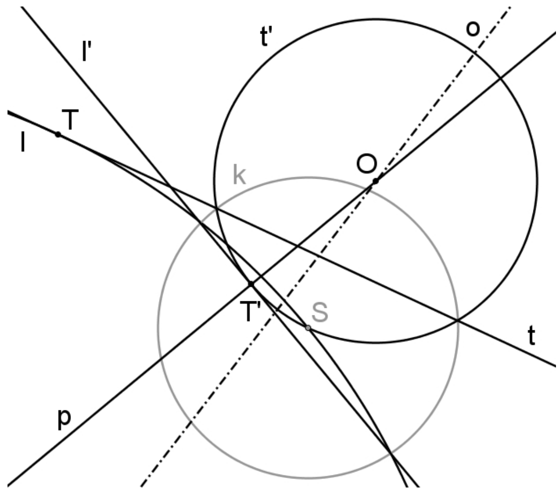
Obr. 2.12

4. příklad *V rovině je dána kružnice l, kde přístupný je pouze oblouk této kružnice. Střed zadané kružnice je nepřístupný. Na oblouku je dán bod T. Veďte bodem T tečnu t ke kružnici l.*

Zvolme střed kruhové inverze tak, aby obrazem zadané kružnice byla přímka. Tedy $S \in l$. Poloměr určující kružnice není podstatný. Získáme přímku l' a na ní bod T'.

Obrazem, resp. vzorem kružnice t' dotýkající se přímky l' v době T' a procházející bodem S, bude hledaná tečna t. Střed kružnice t' leží v průniku osy o úsečky ST' a kolmice p k přímce l', která prochází bodem T'. Můžeme tedy psát $t'(O, |OS|)$ (obr. 2.13).

Pokud zvolíme na začátku $S \notin l$, bude l' kružnice a nikoliv přímka. Střed kružnice t' poté leží na průniku již zmíněné osy o a přímky $P'T'$, kde P' je střed kružnice l'.



Obr. 2.13

Příklad v praxi

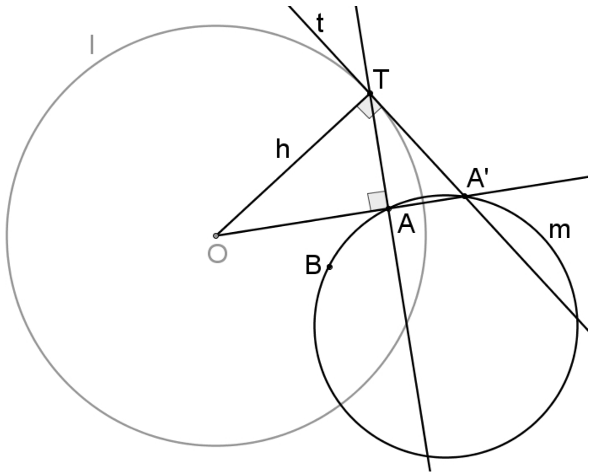
Paní Motyčková, členka spolku Úspešný zahrádkář, si na své zahradě vytyčila obdélníkový záhonek ze tří stran ohraničený plotem. Ráda by zde pěstovala nějaké pestré okrasné květiny. Rozhodla se rozdělit záhonek pomyslnou přímkou na dvě části a do každé takto vzniklé části vymodelovat část kružnice tak, aby pomyslná dělící přímka byla tečnou ke každé z kružnic. Na pomyslné přímce vyznačila dva body (body dotyku kružnic) a v každé polovině záhonu libovolně zvolila bod, kterým má kružnice procházet. Body ovšem zvolila tak, že středy obou kružnic zcela určitě nebudou ležet ve vymezém záhonu.

Nakonec se jí za pomoci kruhové inverze kružnice podařilo nalézt. Obě kružnice i přímku dělící záhon na dvě části vyznačila malými kamínky. Barevné květiny, které zde poté rostly, byly okrasou celé její velké zahrady.

Přibližný náčrt záhonu paní Motyčkové je zobrazen v obrazové příloze 2.

5. příklad *V rovině je dána kružnice $l(O, h)$ a dva její vnitřní body A, B, kde $A \neq B$. Nalezněte kružnici m takovou, aby procházela body A, B a byla ortogonální k zadané kružnici l.*

Orotognální kružnice ke kružnici určující je samodružná. Pokud tedy kružnici l zvolíme jako určující kružnici kruhové inverze, musí platit, že bod A, resp. B se zobrazí na bod A', resp. B', který náleží hledané kružnici. Stačí tedy zobrazit např. bod A podle kružnice l a poté kružnice dána body A, A', B je hledanou kružnicí (obr. 2.14).



Obr. 2.14

Příklad v praxi

Hvězdář Obložný si na svůj dům vyrobil krásné sluneční hodiny. Nakreslil na jižní stěnu svého domu velikou kružnici, do jejíž vnitřní části, dál od země, připevnil kratší ocelový prut, který na hodiny ve slunném letním počasí vrhal stín. Zdlouhavým pozorováním přibližně vyznačil jednotlivé denní hodiny. Vypočítal, že průměrně slunce během léta vychází kolem páté hodiny ranní a zapadá přibližně v devět hodin večer. Rozhodl se rozdělit sluneční hodiny na dvě části pomocí oblouku kružnice vepsaného do slunečních hodin. Ten se rozhodl umístit do kružnice hodin tak, aby procházel právě body, které představují přibližný čas letního východu a západu slunce, tedy 6. a 21. hodina, a zároveň bude oblouk ortogonální ke kružnici slunečních hodin.

Po krátkém čase bohužel zjistil, že tento hledaný oblouk bude značně rozměrný a že jeho střed určitě nebude ležet na ploše stěny domu. Naštěstí znal kouzlo kruhové inverze, která mu pomohla problém vyřešit. Po zhotovení naplánované práce ještě vyzdobil část rozdělené kružnice slunečních hodin jako měsíc a druhou část jako slunce. Sluneční hodiny se poté staly chloubou nejen rodiny Obložných, ale i celé vesnice.

Výsledný výtvor pana Obložného naleznete v obrazové příloze 3.

Případů užití kruhové inverze je samozřejmě celá řada. Více jich v této práci prezentovat nebudeme. Snahou bylo především uvést vzorové příklady, které můžeme případně využít i v běžném životě, jak napovídají praktická přirovnání na koncích školních příkladů.

Závěr

Dostal jsme se k závěru této práce. Nyní se podívám do úvodní části na cíle, které jsem si předurčil. Mojí úlohou bylo sepsat definici kruhové inverze, popsat a dokázat její vlastnosti, vše v rovině syntetické a analytické s komplexní proměnnou, a k tomu uvést početní příklady s užitím kruhové inverze.

V první části první kapitoly jsem uvedl syntetickou definici kruhové inverze. Za touto definicí jsem dokázal mnohé vlastnosti, které lze dohledat v odkázané literatuře. První část jsem doplnil i o analytický předpis. V druhé části první kapitoly píši o kruhové inverzi jako o komplexní funkci s komplexní proměnnou. Hned v úvodu jsem opět uvedl definici kruhové inverze odpovídající rovině analytické s komplexní proměnnou. Dále následují důkazy vlastností kruhové inverze, u kterých jsem již uvedl příklady. V druhé kapitole jsem opustil stránku teoretickou a v první část jsem věnoval Apolloniovým úlohám. Řešil jsem je z pohledu, jak by mohla kruhová inverze pomoci při řešení těchto příkladů. V druhé části jsou uvedeny některé další příklady. Práci jsem proložil množstvím obrázků, které zachycují důležité případy a příklady k lepšímu pochopení textu.

Předtím, než jsem začal psát tuto práci, jsem měl tři hlavní myšlenky: sjednotit všechny dostupné informace o kruhové inverzi, převod mezi jednotlivými zadáními v Apolloniových úlohách a uvedení příkladů, které by se daly aplikovat i do praktického života. Myšlenka sjednocení je až na pár nedostatků dotažena do konce (o dalších možných rozšířeních práce níže). Část o Apolloniových úlohách bych považoval za nejzdařenější a zřejmě i nejvíce odpovídá mým původním představám. Nejvíce úsilí mě ovšem stála část s praktickými úlohami. Zjistil jsem, že kruhová inverze nemá až zas tak velké uplatnění v příkladech, které by se daly aplikovat i prakticky. V práci je pár takových příkladů, u kterých uvádím i praktické případy, ovšem tento počet ani zdaleka neodpovídá mým původním představám.

Svůj vlastní přínos vidím bez pochyby v oddíle, kde se zabýváme Apolloniovými úlohami. Při řešení těchto úloh na vysoké škole jsem se velice často setkal s využitím kruhové inverze, ale nikde jsem nenašel soupis těchto poznatků. Není to žádná hluboká vědecká práce, je potřeba si pouze uvědomovat veškeré situace, které mohou v zadáních nastat. Výsledek se mi zdá dobrý. Myslím, že takovéto zpracování tohoto tématu by určitě našlo využití v hodinách matematiky, např. při studiu Apolloniových úloh.

Jako druhý přínos bych označil právě sjednocení mnoha informací. Je mnohem praktičtější nalézt veškeré informace v jedné literatuře, kde jsou poznatky řazeny a spojovány logicky za sebe, než vybírat jednotlivé části z mnohých odborných knich a vše si poté muset logicky provázat. Tento přínos bych ale viděl ve stínu Apolloniových úloh, poněvadž se domnívám, že jsem zcela neobsáhl veškeré znalosti o kruhové inverzi. Uvedu konkrétní případy.

V úvodu se zmiňuji o koeficientu kruhové inverze λ, který může nabývat i záporných hodnot. Rozhodl jsme se nezkoumat tyto případy, poněvadž se jedná o složení středové souměrnosti (která není obsahem této práce) a již popsané kruhové inverze. Dalším rozšířením by mohla být exkurze do vyšších prostorů. Kulová inverze v trojrozměrném prostoru a vyšší sférické inverze. Ani těmito tématy jsem se nezabýval, poněvadž jsme pracoval v E^2, případně v M^2. Jistě by se našla i další témata, kterými by se práce mohla obohatit.

Nejslabší část vidím samozřejmě v úlohách s využitím kruhové inverze. Těchto úloh není mnoho, jsou většinou tematicky podobné, ne-li téměr stejné. Samozřejmě jsem se snažil vybírat úlohy tematicky odlišné. Výsledkem toho je nízký počet úloh uvedených v této práci. Ani pokusy o přirovnání k praktickým úlohám bych nehodnotil jako zcela dostačující.

Věřím a doufám, že i přes veškeré nedostatky, které tato práce určité má, se najde pro tyto řádky využití nejen při hodnocí výsledků této práce, ale také např. při studentské přípravě do hodin matematiky, při snaze seznámit někoho s tímto tématem, nebo snad jen jako pomocný text, do kterého aspoň někdy někdo při řešení matematické úlohy nahlédne.

Tuto práci bych na úplný závěr rád ukončil poněkud netypicky, a sice s úsměvem na rtech. Zapomeňme na chvíli na všechny poznatky, informace a odvozené vzorce, a zkusme se na téma kruhové inverze podívat trochu s humorem. Jako poslední uvedu příklad na využití kruhové inverze.

Byl jednou jeden farmář, který potřeboval ohradu pro svoje ovce. Chtěl ale, aby ohrada byla co nejkratší a ohrazený prostor byl co největší. Na pomoc si zavolal inženýra, fyzika a matematika.

Inženýr postavil kruhovou ohradu a dodal, že úspornější způsob neexistuje. Fyzik postavil dlouhou zeď a prohlásil, že můžeme předpokládat, že je někonečně dlouhá. Nakonec přišel matematik. Chvíli přemýšlel, pak kolem sebe postavil malou ohrádku a řekl: „Já jsem venku a vše, co je za plotem, je uvnitř ohrady.“

Literatura

[1] BOČEK, L.; ZHOUF, J. *Máte rádi kružnice?*. Praha : Prometheus, 1995. Kruhová inverze, s. 21–28.

[2] SEKANINA, M., et al. *Geometrie II*. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1988. Sférická inverze, s. 83–89.

[3] KUŘINA, F. *Deset geometrických transformací*. Praha : Prometheus, 2002. Kruhová inverze, s. 226–243.

[4] JEVGRAFOV, M.A. *Funkce komplexní proměnné*. Ladislav Průcha. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1981. Lomené lineární zobrazení, s. 164–169.

[5] LÁVIČKA, M. *Syntetická geometrie : Pomocný učební text k předmětu KMA/SG*. Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 2007. Kruhová inverze, s. 116–122.

[6] MÜLLEROVÁ, J. *Komplexní čísla : pro III. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku*. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1989. Funkce komplexní proměnné, s. 53–70.

[7] TOMICZKOVÁ, S. Oddělení Geometrie - Katedra matematiky ZČU [online]. [cit. 2011-02-21]. Oddělení Geometrie. Dostupné z WWW: http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/download/225/658/file/SG8.pdf.

Další literatura

VESELÝ, J. *Komplexní analýza pro učitele*. Praha : Karolinum, 2000. Lineární lomená funkce, s. 198–210.

ŠULISTA, M. *Základy analýzy v komplecním oboru*. Praha : Nakladatelství technické literatury, 1981. Kruhová inverze, lineární a lineární lomená funkce, s. 86–93.

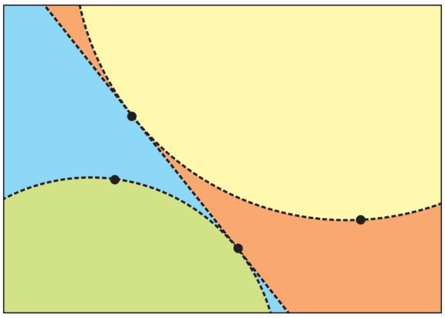
JEVGRAFOV, M.A. *Sbírka úloh z teorie funkcí komplexní proměnné*. V. Maňasová, A. Něničková, E.Nováková. Praha : Nakladatelství technické literatury, 1976. Lineární lomená funkce, s. 379–387.

ČERNÝ, I. *Strzčný úvod do teorie funkcí komplexní proměnné*. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1983. Některé důležité funkce, s. 31-45.

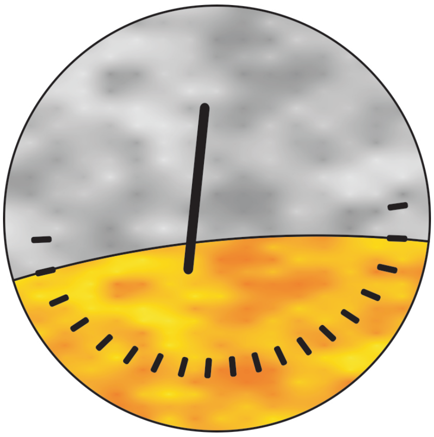
CALDA, E. *Matematika pro gymnázia : Komplexní čísla*. Praha : Prometheus, 2004. 134 s.

Obrazové přílohy

Příloha 1



Příloha 2



Příloha 3