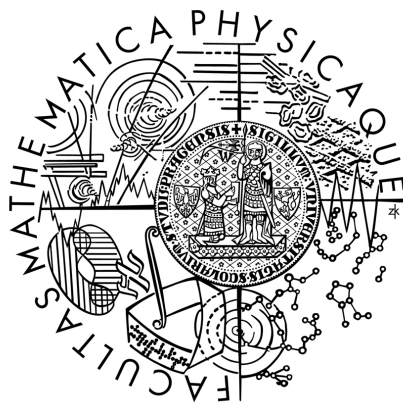


UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE  
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA

# OBJEM TĚLES

Bakalářská práce

Monika Tvrdá



302. Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

Studijní program: Chemie

Studijní obor: Chemie a matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2011

Ráda bych na tomto místě poděkovala Mgr. Zdeňku Halasovi, DiS., Ph.D. za pomoc a vedení mé bakalářské práce a dále zapůjčení veškeré literatury, protože bez toho by tato práce nevznikla.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 26. 5. 2011

Podpis autora

Název práce: Objem těles

Autor: Monika Tvrdá

Katedra: 302. Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., 302. Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato didakticky zaměřená bakalářská práce se zabývá přiblížením původu vztahů pro objemy těles probíraných na střední škole studentům na úrovni střední a vysoké školy. V úvodu ukazuje historický význam objemů těles a postupy, jichž bylo při jejich výpočtech využíváno ve starověkém Egyptě a Mezopotámii. Práce se dále zabývá definicí pojmu objem tělesa, při jeho vysvětlení využívá Jordanovu míru. Vztahy pro objemy vybraných těles jsou odvozeny na základě integrálního počtu. Na závěr jsou prezentovány jiné způsoby odvození těchto vztahů. Zaprvé metodou, již vymyslel ve starověkém Řecku Archimédés ze Syrakús, dále pak pomocí názorných představ a Cavalieriova principu.

Klíčová slova: objem, Archimédés, integrál, funkce více proměnných

Title: Volume of solids

Author: Monika Tvrdá

Department: 302. Department of Mathematics Education

Supervisor: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., 302. Department of Mathematics Education

Abstract: This didactic oriented bachelor project helps to approach an origin of relations for the volumes of solids taught at high school. It is focused on high school and university students. At the beginning the project shows historical meaning of the volumes of solids and the processes which were used to enumerate them in the ancient Egypt and Mesopotamia. Further, the project deals with the definition of volume of solids; it is based on Jordan's measure. The relations for volumes of the sorted solids are derived using the integral calculus. In the end the other ways of deriving of these relations are shown. At first, it is the method that Archimedes from Syracuse invented, furthermore by the visual imaginations and the Cavalieri's principle.

Keywords: volume, Archimedes, integral, functions of several variables

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Objemy těles ve starověku</b>	<b>3</b>
1.1 Egypt	3
1.1.1 Aritmetika	3
1.1.2 Jednotky objemu	4
1.1.3 Úlohy	4
1.2 Mezopotámie	5
1.2.1 Aritmetika	5
1.2.2 Jednotky objemu	6
1.2.3 Úlohy	6
<b>2 Míra množiny</b>	<b>8</b>
2.1 Definice objemu	8
2.2 Jordanova míra	9
<b>3 Riemannův integrál</b>	<b>17</b>
3.1 Definice Riemannova integrálu	17
3.2 Výpočet integrálu	19
<b>4 Výpočty objemů těles pomocí integrálů</b>	<b>20</b>
4.1 Jednoduchý integrál	20
4.1.1 Objem jehlanu se čtvercovou podstavou	20
4.1.2 Objem rotačního tělesa	21
4.2 Trojný integrál	25
4.2.1 Válcové (cylindrické) souřadnice	25
4.2.2 Sférické souřadnice	26
4.2.3 Přehled vzorců	28
<b>5 Odvození vzorců bez použití integrálů</b>	<b>29</b>
5.1 Archimédés	29
5.1.1 Odvození některých Archimédových tvrzení	31
5.2 Jiné postupy	36
5.2.1 Objem jehlanu	36
5.2.2 Vzorce odvozené na základě Cavalieriova principu	37
<b>Závěr</b>	<b>40</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>41</b>

# Úvod

Výpočty objemů těles zajímaly matematiky již ve starověkém Egyptě a Mezopotámii, což dokazují mnohé úlohy s touto tematikou objevující se v nalezených dobových materiálech. Postupy, jak objemy určit, i následné výpočty byly důležité zejména v zemědělství a stavebnictví. Typicky byl určován objem sýpek nejrůznějších tvarů či objem zeminy nutné k vykopání při stavebních pracích. Největším problémem těchto úloh většinou nebylo samotné určení objemu, ale následný převod jednotek, který byl vzhledem k jejich velkému množství mimořádně komplikovaný.

Pokud chceme zkoumat objemy těles, je důležité stanovit, co pojmem objem tělesa matematicky rozumíme. Z tohoto důvodu je zaveden pojem míra. V našem textu pracujeme s Jordanovou mírou, která je pro potřebu definování objemu dostačující a je méně komplikovaná než Lebesguova míra. V kapitole o míře ukazujeme, že tělesa jsou měřitelnými množinami a tak je možné nalézt jejich objem. Navíc odvodíme, že objem je aditivní a tak je možné určit objem tělesa jako součet objemů jeho částí.

Pro výpočty objemů těles využíváme integrálního počtu, a to obecně trojného integrálu. Teorie zavedení trojného integrálu je postavena na vystavěné teorii míry. Odvození vztahů pomocí integrálů v případě jednoduchých těles probíraných na střední škole ukazujeme pomocí jednoduchého integrálu, a to přes vztah pro objem rotačního tělesa. Dále jsou uvedena odvození těchto vztahů pomocí trojného integrálu, neboť je tento postup obecnější a tak aplikovatelný i na jiná než rotační tělesa.

Závěrečná kapitola ukazuje jiné postupy určení vztahů pro objemy těles než pomocí integrálního počtu. Vztah pro objem jehlanu lze didakticky ukázat velmi názorně pomocí dělení krychle a kvádrů na jehlany o stejném objemu, což podporuje jeho využití ve školské matematice. Významnou částí této kapitoly jsou výsledky prací Archiméda ze Syrákús. Jeho jedinečná metoda odvození objemů těles je založená na principu rovnováhy na páce. Pomocí této metody ukazujeme odvození vztahu pro objem rotačního paraboloidu a koule. Na závěr ukážeme odvození vztahu pro kužel a kouli pomocí Cavalieriova principu.

# 1. Objemy těles ve starověku

Potřeba počítat objemy těles není novodobou záležitostí. Objevuje se už v nejstarších dochovaných matematických písemných záznamech.

V úvodu je třeba zmínit, že naše současné znalosti starověké matematiky jsou založeny na zkoumání dochovaných materiálů, jichž se našlo žalostně málo. Tudíž je obtížné soudit, do jaké míry tyto texty tehdejší znalost matematiky skutečně reprezentují. Navíc není jisté, zda případné chyby ve výpočtech byly založeny na neznalosti nebo byly způsobeny pouhou chybou při přepisu.

Pro ukázkou výpočtu objemů těles budeme uvádět úlohy z [1].

## 1.1 Egypt

„Metoda počítání čtverhranné obilnice, jejíž délka je 10, šířka 10 a výška 10. Co je to, co do ní vejde v obilí? Počítej s 10 10krát, vyjde 100. Počítej se 100 10krát, vyjde 1000. Připočti  $\frac{1}{2}$  z 1000, je to 500, vyjde 1500. To je její objem v char.<sup>1</sup> Vypočti  $\frac{1}{20}$  z 1500, vyjde 75. To je to, co do ní vejde.“

Výše uvedená úloha z Rhindova papyru (19. století př. n. l.) názorně ukazuje, že ve starověkém Egyptě byla potřeba počítat objemy. Šlo například o tzv. *čtverhranné obilnice* (krychle, kvádr) a *kruhové obilnice* (válec); méně obvyklým tělesem, jehož objem uměli Egypťané spočítat, byl komolý jehlan – *komolá pyramida*. Egypťané dále operovali s jehlanem (*pyramidy*), u něj však nezjišťovali objem, ale sklon stěny nebo jeho výšku.

Egyptská matematika musela být na značně vysoké úrovni již v době staveb prvních pyramid, tj. v polovině třetího tisíciletí př. Kr. Řeční autoři (Hérodotos, Proklos) soudili, že se i Řekové geometrii naučili právě od Egypťanů. Geometrie podle nich vznikla v Egyptě z ustavičné potřeby přeměřovat půdu po každoročních záplavách způsobených rozvodněným Nilem.

### 1.1.1 Aritmetika

V Egyptě byla od nejstarších dob užívána nepoziční desítková soustava. Přirozená čísla byla zaznamenávána prostým nahromaděním potřebných znaků.

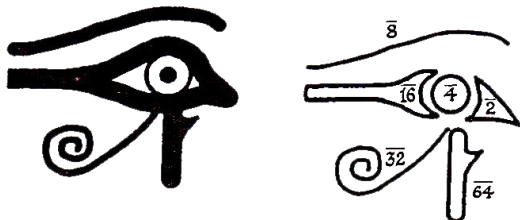
Egypťané uměli sčítat, odčítat, násobit i dělit. Násobení a dělení prováděli poměrně osobitou metodou. Při násobení postupovali tak, že jednoho z činitelů postupně zdvojnásobovali a jeho vhodné násobky potom sečetli. Při dělení postupně zdvojnásobovali dělitele, dokud z těchto jeho vhodných násobků nesložili dělence.

---

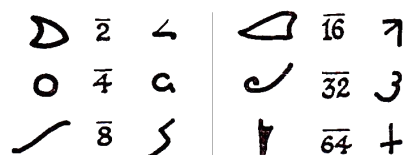
<sup>1</sup>Jednotka *char* odpovídá přibližně 96,1 litru.

## 1.1.2 Jednotky objemu

Základem dutých měř byla jednotka *hekat*, která odpovídala asi 4,8 litru; velmi často byly při dělení této jednotky užívány *části Horova oka* tzv. *Horovy zlomky* (viz Obrázek 1.1 a 1.2), tj.  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{32}$  a  $\frac{1}{64}$ , které byly v praxi výhodné při půlení i zdvojování.



Obrázek 1.1: Horovo oko a jeho části



Obrázek 1.2: Zlomky jednotky *hekat*

Pro úplnost uvedeme, že jednotka *hekat* se dělila na 10 *hinů* a jeden *hin* na 32 *ro*. Užívána byla i jednotka *char* (viz úloha v úvodu textu), která obsahovala 20 jednotek *hekat*.

## 1.1.3 Úlohy

Nyní uvedeme tři základní úlohy, na kterých demonstrujeme tělesa, jejichž objem Egypťané počítali. Nutno poznamenat, že samotný výpočet objemu obvykle nebyl zdaleka tak složitý jako následný převod jednotek.

**Úloha 1.1.1 (Krychle a kvádr)** V příkladu z úvodního odstavce je prezentován výpočet objemu kvádrů o rozměrech 10, 10 a 10 loktů (tj. krychle). Vynásobením všech tří rozměrů vyjde 1000 loktů krychlových. Následný výpočet už reprezentuje právě jen převody jednotek. Nejprve z loktů krychlových na chary, poté je vypočten objem obilnice ve dvacetinásobných jednotkách – snad vozík.

**Úloha 1.1.2 (Válec)** Také objem válce počítali Egypťané standardním způsobem, obsah základny vynásobili výškou. Zajímavé je, jakým způsobem vypočítali obsah kruhové základny. Egyptský výpočet obsahu  $S$  kruhu o průměru  $d$  odpovídá v naší symbolice vzorci

$$S = \left(d - \frac{1}{9} \cdot d\right)^2 = \left(\frac{8}{9} \cdot d\right)^2 = \frac{64}{81} \cdot d^2.$$

Srovnáme-li náš vzorec pro výpočet obsahu kruhu o průměru  $d$  se vzorcem odpovídajícím egyptskému výpočtu, dojdeme k rovnosti

$$\frac{1}{4}\pi \cdot d^2 = \frac{64}{81} \cdot d^2$$

a získáme „egyptskou hodnotu“ čísla  $\pi$ :

$$\pi = \frac{256}{81} \doteq 3,1605.$$



Egyptané tedy přibližně nahradili obsah kruhu obsahem čtverce; jeho stranu nebylo těžké získat, stačilo odebrat od průměru kruhu jeho jednu devítinu.

**Úloha 1.1.3 (Komolý jehlan)** Egyptané znali zcela přesný postup pro výpočet objemu komolého jehlanu se čtvercovými základnami odpovídající našemu vzorci:

$$V = \frac{h}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2),$$

kde  $a$ ,  $b$  jsou strany dolní a horní základny a  $h$  je výška. Zajímavé je, že se řada historiků matematiky domnívá, že tato metoda výpočtu byla odvozena teoreticky, což je pro egyptskou matematiku netypické.

## 1.2 Mezopotámie

„Koryto. (3, 20) hlava, (2, 30) základ,  $\frac{2}{3}$  lokte hloubky. Objem je co?  
 Ty: (3, 20) a (2, 30) sečti. (5, 50) vidíš.  $\frac{1}{2}$  z (5, 50) odečti, (2, 55).  
 (2, 55) s (5), délka, násob. (14, 35) vidíš ... (0, 40), výška, násob. (9, 43; 20) vidíš ...“

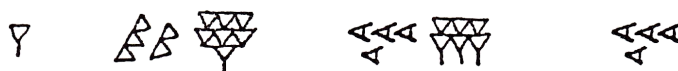
Výše uvedená úloha se vztahuje k výpočtu objemu koryta pro uschování obilí a můžeme ji najít v matematických tabulkách uložených v Londýně (*British Museum*).

Tabulky, které obsahují praktické úlohy na výpočty objemů, pochází ze Starobabylónské říše (2000 – 1600 př. Kr.). Je třeba zdůraznit, že se v těchto úlohách téměř nevyskytují geometrické termíny pro tělesa; hovoří se např. o člunu, korytu, žlabu, kanálu, kruhové nádobě, studni, náspu, svahu, kruhovému náspu apod. Nemáme doložen výskyt příkladů na výpočet objemu koule, kužele ani jehlanu. Počítalo se patrně jen s tělesy, která se vyskytovala v běžném životě či ve stavební praxi.

### 1.2.1 Aritmetika

Čísla na nalezených tabulkách jsou zapisována v šedesátkové soustavě. V Mezopotámii se používala *poziční šedesátková soustava*. Čísla byla zapisována do řádků zleva doprava od nejvyšších řádů k nižším.

Nyní uvedeme příklad zápisu čísla 424 000 v poziční šedesátkové soustavě užívané v Mezopotámii:



V naší symbolice zapisujeme toto číslo v šedesátkové soustavě ve tvaru (1, 57, 46, 40), což značí  $1 \cdot 60^3 + 57 \cdot 60^2 + 46 \cdot 60 + 40$ . Velkým problémem výše popsaného pozičního systému byl chybějící znak pro nulu a s tím související nejasnosti při rozlišování řádů.

Přesto se potřeba nuly vynořila až asi v 8. století př. n. l., kdy začal být chybějící řád vyznačován nějakým vhodným znakem.

Mezopotámská matematika pracovala pouze s přirozenými čísly, kladnými šedesátinými zlomky a smíšenými čísly. V Mezopotámii uměli podobně jako v Egyptě sčítat, odčítat, násobit i dělit. Při násobení využívali *tabulky násobení*, při dělení *tabulky reciprokových hodnot*.

## 1.2.2 Jednotky objemu

Základní objemovou jednotkou byl 1 *objemový sar*; šlo o objem hranolu se čtvercovou podstavou o straně 1 *gar* (asi 6 m) a výškou 1 *loket* (asi  $\frac{1}{2}$  m).<sup>2</sup> Speciální objemovou jednotkou byla 1 *cihla*. Přitom 720 cihel dalo *cihlový sar*, tj. 1 objemový sar.

## 1.2.3 Úlohy

V následujícím odstavci si uvedeme úlohy zachované na tabulkách. Opět je důležité podotknout, že často největším problémem výpočtu byl převod jednotek. Tuto část úloh v zadání neuvádíme.

**Úloha 1.2.1 (Krychle a kvádr)** „*Člun. (1) gar délka,  $\frac{1}{2}$  gar a (2) lokte šířky, (6) hloubka. Objem člunu je co?*“

Starobabylónští počtáři uměli přesně vypočítat objem krychle i kvádrů. Postup jejich výpočtu lze v naší symbolice zapsat vzorcem

$$V = a^3, \quad \text{resp.} \quad V = abc,$$

kde  $a$  je délka hrany krychle, resp.  $a, b$  a  $c$  jsou délky hran kvádrů.

Vnitřní prostor člunu má tvar kvádrů o rozměrech 1 gar,  $\frac{1}{2}$  gar a 2 lokte, tj. (0,40) gar a 6 loktů. Objem člunu je tedy

$$V = (1) \times (0; 40) \times (6) = (4) \text{ sar.}$$

**Úloha 1.2.2 (Klín)** „*Zemina hráze, (30) délka, (2) lokte šířka, (6) výška. Zeminy je kolik?*“

Řada mezopotámských matematických příkladů se týká pravidelného či nepravidelného klínu (úlohy o hrázích nádrží nebo kanálů apod.). V těchto úlohách je kromě objemu zeminy počítána výška a délka náspu či množství práce kopáčů.

Objem pravidelného klínu  $V$  je vypočítán (v naší symbolice) takto:

---

<sup>2</sup>Proto je v příkladech na objem těles výška uváděna vždy v loktech narozdíl od ostatních veličin uváděných v gar.

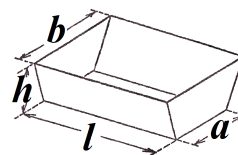
$$V = \frac{1}{2} \cdot a \cdot l \cdot h,$$



kde  $a$ ,  $l$  jsou délky hran základny a  $h$  jeho výška. Pro náš příklad tedy  $a = 2$  lokte (tj. (0;10) gar),  $l = 30$  gar a  $h = 6$  loktů. Postup, výpočet i výsledek 15 sar je správný.

**Úloha 1.2.3 (Těleso s obdélníkovou podstavou)** V úloze z úvodní ukázky je počítán objem zvláštní nádoby; dno je obdélník (o stranách  $l$  a  $a$ ), dvě stěny jsou lichoběžníky (o základnách  $a$ ,  $b$  a výšce  $h$ ) a dvě stěny obdélníky. Starobabylónský postup lze v naší symbolice zapsat vzorcem

$$V = \frac{a+b}{2} \cdot l \cdot h.$$



Babylónané tedy vlastně nahradili nepravidelné těleso kvádrem o stranách  $\frac{a+b}{2}$ ,  $l$ ,  $h$ , jehož objem uměli spočítat (Úloha 1.2.1), a tím dospěli ke správnému výsledku.

**Úloha 1.2.4 (Válec)** „Objem. (0; 30) obvod. (0;40) výška. Jaký je objem?“

Jedná se o výpočet objemu  $V$  válcové sýpky, známe-li její výšku  $h$  a obvod  $o$  podstavy. V naší symbolice lze následný výpočet zapsat vzorcem

$$V = \frac{o^2 \cdot h}{12}.$$

Označíme-li  $S$  obsah podstavy a vezmeme-li babylónskou hodnotu<sup>3</sup>  $\pi = 3$ , snadno k tomuto postupu dojdeme:

$$o = \pi \cdot d, \quad \text{tedy} \quad d = \frac{o}{\pi},$$

$$S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4} = \pi \cdot \frac{o^2}{4\pi^2} = \frac{o^2}{4\pi},$$

$$V = S \cdot h = \frac{o^2}{4\pi} \cdot h = \frac{o^2 \cdot h}{12}.$$

Postup výpočtu je zřejmě správný, pokud použijeme zmíněnou aproximaci pro  $\pi$ .

**Poznámka 1.2.1** Podrobnější informace o matematice ve starověku lze nalézt v [1], příklady pak v [2].

<sup>3</sup>Mezopotámská matematika obvykle pracovala s hodnotou  $\pi = 3$ ; máme však doklad (tabulky z konce starobabylónského období), že užívala i aproximaci  $\pi = 3\frac{1}{8}$ .

## 2. Míra množiny

Je zřejmé, že vztahy pro objemy těles jsou potřebné. Snaha určovat objem těles se, jak již bylo řečeno, objevovala už ve starověku. Naším úkolem teď bude naznačit, jak se v matematice objem definuje. V příští kapitole pak vypočteme objem vybraných těles postupem, který při odvození využívá integrální počet.

### 2.1 Definice objemu

Objem tělesa vlastně vyjadřuje, „kolik se toho vejde“ do omezené podmnožiny  $\mathbb{R}^3$  (např. kolik se toho dá uskladnit v sýpce – viz úlohy v předchozí kapitole). Analogicky obsah rovinného útvaru ukazuje, „kolik se toho vejde“ do omezené podmnožiny  $\mathbb{R}^2$ . Je zřejmé, že v obou prostorech pracujeme se stejnou ideou. Odsud vznikla idea *míry*. Míra je tedy jakýmsi obecným pojmem, který zahrnuje *plošný obsah* v  $\mathbb{R}^2$ , *objem* v  $\mathbb{R}^3$ , případně analogicky v prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Míru budeme obecně značit  $\mu$ .

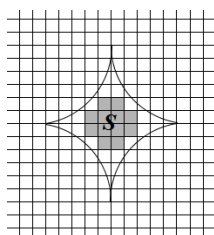
V devatenáctém století se matematici poprvé začali *teorií míry* zabývat. V této souvislosti zmiňme práci [6] francouzského matematika **Camille Jordana** (1832 – 1922) z roku 1892 a dílo [7] italského matematika **Giuseppe Peana** (1858 – 1932). Jordan se zabýval definováním tzv. měřitelné množiny, Peano jeho teorii doplnil o určení tzv. vnější a vnitřní míry množiny.

Autorem podstatného zobecnění Jordanovy-Peanovy míry je francouzský matematik **Henri Lebesgue** (1875 – 1941). Své práce [8] a [9] publikoval na samém počátku 20. století. My se však zaměříme na *Jordanovu míru*, která je bližší středoškolské matematice a pro objemy těles je zcela dostačující. Problematiku Jordanovy míry si pro jednoduchost a názornost vysvětlíme v  $\mathbb{R}^2$ . Samozřejmě veškeré uvedené teze je možné přenést do prostoru  $\mathbb{R}^3$ , příp. prostorů vyšších dimenzí.

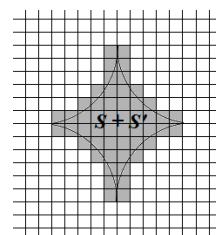
Ideu zavedení míry nyní naznačíme, v následující podkapitole ji pak zpracujeme matematicky přesně. Představme si tedy dvojrozměrný objekt, u něhož chceme určit míru (tedy obsah). Jinými slovy chceme např. zjistit, kolik papíru bychom spotřebovali na vystřížení tohoto objektu z papíru, či kolik látky bychom museli mít na potažení celého takového obrazce. Jak ale určíme, kolik to je? Zřejmě potřebujeme zavést nějaký „jednotkový útvar“, který nám pomůže odpovědět na výše uvedené otázky a dokáže také pokrýt rovinný objekt beze zbytku. Nejjednodušším takovým útvarem je zřejmě čtverec. Proto byl jednotkový čtverec (o délce strany 1) zvolen za jednotku míry. Když tedy libovolný obrazec (množina  $M$ ) pokryjeme čtvercovou sítí s dostatečně malými čtverci a spočítáme jejich počet, získáme tak i přibližný obsah obrazce. Aproximace bude tím přesnější, čím budou čtverce menší, tedy síť jemnější (jemnost sítě udává tzv. norma dělení, značíme ji  $\|D\|$ ).

Zavedeme následující označení. Nechť při daném dělení  $D$  značí  $S_D$  součet obsahů všech čtverců sítě, které jsou celé obsaženy ve vnitřku množiny  $M$ , a nechť  $S'_D$  je součet obsahů všech čtverců sítě, které obsahují alespoň jeden bod hranice množiny  $M$ . Součet  $S_D + S'_D = \overline{S_D}$  vyjadřuje součet plošných obsahů těch čtverců v dané čtvercové síti, které

obsahují body množiny  $M$ .



Obrázek 2.1: Vnitřní Jordanova míra



Obrázek 2.2: Vnější Jordanova míra

Protože  $S'_D \geq 0$ , tak je  $S_D \leq \overline{S}_D$ . Při zjemňování čtvercové sítě součty  $S_D$  rostou a  $\overline{S}_D$  klesají. Označme

$$S = \lim_{\|D\| \rightarrow 0} S_D \quad \text{a} \quad \overline{S} = \lim_{\|D\| \rightarrow 0} \overline{S}_D.$$

Pro tyto limity platí

$$S \leq \overline{S}.$$

První z těchto limit se nazývá *vnitřní*, druhá pak *vnější Jordanova míra*. Jestliže jsou tyto hodnoty stejné, řekneme, že je množina *měřitelná*. Touto společnou hodnotou definujeme její míru, tedy obsah. V případě ostré nerovnosti řekneme, že je množina *neměřitelná* a její míru (obsah) pak nelze zavést. Dále bude potřeba dokázat, že míra je aditivní, tedy že obsah útvaru lze určit jako obsah jeho jednotlivých částí (analogicky pro objem v  $\mathbb{R}^3$ ).

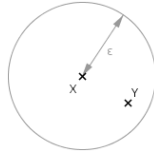
## 2.2 Jordanova míra

Nyní se dostáváme k matematicky přesné definici objemu těles. Půjde vlastně o zpřesnění idey z předchozího odstavce. Jak již bylo řečeno, budeme vše vysvětlovat v rovině, tedy v  $\mathbb{R}^2$ . Začneme definováním základních množinových pojmů, které budeme nadále hojně využívat.

**Definice 2.2.1** *Epsilonovým okolím*  $U_\varepsilon(x)$  bodu  $x \in M$ , nazýváme množinu

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in M \mid |x - y| < \varepsilon\}.$$

**Poznámka 2.2.1** Do epsilonového okolí bodu  $x$  tedy patří všechny takové body  $y$ , jejichž vzdálenost od bodu  $x$  je ostře menší než  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ).



Obrázek 2.3: Znázornění  $U_\epsilon(x)$  v  $\mathbb{R}^2$

Při znalosti pojmu *okolí* teď již snadno zavedeme ostatní pojmy.

**Definice 2.2.2** Říkáme, že množina  $M$ ,  $M \subset P$  je *otevřená* právě tehdy, když  $\forall x \in M \exists U(x) \subset M$ . Dále  $M$  se nazývá *uzavřená*, jestliže  $P - M$  je otevřená.

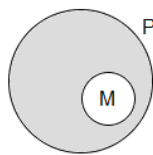
**Poznámka 2.2.2** Tedy množina  $M$  je otevřená právě tehdy, když každý bod  $x$  náleží do množiny  $M$  i s nějakým svým okolím.

**Definice 2.2.3** *Vnitřek*  $M^\circ$  množiny  $M$  je taková otevřená množina, která je ze všech otevřených množiny obsažených v množině  $M$  (tedy tyto množiny jsou podmnožinami množiny  $M$ ) největší.

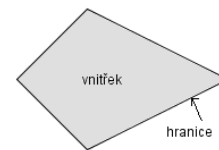
**Poznámka 2.2.3** Zřejmě vždy  $M^\circ \subset M$ , zároveň  $M^\circ$  je otevřená množina. Tedy  $M$  je otevřená  $\Leftrightarrow M = M^\circ$ .

**Definice 2.2.4** Předpokládejme, že  $M \subset P$ . Potom pojmy *vnějšek*, *hranice* a *uzávěr* množiny  $M$  definujeme takto:

$$\begin{aligned} \text{vnějšek množiny } M: \quad \text{Ext } M &= (P - M)^\circ, \\ \text{hranice množiny } M: \quad \text{hr } M &= P - M^\circ - (P - M)^\circ, \\ \text{uzávěr množiny } M: \quad \overline{M} &= M \cup \text{hr } M. \end{aligned}$$



Obrázek 2.4: Vnějšek  $\text{Ext } M$



Obrázek 2.5: Vnitřek a hranice množiny

Jedním z výše uvedených množinových pojmů byla i uzavřená množina. V dalším textu budeme již operovat pouze s uzavřenými množinami. Uzavřenými množinami jsou např. čtverec či kruh, obecně rovinné obrazce (v  $\mathbb{R}^2$ ) a tělesa (v  $\mathbb{R}^3$ ).

Nyní zavedeme několik pojmů, které jsou nutné pro zavedení vnější a vnitřní míry. Jedním z nich je *dělení* a jeho norma.

**Definice 2.2.5** Mějme interval  $J = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \subset \mathbb{R}^2$  (tj. obecně obdélník). Necht'  $D_x$  resp.  $D_y$  jsou dělení intervalů  $\langle a_1, b_1 \rangle$  resp.  $\langle a_2, b_2 \rangle$  s dělicími body

$$a_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b_1, \quad a_2 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = b_2,$$

takovými, že

$$|x_i - x_{i-1}| = |y_j - y_{j-1}|$$

pro  $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ .

Potom přímky  $x = x_i$  a  $y = y_j$ ,  $i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m$  rozdělí obdélník  $J$  na  $nm$  čtverců.

$$I_{ij} = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

jejichž sjednocení budeme nazývat *dělením* obdélníku  $J$ .

Dále definujeme *normu dělení*  $\|D\|$  jako

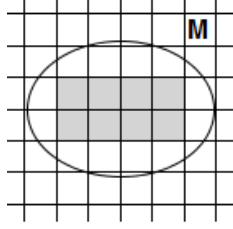
$$\|D\| \stackrel{\text{def}}{=} x_1 - x_0.$$

Vezměme nyní množinu  $M \subset \mathbb{R}^2$  a obdélník  $J$ , který lze rozdělit na čtverce a který obsahuje množinu  $M$ . Často potřebujeme zjistit, jaký obsah má samotné pokrytí množiny  $M$  čtvercovou sítí. Pro tyto účely bude užitečné zavedení pojmu *elementární množina*. Elementární množina  $\Sigma_n$  je sjednocení konečného počtu čtverců dělení  $D$  takových, že žádné dva různé čtverce nemají společné vnitřní body. Plošný obsah  $\tilde{\mu}(\Sigma_n)$  elementární množiny  $\Sigma_n$  tedy zavádíme jako součet obsahů čtverců, z nichž se daná elementární množina skládá.

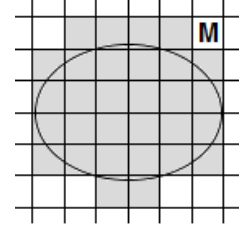
Nyní se seznámíme s *Jordanovou mírou*. Pro zavedení Jordanovy míry definujeme nejprve pojmy *jádro* a *obal* množiny. S oběma pojmy jsme se již setkali v úvodní ideji, jen jsme si je takto nepojmenovali.

**Definice 2.2.6** Buď  $M$  omezená množina v  $\mathbb{R}^2$ ,  $M^\circ$  její vnitřek,  $\overline{M}$  její uzávěr. *Jádro*  $J(M, D)$  množiny  $M$  při dělení  $D$  definujeme jako sjednocení všech čtverců dělení  $D$  ležících ve vnitřku  $M^\circ$  množiny  $M$ . Dále definujeme *obal*  $O(M, D)$  množiny  $M$  při dělení  $D$  jako sjednocení všech čtverců dělení  $D$ , které mají s uzávěrem  $\overline{M}$  množiny  $M$  aspoň jeden společný bod.

Vzhledem k tomu, že jádro i obal jsou *elementárními množinami*, je jejich obsah roven součtu obsahů příslušných čtverců. Tedy v případě jádra čtverců obsažených ve vnitřku množiny, v případě obalu čtverců, které mají s jejím uzávěrem neprázdný průnik. Vše si znázorníme na Obrázcích 2.6 a 2.7:



Obrázek 2.6: Jádru



Obrázek 2.7: Obalu

Při pohledu na Obrázky 2.6 a 2.7 si lze všimnout, že počet čtverců tvořících jádro, resp. obal, závisí na volbě dělení  $D$  sítě. Zřejmě platí, že čím menší bude norma dělení  $\|D\|$ , tím jemnější síť získáme a tím větší počet čtverců bude dělení obsahovat. Navíc budou čtverce malé, a tak bude jádro a obal lépe aproximovat množinu  $M$ . Z této myšlenky vychází následující věta.

**Věta 2.2.1** *Nechť  $\|D_2\| \leq \|D_1\|$ . Bud'  $M$  množina,  $J(M, D_1)$ , resp.  $J(M, D_2)$ , její jádro při dělení  $D_1$ , resp.  $D_2$ . Bud'  $O(M, D_1)$ , resp.  $O(M, D_2)$ , její obal při dělení  $D_1$ , resp.  $D_2$ . Pak platí:*

$$\begin{aligned} J(M, D_1) &\subset J(M, D_2), \\ O(M, D_2) &\subset O(M, D_1). \end{aligned}$$

Názorně lze říci, že jádro se zjemňováním zvětšuje, obal se zjemňováním zmenšuje.  $J(M, D)$  při zjemňování dělení  $D$  čím dál tím lépe „vyčerpávají“  $M^o$  a  $O(M, D)$  čím dál tím méně „přesahují“  $\overline{M}$ . Pro obsah těchto elementárních množin tedy bude platit

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(J(M, D_1)) &\leq \tilde{\mu}(J(M, D_2)), \\ \tilde{\mu}(O(M, D_2)) &\leq \tilde{\mu}(O(M, D_1)), \end{aligned}$$

což je bezprostředním důsledkem Věty 2.2.1. Dále pro všechna  $D_1, D_2$ , platí:

$$\tilde{\mu}(J(M, D_1)) \leq \tilde{\mu}(O(M, D_2)). \quad (2.1)$$

Když tedy zmenšujeme normu dělení  $D$ , tak  $\tilde{\mu}(J(M, D))$  roste a  $\tilde{\mu}(O(M, D))$  klesá. Dále si lze rozmyslet, že obsah jádra i obalu je nezávisle na volbě dělení  $D$  omezený – zdola nulou, shora pak obsahem obdélníka, který množinu  $M$  pokrývá, tj. číslem  $(b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$ . Z monotonie a omezenosti  $\tilde{\mu}(J(M, D))$  a  $\tilde{\mu}(O(M, D))$  tedy plyne existence vlastních limit<sup>1</sup> (2.2) a (2.3), které nazýváme *vnitřní* a *vnější Jordanovou mírou*. *Vnitřní (Jordanova) míra*  $\mu_*(M)$

$$\mu_*(M) = \lim_{\|D_1\| \rightarrow 0} \tilde{\mu}(J(M, D_1)). \quad (2.2)$$

<sup>1</sup>Řekneme, že limitou jádra  $\lim_{\|D\| \rightarrow 0} \tilde{\mu}(J(M, D)) = a$  je  $a \in \mathbb{R}$ , jestliže  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall D; 0 < \|D\| < \delta : |\tilde{\mu}(J(M, D)) - a| < \varepsilon$ . Analogicky získáme vztah pro limitu obalu.



Vnější (Jordanova) míra  $\mu^*(M)$

$$\mu^*(M) = \lim_{\|D_2\| \rightarrow 0} \tilde{\mu}(O(M, D_2)). \quad (2.3)$$

Ze vztahů (2.1), (2.2) a (2.3) pak vyplývá, že vnitřní míra je vždy menší nebo rovna míře vnější:

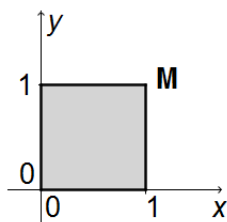
$$\mu_*(M) \leq \mu^*(M). \quad (2.4)$$

**Definice 2.2.7** Množina  $M$  se nazývá *Jordanovsky měřitelná*, je-li  $\mu_*(M) = \mu^*(M)$ . Tuto společnou hodnotu pak nazveme *Jordanovou mírou* množiny  $M$  a značíme ji  $\mu(M)$ .

Nyní už tedy víme, co znamená, že je množina měřitelná. Naším cílem je ukázat, že všechna tělesa (tj. uzavřené souvislé množiny) jsou také měřitelné množiny. Potom má smysl hledat jejich míru, tedy objem.

Ne všechny omezené množiny jsou měřitelné, jak ukazuje následující příklad.

**Příklad 2.2.1 (neměřitelná množina)** Mějme množinu  $M$ , která je tvořena uspořádanými dvojicemi  $(x, y)$  racionálních čísel z uzavřeného intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ , tj.  $M = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x, y \in \mathbb{Q}\}$  (viz Obrázek 2.8). Tato množina je zajímavá tím, že má pro každé dělení prázdné jádro ( $x$  a  $y$  jsou jen racionální čísla), ale neprázdný obal. Obalem je pro každé dělení  $D$  celý čtverec  $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ .



Obrázek 2.8

Vidíme tedy, že  $\mu^*(M) = 1$  a  $\mu_*(M) = 0$ . Množina  $M$  tak *není* měřitelná.

Užitečné bude zavedení pojmu *nulová množina*.

**Definice 2.2.8** Množinu, jejíž vnější míra je rovna nule, nazýváme *nulová množina*.

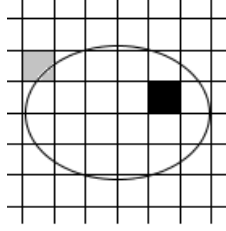
**Poznámka 2.2.4** Je-li  $\mu^*(M) = 0$ , pak je i  $\mu_*(M) = 0$ , protože  $\mu_*(M) \leq \mu^*(M)$  a nulová množina  $M$  je tedy měřitelná.

Nyní si uvedeme základní vlastnosti míry, následovat bude věta ohledně její aditivity. Na závěr ukážeme, že všechna tělesa jsou měřitelná.

**Věta 2.2.2** *Bud'  $M$  omezená množina. Pak platí:*

$$\begin{aligned} O(M, D) &= J(M, D) \cup O(\text{hr}(M), D), \\ \tilde{\mu}(O(M, D)) &= \tilde{\mu}(J(M, D)) + \tilde{\mu}(O(\text{hr}(M), D)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

*Důkaz:* Sporem. Necht' při daném dělení  $D$  existuje neprázdný průnik čtverců sítě a uzávěru  $\overline{M}$  množiny  $M$ .



Obrázek 2.9

Pak buď čtverec náleží do jádra  $M^\circ$  množiny  $M$  (černé čtverce), nebo čtverec do  $M^\circ$  nepatří. Pak ale zřejmě průnik takového čtverce a hranice  $\text{hr } M$  množiny  $M$  není prázdný (šedé čtverce). Na základě znalosti obsahu elementárních množin ihned dostáváme dokazované rovnosti.  $\square$

Z (2.5) získáme limitním přechodem následující důsledek.

**Důsledek 2.2.1**

$$\mu^*(M) = \mu_*(M) + \mu^*(\text{hr } M)$$

Následuje jedna z klíčových vět o měřitelnosti množin.

**Věta 2.2.3** *Omezená množina je měřitelná  $\Leftrightarrow$  její hranice je nulová množina.*

*Důkaz:* Vychází z Důsledku 2.2.1.  $\mu^*(M) = \mu_*(M)$  právě tehdy, když  $\mu^*(\text{hr } M) = 0$ . Dále  $\mu^*(\text{hr } M) = 0$  právě tehdy, když  $\mu(\text{hr } M) = 0$ .  $\square$

Základní vlastností Jordanovy míry je aditivita, tj. pro libovolné dvě disjunktní množiny  $M, N$  platí:

$$\mu(M \cup N) = \mu(M) + \mu(N).$$

Pro obsah elementárních množin je aditivita zřejmá, plyne přímo z definice. Rozšíření na libovolné měřitelné množiny lze nalézt např. v [4]. My si v následující větě ukážeme zobecnění aditivity na dvojice množin, jejichž průnik není prázdný, je však nulovou množinou. Toto tvrzení je pro určování objemů těles velmi užitečné, protože nám umožní „zanedbávat“ jejich hranici.

**Věta 2.2.4** *Nechť  $M, N$  jsou měřitelné množiny. Pak jestliže  $\mu(M \cap N) = 0$ , tak*

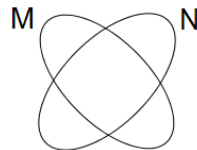
$$\mu(M \cup N) = \mu(M) + \mu(N).$$

*Důkaz:*

$$M \cup N = (M - N) \cup (N - M) \cup (N \cap M)$$

$$M = (M - N) \cup (M \cap N)$$

$$N = (N - M) \cup (M \cap N)$$



$$\mu(M \cup N) = \mu(M - N) + \mu(N - M) + \mu(N \cap M)$$

$$\mu(M) = \mu(M - N) + \mu(N \cap M)$$

$$\mu(N) = \mu(N - M) + \mu(N \cap M)$$

---


$$\mu(M \cup N) - \mu(M) - \mu(N) = -\mu(N \cap M)$$

*Platí:*

$$\mu(M \cup N) + \mu(M \cap N) = \mu(M) + \mu(N).$$

□

Matematickou indukcí lze Větu 2.2.4 rozšířit na konečně mnoho množin. Získáme tak následující důsledek.

**Důsledek 2.2.2** *Jsou-li  $M_i, i = 1, 2, \dots, k$  měřitelné množiny a míra průniku každých dvou je rovna nule, pak je sjednocení těchto množin měřitelná množina, jejíž míra je rovna součtu měr jednotlivých množin.*

## Měřitelnost těles

Ukážeme, že množiny, jejichž hranice jsou tvořeny konečným počtem grafů stejnoměrně spojitých funkcí (speciálně křivek, resp. ploch), jsou měřitelné.

**Věta 2.2.5** *Nechť  $g$  je funkce  $r-1$  proměnných, která je spojitá<sup>2</sup> na omezeném uzavřeném intervalu  $J \subset \mathbb{R}^r$ . Potom graf funkce  $g$ , tj. množina*

$$M = \{[x, g(x)]; x = (x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \in J\}, \text{ má } r\text{-rozměrnou míru nulovou.}$$

*Důkaz:* Důkaz provedeme opět v prostoru  $\mathbb{R}^2$ , přičemž lze rozšířit i do prostorů vyšších dimenzí.

Pokryjeme množinu  $M$  konečným počtem obdélníků tak, že vezmeme dělení  $D$  na intervalu  $J$  s normou dělení  $\|D\| < \delta$  a v každém dělicím intervalu  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  zvolíme bod

---

<sup>2</sup>Bud'  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D_g$ . Řekneme, že funkce  $g$  je spojitá v bodě  $x_0$ , právě tehdy, když  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_g : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ . Řekneme, že  $g$  je spojitá na intervalu  $J \subseteq D_g$ , pokud je spojitá v každém bodě  $x_0 \in J$ .

$\xi_i$ . Je-li  $\mathcal{O}_i$  obdélník  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle g(\xi_i) - \varepsilon, g(\xi_i) + \varepsilon \rangle$ , pak zřejmě sjednocení těchto obdélníků pokrývá  $M$  a součet jejich měr je roven<sup>3</sup>  $2\varepsilon(b - a)$ .

Pokud dokážeme, že  $\mu^*(M) \leq 2\varepsilon(b - a)$  pro každé  $\varepsilon > 0$ , ukážeme, že výraz konverguje k nule pro  $\varepsilon \rightarrow 0$ , takže  $\mu^*(M) = 0$ . Zřejmě  $M \subset D$ , tedy i  $O(M) \subset O(D)$ , a tedy  $\tilde{\mu}(O(M)) \leq \tilde{\mu}(O(D))$ . Dokazovanou rovnost pak získáme limitním přechodem pro  $\|D\| \rightarrow 0$ .  $\square$

Z Vět 2.2.3 a 2.2.5 dostáváme měřitelnost těles. Věta 2.2.5 ukazuje, že plocha v  $\mathbb{R}^3$  (tedy hranice uzavřené množiny – tělesa) má nulovou míru  $\mu_3$ . Podle Věty 2.2.3 pak víme, že množina, jejíž hranice je tvořena konečným sjednocením grafů spojitých funkcí definovaných na uzavřených intervalech, je měřitelná.

---

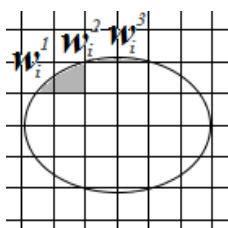
<sup>3</sup>Protože míra každého obdélníku je rovna  $2\varepsilon(x_i - x_{i-1})$ .

# 3. Riemannův integrál

Objem těles lze vypočítat pomocí *trojného integrálu* (též *trojrozměrného integrálu* nebo *integrálu v  $\mathbb{R}^3$* ). Pro tyto účely se pokusíme uvést definici integrálu a některé základní výsledky, které pak využijeme v následující kapitole při praktických výpočtech. Výklad budeme opět pro jednoduchost provádět v  $\mathbb{R}^2$ .

## 3.1 Definice Riemannova integrálu

Bud'  $M \subset \mathbb{R}^2$  měřitelná množina. Vezměme obdélník  $J$ , který lze rozdělit na čtverce,  $M \subset J$ ,  $D$  je jeho dělení. Označme čtverce  $I_{ij} \in O(M, D)$  jako  $w_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  (na Obrázku 3.1 je např.  $m = 28$ ).

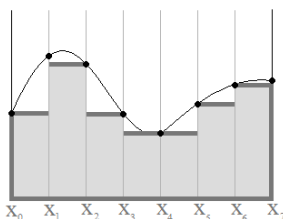


Obrázek 3.1

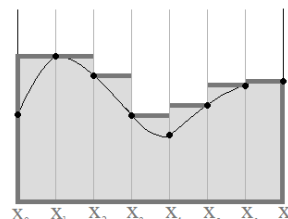
Je-li nyní  $f$  reálná funkce, která je na  $M$  omezená a  $\alpha_k = \inf_{w_k} f$ ,  $\beta_k = \sup_{w_k} f$ , pak výrazy

$$s(f; M, D) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \tilde{\mu}(w_k) \quad \text{resp.} \quad S(f; M, D) = \sum_{k=1}^m \beta_k \tilde{\mu}(w_k)$$

nazýváme *dolním* resp. *horním* součtem funkce  $f$  při dělení  $D$ , odpovídajícím množině  $M$ .



Obrázek 3.2: Dolní součet



Obrázek 3.3: Horní součet

Lze ukázat, že pro  $D_1, D_2$  taková, že  $\|D_1\| \leq \|D_2\|$  platí:

$$s(f; M, D_1) \leq s(f; M, D_2) \tag{3.1}$$

$$S(f; M, D_1) \geq S(f; M, D_2) \tag{3.2}$$

a dále

$$s(f; M, D) \leq S(f; M, D) \quad (3.3)$$

pro každé dělení  $D$ . Navíc  $s(f; M, D)$  i  $S(f; M, D)$  jsou omezené, protože  $f$  je omezená. Z omezenosti a monotonie  $s(f; M, D)$  a  $S(f; M, D)$  plyne existence vlastních limit

$$\lim_{\|D\| \rightarrow 0} s(f; M, D) = \int_{\underline{M}} f(x, y) \, dx \, dy, \quad (3.4)$$

$$\lim_{\|D\| \rightarrow 0} S(f; M, D) = \int_{\overline{M}} f(x, y) \, dx \, dy. \quad (3.5)$$

Limitu (3.4) nazýváme *dolním integrálem* funkce  $f$  přes množinu  $M$  při dělení  $D$ , limitu (3.5) nazýváme *horním integrálem* funkce  $f$  přes množinu  $M$  při dělení  $D$ . Z nerovnosti (3.3) plyne

$$\int_{\underline{M}} f(x, y) \, dx \, dy \leq \int_{\overline{M}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Je-li horní integrál roven dolnímu integrálu, pak jejich společnou hodnotu nazýváme *integrálem* funkce  $f$  přes množinu  $M$ , označujeme jej

$$\int_M f(x, y) \, dx \, dy$$

a říkáme, že funkce  $f$  je *integrovatelná na množině  $M$* .

**Poznámka 3.1.1** V  $\mathbb{R}^3$  používáme označení  $\int_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ .

**Věta 3.1.1** *Bud'  $M \subset \mathbb{R}$  uzavřená a měřitelná množina. Bud'  $f$  funkce spojitá na  $M$  (vzhledem k  $M$ ). Pak  $\int_M f(x) \, dx$  existuje.*

*Důkaz:* lze nalézt v [4].

## 3.2 Výpočet integrálu

Hlavní způsoby výpočtu vícerozměrných integrálů jsou založeny na použití *Fubiniovy věty* a *věty o substituci*.

**Věta 3.2.1** (Fubiniova věta v  $\mathbb{R}^3$ )

1. Nechť  $P$  je uzavřená množina v  $\mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(x, y)$  a  $\psi(x, y)$  jsou spojité funkce na  $P$ ,  $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$  pro  $(x, y) \in P$ . Nechť množina  $M$  je definována předpisem

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in P, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}.$$

Je-li dále  $f$  spojitá na  $M$ , pak platí

$$\int_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_P \left( \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy.$$

2. Nechť  $M$  je uzavřená měřitelná množina v  $\mathbb{R}^3$ , jejíž průmět do osy  $z$  je interval  $\langle a, b \rangle$ . Pro dané  $z \in \langle a, b \rangle$  označme

$$Q_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z) \in M\}$$

(řez množiny  $M$  rovinou  $z = \text{konst.}$ ). Je-li funkce  $f$  spojitá na množině  $M$ , potom platí

$$\int_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left( \int_{Q_z} f(x, y, z) \, dx \, dy \right) dz.$$

**Poznámka 3.2.1** Analogické věty dostaneme, když zaměníme úlohy jednotlivých proměnných  $x, y, z$ .

Nyní následuje definice transformace souřadnic. Tu poté využijeme při vyslovení věty o substituci.

**Definice 3.2.1** *Transformace souřadnic* je vzájemně jednoznačné zobrazení  $\varphi$  otevřené množiny  $M \subset \mathbb{R}^r$  do  $\mathbb{R}^r$ , jestliže pro  $y = y_i(x)$  určující  $\varphi$  platí:

1.  $y_i$  mají spojité parciální derivace na množině  $M$ ,
2. Označme  $\frac{Dy}{Dx} := \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)$ , kde  $i = 1, \dots, m$  a  $j = 1, \dots, n$ . Platí:  $\det \frac{Dy}{Dx}(x) \neq 0$  na množině  $M$ . Tento determinant nazýváme *jakobián*.

**Věta 3.2.2** (Věta o substituci) *Bud'  $M$  otevřená, omezená a měřitelná v  $\mathbb{R}^r$ . Bud' dále  $\varphi : M \rightarrow \varphi(M)$  transformace souřadnic s omezenými parciálními derivacemi. Potom platí*

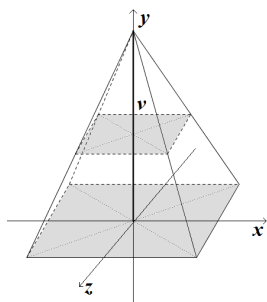
$$\int_{\varphi(M)} f(y) \, dy = \int_M f(\varphi(x)) \left| \det \frac{Dy}{Dx}(x) \right| dx,$$

pokud jeden z těchto integrálů existuje.

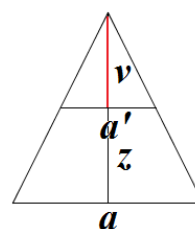
# 4. Výpočty objemů těles pomocí integrálů

## 4.1 Jednoduchý integrál

### 4.1.1 Objem jehlanu se čtvercovou podstavou



Obrázek 4.1: Jehlan



Obrázek 4.2: Průřez jehlanu

Na Obrázku 4.1 máme zakreslen jehlan a jeho řez rovinou rovnoběžnou s podstavou ve vzdálenosti  $z$  od podstavy. Obsahy těchto řezů se mění lineárně. Je tedy třeba zjistit, jaký je vztah mezi obsahem podstavy a obsahem řezu v závislosti na výšce  $z$ . Odvození si ukážeme na Obrázku 4.2.

Z podobnosti trojúhelníků vyplývá následující rovnost

$$\frac{a}{v} = \frac{a'}{v - z},$$

kde  $v$  je výška jehlanu.

Z výše uvedeného vztahu vyjádříme  $a'$ , abychom zjistili, jak se mění délka strany řezu v závislosti na výšce:

$$a' = \frac{a(v - z)}{v},$$

odkud dostaneme:

$$a' = a \left(1 - \frac{z}{v}\right).$$

Odtud dostáváme obsah řezu ve výšce  $z$ :

$$a^2 \left(1 - \frac{z}{v}\right)^2,$$

což je rovno součinu obsahu podstavy  $S_p$  a  $\left(1 - \frac{z}{v}\right)^2$ . Velmi nepřesně můžeme říci, že budeme „sčítat“ obsahy všech řezů ve výšce od 0 do  $v$ . Přesně tuto myšlenku zformulujeme



a provedeme pomocí integrace.

Integrujeme takto:

$$\begin{aligned} \int_0^v S_p \left(1 - \frac{z}{v}\right)^2 dz &= S_p \int_0^v \left(1 - \frac{z}{v}\right)^2 dz = S_p \int_0^v \left(1 - 2\frac{z}{v} + \frac{z^2}{v^2}\right) dz = S_p \left[z - \frac{z^2}{v} + \frac{z^3}{3v^2}\right]_0^v = \\ &= S_p \left(v - \frac{v^2}{v} + \frac{v^3}{3v^2}\right) - \left(0 - \frac{0^2}{v} + \frac{0^3}{3v^2}\right) = S_p \frac{v}{3} \end{aligned}$$

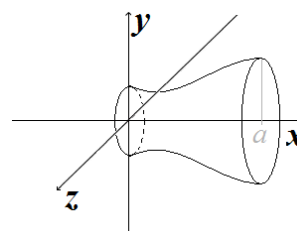
### 4.1.2 Objem rotačního tělesa

Objem rotačního tělesa budeme počítat podle vzorce

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx,$$

kde  $f(x)$  značí funkci, jejíž graf se otáčí kolem osy  $x$ , čímž vymezuje požadované těleso.

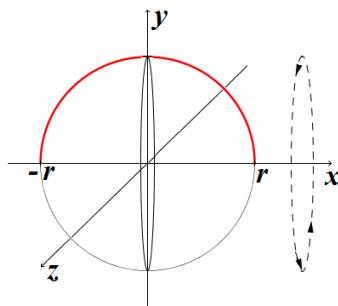
Rozmysleme si, co vzorec říká. Názorně, i když velmi nepřesně, můžeme říci, že máme sečíst všechny obsahy kruhů, které dohromady tvoří dané rotační těleso. Vycházíme tedy ze vzorce pro obsah kruhu  $S = \pi r^2$ . Ve vzorci značí  $f(x)$  funkční hodnotu v bodě  $x$ , tj. hodnotu na  $y$ -ové ose.  $f^2(x)$  je tedy druhou mocninou poloměru kruhu, který je řezem tělesa v bodě  $x$ ,  $\pi f^2(x)$  je jeho obsah.



Obrázek 4.3

Pomocí tohoto vzorce můžeme spočítat například objem koule, polokoule, kulové úseče, válce či kužele.

## Koule



Obrázek 4.4: Koule

Z Obrázku 4.4 je zřejmé, že kolem osy  $x$  se otáčí část kružnice. Funkce  $f(x)$  má tedy tvar<sup>1</sup>

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Dále je potřeba určit meze, kde integrujeme na ose  $x$ . Meze jsou opět zřejmé z Obrázku 4.4. Tedy

$$a = -r, b = r.$$

Nyní můžeme začít integrovat.

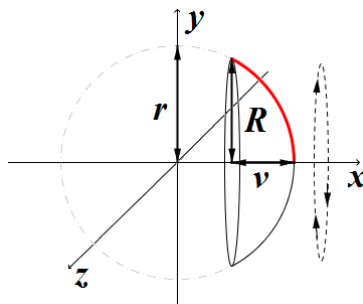
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left( r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \pi \cdot \frac{3r^3 - r^3 + 3r^3 - r^3}{3} = \\ &= \pi \cdot \frac{4r^3}{3} = \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

Objemy polokoule a kulové úseče vypočítáme velmi podobně jako objem koule. Vždy necháme kolem osy  $x$  rotovat část kružnice o poloměru  $r$ . Jediné, v čem se budou výpočty lišit, jsou meze, kde budeme integrovat.

---

<sup>1</sup>Vztah vyplývá z rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem  $r$ :  $x^2 + y^2 = r^2$ . Při vyjádření  $y$  z rovnice získáme vztah  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ .

## Kulová úseč



Obrázek 4.5: Kulová úseč

Analogicky jako v předchozích dvou příkladech určíme meze, na kterých budeme integrovat.

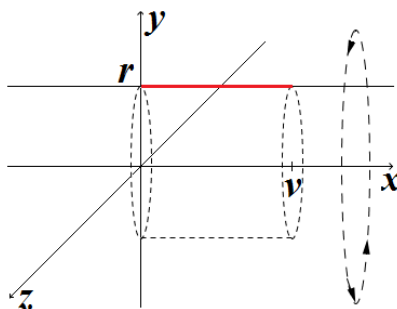
Z Obrázku 4.5 je zřejmé, že

$$a = r - v, \quad b = r.$$

Nyní můžeme začít integrovat.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{r-v}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{r-v}^r = \pi \left( r^3 - \frac{r^3}{3} - (r-v)r^2 + \frac{(r-v)^3}{3} \right) = \\ &= \pi \cdot \frac{3r^3 - r^3 - 3r^3 + 3r^2v + (r^3 - 3r^2v + 3rv^2 - v^3)}{3} = \pi \cdot \frac{3rv^2 - v^3}{3} = \pi v^2 \cdot \frac{3r - v}{3} \end{aligned}$$

## Válec



Obrázek 4.6: Válec

Z Obrázku 4.6 je zřejmé, že se kolem osy  $x$  otáčí přímka rovnoběžná s osou  $x$  procházející na ose  $y$  bodem  $r$ . Funkce  $f(x)$  má tedy tvar

$$f(x) = r.$$

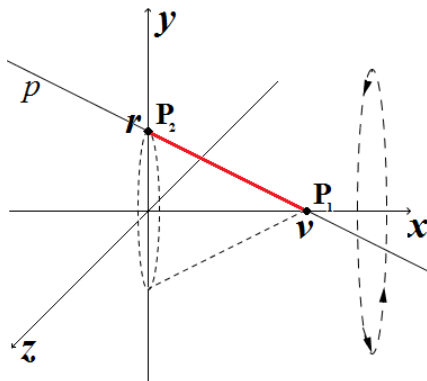
Určíme meze, kde integrujeme. Náš válec má výšku  $v$ , tedy

$$a = 0, b = v.$$

Nyní můžeme začít integrovat.

$$V = \pi \int_0^v r^2 dx = \pi [r^2 x]_0^v = \pi r^2 v$$

### Kužel



Obrázek 4.7: Kužel

Z Obrázku 4.7 je zřejmé, že se kolem osy  $x$  otáčí část přímky  $p$ , která prochází body  $P_1 = [v, 0]$  a  $P_2 = [0, r]$ . Rovnice takové přímky je tedy

$$rx + vy - rv = 0.$$

Odtud vyjádříme  $y$ :

$$f(x) = y = \frac{rv - rx}{v} = \frac{r(v - x)}{v}.$$

Určení mezí ilustruje opět Obrázek 4.7. Tedy

$$a = 0, b = v.$$

Nyní můžeme začít integrovat.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^v \frac{r^2(v-x)^2}{v^2} dx = \frac{\pi r^2}{v^2} \int_0^v (v^2 - 2vx + x^2) dx = \frac{\pi r^2}{v^2} \left[ xv^2 - 2v \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^v = \\ &= \frac{\pi r^2}{v^2} \left( v^3 - v^3 + \frac{v^3}{3} \right) = \frac{\pi r^2}{v^2} \cdot \frac{v^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 v. \end{aligned}$$

## 4.2 Trojný integrál

Objem těles lze spočítat podle vzorce:

$$V = \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz,$$

kde  $M$  je množina, na které integrujeme.

Vzorec vychází ze samotné interpretace (násobného) integrálu. V jednorozměrném případě integrál odpovídá otázku, jak zjistit velikost plochy pod grafem funkce  $f(x)$  nad daným intervalem  $I \rightarrow \mathbb{R}$ . Rozšíříme-li situaci o jednu dimenzi, pak otázka zní, jak spočítat objem množiny pod grafem funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  na množině  $M \subset \mathbb{R}^2$ . Všimněme si, že když budeme integrovat funkci  $f(x, y) \equiv 1$  na  $M$ , dostaneme obsah množiny  $M$  násobený jedničkou, tj. číselně vyjde samotný obsah množiny  $M \subset \mathbb{R}^2$ . Podobně trojný integrál na množině  $M \subset \mathbb{R}^3$  funkce identicky rovné jedné můžeme interpretovat jako objem množiny  $M \subset \mathbb{R}^3$ .

Pomocí trojného integrálu znovu vypočítáme objemy těles, které již byly spočítány v předchozí podkapitole. Výpočet provedeme tímto složitějším způsobem proto, abychom naznačili, jak vypočítat objem i u jiných než rotačních těles.

### Výpočty pomocí substitucí

Pro užití substitucí je potřeba spočítat absolutní hodnotu determinantu Jakobiho matice, kterou násobíme integrovaný výraz. Vzorec se tedy změní následovně:

$$V = \iiint_N |J| \, ds_1 \, ds_2 \, ds_3.$$

#### 4.2.1 Válcové (cylindrické) souřadnice

Substituce:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\y &= r \sin \varphi, \\z &= z,\end{aligned}$$

kde

$$r > 0, \varphi \in (0, 2\pi), z \in \mathbb{R}.$$

Spočítáme absolutní hodnotu determinantu Jakobiho matice:

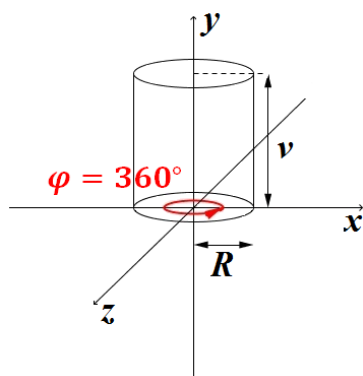
$$\begin{aligned}J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & r \sin \varphi \\ \sin \varphi & -r \cos \varphi \end{vmatrix} = -r \cos^2 \varphi - r \sin^2 \varphi = \\ &= -r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = -r.\end{aligned}$$

Tedy vychází

$$|J| = r.$$

Pomocí této substituce můžeme spočítat například objem válce.

## Válec



Obrázek 4.8: Válec

Z Obrázku 4.8 jsou zřejmé meze pro  $r$ ,  $\varphi$  a  $z$ , na kterých budeme integrovat:

$$r \in (0, R), \varphi \in (0, 2\pi), z \in \langle 0, v \rangle.$$

Nyní můžeme začít integrovat.

$$\begin{aligned} \int_0^v \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\varphi \, dz &= \int_0^v \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^R d\varphi \, dz = \int_0^v \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\varphi \, dz = \int_0^v \frac{R^2}{2} [\varphi]_0^{2\pi} dz = \int_0^v \pi R^2 dz = \pi R^2 [z]_0^v = \\ &= \pi R^2 v \end{aligned}$$

### 4.2.2 Sférické souřadnice

Substituce:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= \varrho \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= \varrho \cos \vartheta, \end{aligned}$$

kde

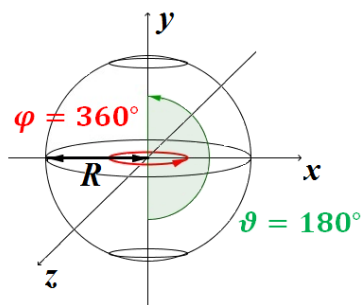
$$\varrho > 0, \vartheta \in (-\pi, \pi), \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Dále je opět potřeba spočítat absolutní hodnotu determinantu Jakobiho matice, který má pro tuto substituci tvar:

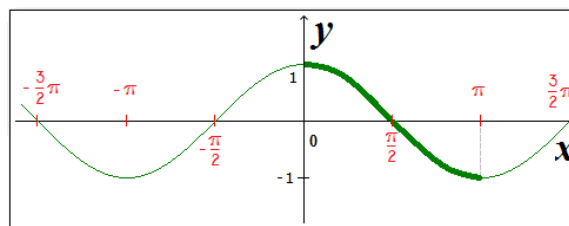
$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \varrho} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & -\varrho \cos \vartheta \cos \varphi & \varrho \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & -\varrho \cos \vartheta \sin \varphi & -\varrho \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & \varrho \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \varrho^2 \sin^3 \vartheta \sin^2 \varphi + \varrho^2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \cos^2 \varphi + \varrho^2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \sin^2 \varphi + \varrho^2 \sin^3 \vartheta \cos^2 \varphi = \\ &= \varrho^2 \sin \vartheta (\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) = \\ &= \varrho^2 \sin \vartheta (\sin^2 \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + \cos^2 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)) = \\ &= \varrho^2 \sin \vartheta (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) = \varrho^2 \sin \vartheta \end{aligned}$$

Pomocí této substituce můžeme například jiným způsobem spočítat objem koule.

## Koule



Obrázek 4.9: Sférické souřadnice – koule



Obrázek 4.10:  $\cos \vartheta$

Z Obrázku 4.9 jsou zřejmé meze pro  $\varrho$ , což je poloměr tělesa. V našem případě je poloměr roven  $R$ . Rotace kolem osy  $y$  je opět zřejmě o  $360^\circ$ , tedy  $2\pi$ . Dále je potřeba zamyslet se nad mezemi pro rotaci kolem osy  $z$ . Z obrázku je patrné, že je třeba otočit o  $180^\circ$  (tedy o  $\pi$ ), přičemž přecházíme mezi zápornými a kladnými hodnotami. V substituci pro  $z$  se vyskytuje  $\cos \vartheta$ , jehož průběh vidíme na Obrázku 4.10.

Nyní jsou již zřejmé všechny meze. Tedy:

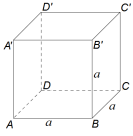
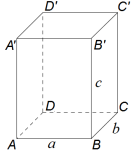
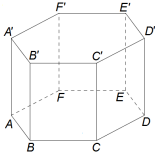
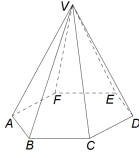
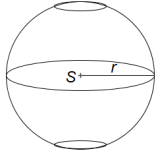
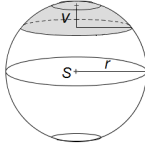
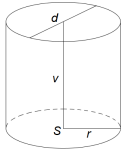
$$\varrho \in (0, R), \vartheta \in (0, \pi), \varphi \in (0, 2\pi).$$

Můžeme začít integrovat.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^R \int_0^{2\pi} \varrho^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\varrho \, d\vartheta &= \int_0^\pi \int_0^R \varrho^2 \sin \vartheta [\varphi]_0^{2\pi} \, d\varrho \, d\vartheta = \int_0^\pi \int_0^R 2\pi \varrho^2 \sin \vartheta \, d\varrho \, d\vartheta = \int_0^\pi 2\pi \sin \vartheta \left[ \frac{\varrho^3}{3} \right]_0^R \, d\vartheta = \\ &= \int_0^\pi 2\pi \sin \vartheta \frac{R^3}{3} \, d\vartheta = \frac{R^3}{3} 2\pi [-\cos \vartheta]_0^\pi = \frac{R^3}{3} 2\pi (1 + 1) = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

### 4.2.3 Přehled vzorců

V tabulce si nyní přehledně shrneme dosavadní výsledky.

<b>Krychle</b>	$V = a^3$	
<b>Kvádr</b>	$V = abc$	
<b>Hranol</b>	$V = S_p \cdot v$	
<b>Jehlan, kužel</b>	$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$	
<b>Koule</b>	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	
<b>Kulová úseč</b>	$V = \pi v^2 \left( \frac{3r-v}{3} \right)$	
<b>Válec</b>	$V = \pi r^2 v$	

Naskýtá se otázka, zda by se k některým z těchto vzorců dalo dojít i bez znalosti integrálního počtu. Na to nám odpoví následující kapitola.



# 5. Odvození vzorců bez použití integrálů

## 5.1 Archimédés

Archimédés ze Syrakús (287? – 212 př. n. l.) byl jedním z největších matematiků starého řeckého světa působící na počátku helénistické éry. Jako matematik dosáhl vrcholu tehdejšího abstraktního myšlení a stal se předchůdcem novověké matematické analýzy a geometrie. Ze spisů, které se nám od Archiméda dochovaly, se převážná část věnuje výpočtům obsahů a objemů. V této kapitole se zaměříme na jeho metody výpočtů objemů těles.

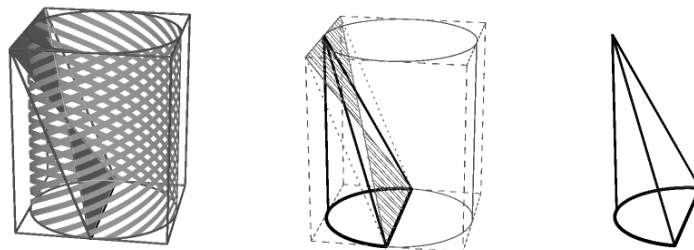
Významným dílem z hlediska objemů těles bylo dvoudílné pojednání „O kouli a válci“. Nalezneme zde mimo jiné důležitá tvrzení o objemu koule a jejích částí. V těchto spisech Archimédés formuluje a dokazuje následující tvrzení:

1. *Objem koule je roven čtyřnásobku objemu kužele, jehož poloměr i výška jsou rovny poloměru koule.*
2. *Objem kulové výseče je roven objemu kužele, jehož výška je rovna poloměru koule a jehož podstava má obsah rovný povrchu pláště kužele vepsaného v příslušné úseči.*
3. *Objem koule je roven dvěma třetinám objemu opsaného válce.*
4. *Objemy kužele o poloměru podstavy  $r$  a výšce  $2r$ , koule o poloměru  $r$  a válce o poloměru  $r$  a výšce  $2r$  jsou v poměru 1:2:3.*
5. *Ze všech kulových úsečí se stejným povrchem má polokoule největší objem.*

Druhým (pro nás důležitým) dílem obsahujícím výsledky týkající se objemů těles je spis „O kónoidech a sféroidech“. Zde Archimédés definuje např. *rotační paraboloid* vznikající rotací paraboly kolem své osy, *rotační hyperboloid* vznikající rotací hyperboly kolem své osy či *rotační elipsoid* vznikající analogicky rotací elipsy kolem své osy. Archimédés v tomto spisu říká, že *objem úseče rotačního paraboloidu je roven třem polovinám objemu kužele s touž podstavou a touž osou.*

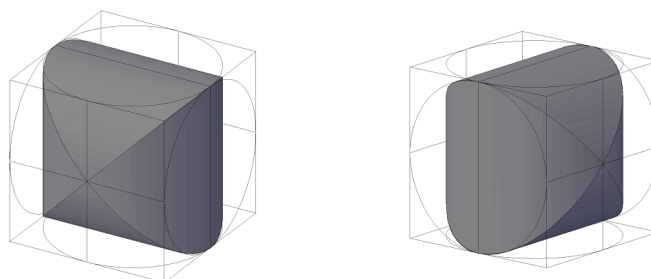
Výpočtem objemu úseče rotačního paraboloidu, elipsoidu a hyperboloidu se Archimédés zabýval i v pojednání s názvem „O metodě“. Odvodil zde mimo jiné, že *poměr objemu válce a vepsaného elipsoidu je 3:2*, a tak vyjádřil objem elipsoidu.

Dále se zamýšlel nad situací, kdy je válecek vepsán do pravidelného čtyřbokého hranolu a řezán rovinou, která prochází střední příčkou dolní základny hranolu a s ní rovnoběžnou hranou základny horní (viz Obrázek 5.1). Odvodil, že *objem odříznuté části válce je roven jedné šestině objemu uvažovaného hranolu*.



Obrázek 5.1

Zajímavým příkladem, kterým se Archimédés zabýval, bylo určení objemu tělesa, které vzniklo průnikem dvou na sebe kolmých válců vepsaných do krychle (viz Obrázek 5.2). Ukázal, že *objem tohoto tělesa tvoří 2/3 objemu celé krychle*.

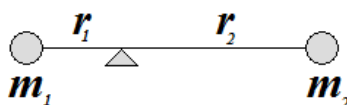


Obrázek 5.2

Dvě z výše uvedených Archimédových tvrzení nyní odvodíme. Ukážeme si na nich jedinečný postup, který tento řecký matematik sám objevil. Pokusíme se reprodukovat Archimédovy postupy ze spisu O metodě; výpočet objemu rotačního paraboloidu tak, jak ho uvádí 4. věta a výpočet objemu koule tak, jak ho uvádí 2. věta uvedeného spisu. Obě odvození jsou založena na principu rovnováhy na páce.

## 5.1.1 Odvození některých Archimédových tvrzení

### Rovnováha na páce



Obrázek 5.3: Páka

Archimédés znal a využíval vztah pro rovnováhu na páce

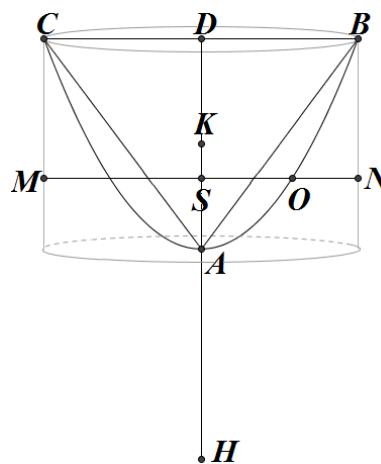
$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad (5.1)$$

tj. čím větší je vzdálenost předmětu od bodu, kde je páka podepřena, tím menší musí být jeho hmotnost pro zachování rovnováhy.

### Objem rotačního paraboloidu

Jako první si uvedeme odvození vzorce pro objem rotačního paraboloidu. Postup je jednoduchý a názorně demonstuje metodu, jíž Archimédés využíval.

Na Obrázku 5.4 vidíme řez paraboloidem vedený kolmo na úsečku  $AD$ , která je zároveň společnou osou všech zobrazených těles. Paraboloid vznikl rotací paraboly s vrcholem v bodě  $A$  kolem úsečky  $AD$ . Zároveň je v obrázku zakreslený řez válce o výšce  $|AD|$  a poloměru podstavy  $|BD| = |DC|$ . Dále vidíme na obrázku řez kužele s vrcholem v bodě  $A$  a poloměrem podstavy taktéž  $|BD|$ . Dodejme, že vzdálenost  $|AD| = |AH|$  a  $|AK| = |DK|$  ( $K$  je tedy těžiště válce).  $S$  je libovolný bod úsečky  $AD$ , kterým je veden řez všemi třemi tělesy.



Obrázek 5.4: Paraboloid

Rovnice obecné paraboly  $g$  s vrcholem v počátku soustavy souřadnic a osou splývající s kladnou poloosou  $y$  má tvar:  $g : y = ax^2$ . Z této vlastnosti paraboly vyplývá, že  $|AD| = a|BD|^2$  a  $|AS| = a|OS|^2$ . Odsud dostáváme vykrácením  $a$  rovnost

$$\frac{|AD|}{|AS|} = \frac{|BD|^2}{|OS|^2},$$

kteřá je základem hledání vztahu pro objem paraboloidu. Nyní ji budeme dále upravovat. Z rovností  $|AD| = |AH|$  a  $|BD| = |NS|$  (viz Obrázek 5.4) dostáváme

$$\frac{|AH|}{|AS|} = \frac{|NS|^2}{|OS|^2}.$$

Rozšířením zlomku na pravé straně číslem  $\pi$  obdržíme

$$\frac{|AH|}{|AS|} = \frac{|NS|^2 \cdot \pi}{|OS|^2 \cdot \pi} = \frac{\text{obsah kruhu ve válci}}{\text{obsah kruhu v paraboloidu}}.$$

Protože  $|AH| = 2|AK|$ , platí

$$\frac{2|AK|}{|AS|} = \frac{\text{obsah kruhu ve válci}}{\text{obsah kruhu v paraboloidu}}. \quad (5.2)$$

Vztah (5.2) můžeme na základě (5.1) přepsat ve tvaru

$$2|AK| \cdot \text{obsah kruhu paraboloidu} = |AS| \cdot \text{obsah kruhu válce}$$

a interpretovat takto: kruh úseče paraboloidu umístěný ve vzdálenosti  $2|AK|$  od středu páky  $A$  vyváží kruh vepsaného válce ležícího od bodu  $A$  ve vzdálenosti  $|AS|$  (jeden kruh tedy musíme dát „na druhou stranu“, tj. do bodu  $H$ ).

Jak bylo řečeno v úvodu,  $S$  je libovolný bod úsečky  $AD$ , kterým je veden řez. Tato rovnost bude tedy nezávislá na jeho volbě. Necháme-li bod  $S$  postupně probíhat úsečku  $AD$ , tak kruhy vzniklé z těchto řezů postupně vyplní celý válec, resp. celou úseč paraboloidu.

Přenesme nyní všechny kruhy paraboloidu do bodu  $H$  tak, že jejich těžiště bude právě v tomto bodě. Válec zůstává na místě na původní straně („vyvažuje“ páku). Rovnováhu neporušíme, pokud všechny kruhy válce přesuneme do jeho těžiště, tj. do bodu  $K$ . Získáváme

$$2|AK| \cdot \text{objem celého paraboloidu} = |AK| \cdot \text{objem celého válce}.$$

Po úpravě získáme vztah mezi objemem rotačního paraboloidu a objemem válce *o stejnému průměru podstavy a stejné výšce*

$$\text{objem celého paraboloidu} = \frac{1}{2} \cdot \text{objem celého válce}.$$

Na základě znalosti vztahu<sup>1</sup> mezi objemem válce a kužele se *stejnou podstavou a výškou*  $V(\text{kužel}) = \frac{1}{3}V(\text{válec})$  získáme úpravou předchozího vztahu vztah mezi objemem paraboloidu a kužele o stejné podstavě a výšce

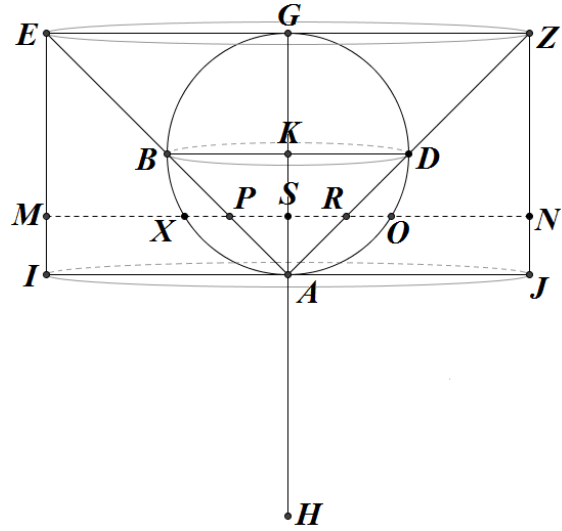
$$\text{objem úseče paraboloidu} = \frac{3}{2} \cdot \text{objem vepsaného kužele}.$$

---

<sup>1</sup> $V(\text{válec}) = \pi r^2 v$ ,  $V(\text{kužel}) = 1/3 \cdot \pi r^2 v$ .

## Objem koule

Na Obrázku 5.5 je znázorněna koule se středem v bodě  $K$  a poloměrem  $BK$ . Zároveň je zde zakreslený válec o výšce  $|AG|$  a poloměru podstavy  $EG$ . Dále vidíme kužel s vrcholem v bodě  $A$  a poloměrem podstavy taktéž  $EG$ . Dodejme, že vzdálenost  $|AG| = |AH|$  a  $|AG| = |EG|$ .  $S$  je libovolný bod úsečky  $AG$ , jímž je veden řez kolmo na osu  $AG$  všemi třemi tělesy. Zřejmě platí, že  $|AB| = |AD| = |BE| = |DZ|$ ,  $|AP| = |AR|$  a  $|PS| = |SR|$ .



Obrázek 5.5: Koule

Dále vidíme, že

$$|MS| = |AG|, \quad |PS| = |AS|,$$

platí tedy rovnosti

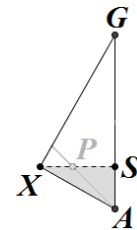
$$|MS| \cdot |PS| = |AG| \cdot |AS|, \quad (5.3)$$

$$\frac{|MS|}{|PS|} = \frac{|AG|}{|AS|}. \quad (5.4)$$

Rovnost (5.3) pro nás bude prvním výchozím krokem, nyní ji budeme dále upravovat.

Podívejme se na trojúhelník  $AXG$ . Tento trojúhelník je na základě Thalétovy věty pravoúhlý ( $AG$  je průměr kružnice a bod  $X$  této kružnici náleží). Dále  $XS$  je výška na stranu  $AG$  tohoto trojúhelníka, tedy  $XS$  je kolmá na  $AG$ . Z Eukleidovy věty o odvěsně ( $c \cdot c_a = a^2$  nebo  $c \cdot c_b = b^2$ ) a z Pýthagorovy věty ( $c^2 = a^2 + b^2$ ) získáváme následující vztahy

$$\begin{aligned} |AG| \cdot |AS| &= |AX|^2, \\ |AX|^2 &= |XS|^2 + |AS|^2. \end{aligned}$$



Obrázek 5.6

Spojením obou rovností dostaneme

$$|AG| \cdot |AS| = |XS|^2 + |AS|^2.$$

Nyní dosadíme výše uvedenou rovnost do vztahu (5.3), získáme tak

$$|MS| \cdot |PS| = |XS|^2 + |AS|^2 = |XS|^2 + |PS|^2. \quad (5.5)$$

Druhým výchozím krokem je rovnost (5.4), také tu budeme dále upravovat. Zlomek na levé straně rozšíříme číslem  $|MS|$  a využijeme rovnosti  $|AG| = |AH|$ . Dostaneme tak

$$\frac{|AH|}{|AS|} = \frac{|MS|^2}{|MS| \cdot |PS|}. \quad (5.6)$$

S využitím (5.5) obdržíme

$$\frac{|AH|}{|AS|} = \frac{|MS|^2}{|XS|^2 + |PS|^2}. \quad (5.7)$$

Rozšířením zlomku na pravé straně číslem  $\pi$  získáme

$$\frac{|MS|^2 \cdot \pi}{|XS|^2 \cdot \pi + |PS|^2 \cdot \pi}$$

a odtud (viz Obrázek 5.5)<sup>2</sup>

$$\frac{|MS|^2 \cdot \pi}{|XS|^2 \cdot \pi + |PS|^2 \cdot \pi} = \frac{\text{obsah kruhu ve válci}}{\text{obsah kruhu v kouli} + \text{obsah kruhu v kuželi}},$$

což dosadíme do rovnosti (5.7) a obdržíme

$$\frac{|AH|}{|AS|} = \frac{\text{obsah kruhu ve válci}}{\text{obsah kruhu v kouli} + \text{obsah kruhu v kuželi}}.$$

Z tohoto vztahu a ze zákona rovnováhy na páce (podepřena v bodě  $A$ ) lze usoudit, že kruh ve válci, když zůstane na místě, vyváží oba zbylé kruhy (v kouli a kuželi) přenesené do bodu  $H$  tak, že jejich těžiště je právě v bodě  $H$ .

Z těchto řezů složíme dohromady tělesa, stejně jako v odvození pro objem paraboloidu. Válec zůstávající na původním místě na páce bude v rovnováze s koulí a kuželem umístěnými svými těžišti v bodě  $H$ .

Válec má těžiště v polovině své osy, tj. v bodě  $K$ . Budeme jej tedy brát tak, jako by byl na páce umístěn v bodě  $K$ . Potom podle vztahu  $m_1 r_1 = m_2 r_2$  máme

$$|AK| \cdot \text{objem válce} = |AH| \cdot (\text{objem koule} + \text{objem kužele}).$$

Jelikož  $|AH| = 2|AK|$ , dostáváme, že válec je oproti kouli s kuželem dvojnásobný:

$$\text{objem válce} = 2 \cdot (\text{objem koule} + \text{objem kužele}).$$

---

<sup>2</sup>Kuželem po celou dobu budeme rozumět kužel  $AEZ$ .

Dále víme, že válec má oproti vepsanému kuželu trojnásobný objem. Tedy

$$\begin{aligned} 3 \cdot \text{objem kužele} &= 2 \cdot \text{objem kužele} + 2 \cdot \text{objem koule}, \\ \text{objem kužele} &= 2 \cdot \text{objem koule}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Vraťme se nyní zpět k Obrázku 5.5. Označme  $\varrho$  poloměr koule, tj.  $\varrho = |BK|$ . Vidíme, že kužel  $A EZ$  má výšku  $v = 2\varrho$  a poloměr  $r = 2\varrho$ . Víme, že objem kužele je  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$ . Jeho objem je tedy

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 4\varrho^2 \cdot 2\varrho = \frac{8}{3} \pi \varrho^3.$$

Kužel  $ABD$ , tedy kužel, jehož *poloměr základny i výška jsou rovny poloměru koule* ( $v = \varrho$ ,  $r = \varrho$ ), má objem

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \varrho^2 \cdot \varrho = \frac{1}{3} \pi \varrho^3.$$

Je zřejmé, že objem kužele  $A EZ$  je roven objemu osmi kuželů  $ABD$ . Dosadíme-li tento poznatek do rovnosti (5.8), dostaneme

$$8 \text{ kuželů} = 2 \text{ koule},$$

neboli

**Koule má oproti kuželu, jehož poloměr i výška jsou rovny poloměru koule, čtyřnásobný objem.**

což přesně odpovídá známému vzorci

$$V(\text{koule}) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

## 5.2 Jiné postupy

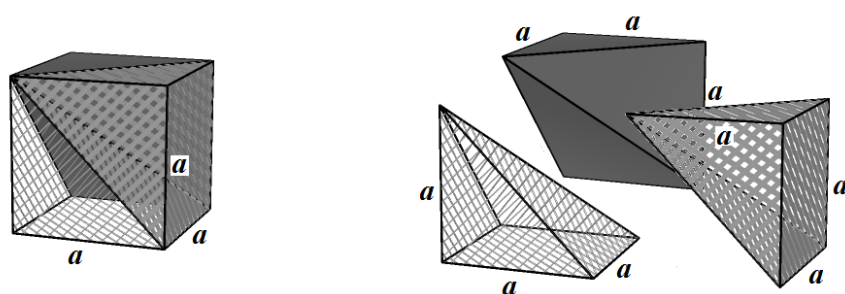
Na závěr se zaměříme na takové postupy, které sice nejsou matematicky zcela přesné, jsou však didakticky zajímavé. Mohou přiblížit některé vzorce pro objemy i mladším žákům, jelikož jsou založeny zejména na názorných představách a obrázcích.

### 5.2.1 Objem jehlanu

*Objem jehlanu je roven jedné třetině objemu hranolu se stejnou podstavou a výškou.*

*Objem jehlanu je tedy roven jedné třetině součinu obsahu podstavy a výšky.*

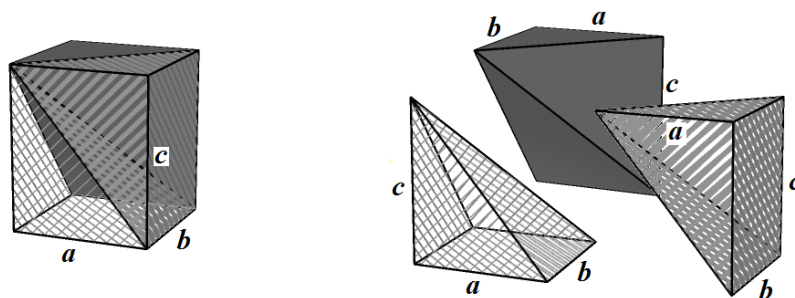
My se omezíme na pravoúhlé jehlany, na kterých je vztah pěkně demonstrovatelný. Lze si snadno představit, že krychli lze rozdělit na tři shodné jehlany:



Obrázek 5.7

Takovýto model lze žákům vymodelovat z papíru, aby si mohli sami zkusit, že jsou jehlany skutečně stejné a že jejich složením vznikne krychle.

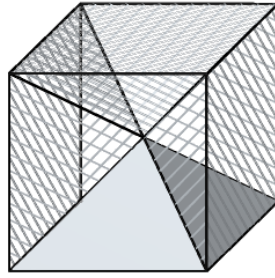
O něco složitější situace je v případě kvádru. Ten nelze rozložit na tři shodné jehlany, ale lze jej rozdělit na tři pravoúhlé jehlany se stejným objemem. A to tak, že délkami stran podstavy a výšky jsou vždy hodnoty  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .



Obrázek 5.8

Objem jehlanu se pomocí krychle dá ukázat ještě dalším způsobem. Krychle je totiž složena právě ze šesti jehlanů; podstavou každého jehlanu je jedna stěna krychle, všechny jehlany se pak sbíhají v jednom bodě, a to v těžišti krychle (viz Obrázek 5.9).





Obrázek 5.9

Víme, že objem  $V_k$  krychle o straně  $a$  je  $V_k = a^3$ . Krychle je vyplněna šesti shodnými jehlany, objem  $V_j$  každého je tak

$$V_j = \frac{V_k}{6} = \frac{a^3}{6},$$

což přesně odpovídá objemu jehlanu se čtvercovou podstavou (strana  $a$ , obsah  $S = a^2$ ) a výškou  $v = \frac{a}{2}$ :

$$V_j = \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} S_p \cdot v.$$

Opět tedy dostáváme, že objem jehlanu je roven jedné třetině součinu obsahu jeho podstavy a výšky.

Ze vztahu po objem kužele nyní odvodíme vztah pro objem válce.

## 5.2.2 Vzorce odvozené na základě Cavalieriova principu

Při odvození lze také s úspěchem využívat Cavalieriův princip pro objemy těles. Ten říká, že

*tělesa se stejně velkými podstavami<sup>3</sup> a výškami mají stejný objem, pokud řezy rovnoběžné s podstavami vedené ve stejné vzdálenosti od podstav mají stejné obsahy.*

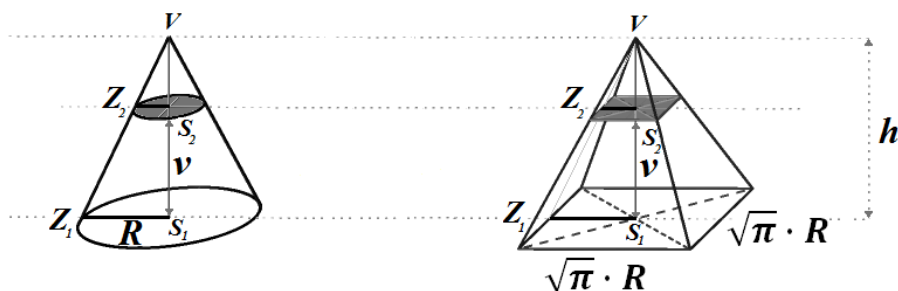
### Objem kužele

*Objem kužele je roven jedné třetině součinu obsahu podstavy a výšky.*

Abychom mohli použít Cavalieriův princip, budeme uvažovat kužel s poloměrem podstavy  $R$  a výškou  $h$  a jehlan se stejnou výškou a čtvercovou podstavou o straně  $a = \sqrt{\pi} \cdot R$ .

---

<sup>3</sup>tj. podstavami, které mají stejný obsah



Obrázek 5.10

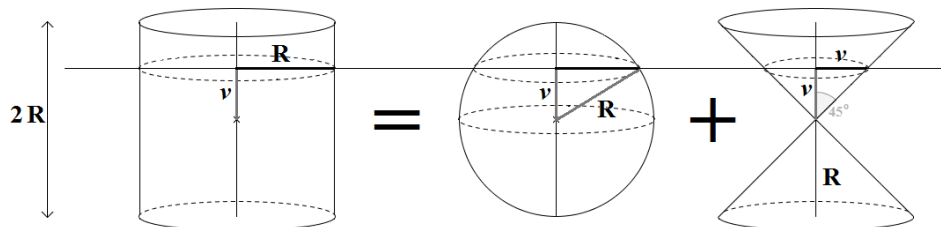
Obě tělesa mají zřejmě stejný obsah podstavy<sup>4</sup>, tj.  $S = \pi R^2$ . Nyní oběma tělesy vedeme ve stejné výšce  $v$  rovinu rovnoběžnou s rovinami podstavy. Tato rovina protne kužel v kruhu a jehlan ve čtverci. Jelikož jsou trojúhelníky  $VZ_1S_1$  a  $VZ_2S_2$  shodné, jsou také shodné úsečky  $Z_1S_1$  a  $Z_2S_2$ , a tak jsou si rovny i obsahy řezů v libovolné výšce  $v$ , čímž je splněna podmínka Cavalieriova principu. Získáváme tedy vztah pro objem kužele analogický jako vztah pro objem jehlanu:

$$V_k = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{2} S_p \cdot h.$$

### Objem koule

*Objem koule o poloměru  $R$  je roven objemu válce o průměru podstavy  $R$ , výšce  $2R$ , od něhož odečteme objem dvou kuželů o výšce  $R$  a poloměru podstavy  $R$ .*

Při odvození využijeme opět Cavalieriův princip pro objemy těles. Na Obrázku 5.11 vidíme tři tělesa o stejné výšce  $2R$  – válec, kouli a jakýsi „dvojkůžel“. V obrázku máme dále naznačenu rovnost „válec je roven součtu koule a dvou kuželů“, přičemž pro stručnost hovoříme o rovnosti a součtu těles, máme však na mysli jejich objemy.



Obrázek 5.11: Objem koule pomocí Cavalieriova principu

Podívejme se, jak vypadá řez těmito tělesy ve stejné výšce  $v$  (měřeno od středu těles). Pokud budou mít řezy na obou stranách rovnosti stejný obsah, pak budou mít tělesa na obou stranách rovnosti stejný objem.

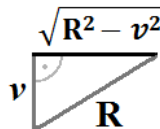
<sup>4</sup> $S(\text{čtverec}) = a^2$ ,  $S(\text{kruh}) = \pi r^2$

Řez válcem je zřejmě v každé výšce řezu kruh o poloměru  $R$ , tedy

$$S(\text{řez válce}) = \pi R^2.$$

Řezem koule bude zřejmě také kruh, ovšem s jeho poloměrem je to obtížnější. Na Obrázku 5.12 vidíme, že hledaný poloměr ve výšce  $v$  od středu koule lze snadno dopočítat podle Pýthagorovy věty:  $r_v = \sqrt{R^2 - v^2}$  a obsah řezu je tedy

$$S(\text{řez koule}) = \pi(R^2 - v^2).$$



Obrázek 5.12

Dále potřebujeme zjistit, jak vypadá řez kuželem. Tím bude opět kruh, tentokrát s poloměrem  $v$  (strana kužele svírá s jeho podstavou úhel velikosti  $45^\circ$ , poloměr je tedy vždy roven výšce od středu)

$$S(\text{řez kužele}) = \pi v^2.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\pi R^2 = \pi(R^2 - v^2) + \pi v^2,$$

dostáváme

$$S(\text{řez válce}) = S(\text{koule}) + S(\text{kužel}).$$

Můžeme tedy podle Cavalierova principu na základě znalosti vzorců pro objem válce a dvou kuželů snadno dopočítat objem koule. Uvědomme si, že námi zadaný válec má poloměr  $R$  a výšku  $2R$ , každý z kuželů pak má výšku i poloměr podstavy roven  $R$ . Dostáváme tak rovnost:

$$\pi R^2 \cdot 2R = V(\text{koule}) + 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R,$$

neboli

$$2\pi R^3 = V(\text{koule}) + \frac{2}{3} \pi R^3,$$

odkud už bezprostředně plyne

$$V(\text{koule}) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

# Závěr

V této práci byl čtenáři představen výpočet objemů vybraných těles, jak byly prováděny ve starověkém Egyptě a Mezopotámii. Byl ukázán jejich postup a využití a tak zdůrazněna potřeba objemy počítat.

Dále byl čtenář seznámen s matematicky přesnou definicí objemu těles pomocí Jordanovy míry. Zavedením dělení  $D$  se podařilo dokázat věty o měřitelnosti těles a aditivitě jejich objemů. Důkazy přinesly čtenáři obohacení pro práci s množinovými pojmy. Na základě vystavěné teorie míry byla vybudována teorie Riemannova integrálu, což bylo důležité při odvození vztahů pomocí integrálního počtu.

Vztahy pro objemy těles, jež jsou uváděny ve středoškolských přehledech vzorců, byly názorně vypočítány pomocí jednoduchého integrálu, čímž bylo ukázáno, že v případě rotačních těles je zbytečné užití komplikovanějšího násobného integrálu. Pro případné další výpočty byla některá odvození provedena podruhé i pomocí trojného integrálu, jehož využití je obecnější.

Na závěr byly odvozeny vztahy pro objemy některých těles bez integrálního počtu, a to pomocí Archimédovy metody, Cavalieriova principu a názorných představ. Některé z těchto postupů mohou být užitečné pro přiblížení původu vztahů i žákům mladšího věku, pro které je integrální počet zatím příliš komplikovaný.

# Seznam použité literatury

- [1] Bečvář, J., Bečvářová, M., Vymazalová, H. *Matematika ve starověku, Egypt a Mezopotámie*. Prometheus, Praha, 2003.
- [2] Vymazalová, H. *Staroegyptská matematika, Hieratické matematické texty*. Edice Dějiny matematiky, svazek 31, Praha, 2006.
- [3] Schwabik, Š., Šarmanová, P. *Malý průvodce historií integrálu*. Prometheus, Praha, 1996.
- [4] Kopáček, J. *Integrály*. Matfyzpress, Praha, 2004.
- [5] Bečvář, J., Štoll, I. *Archimedes, Největší vědec starověku*. Prometheus, Praha, 2005.
- [6] Jordan, C. *Remarques sur les integrales définies*. Journ. de Math., 1892.
- [7] Peano, G. *Applicationi geometriche del calcolo infinitesimale*. 1887.
- [8] Lebesgue, H. L. *Intégrale, Longuer, Aire*. Ann. di Matem., 1902.
- [9] Lebesgue, H. L. *Lecons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives professées au College de France*. Gauthier-Villars, Paris, 1904.
- [10] Heath, T. L. *The Works of Archimedes*. CUP, Cambridge, 1897.