Posudek

☒vedoucího ☐oponenta
☐diplomové ☒bakalářské práce
Autor/Autorka: Vít Orava
Název práce: První a druhý Stokesův problém pro zobecněné newtonské tekutiny
Jméno vedoucího/oponenta: Prof. RNDr. Josef Málek, DSc.

Matematická úroveň:
☐vynikající ☐velmi dobrá ☒průměrná ☐podprůměrná ☐nevyhovující

Grafická, jazyková a formální úroveň:
☐vynikající ☐velmi dobrá ☒průměrná ☐podprůměrná ☐nevyhovující

Výsledky:
☒originální ☐původní i převzaté ☐netriviální kompilace ☐citované z literatury ☐opsané

Použité metody:
☐nestandardní ☐standardní ☒obojí

Aplikovatelnost:
☐přínos pro teorii ☐přínos pro praxi ☒přínos pro praxi i teorii ☐bez přínosu ☐nedovedu posoudit

Věcné chyby:
☐téměř žádné ☐vzhledem k rozsahu a pojednávanému tématu přiměřený počet ☒méně podstatné četné ☐závažné

Tiskové chyby:
☐téměř žádné ☐vzhledem k rozsahu a pojednávanému tématu přiměřený počet ☒četné

Celková úroveň práce:
☐vynikající ☐velmi dobrá ☒průměrná ☐podprůměrná ☐nevyhovující

Práci
☒doporučuji ☐nedoporučuji
uznat jako diplomovou/bakalářskou. Návrh klasifikace přikládám na zvláštním papíru.

Připomínky a vyjádření vedoucího/oponenta:

Připomínky vedoucího jsou uvedené v Příloze.

Místo, datum, podpis vedoucího/oponenta:

Praha, 13. června 2011

Návrh hodnocení

Bakalářskou práci Víta Oravy „První a druhý Stokesův problém pro zobecněné newtonské tekutiny" navrhuji ohodnotit stupněm

velmi dobře.

Místo, datum, podpis vedoucího/oponenta:

Praha, 13. června 2011

POSUDEK BAKALÁŘSKÉ PRÁCE „PRVNÍ A DRUHÝ STOKESŮV PROBLÉM PRO ZOBECNĚNÉ NEWTONOVSKÉ TEKUTINY“

JOSEF MÁLEK

1. Obsah práce

Tématem práce je, dle zadání, studium prvního a druhého Stokes problému pro některé modely nenewtonovských tekutin. Autor uvažuje modely typu

$$\mathbb{T}_\delta = 2\mu_0 \left(1 + \lambda |\mathbb{D}|^2\right)^m \mathbb{D}, \tag{1.1a}$$

$$\mathbb{D} = \alpha \left(1 + \beta |\mathbb{T}_\delta|^2\right)^n \mathbb{T}_\delta, \tag{1.1b}$$

kde $\mathbb{D}$ značí symetrický gradient rychlosti a $\mathbb{T}_\delta$ je bezestopá část Cauchyho tenzoru napětí. Rovnice popisující proudění jsou řešeny jednak analyticky (metodou poruchového počtu) a dále také různými numerickými metodami. Práce splňuje cíle vytyčené v zadání.

Autor dospěl k mnoha původním výsledkům – což velmi oceňuji – a samostatně použil metody, které přesahují standardní soubor dovedností studenta bakalářského studia. Prezentace dosažených výsledků je však, dle mého názoru, velmi špatná, což bohužel velmi snižuje kvalitu práce jako celku. Nedostatky práce jsou diskutovány níže.

2. Poznámky

2.1. Podstatné nedostatky.

2.1.1. *Odvození slabé formulace.* Odvození slabé formulace je špatně. Integrál

$$\int_{\Gamma_1} \nu \left(1 + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y}\tilde{\varphi},$$

který vznikne aplikací metody *per partes* není roven nule. O funkci $\tilde{\varphi}$ není nic známo, $\tilde{\varphi} \in \left\{f \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \mid f = 0 \text{ na } \Gamma_3 \cap \Gamma_4\right\}$, o funkci $\tilde{v}_1$ sice víme, že je na Γ_1 rovná g, to ale *nijak nezaručuje*, že $\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y} = 0$. (Právě naopak, derivace je nenulová.) Nehomogenní Dirichlet okrajovou podmínku je nutné zaručit vhodnou volbou prostoru pro testovací funkce. Na druhou stranu ovšem tato chyba nijak neovlivňuje následující výpočty v FreeFem, to je dáno postupem jakým je nehomogenní okrajová podmínka zpracovávána v numerických výpočtech postavených na metodě konečných prvků, viz kupříkladu Tong and Rossettos (1977).

2.1.2. *Volba parametrů.* Autor nevysvětluje, proč uvažované fyzikální parametry nabývají právě hodnot používaných v práci. Odpovídá kupříkladu volba viskozity nějakému reálnému materiálu? Data lze snadno dohledat, jen namátkou uvádím několik možných zdrojů: Carreau (1972), Mighri et al. (2001), Oblonšek et al. (2003), Martínez-Padilla et al. (2004).

Diskuse volby fyzikálních parametrů je obzvlášť důležitá v případě metody poruchového počtu. Bezrozměrný parametr, vůči kterému se provádí rozvoj, musí být malý. Lze najít reálné problémy, kde $\varepsilon = \lambda \left(\frac{V}{L}\right)^2$ je malé číslo? (Parametr λ je parametr z modelu (1.1a) a V je charakteristická rychlost a L je charakteristická délka.)

2.1.3. *Nekonzistentní vyjádření ohledně numerického řešení Stokes prvního problému.* Na straně 18 autor tvrdí:

> Toto „oříznutí“ nekonečné oblasti je vhodné pro druhý Stokesův problém – oscilující deska, kde se jednotlivé kmity pro $t \to \infty$ navzájem vyruší. V případě prvního Stokesova problému musíme bohužel přiznat, že „oříznutý“ problém se pro velká t odchyluje od původního problému na nekonečné oblasti.

Ponechme nyní stranou otázku, co autor myslí vyjádřením, že „se jednotlivé kmity pro $t \to \infty$ navzájem vyruší“ a srovnejme toto vyjádření s vyjádřením na straně 25:

> Z numerických experimentů tedy plyne, že omezení původního poloprostoru na konečnou oblast Ω, kde uvažujeme přidanou okrajovou podmínku $v_1(y_{\max}, t) = 0$ pro dostatečně velkou hodnotu $y_{\max}$, má minimální vliv a tedy řešení úlohy (†) můžeme považovat za dostatečně aproximující původní úlohu.

(Ponechme opět stranou, že autor chtěl v poslední větě patrně napsat: „můžeme považovat za dostatečně aproximující *řešení* původní úlohy.“)

2.1.4. *Numerické řešení pro implicitní model.* Skutečně autor při výpočtu používá $\tau_n(t) = 0$ tak jak je uvedeno na straně 30? Pokud ano, je výpočet chybný.

2.2. Drobné detaily.

2.2.1. *Chybějící popisky grafů.* Ve velké části grafů schází popisky os. (Co je kupříkladu znázorněno barvou v obrázku 5.3a? Hodnota $\frac{u_k(y,t)-u_{k-1}(y,t)}{u_k(y,t)}$ v daném bodě?)

2.2.2. *Srovnání výsledků získaných poruchovým počtem a numerických výsledků.* Autor nevyužil možnosti porovnat výsledky získané metodou poruchového počtu s výsledky získanými numerickým řešením úplné soustavy rovnic popisujících proudění.

2.2.3. *Green funkce pro poloprostor.* Ve vzorci (4.2) na straně 17 má být Green funkce pro poloprostor, stejně jako ve vzorcích pro řešení prvního Stokes problému. (Viz předchozí kapitola.)

2.2.4. *Nesmyslné věty, nepodložená tvrzení, překlepy.*

- Strana 2. „Fyzikální význam prvního a druhého Stokesova problému spočívá ve způsobů zjednodušení, díky němuž se jedná o jednoduchý smyk (tzv. *simple shear flow*), tedy ideální teoretický případ pro testování vlastností různých materiálů.“ Právě naopak. Systém rovnic popisujících proudění je jednoduchý, protože se jedná o jednoduché smykové proudění. Fyzikální význam Stokesova problému nespočívá ve *způsobu zjednodušení*, ale v možnosti zkoumat proudění v geometrii, ve které je systém rovnic popisujících proudění výrazně jednodušší než v obecném případě. Možnost jednoduchého popisu pak vede k tomu, že lze poměrně snadno zkoumat vlastnosti daného modelu.
- Strana 2. „V případě prvního explicitního modelu (1a) se zabýváme [...] Z numerického hlediska představuje [tento model] evoluční nelineární parabolickou rovnici s jednou prostorovou proměnnou.“ Přívlastek evoluční je pro termín parabolická rovnice takřka zbytečný. Podstatné ale je, že model vede na nelineární parabolickou rovnici s jednou prostorovou proměnnou pouze v případě *jednoduché geometrie* používané v práci. Neplatí to obecně, jak by se z kontextu mohlo zdát.
- Strana 2. „V případě druhého implicitního modelu (1b) odvozeného v [8] se setkáváme...“ Práce [8] je Málek and Rajagopal (2007). V této práci ovšem nejsou diskutovány modely typu (1.1b). Autor se chtěl patrně odkázat na práci Málek et al. (2010), která je v seznamu literatury označena [6].
- Strana 4.

  V případě jednoduchého smyku dostáváme symetrickou část gradientu rychlosti ve tvaru
$$\mathbb{D} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial v_1(y,t)}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v_1(y,t)}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  [...] Dále z $\mathbf{v}(x,y,z;t) = (v_1(y,t),0,0)$ dostáváme $\mathbb{D}(x,y,z;t) = \mathbb{D}(y,t)$, ...

  Zde autor opět zaměňuje předpoklady a jejich důsledky. Věta má samozřejmě znít asi takto: „V případě jednoduchého smykového proudění předpokládáme rychlostní pole ve tvaru $\mathbf{v}(x,y,z;t) = (v_1(y,t),0,0)$ z čehož plyne, že $\mathbb{D}(x,y,z;t) = \mathbb{D}(y,t)$ a složky symetrického gradientu rychlosti jsou dány vztahem...“

  V celé kapitole se pak podivně mísí vztahy, které platí obecně pro konstitutivní rovnice typu $\mathbb{T} = \mathfrak{f}(\mathbb{D})$ s rovnostmi, které platí pouze v jednoduchém smykovém proudění. Mimochodem, postupem diskutovaným v této kapitole *nelze* – pro některé hodnoty parametrů – odvodit modely typu (1.1b). (Předpokládá-li se, že $\mathfrak{f}$ je tenzorová funkce.)
- Strana 5. „Viskozita je fyzikální veličina vyjadřující míru odporu tekutiny v tečném směru změny rychlosti.“ Termín „tečný směr změny rychlosti“ nechápu. (Jedná se o změnu v čase, změnu v prostoru. Vůči čemu se hovoří o tečném směru?)
- Strana 6. „Tento fenomén je u některých druhů tekutin známý, proto nebudeme parametr m nijak apriori omezovat.“ Chybí odkaz na relevantní experimentální data.
- Strana 7, poznámka pod čarou číslo 2. „Okrajová podmínka $\lim_{y\to+\infty} v(y,t) = 0$ vystihuje – díky vlastnostem viskozity – fyzikální podstatu problému.“ Co je to fyzikální podstata problému? Jakou vlastnost viskozity má autor na mysli?
- Strana 8. Proměnné Laplace transformace funkce $f(y,t)$ jsou (y,p) a nikoliv (y,t).

Chyby podobného typu se vyskytují i na následujících stranách, je zbytečné uvádět úplný výčet.

2.2.5. *Diskuse numerických metod.* Diskuse numerických metod na začínající na straně 18 je zatížena řadou nepřesností. Autor dostatečně jasně nerozlišuje dva potenciální zdroje problémů v numerickém řešení úlohy. Prvním z těchto problémů je nutnost vypořádat se s nekonečnou oblastí, druhý problém je nespojitost řešení v čase $t = 0$ (náhlý přechod dolní desky ze stavu klidu na rychlost V). Otázky vhodné diskretizace v prostorové proměnné (nekonečná oblast) a vhodné diskterizace v časové proměnné je žádoucí nahlížet zvlášť[1].

Typickou ukázkou zbytečného směšování obou problémů je vyjádření z druhého odstavce kapitoly: „Nicméně tato metoda není ideální pro úlohy typu prvního Stokesova problému, jelikož velká nespojitost v čase $t = 0$ pro $y = 0$ není pro aproximaci funkcemi typu $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ vhodná.“ První část odstavce je totiž věnována diskretizaci v prostorové proměnné a čas zde nijak nevystupuje. (Řešení může být – a v případě Navier–Stokes tekutiny i je – na každé časové hladině $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ funkce.) To ovšem nijak neznamená, že i s závislostí na čase pro pevné y je nutné nakládat jako s nekonečně diferencovatelnou funkcí.

[1] Vše se navíc později ještě zkomplikuje otázkou jak zvolit délku časového intervalu při řešení problému metodou *space-time discretisation*. Ideální by samozřejmě bylo vzít koncový čas t_1 „nekonečný“, což je ovšem nemožné. Ve výsledku je tedy nutné postihnout tři jevy: nekonečná oblast v prostorové proměnné, singularita při přechodu přímky $t = 0$ a volba koncového času. Všechny jmenované jevy budou vzájemně provázané.

Na straně 21 autor píše: „Nyní už máme na levé straně bilineární formu vzhledem k v_1, φ a můžeme jednoduše provést výpočet využívající metody konečných prvků." Metoda konečných prvků je nástroj pro *diskretizaci* parciálních diferenciálních rovnic a autor ji samozřejmě používá již pro nelineární problém, není pravda, že metoda konečných prvků nějak souvisí s linearitou problému.

Je velmi troufalé nazývat Δ_k (strana 22) relativní aproximační chybou. Δ_k je rozdíl mezi dvěma řešeními linearizovaného diskrétního problému ve dvou po sobě následujících krocích. Hovořit o této veličině v souvislosti s chybou úlohy (tedy rozdílem mezi získaným numerickým řešením a přesným řešením) je zavádějící. Jistá souvislost zde samozřejmě je, ale nelze jednoduše říci jaká, je proto potřeba jisté obezřetnosti při formulaci tvrzení o konvergenci numerického řešení k přesnému řešení.

První odstavec na stránce 23 je zavádějící. Není jasné, zda je autor dostatečně schopen rozlišit dva pojmy a sice jak kvalitně je *daná* funkce aproximována v nějakém konečnědimenzionálním podprostoru a jak rychle *konverguje* numerické řešení k přesnému řešení v závislosti na „hustotě" sítě. Autorovy výroky o „konvergenci" pro P_1 a P_2 prvky mají jakési pravdivé jádro pokud hovoříme o aproximaci známé funkce, jsou však čirou spekulací pokud má autor skutečně na mysli konvergenci numerického řešení k přesnému řešení. Autor by měl u obhajoby zmínit postup jakým získal hodnoty konstant C_{50}, C_{100} a podobně, pak bude zřejmé nakolik jsou jeho úvahy relevantní.

Nemá smysl zavádět obskurní pojmy jako „obsah plochy řešení" (strana 27) pro normu v prostoru $L^2(\Omega)$.

Časoprostorová diskretizace není *a priori* nástroj jak se vyvarovat singularity v čase $t = 0$. Problém s časovou derivací se jen převede (skryje) na stejně obtížný problém s nekompatibilními okrajovými podmínkami v časoprostorové diskretizaci.

3. Průběh řešení práce

Autor, student čtvrtého ročníku bakalářského studia, se přípravě práce věnoval od konce roku 2010. Postup řešení práce byl často diskutován s přiděleným konzultantem (Vít Průša), tyto konzultace přispěly k opravě mnoha chyb. Autor prokázal velkou samostatnost a navzdory varování se v případě numerického řešení rozhodl pro nepříliš standardní metodu, o jejíž vhodnosti lze v daném případě pochybovat.

Autor prokázal, že dokáže provést analytické výpočty, a že dokáže numericky řešit parciální diferenciální rovnice metodou konečných prvků (za pomoci programových balíků). Je zjevné, že autor načerpal mnohé zkušenosti, které zhodnotí později, a které se bohužel nepromítly již do řešení problému studovaného v bakalářské práci.

4. Hodnocení

Výše uvedené poznámky jsou pokusem o přehnaně kritické hodnocení práce. Navzdory všem uvedeným nedostatkům se jedná o práci, která je na přijatelné úrovni, a ve které autor částečně prokázal schopnost sepsat vědecký text většího rozsahu. Práci lze *doporučit k uznání jako bakalářskou práci.*

Reference

Carreau, P. J. (1972). Rheological equations from molecular network theories. *J. Rheol. 16*(1), 99–127.

Málek, J., V. Průša, and K. R. Rajagopal (2010). Generalizations of the Navier–Stokes fluid from a new perspective. *Int. J. Eng. Sci. 48*(12), 1907–1924.

Málek, J. and K. Rajagopal (2007). Incompressible rate-type fluids with pressure and shear-rate dependent material moduli. *Nonlinear Anal., Real World Appl. 8*(1), 156–164.

Martínez-Padilla, L. P., F. López-Araiza, and A. Tecante (2004). Steady and oscillatory shear behavior of fluid gels formed by binary mixtures of xanthan and gellan. *Food Hydrocolloids 18*(3), 471–481.

Mighri, F., M. A. Huneault, A. Ajji, G. H. Ko, and F. Watanabe (2001). Rheology of EPR/PP blends. *J. Appl. Polym. Sci. 82*(9), 2113–2127.

Oblonšek, M., S. Šostar Turk, and R. Lapasin (2003). Rheological studies of concentrated guar gum. *Rheol. Acta 42*(6), 491–499.

Tong, P. and J. N. Rossettos (1977). *Finite-element method.* Cambridge, Massachusetts: MIT Press. Basic technique and implementation.