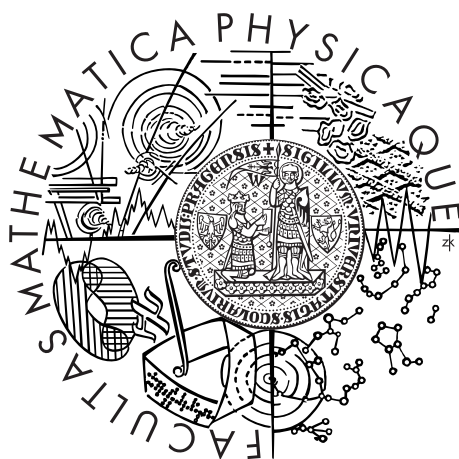


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Vít Orava

První a druhý Stokesův problém pro zobecněné newtonské tekutiny

Matematický ústav UK (32-MUUK)

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Josef Málek CSc., DSc.

Studijní program: obecná matematika (MOM)

Studijní obor: obecná matematika (MOM)

Praha 2011

Rád bych poděkoval Mgr. Vítu Průšovi, Ph.D., který mi vždy poradil nebo nasměroval správným směrem a byl pro mě výborným konzultantem. Dále bych rád poděkoval svému vedoucímu práce prof. RNDr. Josefu Málkovi CSc., DSc., který byl pro mě jeden z důvodů, proč jsem začal studovat matematické modelování. Nakonec bych věnoval své díky členům spolku S.L.Z.A., se kterými jsem vychutnával nejednu neneutronovskou tekutinu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: První a druhý Stokesův problém pro zobecněné newtonovské tekutiny

Autor: Vít Orava

Ústav: Matematický ústav UK (32-MUUK)

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Josef Málek CSc., DSc., MUUK

Abstrakt: Tato práce se zabývá studiem dvou modelů pro zobecněnou newtonovskou tekutinu diskutovaných na prvním a druhém Stokesově problému, tedy na klasickém příkladu jednoduchého smyku. První model je poměrně standartním případem explicitního modelu mocninného typu – v některých případech zaměnitelný s Carreau modelem. V případě druhého modelu se zabýváme novým způsobem nahlížení, a to prostřednictvím implicitní formy modelu. Tato problematika je blíže diskutovaná v [7]. Obě možnosti řešíme přibližně metodou poruchového počtu a následně numericky pomocí dostupných zabudovaných funkcí v softwaru Matlab. V případě prvního modelu uvažujeme navíc možnost řešení metodou konečných prvků a zabýváme se studiem linearizujícího algoritmu.

Klíčová slova: první Stokesův problém, druhý Stokesův problém, zobecněná newtonovská tekutina, Carreau model, implicitní modely mocninného typu, prostoročasová diskretizace, DAE

Title: First and Second Stokes problem for generalized Newtonian fluids

Author: Vít Orava

Department: Matematický ústav UK (32-MUUK)

Supervisor: prof. RNDr. Josef Málek CSc., DSc., MUUK

Abstract: This thesis has considered two models for generalized Newtonian fluids in the case of First and Second Stokes problem - the typical example of simple shear flow. First model is a standard example of power law model in some cases compatible with Carreau's model. In the second model we have obtained a new point of view - the implicit form of the model. This idea is more discussed in [7]. Results for both models have been carried out by perturbation method and consequently numerically in software Matlab. Furthermore the first model has been solved by finite element method and principles of a linearization-algorithm has been investigated.

Keywords: First Stokes problem , Second Stokes problem, generalized Newtonian fluids, Carreau model, implicit power law model, space-time discretization, DAE

Obsah

Úvod	2
1 Zobecnění newtonovské tekutiny	4
2 První a druhý Stokesův problém pro newtonovskou tekutinu	7
2.1 První problém	7
2.2 Druhý problém	9
3 První Stokesův problém	10
3.1 Zobecnění č.1	10
3.2 Zobecnění č.2	13
4 Druhý Stokesův problém	16
4.1 Zobecnění č.1	16
4.2 Zobecnění č.2	17
5 Numerické řešení	18
5.0.1 Nekonečná oblast	18
5.0.2 Nelinearita	19
5.1 Numerické řešení metodou konečných prvků	19
5.1.1 Slabá formulace	20
5.1.2 Linearizující algoritmus	21
5.1.3 Numerické výsledky prvního problému	22
5.1.4 Numerické výsledky druhého problému	25
5.2 Výsledky dosažených pomocí softwaru Matlab R2007b	27
5.2.1 Explicitní model	27
5.2.2 Implicitní model	30
Závěr	32
Literatura	33

Úvod

Historie prvního a druhého Stokesova problému sahá přibližně do poloviny devatenáctého století. Tehdy bylo mnoho vědců fascinováno problematikou elektromagnetického pole a elektromagnetickou indukcí. Jeden ze zkoumaných modelů byl tvořen kulovým kyvadlem, jehož oscilace byly tlumeny elektrickým polem statické koule. Nicméně v některých případech docházelo v porovnání experimentů a teorie k odchýlkám. Tento jev byl připisován přítomnosti vzduchu namísto vakua. Z experimentů plynulo, že pro vzduch se musel teoretický výsledek násobit jistým koeficientem.

Už dříve byla experimentálně dokázána existence viskozity, což bylo tenkrát považováno za něco jako vnitřní tření tekutiny. Nicméně tato veličina byla v mnohých modelech a výpočtech zanedbávána. Avšak nepřesnosti v kyvadlovém modelu v elektromagnetickém poli inspirovaly G.G. Stokesa ke zkoumání fenoménu viskozity právě na tomto modelu. Experimentální výsledky bez přítomnosti elektrického pole kolem statické koule vedly k jasným závěrům – čím víc se kyvadlo při své oscilaci přiblížilo ke statické kouli, tím byl pohyb kyvadla více tlumený. Tento jev popsali pro newtonovskou tekutinu G.G. Stokes ve svém článku [6].

Jedním ze zjednodušujících případů tohoto modelu, byl pohyb v poloprostoru vyplněného tekutinou buzený oscilující deskou (rovinou xz), což je dnes označováno jako druhý Stokesův problém. Pokud zkoumáme na stejné oblasti pohyb vybuzený náhlým urychlením roviny xz bez oscilace, dostaneme první Stokesův problém. Jinými způsoby zjednodušení můžeme dostat např. *Couette flow* případně *Poiseuille flow*.

Fyzikální význam prvního a druhého Stokesova problému spočívá ve způsobu zjednodušení, díky němuž se jedná o jednoduchý smyk (tzv. *simple shear flow*), tedy ideální teoretický případ pro testování vlastností různých modelů.

Jak už bylo řečeno G.G. Stokes vyřešil ve své práci tyto dva problémy pro newtonovskou tekutinu. Newtonovská tekutina je modelový případ, který je stejně jako např. ideální plyn nereálný. Některé druhy tekutin se za určitých podmínek mohou přiblížit tomuto chování, nicméně mnoho tekutin se výrazně odlišuje. Uvažujme tedy zobecnění newtonovské tekutiny mocninnými modely typu

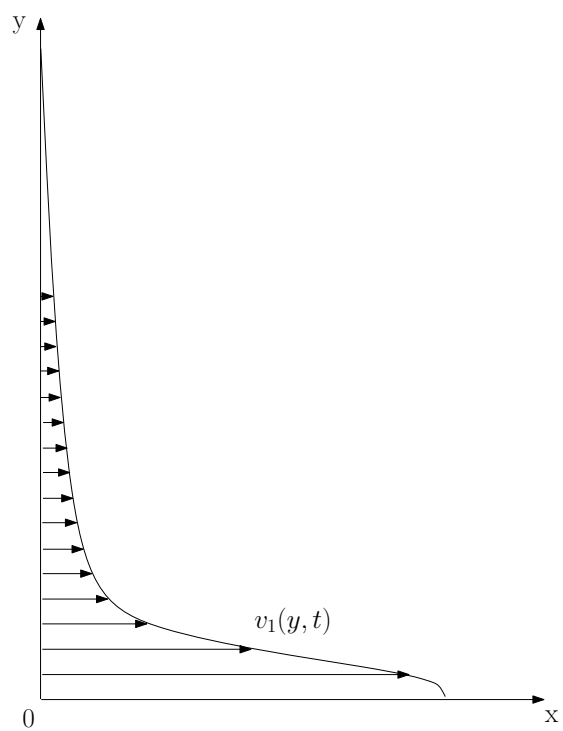
$$\mathbb{T}_\delta = 2\mu_0 (1 + \lambda \|\mathbb{D}\|^2)^m \mathbb{D}, \quad (1a)$$

$$\mathbb{D} = \alpha (1 + \beta \|\mathbb{T}_\delta\|^2)^n \mathbb{T}_\delta, \quad (1b)$$

kde $\mathbb{T}_\delta = \mathbb{T} - (\frac{1}{3} \text{Tr } \mathbb{T})\mathbb{I}$ je bezstopá část tenzoru napětí, \mathbb{D} je symetrická část gradientu rychlosti a $\mu_0, \lambda, \alpha, \beta, n, m \in \mathbb{R}$.

V případě prvního explicitního modelu (1a) se zabýváme poměrně standardním typem modelu, který může velice dobře popisovat chování materiálů jako polymerů, sypkých směsí apod. Z numerického hlediska představuje evoluční nelineární parabolickou rovnici s jednou prostorovou proměnnou.

V případě druhého implicitního modelu (1b) odvozeného v [8] se setkáváme s novým tvarem konstitutivní rovnice v implicitním tvaru. Tento implicitní tvar nabízí nové možnosti chování mocninných modelů pro materiály, kde standardní explicitní forma nedávala dobrou aproximaci.



Obrázek 1: Schématický obrázek prvního Stokesova problému.

1. Zobecnění newtonovské tekutiny

Zobecnění newtonovské tekutiny konstitutivním vztahem pro tenzor napětí \mathbb{T} můžeme chápat mnoha způsoby. Naším základním kamenem bude princip invariance. Uvažujme nestlačitelnou homogenní tekutinu a tenzor napětí ve tvaru

$$\mathbb{T} = f(\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) .$$

Díky principu invariance lze závislost na rychlosti resp. gradientu rychlosti zredukovat pouze na závislost symetrické části gradientu rychlosti $\mathbb{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^\top)$ neboli

$$\mathbb{T} = f(\mathbb{D}) .$$

Uvažujme dále tenzor napětí určený vztahem

$$\mathbb{T} = f_0(\dots)\mathbb{I} + f_1(\dots)\mathbb{D} + f_2(\dots)\mathbb{D}^2 ,^1 \quad (1.1)$$

kde f_0, f_1, f_2 závisejí na $\text{Tr } \mathbb{D}, \text{Tr } \mathbb{D}^2, \text{Tr } \mathbb{D}^3$. V případě jednoduchého smyku dostáváme symetrickou část gradientu rychlosti ve tvaru

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1(y,t)}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v_1(y,t)}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{D}^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial v_1(y,t)}{\partial y}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial v_1(y,t)}{\partial y}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (1.2)$$

Pro $\mathbb{T} = \left(\frac{1}{3} \text{Tr } \mathbb{T}\right)\mathbb{I} + \mathbb{T}_\delta$ dostaneme z (1.1)

$$\left(\frac{1}{3} \text{Tr } \mathbb{T}\right) \mathbb{I} = f_0(\dots)\mathbb{I} + f_2(\dots)\mathbb{D}^2 ,$$

$$\mathbb{T}_\delta = f_1(\dots)\mathbb{D} .$$

Dále z $\mathbf{v}(x, y, z; t) = (v_1(y, t), 0, 0)$ dostáváme $\mathbb{D}(x, y, z; t) = \mathbb{D}(y, t)$, $\text{div } \mathbf{v} = \text{Tr } \mathbb{D} = 0 = \text{Tr } \mathbb{D}^3$, tudíž

$$f_1(\text{Tr } \mathbb{D}, \text{Tr } \mathbb{D}^2, \text{Tr } \mathbb{D}^3) = f_1(\text{Tr } \mathbb{D}^2) .$$

Označme

$$\tau = f_1(\text{Tr } \mathbb{D}^2) \frac{1}{2} \frac{\partial v_1(y, t)}{\partial y} . \quad (1.3)$$

Jelikož f_1 je skalární funkce, dostáváme bezstopou část tenzoru napětí ve tvaru

$$\mathbb{T}_\delta = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (1.4)$$

Po dosazení do Eulerových pohybových rovnic

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \text{div } \mathbb{T}$$

¹Díky větě o reprezentaci pro tenzor druhého řádu nemusíme uvažovat závislost na $\mathbb{D}^3, \mathbb{D}^4, \dots, \mathbb{D}^n$. Pro libovolné liché n je $\mathbb{D}^n = (\text{Tr } \mathbb{D}^2)^{\frac{n-1}{2}} \mathbb{D}$ a pro sudé n je $\mathbb{D}^n = (\text{Tr } \mathbb{D}^2)^{\frac{n}{2}} \mathbb{I}$

neboli

$$\operatorname{div} \mathbb{T} = \operatorname{div} \left[\left(\frac{1}{3} \operatorname{Tr} \mathbb{T} \right) \mathbb{I} + \mathbb{T}_\delta \right] .$$

Dostáváme soustavu

$$\rho \frac{\partial v_1(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} \operatorname{Tr} \mathbb{T} \right) + \frac{\partial \tau(y, t)}{\partial y} , \quad (1.5a)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{3} \operatorname{Tr} \mathbb{T} \right) , \quad (1.5b)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{3} \operatorname{Tr} \mathbb{T} \right) , \quad (1.5c)$$

což nám implikuje vztah

$$\frac{1}{3} \operatorname{Tr} \mathbb{T} = Cx + D , \quad (1.6)$$

kde C, D jsou konstanty. Odtud plyne, že stopa tenzoru napětí je ve směru y a z konstantní a ve směru x nejvýše lineární.

Poznámka č.1: Pokud nebude řečeno jinak, budeme v dalších kapitolách vždy vycházet ze vztahů odvozených v Kapitole 1.

Poznámka č.2: Viskozita je fyzikální veličina vyjadřující míru odporu tekutiny v tečném směru změny rychlosti. V tomto případě, kdy $\mathbf{v}(x, y, z; t) = (v_1(y, t), 0, 0)$, lze zobecněnou viskozitu definovat jako

$$\mu \equiv \frac{\tau}{\frac{\partial v_1(y, t)}{\partial y}} .$$

V klasickém případě newtonovské tekutiny je viskozita konstantní. Oproti tomu, pro námi uvažované modely, dostaneme v prvním případě explicitního modelu (1a) výraz

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{\lambda}{2} \left| \frac{\partial v_1(y, t)}{\partial y} \right|^2 \right)^m ,$$

kde μ_0 je viskozita při nulovém gradientu rychlosti. Tento model je pro $m \in (-\frac{1}{2}, 0)$ určitou parafrází tzv. Carreau modelu viz [3], který se většinou uvádí ve tvaru

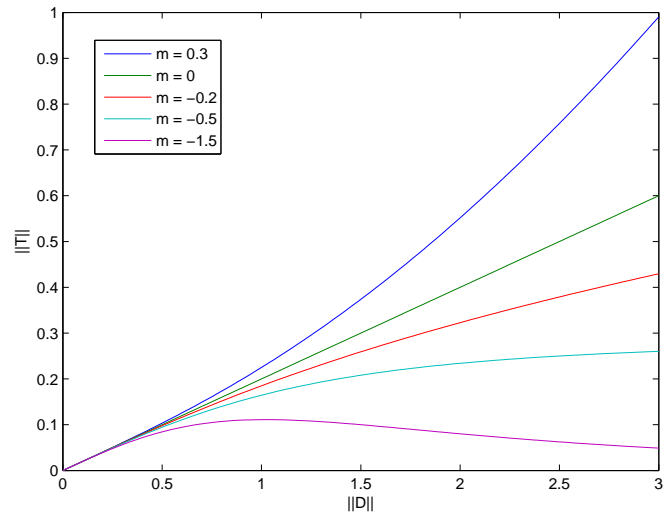
$$\mu = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{(1 + (\lambda\dot{\gamma})^2)^{\frac{1-n}{2}}} ,$$

kde μ_∞ je viskozita pro $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$, $\dot{\gamma} \equiv \frac{\partial v_1(y, t)}{\partial y}$. Tato záměnnost je však možná pouze v případě, kdy se pro Carreau model uvažuje parametr $n \in [0, 1)$, tedy $u_\infty = 0$. Tento předpoklad není bezpředmětný, jelikož odpovídá experimentálním datům pro určité materiály z polymerů apod. Navíc – jak ukážeme později – jsme schopni řešit model (1a) pouze pro parametr $m \in [-0.5, \infty)$, což přesně odpovídá hodnotám $n \in [0, 1)$ pro Carreau model.

Obecně můžeme diskutovat viz [8] čtyři různé typy chování modelu (1a) vzhledem k parametru m zahrnující jak tzv. „shear thinning“, „shear thickening“ tak i nemonotonní chování – jejich kombinaci. Speciálně pro $m = 0$ dostáváme newtonovskou tekutinu.

Jednoduché pozorování vede k zajímavým závěrům, a to že při náhlém urychlení ($\dot{\gamma} \rightarrow \infty$) se náš model pro parametr $m \geq 0$ chová jako tuhé těleso. Tento fenomén je u některých druhů tekutin známý, proto nebudeme parametr m nijak apriori omezovat.

Obdobné úvahy lze provést i v případě implicitního modelu (1b)



Obrázek 1.1: Chování $\|\mathbb{T}\|$ v závislosti na $\|\mathbb{D}\|$ pro různé hodnoty parametru m .

2. První a druhý Stokesův problém pro newtonovskou tekutinu

Mějme nestlačitelnou newtonovskou tekutinu, kde s použitím Stokesových postulátů dostaneme tenzor napětí $\mathbb{T} = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}$. Eulerovy pohybové rovnice a nestlačitelnost tekutiny¹ dávají Navier-Stokesovy rovnice tvar

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \operatorname{div}(2\mu\mathbb{D}) ,$$

kde

$$\frac{1}{3} \operatorname{Tr} \mathbb{T} = -p , \mathbb{T}_\delta = 2\mu\mathbb{D} .$$

Dle předchozí Kapitoly 1, konkrétně dle vztahů (1.2), (1.3), (1.4), (1.5a) a (1.6) řešíme soustavu

$$\frac{\partial v_1(y, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_1(y, t)}{\partial y^2} , \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 , \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = C , \quad (2.1c)$$

kde $\nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$ značí kinematickou viskozitu. Po dosazení okrajových podmínek pro $t, y \rightarrow \infty$ nám však plyne, že $C = 0$, tedy tlak p je konstantní.

2.1 První problém pro newtonovskou tekutinu

První problém pro newtonovskou tekutinu vyjádříme matematicky takto

$$\frac{\partial v_1(y, t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_1(y, t)}{\partial y^2} , \quad (2.2a)$$

$$v_1(y, 0) = 0 , \quad (2.2b)$$

$$v_1(0, t) = v_0 , \quad (2.2c)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} v_1(y, t) = 0 .^2 \quad (2.2d)$$

Pro $t \in [0, \infty)$ a $y \in [0, \infty)$. Nejprve zkusme vyřešit jednodušší případ ustáleného proudění. Soustava (2.2) přejde na tvar

$$\frac{\partial^2 v_1(y)}{\partial y^2} = 0 ,$$

$$v_1(0) = v_0 ,$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} v_1(y) = 0 .$$

¹Z rovnice kontinuity $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ a nestlačitelnosti tekutiny ($\rho = \text{konst.}$) plyne vztah $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$

²Okrajová podmínka $\lim_{y \rightarrow \infty} v(y, t) = 0$ vystihuje – díky vlastnostem viskozity – fyzikální podstatu problému.

Studium ustáleného proudění má smysl pouze v případě, pokud uvažujeme omezenou oblast ve vertikálním směru, konkrétně nekonečný pás o výšce h s okrajovou podmínkou $v(h) = 0$. Za těchto podmínek nalezneme řešení ve tvaru

$$v_1(y) = \frac{hv_0 - v_0y}{h} ,$$

což bude sloužit jako srovnání původního problému pro dosti velká t . Nyní si však zavedeme pojem „náhlého urychlení“ pomocí Laplaceovy transformace.

Laplaceova transformace: Uvažujme Laplaceovu transformaci viz [9] funkce $v_1(x, t)$ jako

$$\mathcal{L}(v_1(y, t)) = L(y, p) = \int_0^{\infty} v_1(y, t) e^{-pt} dt . \quad (2.3)$$

Použijeme integrační metodu per-partes a díky počáteční podmínce $v_1(y, 0) = 0$ dostaneme

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial v_1(y, t)}{\partial t} e^{-pt} dt = [v_1(y, t)e^{-pt}]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} v_1(y, t) e^{-pt} dt = p L(y, p) .$$

Aplikujeme větu o záměně derivace a integrálu na vztah (2.3), z čehož dostaneme

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}(y, t) e^{-pt} dt = \frac{d^2 L(y, p)}{dy^2} .$$

Vztah (2.2) a počáteční a okrajové podmínky přejdou na

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L(y, p)}{\partial y^2} - \frac{p}{\nu} L(y, p) &= 0 , \\ L(0, p) &= \int_0^{\infty} v_0 e^{-pt} dt = \frac{v_0}{p} , \\ \lim_{y \rightarrow \infty} L(y, p) &= 0 . \end{aligned}$$

Řešení dostaneme jako

$$L(y, p) = \frac{v_0}{p} e^{-\sqrt{\frac{p}{\nu}} y} .$$

Pro inverzní Laplaceovu transformaci využijeme faktu, že funkce $e^{-\sqrt{\frac{p}{\nu}} y}$ je obrazem funkce $\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)$,³ tudíž řešením (2.2) je

$$v_1(y, t) = v_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) = v_0 \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right] . \quad (2.4)$$

³Funkce erf je zkratka pro error function definovanou vztahem $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, erfc je její doplněk. Více v [1]

2.2 Druhý problém pro newtonovskou tekutinu

Ve druhém Stokesově problému uvažujeme oscilující desku, kde jediný rozdíl v matematické interpretaci oproti prvnímu problému je v okrajové podmínce pro $y = 0$. Problém (2.2) tudíž přejde na tvar

$$\frac{\partial v_1(y, t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_1(y, t)}{\partial y^2}, \quad (2.5a)$$

$$v_1(0, t) = v_0 \sin(\omega t), \quad (2.5b)$$

$$v_1(y, 0) = 0, \quad (2.5c)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} v_1(y, t) = 0. \quad (2.5d)$$

Dle [5] můžeme využít obdobnou úvahu jako v prvním problému a použitím Laplaceovy transformace⁴ dostaneme

$$L(y, p) = \frac{v_0 \omega}{p^2 + \omega^2} e^{-\sqrt{\frac{p}{\nu}} y},$$

což odpovídá součinu dvou funkcí

$$F_1 = \frac{v_0 \omega}{p^2 + \omega^2} = \mathcal{L}(\sin \omega t),$$

$$F_2 = e^{-\sqrt{\frac{p}{\nu}} y} = \mathcal{L}\left(\frac{y}{2t\sqrt{\pi\nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}}\right).$$

Povšimněme si, že

$$\mathcal{L}^{-1} [F_1(p) \cdot F_2(p)] = f_1(t) * f_2(t),$$

kde * značí konvoluci. Odtud dostaneme řešení ve tvaru

$$v_1(y, t) = \frac{v_0 y}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{\sin[\omega(t-s)]}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{y^2}{4\nu s}} ds$$

a lehkým trikem viz [5] obdržíme

$$v_1(y, t) = v_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y} \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right).$$

⁴v případě odvození řešení druhého Stokesova problému bývá většinou použita Fourierova transformace. Pro změnu však uvedeme toto odvození pomocí Laplaceovy transformace

3. První Stokesův problém pro zobecněnou newtonovskou tekutinu

3.1 Zobecnění č.1

V případě modelu (1a) dostáváme

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_\delta &= 2\mu_0 (1 + \lambda \|\mathbb{D}\|^2)^m \mathbb{D} , \\ \|\mathbb{D}\| &= \sqrt{\text{Tr } \mathbb{D} \mathbb{D}^\top} = \sqrt{\text{Tr } \mathbb{D}^2} , \\ f_1(\text{Tr } \mathbb{D}^2) &= 2\mu_0 (1 + \lambda \|\mathbb{D}\|^2)^m .\end{aligned}$$

Z Kapitoly 1 dostáváme bezstopou část tenzoru napětí ve tvaru

$$\mathbb{T}_\delta = \begin{pmatrix} 0 & \mu_0 \left(1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial v_1(y,t)}{\partial y}\right)^2\right)^m \frac{\partial v_1(y,t)}{\partial y} & 0 \\ \mu_0 \left(1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial v_1(y,t)}{\partial y}\right)^2\right)^m \frac{\partial v_1(y,t)}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Z okrajových podmínek dále plyne, že $C = 0$. Máme tedy konstantní tlak. Tato situace vede na soustavu parciálních diferenciálních rovnic (dále jen PDR) 2. řádu

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \left(1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial v_1(y,t)}{\partial y}\right)^2\right)^m \frac{\partial v_1(y,t)}{\partial y} \right] = \frac{\partial v_1(y,t)}{\partial t} , \quad (3.1a)$$

$$v_1(0, t) = v_0 , \quad (3.1b)$$

$$v_1(y, 0) = 0 , \quad (3.1c)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} v(y, t) = 0 , \quad (3.1d)$$

$$\forall t \in [0, \infty), y \in [0, \infty) , \quad (3.1e)$$

kde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ značí kinematickou viskozitu. Pokusíme se nalézt její přibližné řešení pomocí metody poruchového počtu vzhledem k parametru $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$, který budeme uvažovat dostatečně malý neboli $0 < \varepsilon \ll 1$. Hledejme tedy $v_1(y, t) = v_1(y, t; \varepsilon) = \tilde{v}_0(y, t) + \varepsilon \tilde{v}_1(y, t) + \varepsilon^2 \tilde{v}_2(y, t) + \dots$ ¹

Rovnice (3.1a) přejde na

¹Parametr ε by se měl uvažovat v bezrozměrné podobě, tedy $\varepsilon = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{L_{char}}{V_{char}}\right)^2$, kde L_{char} je charakteristická délka a V_{char} charakteristická rychlost. Tato úvaha by ale znamenala zbytečnou komplikaci ve výpočtech

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \left(1 + \varepsilon \left(\frac{\partial(\tilde{v}_0 + \varepsilon\tilde{v}_1 + \dots)}{\partial y} \right)^2 \right)^m \frac{\partial(\tilde{v}_0 + \varepsilon\tilde{v}_1 + \dots)}{\partial y} \right] = \frac{\partial(\tilde{v}_0 + \varepsilon\tilde{v}_1 + \dots)}{\partial t} ,$$

$$\begin{aligned} v_0 &= \tilde{v}_0(0, t) , \\ 0 &= \tilde{v}_0(y, 0) , \\ 0 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{v}_0(y, t) , \\ 0 &= \tilde{v}_1(0, t) = \tilde{v}_2(0, t) = \dots , \\ 0 &= \tilde{v}_1(y, 0) = \tilde{v}_2(y, 0) = \dots , \\ 0 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{v}_1(y, t) = \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{v}_2(y, t) = \dots , \end{aligned}$$

$$\forall t \in [0, \infty), y \in [0, \infty) .$$

Řešme nyní jednotlivé rovnice vzhledem k mocnině ε do prvního řádu.

$$O(\varepsilon^0) : \frac{\partial^2 \tilde{v}_0(y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \tilde{v}_0(y, t)}{\partial t} , \quad (3.3)$$

$$O(\varepsilon^1) : \frac{\partial^2 \tilde{v}_1(y, t)}{\partial y^2} + 3m \left(\frac{\partial \tilde{v}_0(y, t)}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_0(y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial t} . \quad (3.4)$$

Jak si můžeme všimnout, rovnice řádu ε^0 odpovídá Navier-Skokesovu (dále jen N-S) systému pro newtonovskou tekutinu, jejíž řešení je dle (2.4)

$$\tilde{v}_0(y, t) = v_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) = v_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty} e^{-t^2} dt , \quad (3.5)$$

tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_0(y, t)}{\partial y} &= -v_0 \frac{1}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} , \\ \frac{\partial^2 \tilde{v}_0(y, t)}{\partial y^2} &= v_0 \frac{y}{2\sqrt{\pi \nu^3 t^3}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} . \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice řádu ε^1 dostaneme

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_1(y, t)}{\partial y^2} + \frac{3m v_0^3}{2\sqrt{\pi^3 \nu^5 t^5}} y e^{-\frac{3y^2}{4\nu t}} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial t} . \quad (3.6)$$

Obdrželi jsme rovnici typu

$$\Delta \tilde{v}_1(y, t) + f(y, t) = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial t} . \quad (3.7)$$

Z jednoduché substituce $\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} y$ v rovnici (3.6) plyne

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_1(\bar{y}, t)}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial^2 \tilde{v}_1(\bar{y}, t)}{\partial y^2} \frac{1}{\nu} ,$$

²Výraz Δ zastupuje Laplaceův operátor.

$$\nu f(y, t) = \nu f(\sqrt{\nu} \bar{y}, t) = \bar{f}(\bar{y}, t) = \frac{3mv_0^3}{2\nu\sqrt{\pi^3 t^5}} \bar{y} e^{-\frac{3\bar{y}^2}{4t}} ,$$

což nám převede předchozí problém (3.7) na známý a řešitelný případ

$$\frac{\partial \bar{v}_1(\bar{y}, t)}{\partial t} - \Delta \bar{v}_1(\bar{y}, t) = \bar{f}(\bar{y}, t) , \quad (3.8a)$$

$$\bar{v}_1(\bar{y}, 0) = 0 , \quad (3.8b)$$

$$\bar{v}_1(0, t) = 0 . \quad (3.8c)$$

Oproti případu řádu ε^0 , zde nenastává „náhlé urychlení“ a $\bar{v}_1(y, t)$ je spojitá všude. Dostali jsme rovnici vedení tepla (dále jen RVT) s pravou stranou (Cauchyova úloha). Navíc pro $Q_T = \{[0, \infty) \times (0, T), T > 0\}$ libovolné platí:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial^\alpha \bar{f}(\bar{y}, t)}{\partial \bar{y}^\alpha} = 0 , \alpha = 0, 1, 2 ,$$

$$\bar{v}_1(\bar{y}, 0) = 0 .$$

Máme tudíž splněné předpoklady na řešení, které má tvar

$$\bar{v}_1(\bar{y}, t) = \int_0^t \int_0^\infty [G(\bar{y} - \bar{x}, t - \tau) - G(\bar{y} + \bar{x}, t - \tau)] \bar{f}(\bar{x}, \tau) d\bar{x} d\tau , \quad ^3$$

tedy

$$\bar{v}_1(\bar{y}, t) = \frac{3mv_0^3}{4\pi^2\nu} \int_0^t \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(\bar{y}-\bar{x})^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{(\bar{y}+\bar{x})^2}{4(t-\tau)}} \right) \frac{\bar{x} e^{-\frac{3\bar{x}^2}{4\tau}}}{\sqrt{\tau^5(t-\tau)}} d\bar{x} d\tau . \quad (3.9)$$

Zpětným dosazením $\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} y$, $\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} x$ a následně do $v_1(y, t, \varepsilon) = \bar{v}_0(y, t) + \varepsilon \bar{v}_1(y, t) + O(\varepsilon^2)$ dostaneme přibližné řešení problému (3.1a) jako

$$v_1(y, t) = v_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) + \lambda m \frac{3v_0^3}{8\pi^2\nu} \int_0^t \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(y-x)^2}{4\nu(t-\tau)}} - e^{-\frac{(y+x)^2}{4\nu(t-\tau)}} \right) \frac{x e^{-\frac{3x^2}{4\nu\tau}}}{\sqrt{\tau^5(t-\tau)}} dx d\tau . \quad (3.10)$$

Poznámka k metodě poruchového počtu: Metoda poruchového počtu byla aplikována čistě formálně, bez jakékoliv analýzy konvergence řady $v_1(y, t) = v_1(y, t; \varepsilon) = \bar{v}_0(y, t) + \varepsilon \bar{v}_1(y, t) + \varepsilon^2 \bar{v}_2(y, t) + \dots$. Takovýto postup je u podobných případů běžný. Vzhledem k tomu, že řád rovnic je stejný jak pro $\varepsilon = 0$ tak pro ε nenulová, lze očekávat, že uvedený rozvoj rychlosti je smysluplný a poskytuje alespoň základní kvalitativní informaci o chování řešení systému rovnic (3.1a). Podrobnější diskuzi metody poruchového počtu a jejich omezení lze nalézt kupříkladu v [2].

³ $G(y, t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}$ je Greenova funkce uvažovaná na celém prostoru. Pro případ polo-prostoru odvozeno v [4]

3.2 Zobecnění č.2

Uvažujme implicitní model (1b) neboli

$$\mathbb{D} = \alpha (1 + \beta \|\mathbb{T}_\delta\|^2)^n \mathbb{T}_\delta .$$

Aplikací Eulerových pohybových rovnic a využitím vztahů odvozených v Kapitole 1, dostáváme

$$\rho \frac{\partial v_1(y, t)}{\partial t} = C + \frac{\partial \tau(y, t)}{\partial y} .$$

Dosažením okrajových podmínek pro $t, y \rightarrow \infty$ plyne, že $C = 0$. Díky závislosti $\tau = f(\mathbb{D})$ dostáváme z implicitního modelu (1b) soustavu

$$\rho \frac{\partial v_1(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial \tau(y, t)}{\partial y} , \quad (3.11a)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v_1(y, t)}{\partial y} = \alpha (1 + \beta \tau^2(y, t))^n \tau(y, t) , \quad (3.11b)$$

$$v_1(0, t) = v_0 , \quad (3.11c)$$

$$v_1(y, 0) = 0 , \quad (3.11d)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} v(y, t) = 0 , \quad (3.11e)$$

$$\forall t \in [0, \infty), y \in [0, \infty) . \quad (3.11f)$$

Její přibližné řešení nalezneme pomocí metody poruchového počtu vzhledem k parametru $\varepsilon = \beta$, který budeme uvažovat dostatečně malý, tedy $0 < \varepsilon \ll 1$. Hledejme řešení pro dvojici $[v_1(y, t), \tau(y, t)]$, kde

$$v_1(y, t) = v_1(y, t; \varepsilon) = \tilde{v}_0(y, t) + \varepsilon \tilde{v}_1(y, t) + \varepsilon^2 \tilde{v}_2(y, t) + \dots$$

$$\tau_1(y, t) = \tau_1(y, t; \varepsilon) = \tilde{\tau}_0(y, t) + \varepsilon \tilde{\tau}_1(y, t) + \varepsilon^2 \tilde{\tau}_2(y, t) + \dots$$

Rovnice (3.11a) nám přejde na tvar

$$\rho \frac{\partial(\tilde{v}_0 + \varepsilon \tilde{v}_1 + \varepsilon^2 \tilde{v}_2 \dots)}{\partial t} = \frac{\partial(\tilde{\tau}_0(y, t) + \varepsilon \tilde{\tau}_1(y, t) + \varepsilon^2 \tilde{\tau}_2(y, t) + \dots)}{\partial y} ,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(\tilde{v}_0 + \varepsilon \tilde{v}_1 + \dots)}{\partial y} = \alpha (1 + \varepsilon(\tilde{\tau}_0(y, t) + \dots)^2)^n (\tilde{\tau}_0(y, t) + \dots) ,$$

$$v_0 = \tilde{v}_0(0, t) ,$$

$$0 = \tilde{v}_0(y, 0) ,$$

$$0 = \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{v}_0(y, t) ,$$

$$0 = \tilde{v}_1(0, t) = \tilde{v}_2(0, t) = \dots ,$$

$$0 = \tilde{v}_1(y, 0) = \tilde{v}_2(y, 0) = \dots ,$$

$$0 = \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{v}_1(y, t) = \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{v}_2(y, t) = \dots ,$$

$$0 = \tilde{\tau}_0(y, 0) = \tilde{\tau}_1(y, 0) = \dots ,$$

$$0 = \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{\tau}_1(y, t) = \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{\tau}_2(y, t) = \dots ,$$

$$\forall t \in [0, \infty), y \in [0, \infty) .$$

Řešme nyní jednotlivé rovnice vzhledem k mocnině ε do prvního řádu

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^0) : \rho \frac{\partial \tilde{v}_0(y, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{\tau}_0(y, t)}{\partial y} , \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{v}_0(y, t)}{\partial y} &= \alpha \tilde{\tau}_0 , \\ O(\varepsilon^1) : \rho \frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{\tau}_1(y, t)}{\partial y} , \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial y} &= \alpha \tilde{\tau}_1(y, t) + \alpha n \tilde{\tau}_0^3(y, t) . \end{aligned}$$

Stejně jako v případě explicitního modelu i tady soustava řádu ε^0 , po dosazení z jedné rovnice do druhé, odpovídá N-S systému pro newtonovskou tekutinu. To nám dle (2.4) vede na řešení

$$\tilde{v}_0(y, t) = v_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\alpha \rho} y}{\sqrt{2t}} \right) = v_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{\alpha \rho} y}{\sqrt{2t}}}^{\infty} e^{-t^2} dt ,$$

tedy

$$\frac{\partial \tilde{v}_0(y, t)}{\partial y} = -v_0 \sqrt{\frac{2\alpha\rho}{\pi t}} e^{-\frac{\alpha\rho y^2}{2t}} , \quad (3.12)$$

$$\tilde{\tau}_0(y, t) = -v_0 \sqrt{\frac{\rho}{2\alpha\pi t}} e^{-\frac{\alpha\rho y^2}{2t}} . \quad (3.13)$$

Po dosazení do soustavy řádu ε^1 obdržíme z druhé rovnice vztah

$$\tilde{\tau}_1(y, t) = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial y} - n \left(v_0 \sqrt{\frac{\rho}{2\alpha\pi t}} e^{-\frac{\alpha\rho y^2}{2t}} \right)^3 \right) ,$$

který po zderivování dle y a dosazení do rovnice (3.12) dává

$$\frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\alpha\rho} \frac{\partial^2 \tilde{v}_1(y, t)}{\partial y^2} - \frac{3v_0^3 n}{4} \sqrt{\frac{\rho^3}{2\alpha^3\pi^3 t^5}} y e^{-\frac{3}{2} \frac{\alpha\rho y^2}{t}} .$$

Provedme substituci $\bar{y} = \sqrt{2\alpha\rho} y$. Pro přehlednost a názorné srovnání s předchozím případem pro explicitní model označme $\nu = \frac{1}{2\alpha\rho}$. Na první pohled se zdá toto označení zavádějící, nicméně kinematická viskozita ν a hodnota $\frac{1}{2\alpha\rho}$ spolu úzce souvisí. Pokud bychom opustili metodu poruchového počtu a podívali se na vztah těchto dvou hodnot explicitního modelu (1a) a implicitního modelu (1b) pro $n = m$, zjistíme, že hodnota μ odpovídá hodnotě $\frac{1}{2\alpha}$, tedy $\nu = \frac{1}{2\alpha\rho}$.

Po substituci $\bar{y} = \sqrt{2\alpha\rho n} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} y$ dostaneme

$$\frac{\partial \tilde{v}_1(\bar{y}, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{v}_1(\bar{y}, t)}{\partial \bar{y}^2} = -\frac{3v_0^3 n}{4} \sqrt{\frac{\rho^5}{2\alpha^3\pi^3 t^5}} \sqrt{\nu} \bar{y} e^{-\frac{3\bar{y}^2}{4t}} . \quad (3.14)$$

Stejně jako u explicitního modelu jsme dostali RVT typu

$$\frac{\partial \tilde{v}_1(\bar{y}, t)}{\partial t} - \Delta \tilde{v}_1(\bar{y}, t) = \bar{f}(\bar{y}, t) , \quad (3.15a)$$

$$\tilde{v}_1(\bar{y}, 0) = 0 , \quad (3.15b)$$

$$\tilde{v}_1(0, t) = 0 . \quad (3.15c)$$

Jsou splněny všechny předpoklady pro řešení tvaru

$$\bar{v}_1(\bar{y}, t) = -\frac{3}{8} \frac{v_0^3 n}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho^5}{\alpha^3}} \sqrt{\nu} \int_0^t \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(\bar{y}-\bar{x})^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{(\bar{y}+\bar{x})^2}{4(t-\tau)}} \right) \frac{\bar{x} e^{-\frac{3\bar{x}^2}{4\tau}}}{\sqrt{\tau^5(t-\tau)}} d\bar{x} d\tau .$$

Zpětným dosazením $\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} y$, $\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} x$ a následně do $v_1(y, t, \varepsilon) = \tilde{v}_0(y, t) + \varepsilon \tilde{v}_1(y, t) + O(\varepsilon^2)$ dostaneme přibližné řešení problému (3.1a) jako

$$v_1(y, t) = v_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) - \frac{\rho^2 \beta n}{\alpha \sqrt{8}} \frac{3v_0^3}{8\pi^2 \nu} \int_0^t \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(y-x)^2}{4\nu(t-\tau)}} - e^{-\frac{(y+x)^2}{4\nu(t-\tau)}} \right) \frac{x e^{-\frac{3x^2}{4\nu\tau}}}{\sqrt{\tau^5(t-\tau)}} dx d\tau . \quad (3.16)$$

Tímto způsobem zápisu jsme chtěli demonstrovat, že rozdíl mezi aproximací metodou poruchového počtu u explicitního modelu (1a) – vztah (3.10) – a u implicitního model (1b) – vztah (3.16) – je pouze v rozdílné konstantě u prvního členu rozvoje.

4. Druhý Stokesův problém pro zobecněnou newtonovskou tekutinu

4.1 Zobecnění č.1

Znovu uvažujme zobecnění newtonovské tekutiny konstitutivním vztahem (1a), tedy

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + 2\mu_0 (1 + \lambda\|\mathbb{D}\|^2)^m \mathbb{D} .$$

Pro druhý Stokesův problém dostáváme soustavu PDR

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \left(1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial v_1(y, t)}{\partial y} \right)^2 \right)^m \frac{\partial v_1(y, t)}{\partial y} \right] = \frac{\partial v_1(y, t)}{\partial t} , \quad (4.1a)$$

$$v_1(0, t) = v_0 \sin(\omega t) , \quad (4.1b)$$

$$v_1(y, 0) = 0 , \quad (4.1c)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} v(y, t) = 0 . \quad (4.1d)$$

Stejně jako v sekci 3.1 využijeme k nalezení přibližného řešení metodu poruchového počtu vzhledem k parametru $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$. Dostáváme stejnou soustavu pro řádu ε jako v minulém případě pro první Stokesův problém. Rovnice řádu ε^0 odpovídá rovnici pro newtonovskou tekutinu, a tudíž

$$\tilde{v}_0(y, t) = v_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y} \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right) .$$

Pro zjednodušení zápisu označíme $\xi = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y$ a obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_0(y, t; \varepsilon)}{\partial y} &= -v_0 \xi e^{-\xi} [\cos(\omega t - \xi) + \sin(\omega t - \xi)] , \\ \frac{\partial^2 \tilde{v}_0(y, t; \varepsilon)}{\partial y^2} &= -v_0 2\xi^2 e^{-\xi} \cos(\omega t - \xi) . \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice (3.4) řádu ε^1 dostaneme rovnici

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_1}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{3m\omega^2 v_0^3}{2\nu^2} e^{-3\xi} \cos(\omega t - \xi) (1 + \sin 2(\omega t - \xi))}_{f(y, t)} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial t} .$$

Substitucí $\tilde{v}_1(\frac{1}{\nu}y, \frac{1}{\nu}t)$ vzejde rovnice stejného typu jako v předešlém případě a i tady je splněno

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\partial^\alpha f(y, t)}{\partial y^\alpha} &= 0 , \alpha = 0, 1, 2 , \\ \tilde{v}_1(y, 0) &= 0 \end{aligned}$$

a řešením je

$$\tilde{v}_1(y, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(y-x, t-\tau) f(x, \tau) dx d\tau .$$

Obdrželi jsme tedy

$$\tilde{v}_1(y, t) = \frac{3}{2} m \omega^2 v_0^3 \int_0^t \int_0^\infty \frac{e^{-3\xi(x) - \frac{(y-x)^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \cos(\omega\tau - \xi(x)) [1 + \sin 2(\omega\tau - \xi(x))] dx d\tau \quad (4.2)$$

a konečně dosazením do poruchového počtu máme

$$v_1(y, t) = v_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y} \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right) + \frac{\lambda}{2} \tilde{v}_1(y, t) . \quad (4.3)$$

4.2 Zobecnění č.2

Uvažme implicitní model (1b). Z odvození v sekci 3.2 nám ihned plyne soustava

$$\rho \frac{\partial v_1(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial \tau(y, t)}{\partial y} , \quad (4.4a)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v_1(y, t)}{\partial y} = \alpha (1 + \beta \tau^2(y, t))^n \tau(y, t) , \quad (4.4b)$$

$$v_1(0, t) = v_0 \sin(\omega t) , \quad (4.4c)$$

$$v_1(y, 0) = 0 , \quad (4.4d)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} v(y, t) = 0 . \quad (4.4e)$$

Metoda poruchového počtu se provádí stejným postupem jako s sekci 3.2 resp. 4.1, proto zde uvedeme pouze výsledek

$$v_1(y, t) = v_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y} \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right) - \frac{\rho^2 \beta n}{\alpha \sqrt{8}} \bar{v}_1(y, t) , \quad (4.5)$$

kde $\bar{v}_1(y, t) = \frac{1}{m} \tilde{v}_1(y, t)$ ze vztahu (4.2).

5. Numerické řešení

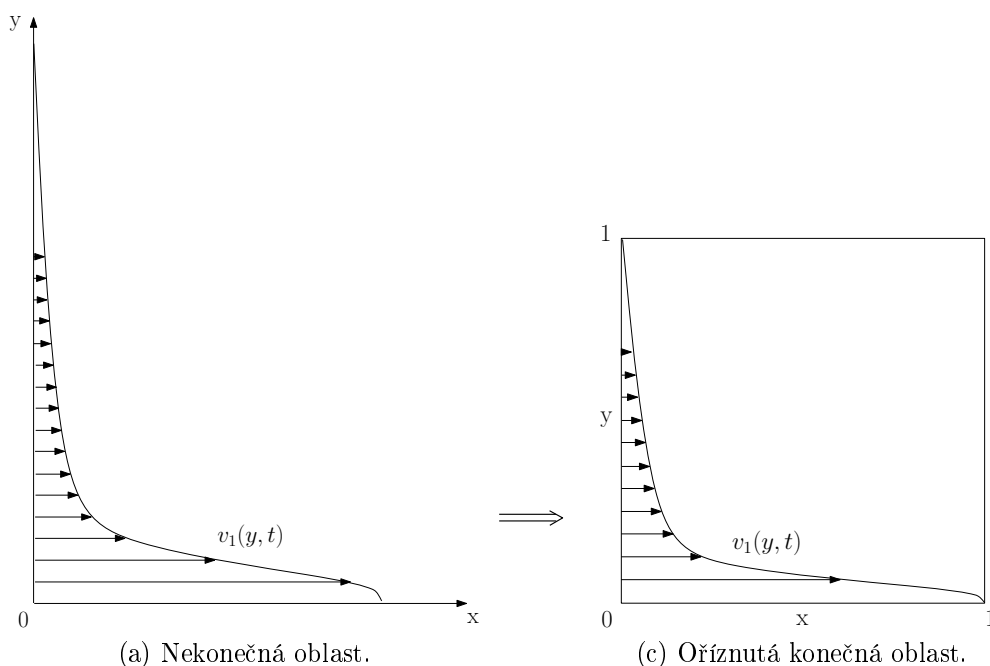
5.0.1 Nekonečná oblast

Nekonečná oblast je z hlediska numerické matematiky přímo neuchopitelná, proto je nutno tuto oblast buď uměle zaměnit za „dostatečně“ velkou konečnou oblast nebo vhodnou transformaci převést na oblast konečnou.

V transformované oblasti (např. pomocí $\arctan y$) hledáme řešení v bázi definované na celém prostoru jako je rozvinutí do báze tvořené Laguerre polynomy viz [1]. Díky vhodné volbě této báze můžeme lehce docílit dobré konvergence pro $y \rightarrow \infty$, a jako ideální kandidáti se nabízejí funkce konvergující v nekonečnu přibližně jako $\operatorname{erfc}(y)$.¹ Nicméně tato metoda není ideální pro úlohy typu prvního Stokesova problému, jelikož velká nespojitost v čase $t = 0$ pro $y = 0$ není pro aproximaci funkcemi typu $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ vhodná.

Zkusme to tedy jinak. Řešme náš problém na omezené oblasti neboli v tunelu s přidanou okrajovou podmínkou $v_1(y_{max}, t) = 0, \forall t \geq 0$. Jednoduchým numerickým experimentem – posunutím svrchní hranice pásu a porovnáním s předchozím výsledkem – můžeme jednoduše zkoumat závislost řešení na (horní) okrajové podmínce. Pokud by tento experiment měl pozitivní výsledek, tedy že se pro určitý časový interval řešení s původní svrchní hranicí a posunutou hranicí příliš neliší, můžeme s lehkou újmou na obecnosti považovat naše řešení za dostatečně aproximativní.

Toto „oříznutí“ nekonečné oblasti je vhodné pro druhý Stokesův problém – oscilující deska, kde se jednotlivé kmity pro $t \rightarrow \infty$ navzájem vyruší. V případě prvního Stokesova problému musíme bohužel přiznat, že „oříznutý“ problém se pro velká t odchyluje od původního problému na nekonečné oblasti.



Obrázek 5.1: Oříznutí nekonečné oblasti.

¹pro velké $y \rightarrow \infty$ je $\operatorname{erfc}(y) \sim \frac{e^{-y^2}}{y\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2y^2)^n}$

5.0.2 Nelinearita

V případě explicitního modelu (1a) řešíme v prvním i druhém Stokesově problému nelineární parabolickou PDR. Nejpřímější cesta k řešení vede použitím existujícího softwaru, který je optimalizován pro řešení úloh daného typu. V našem případě budeme rozebírat dvě základní varianty hledání řešení.

V první využijeme freeware určený pouze na metodu konečných prvků (konkrétně FreeFem++) a vhodným algoritmem se pokusíme vypořádat s nelinearitou třetího řádu. V druhém případě použijeme komerční software Matlab, který také využívá metody konečných prvků respektive konečných diferencí viz [11].

Poněkud složitější situace nastává v případě implicitního modelu (1b), kde řešíme soustavu dvou nelineárních PDR prvního řádu. Tato úloha je zřetelně komplikovanější a před použitím numerického softwaru ji budeme muset nějak zjednodušit.

Použitím Eulerovy dopředné metody můžeme diskretizovat prostorovou derivaci, což vede na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic (dále jen ODR) a algebraických rovnic. Tento systém se nazývá systém diferenciálních algebraických rovnic (dále jen DAE). Teorie kolem DAE je dosti složitá a algoritmy na výpočet jsou hodně komplikované, proto budeme v tomto případě využívat vestavěné funkce *ode15s* v softwaru Matlab. Podrobnější popis těchto funkcí v [10].

5.1 Numerické řešení explicitního modelu pomocí metodou konečných prvků

Matematická teorie se v případě evolučních parabolických rovnic opírá o teorii Bochnerových prostorů. My se ovšem zkusíme na tuto problematiku podívat trochu jinak, a to z následujících dvou perspektiv.

První možnost je chápat čas jako privilegovanou proměnnou a diskretizovat prostorovou proměnnou. Diskretizovaný problém, který přejde na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, bychom vyřešili např. použitím metody konečných diferencí. Bohužel ekvidistantní časový krok, spolu s velkou nespojitostí pro $t = 0$, indukuje poměrně velkou numerickou chybu.

Druhá možnost je pohlížet na čas jako další rozměr – řešme tedy problém na prostoročasové oblasti. V tomto případě však potřebujeme dodefinovat okrajovou podmínku pro $t = t_{max}$. Pro dostatečně velká t lze považovat proudění za ustálené, tedy $\frac{\partial v_1}{\partial t} = 0$, což v případě obdelníkové prostoročasové oblasti vede na podmínku Neumannova typu $\frac{\partial v_1}{\partial \vec{n}} = 0$ ² pro část hranice, kde $t = t_{max}$.

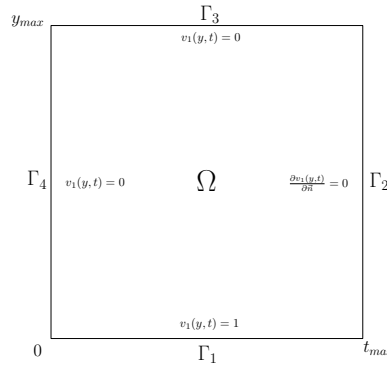
Jiné opodstatnění této podmínky je skutečnost, že volná hranice tj. hranice, kde nepůsobí žádná síla, se standardně demonstruje Neumannovou okrajovou podmínkou. Ať už tak či onak, uvědomme si, že tato podmínka je nepřesná pro malé hodnoty t_{max} . Tuto skutečnost musíme zohlednit při hledání numerického řešení, a jak lze čekat, nebude toto řešení záviset jen na parametrech úlohy, ale i na zkoumané oblasti Ω – konkrétně na hodnotě t_{max} .

² \vec{n} je vektor vnější normály.

5.1.1 Slabá formulace

Nechť $\tilde{v}_1 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cup \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, kde $\Omega = \{[y, t] \in \mathbb{R}^2 : y \in (0, y_{max}), t \in (0, t_{max})\}$ a t_{max}, y_{max} jsou zvolené kladné konstanty. Nechť dále

$$\begin{aligned}\partial\Omega &= \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \cap \Gamma_4, \\ \Gamma_1 &= \{[y, t] : y = 0, t \in (0, t_{max})\}, \\ \Gamma_2 &= \{[y, t] : y \in [0, y_{max}], t = t_{max}\}, \\ \Gamma_3 &= \{[y, t] : y = y_{max}, t \in (0, t_{max})\}, \\ \Gamma_4 &= \{[y, t] : y \in [0, y_{max}], t = 0\}\end{aligned}$$



Obrázek 5.2: Schématický obrázek pro oblast Ω .

a mějme $g \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$. Řekneme, že \tilde{v}_1 je klasické řešení prvního (resp. druhého) Stokesova problému pro explicitní model (1a), pokud

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \left(1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial y} \right)^2 \right)^m \frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial y} \right] = \frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial t}, \quad (5.1a)$$

$$\tilde{v}_1 = g \text{ na } \Gamma_1, \quad (5.1b)$$

$$\tilde{v}_1 = 0 \text{ na } \Gamma_3 \cup \Gamma_4, \quad (5.1c)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ na } \Gamma_2. \quad (5.1d)$$

Nechť $\tilde{\varphi} \in V(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) : f = 0 \text{ na } \Gamma_3 \cup \Gamma_4\}$. Přenásobíme touto funkcí rovnici (5.1a) a zintegrujme přes oblast Ω . Dostaneme

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \left(1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial y} \right)^2 \right)^m \frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial y} \right] \tilde{\varphi}(y, t) \, d\omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial t} \tilde{\varphi}(y, t) \, d\omega.$$

Použitím Greenovy věty³ obdržíme

$$\begin{aligned}& \int_{\partial\Omega} \nu \left(1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial y} \right)^2 \right)^m \frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial y} \tilde{\varphi}(y, t) \vec{n} \, d\sigma \\ & - \int_{\Omega} \nu \left(1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial y} \right)^2 \right)^m \frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\varphi}(y, t)}{\partial y} \, d\omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{v}_1(y, t)}{\partial t} \tilde{\varphi}(y, t) \, d\omega.\end{aligned}$$

³Greenova věta pro per partes po složkách: $\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_k} u = \int_{\partial\Omega} v u \vec{n} \, d\sigma - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_k} \, d\omega$

Dále využijme, že $\frac{\partial \tilde{v}_1(y,t)}{\partial y} \vec{n} = \frac{\partial \tilde{v}_1(y,t)}{\partial \vec{n}_y}$ a $\frac{\partial g(y,t)}{\partial y} = 0$, jelikož $g(y,t) = g(t)$. Z okrajových podmínek plyne slabá formulace ve tvaru

$$\int_{\Omega} \nu \left(1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial v_1(y,t)}{\partial y} \right)^2 \right)^m \frac{\partial v_1(y,t)}{\partial y} \frac{\partial \varphi(y,t)}{\partial y} + \frac{\partial v_1(y,t)}{\partial t} \varphi(y,t) d\omega = 0, \quad (5.2)$$

kde $v_1, \varphi \in \mathcal{V}(\Omega) = \{f \in \mathcal{H}^1(\Omega) : f = 0 \mid_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} \}$.

Bohužel, jak si můžeme všimnout, tak levá strana není ve tvaru bilineární formy, tedy klasickou teorii pro lineární PDR nelze použít. Abychom se s tímto problémem vypořádali, budeme řešit jinou úlohu a jednoduchým numerickým experimentem zjistíme, do jaké míry upravená úloha aproximuje tu původní.

5.1.2 Linearizující algoritmus

Mějme úlohu

$$(\dagger) \int_{\Omega} \nu \left(1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial u_k(y,t)}{\partial y} \right)^2 \right)^m \frac{\partial v_{1,k}(y,t)}{\partial y} \frac{\partial \varphi(y,t)}{\partial y} + \frac{\partial v_{1,k}(y,t)}{\partial t} \varphi(y,t) d\omega = 0, \quad (5.3)$$

kde u_k je libovolná funkce z $\mathcal{H}^1(\Omega)$ a $v_{1,k}, \varphi \in \mathcal{V}(\Omega) = \{f \in \mathcal{H}^1(\Omega) : f = 0 \mid_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} \}$.

Nyní už máme na levé straně bilineární formu vzhledem k v_1, φ a můžeme jednoduše provést výpočet využívající metody konečných prvků. Otázkou však zůstává, jak zvolit funkci u , aby řešení (\dagger) co nejlépe aproximovalo původní úlohu. Postup hledání této funkce popíšeme následovně:

- 0) jelikož parametr λ je dle předpokladu malý, zvolme jako první hodnotu $u_0 = 0$
- 1) pomocí u_0 vypočteme z (\dagger) funkci $v_{1,k}$ a $u_1 := v_{1,k}$
- ...
- k) pomocí u_{k-1} vypočteme z (\dagger) funkci $v_{1,k}$ a konečně za $v_1 := v_{1,k}$

Funkčnost algoritmu posoudíme tak, že spočítáme $\|u_k - u_{k-1}\|$.⁵ Pokud je tato hodnota dosti malá v porovnání s hodnotou $\|v_{1,k}\|$, lze usuzovat, že naše idea je „správná“ a řešení úlohy (\dagger) dostatečně aproximuje původní úlohu.⁶

Vlastnosti algoritmu: Výše jsme záměrně použili výrazu, že idea je „správná“. Tato myšlenka není jasně matematicky podložena, tedy nemáme žádný matematický důkaz konvergence. Pohybujeme se pouze v rovině aproximativního numerického řešení, kde hledáme pevný bod linearizujícího algoritmu. Jeho nalezení je podmíněno numerickou analýzou problému, která závisí na zvolených parametrech úlohy. Nejprve zvolme konkrétní hodnoty parametrů $\nu = 0.1$ a $\lambda = 0.1$,

⁴Symbolem $f \mid_{\Gamma} = 0$ rozumíme $\mathcal{L}f = 0$, kde \mathcal{L} je operátor stopy na Γ_1

⁵Zavedeme si konvenci, že pokud nebude řečeno jinak, rozumíme $\|f\| = \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 d\omega \right)^{1/2}$.

⁶V případě Navier-Stokesových rovnic s konvektivním členem se standardně používá Newton-Raphsonův algoritmus. Jeho interpretace a konvergence je však dosti složitá otázka a v našem případě zbytečná.

zkoumanou oblast $\Omega = (0, 1)^2$ – variabilitu této volby budeme zkoumat v další sekci kapitoly – a bude nás zajímat závislost konvergence na parametru m .

Řekneme, že linearizující algoritmus je monotónní, pokud:

$$\|u_{2k+2}\| > \|u_{2k}\|, \forall k \in \mathbb{N} \ \& \ \|u_{2k+1}\| < \|u_{2k-1}\|, \forall k \in \mathbb{N}$$

Tato situace nastává ⁷ pro $m \in [-0.5, \infty)$, a pro $m < -0.5$ monotónnost nenastává. Toto monotónní chování ovšem ještě nezaručuje konvergenci, proto nás budou zajímat pouze případy, kdy rozdíl $\|u_1 - u_2\|$ je dostatečně „malý“, čímž máme na mysli situaci, kdy $m \in [-0.5; 0.5]$. Pro tyto hodnoty parametru m nastává konvergence linearizujícího algoritmu $\frac{\|u_k - u_{k-1}\|}{\|v_{1,k}\|} \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow \infty$ a odchylka od řešení pomocí *pdepe* je dána pouze aproximací metody konečných prvků v závislosti na síti a volbě prvků.

Věnujme ještě pozornost diskusi ohledně vztahu kinematické viskozity ν a hodnoty t_{max} . Pro hodnoty ν blízké nule se linearizující algoritmus chová špatně a dochází k oscilaci. Pro strukturovanou síť nastává oscilace s konstantní amplitudou a pro adaptovanou síť může nastat i tzv. *blow up*. Tato oscilace se však stává tlumenou, pokud dostatečně prodloužíme zkoumanou oblast Ω v čase.

Jednoduchým numerickým testem zjistíme, že rychlostní profil pro dvojici $[\nu, t_{max}] = [1, 1]$ je stejný ⁸ jako pro dvojici $[\nu, t_{max}] = [0.001, 1000]$, což plyne ze vztahu (5.3). Díky tomu můžeme pro libovolně malou hodnotu ν naleznout t_{max} takové, že linearizující algoritmus konverguje. Následnou vhodnou transformací hodnoty ν můžeme převést původní problém na nový pro oblast $\Omega = (0, 1)^2$.

5.1.3 Numerické výsledky prvního Stokesova problému metodou konečných prvků

V této sekci budeme studovat některé vlastnosti linearizujícího algoritmu, konkrétně monotonii v závislosti na parametru m a na hodnotě y_{max} .

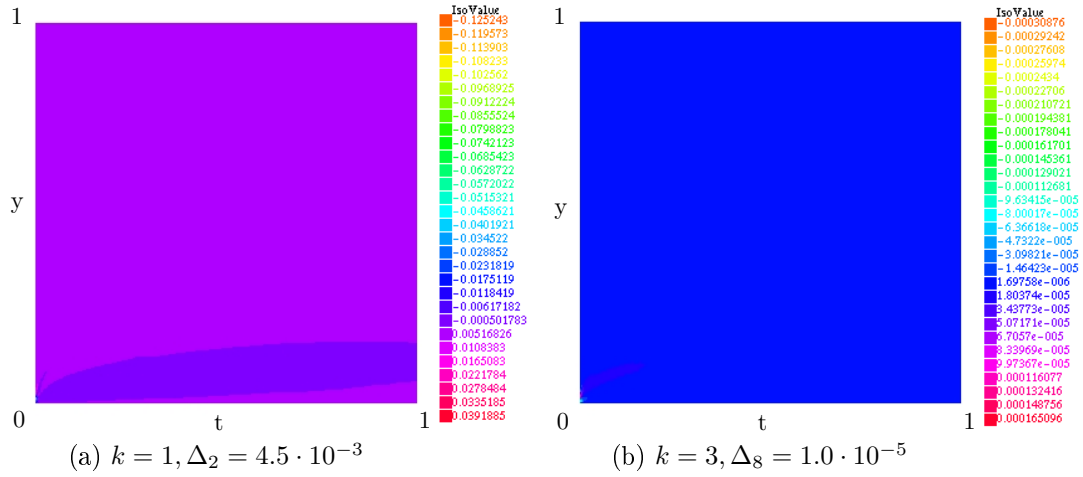
Zavedme si konvenci pro zjednodušení zápisů: Všechny fyzikálních veličiny budeme uvažovat v základních jednotkách SI, a proto nebudeme tyto jednotky explicitně používat v zápisu.

Nechť $t_{max} = y_{max} = 1$ a mějme nejdříve strukturovanou síť s 100×100 uzly na hranicích (20000 trojúhelníků), a poté adaptovanou síť (12145 trojúhelníků). Parametr λ je dle předpokladu malý – uvažujme $\lambda = 0.1$, $\nu = 0.02$ a parametr $m = 0.2$. Symbolem Δ_k označme relativní aproximační chybu, konkrétně $\Delta_k = \frac{\|u_k - u_{k-1}\|}{\|u_k\|}$. Na obrázku (5.3) můžeme vidět průběh chybové funkce $v_{1,k} - u_{k-1}$, tím jsme si experimentálně ověřili, že linearizující algoritmus opravdu konverguje k nějakému přibližnému řešení. Otázkou však zůstává, do jaké míry se toto přibližné řešení shoduje s přesným řešením? Odpověď nalezneme v konvergenci metody konečných prvků.

Přesné určení aproximace MKP pro nelineární úlohu je dosti složitá problematika. Jediným vodítkem budou v našem případě numerické experimenty, které pro testovaná data více, či méně odpovídají konvergenci pro lineární úlohy. Výsledky těchto numerických experimentů interpretujme takto:

⁷Uvažujeme strukturovanou síť. Pro adaptovanou síť je situace poněkud komplikovanější, jelikož pro $n > 1$ může nastat tzv. „blow up“. Na druhou stranu pro $n \in [-0.5, 0.5]$ dává adaptovaná síť mnohem rychlejší numerickou konvergenci.

⁸přenásobený poměrovou konstantou $\frac{t_{max,1}}{t_{max,2}} = \frac{1}{1000}$.



Obrázek 5.3: Grafické znázornění chyby linearizujícího algoritmu, první problém.

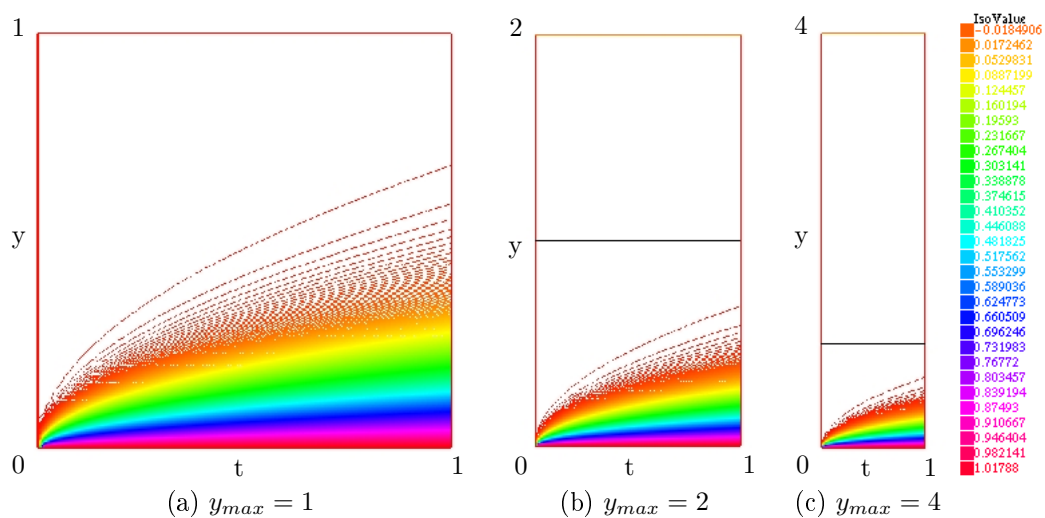
Pokud používáme P1 prvky, lze očekávat konvergenci s přesností $C_1(h^1)$ a pro P2 prvky $C_2(h^2)$. Hodnotu kladných konstant C_1 a C_2 lze zmenšit vhodnou adaptivitou sítě, proto budeme jen pro názornost uvažovat $C_1 = C_2 = 1$.⁹ V prvním případě P1 prvků lze tedy očekávat při strukturovaná síti 100×100 toleranci 0.01 a v případě P2 prvků 0.0001. Pokud zkoumáme rozdíl aproximativního řešení metodou konečných prvků a řešení pomocí *pdepe*, při dostatečném zjemnění se vždy pohybujeme právě v této toleranci. Můžeme tedy na základě provedené numerické analýzy a experimentů konstatovat, že pro hodnoty parametru $m \in [-0.5; 0.5]$ linearizující algoritmus aproximuje přesné řešení v toleranci 0.01 u P1 prvků a 0.0001 u P2 prvků. Zkoumáme-li chování MKP pro adaptivní síť, můžeme dokonce, pro hodnoty m blízké nule, za kratší výpočetní čas obdržet stejnou aproximaci jako v při použití *pdepe*.

Přejdeme tedy na další část problému a pokusíme se dokázat, že s lehkou újmou na obecnosti můžeme předpokládat okrajovou podmínku $v_1(y_{max}, t) = 0$. Dokážeme, že problém na nekonečné oblasti¹⁰ lze převést na oblast konečnou vhodným „oříznutím“. Posuneme hodnotu y_{max} na dvojnásobek (5.4b) resp. čtyřnásobek (5.4c) a budeme zkoumat odchylku tohoto řešení vůči původnímu (5.4a) pro $y_{max} = 1$, které je na obrázcích vyznačeno černou čarou. Znázorníme si ještě chybu $v_1(y, t)$ pro $y_{max} = 1, 2, 4$ viz obrázek (5.5). Abychom mohli srovnávat, musíme $v_1(y_{max} = 1)$ dodefinovat nulou na zbytku oblasti, která je pro $y_{max} = 2, 4$ větší. Pro přehlednost označme $\Delta_{2,4} = \|v_1(y_{max} = 1) - v_1(y_{max} = 2)\|$ a $\Delta_{1,4} = \|v_1(y_{max} = 1) - v_1(y_{max} = 4)\|$.

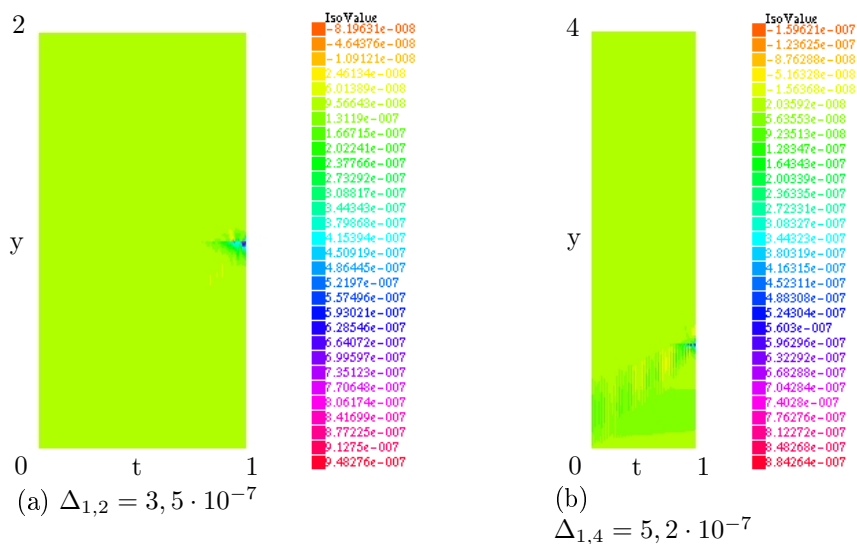
⁹Bohužel odhadování konvergentních konstant není zrovna nejjednodušší věc. Proto budeme vycházet ze situace, kdy $m = 0$, tedy v případě newtonovské tekutiny, kdy známe přesné řešení. Pro P1 prvky jsou konstanty v závislosti na dělení oblasti $C_{50} = 0.047, C_{100} = 0.033, C_{150} = 0.026$ a v případě P2 prvků je $C_{50} = 0.06, C_{100} = 0.9$ a $C_{150} = 1.3$. Pokud danou síť adaptujeme, dostaneme při stejném počtu elementů sítě konstanty přibližně 10-krát menší.

¹⁰Nekonečná oblast je v tomto případě chápána z hlediska prostorové proměnné y . Hodnotu t_{max} uvažujeme konstantní.

¹¹Pro názorná srovnání zobrazujeme izokřivky – všechny body této křivky mají stejnou funkční hodnotu – a používáme projekci z prostoru $[t, y, z]$ na rovinu $[t, y]$. Hodnoty $z = v_1(y, t)$ jsou znázorněny barvami RGB typu, kde fialová barva odpovídá hodnotě 1 a červená barva hodnotě 0.



Obrázek 5.4: Řešení MKP pro různé hodnoty y_{max} .

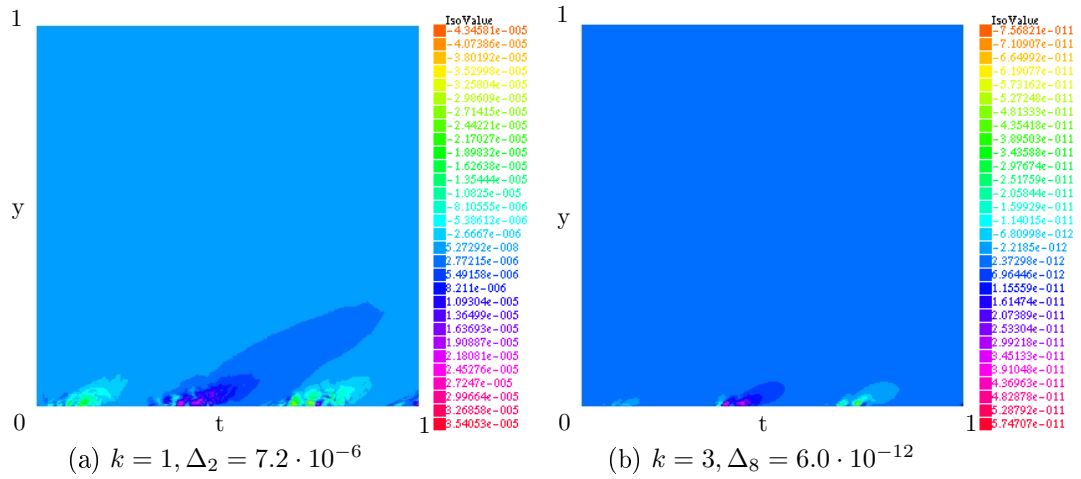


Obrázek 5.5: Grafické znázornění chyby při zvětšení hodnoty y_{max} , první problém.

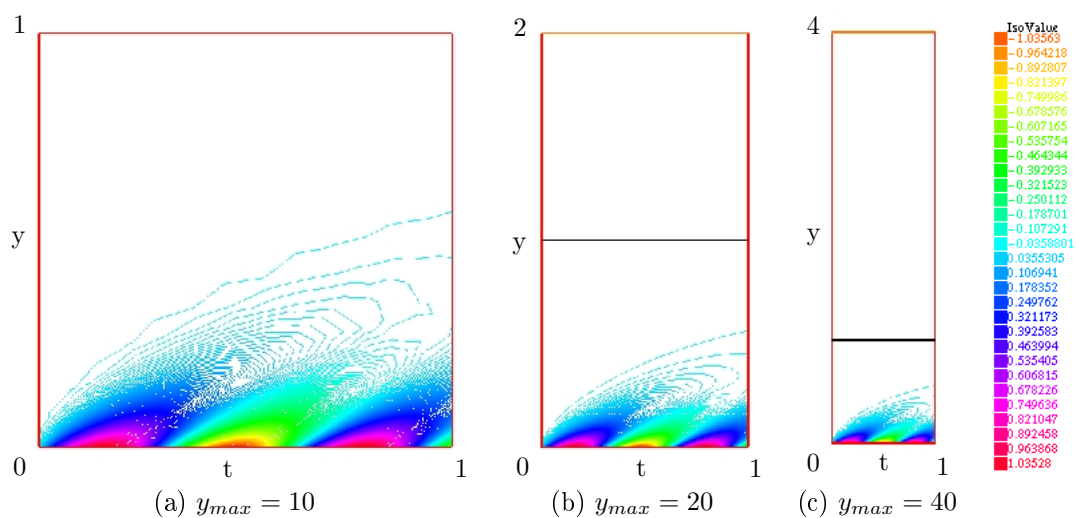
Z numerických experimentů tedy plyne, že omezení původního poloprostoru na konečnou oblast Ω , kde uvažujeme přidanou okrajovou podmínku $v_1(y_{max}, t) = 0$ pro dostatečně velkou hodnotu y_{max} , má minimální vliv a tedy řešení úlohy (†) můžeme považovat za dostatečně aproximující původní úlohu.

5.1.4 Numerické výsledky druhého Stokesova problému metodou konečných prvků

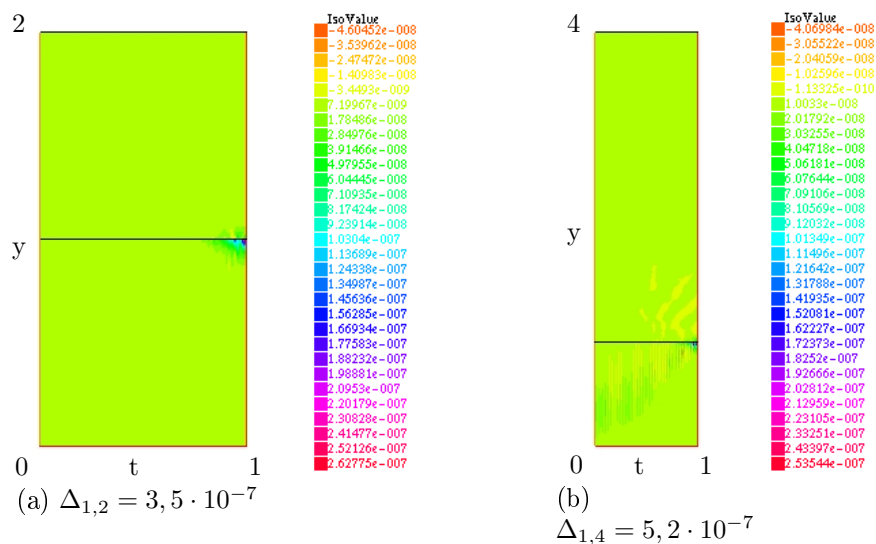
V případě druhého Stokesova problému je situace velice podobná, a jak se dalo očekávat, dojdeme ke stejnému závěru jako v případě prvního Stokesova problému. Pro srovnání však uvedeme několik názorných ilustrací. Hodnoty parametrů jsou $\Omega = (0, 10)^2$, $\nu = 0.2$, $m = 0.2$. V tomto případě jsme použili adaptovanou síť, která dává rychlejší konvergenci.



Obrázek 5.6: Grafické znázornění chyby linearizujícího algoritmu, druhý problém.



Obrázek 5.7: Řešení MKP pro různé hodnoty y_{max} .



Obrázek 5.8: Grafické znázornění chyby při zvětšení hodnoty y_{max} , druhý problém.

5.2 Výsledky dosažených pomocí softwaru Matlab R2007b

5.2.1 Explicitní model

V této sekci budeme srovnávat výsledky získané pomocí linearizujícího algoritmu naprogramovaného ve freewaru pro MKP –Freefem++ – a komerčním softwarem Matlab, kde zabudovaná funkce *pdepe* viz [11] umožňuje řešit parabolické či eliptické evoluční úlohy s jednou prostorovou dimenzí, tedy typu prvního a druhého Stokesova problému pro explicitní model (1a). Získané výsledky budeme porovnávat graficky a početně pomocí softwaru Matlab.

Srovnání výsledků z programu Freefem++ dosáhneme tak, že si necháme vypsat hodnoty řešení ve stejné mřížce, jako používá Matlab. Obsahem plochy řešení rozumíme hodnotu $S = \|v_1\| = (\int_{\Omega} |v_1|^2 d\omega)^{\frac{1}{2}}$. Tento výpočet je zprostředkován zabudovanou funkcí v programu Matlab *trapz*, která umožňuje výpočet integrálu pomocí lichoběžníkové metody.

Ohledně kinematické viskozity $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ udělejme následující pozorování. Uvažme konstantní hustotu $\rho = 1000$ a srovnáme výsledky pro $\nu = 0.001$ resp. $\nu = 0.1$ pro $\Omega_{100} = (0, 1) \times (0, 100)$ resp. $\Omega_1 = (0, 1) \times (0, 1)$. Ostatní parametry uvažme $m = 0.4$ a $\lambda = 0.1$.

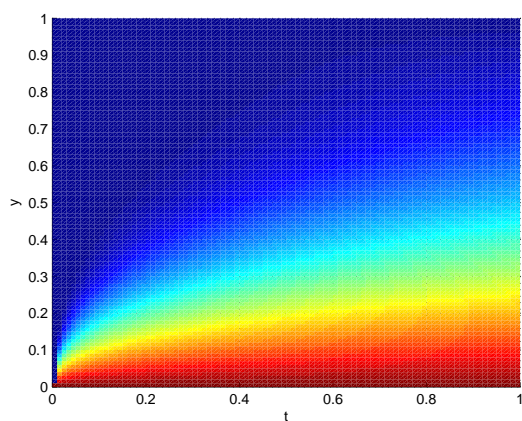
Tento výsledek z obrázku (5.9a) a (5.9b) byl vypočítán na síti $t \times y = 101 \times 101$. Jak lze vidět, rozdíl prvního případu a druhého (přenásobeného poměrovou konstantou $\frac{1}{100} = \frac{t_{max,1}}{t_{max,2}}$ činí pouze $4.1 \cdot 10^{-8}$, tedy relativní odchylka je $1.5 \cdot 10^{-7}$. Stejnou situaci dostaneme i pro ostatní $m \in [-0.5; \infty)$. Obdobná aproximace viz obrázek (5.9c) nastává i v programu Freefem++ pro $m \in [-0.5; \infty)$, kde např. relativní odchylka pro $m = 0.4$ od řešení pro *pdepe* je $8.2 \cdot 10^{-5}$.

Proto s lehkou újmou na obecnosti můžeme zvolit libovolnou hodnotu ν (s ohledem na hodnotu t_{max}). Nyní srovnáme řešení v těchto dvou programech a budeme se zabývat jejich odchylkou pro různé hodnoty parametru m .

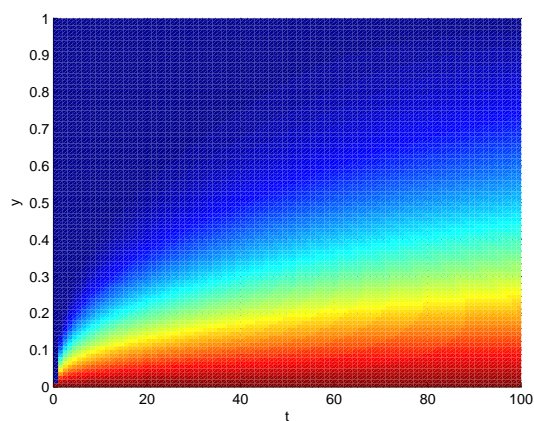
Dospějeme k zajímavým závěrům. Pro $m > 0.5$ linearizující algoritmus osciluje a konvergence není zajištěná, nicméně jak lze vidět na obrázku (5.9d), kde vykreslujeme rozdíl řešení pro *pdepe* a MKP, pro $m \in [-0.5; 0.5]$ linearizující algoritmus dává dobrou konvergenci a přesnou aproximaci. Bohužel pro $m < -0.5$ funkce *pdepe* v programu Matlab začne dávat špatné výsledky a stejně tak i linearizující algoritmus v programu Freefem++.

Na obrázku (5.10a) a (5.10b) můžeme vidět, jak při zjemnění sítě pro $m = -0.7$ řešení *pdepe* diverguje a posunuje směrem k nulovému řešení, např. při zjemnění na 1001×1001 je $S = 0.1088$. Obdobná situace nastává i pro MKP.

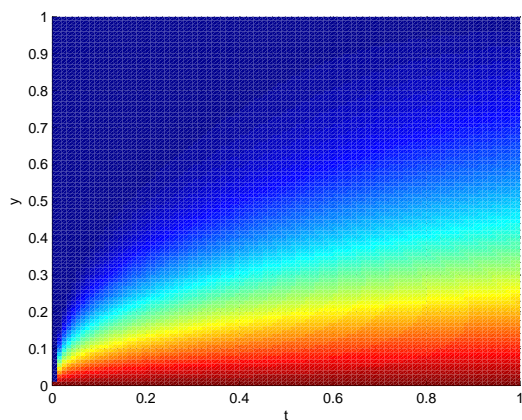
Rozeberme nyní vztah tenzoru napětí \mathbb{T} a symetrické části gradientu rychlosti \mathbb{D} . Jak už bylo řečeno, pro $m \in (0, \infty)$ nastává *shear thickening* a pro $m \in (-0.5; 0)$ *shear thinning*. Naše výsledky budeme porovnávat graficky s případem newtonovské tekutiny, kdy $m = 0$ a $\nu = \nu_0 = 0.1$, tedy poměr $\frac{\|\mathbb{T}\|}{\|\mathbb{D}\|} = 50$ je konstantní.



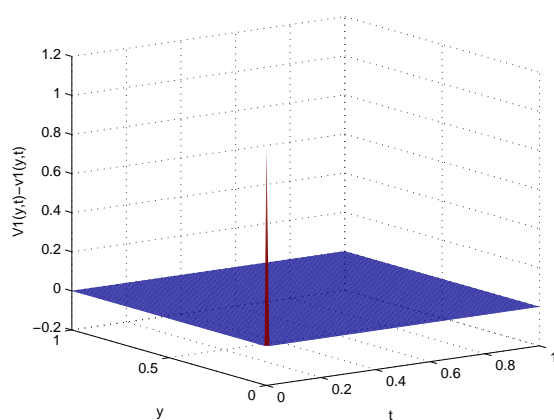
(a) *pdepe*: $\nu = 0.001, t_{max} = 100, S = 26.9658$



(b) *pdepe*: $\nu = 0.1, t_{max} = 1, S = 0.269658$

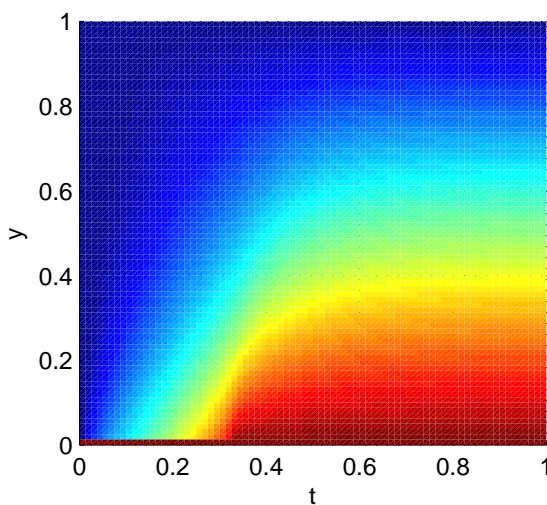


(c) MKP: $\nu = 0.1, t_{max} = 1, S = 0.269636$

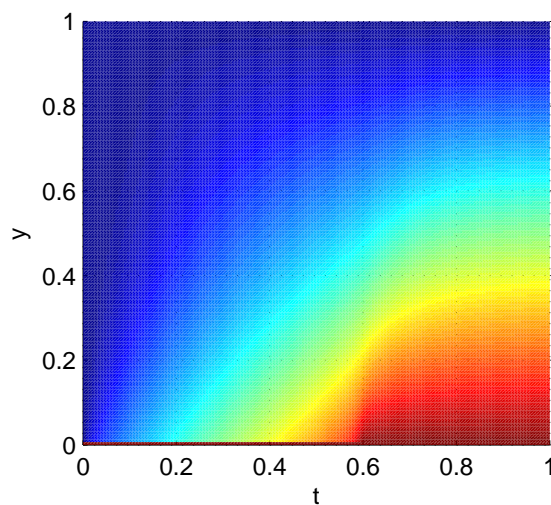


(d) Rozdíl řešení *pdepe* a MKP, $S = 8.2 \cdot 10^{-5}$

Obrázek 5.9: Řešení pro *pdepe* a MKP.

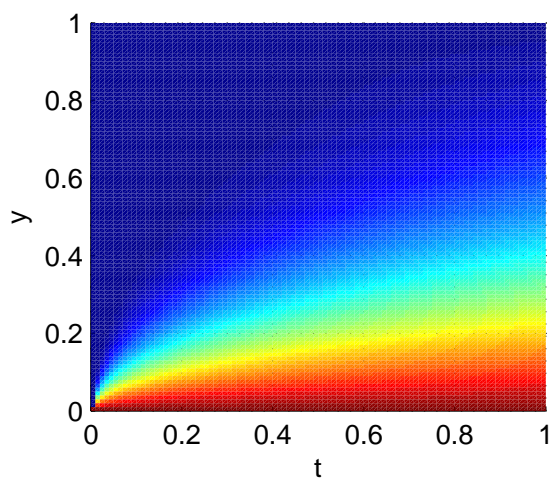


(a) $n = -0.7, t \times y = 81^2, S = 0.3710$

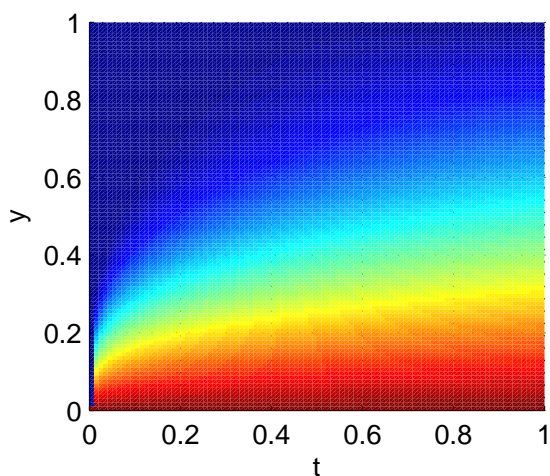


(b) $n = -0.7, t \times y = 161^2, S = 0.3045$

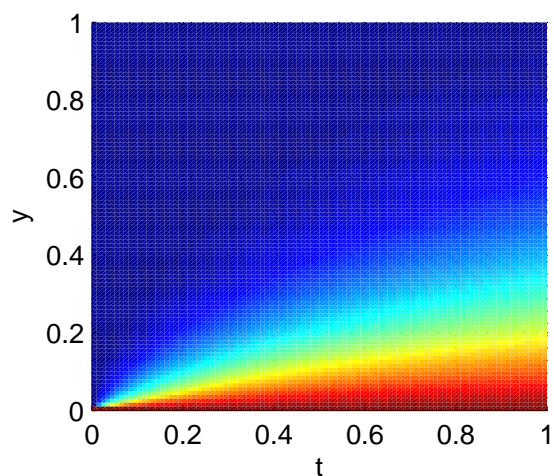
Obrázek 5.10: Degenerace řešení pro $n < -0.5$.



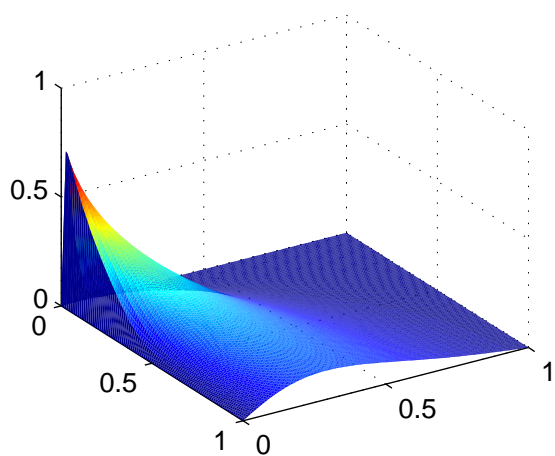
(a) řešení pro $m = 0$, $\frac{\|T\|}{\|D\|}$ je konstantní



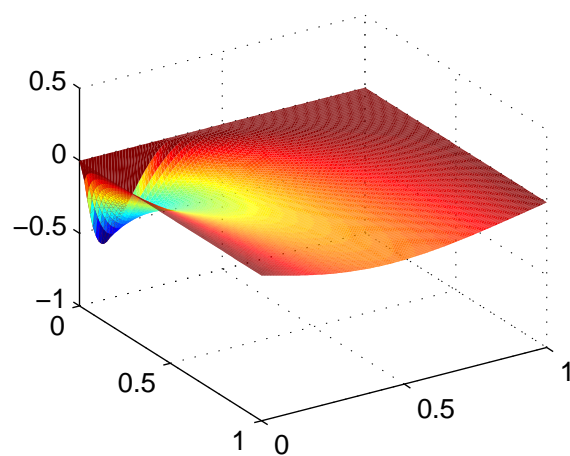
(b) řešení pro $m = 2$ - *thickening*



(c) řešení pro $m = -0.4$ - *thinning*



(d) rozdíl řešení pro $m = 0$ a $m = 2$



(e) rozdíl řešení pro $m = 0$ a $m = -0.4$

Obrázek 5.11: Chování pro různé hodnoty parametru m .

5.2.2 Implicitní model

Řešení implicitního modelu (1b) není triviální a nenašel jsem žádný způsob, jak tento problém řešit přímo – podobně jak v případě explicitního modelu. Nicméně diskretizací v prostorové proměnné y na n hladin převedeme soustavu PDR

$$\rho \frac{\partial v_1(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial \tau(y, t)}{\partial y}, \quad (5.4a)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v_1(y, t)}{\partial y} = \alpha (1 + \beta \tau^2(y, t))^n \tau(y, t), \quad (5.4b)$$

$$v_1(0, t) = v_0, \quad (5.4c)$$

$$v_1(y, 0) = 0, \quad (5.4d)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} v(y, t) = 0, \quad (5.4e)$$

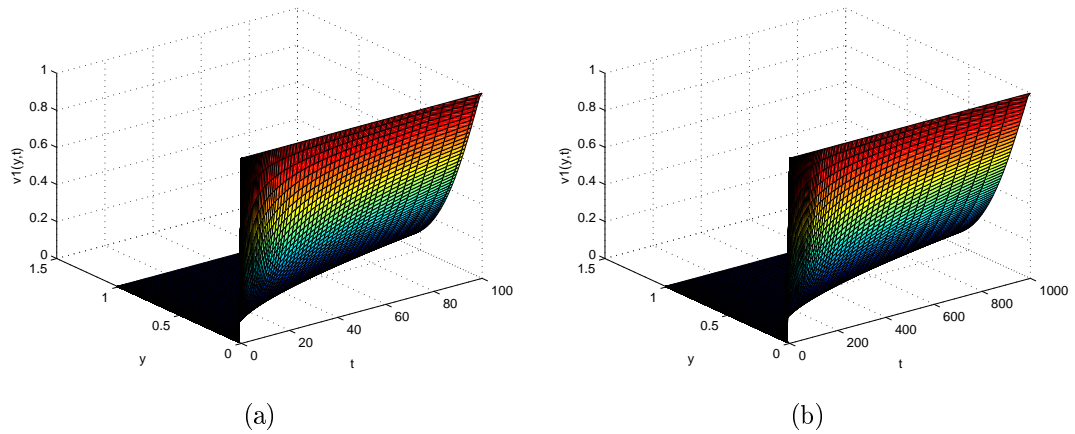
na soustavu n ODR a n algebraických rovnic. Kvůli přehlednosti zavedme značení $u(y, t) := v_1(y, t)$. Pro existenci a jednoznačnost řešení jednotlivých ODR potřebujeme aspoň spojitost v čase, tato podmínka ovšem pro $v_1(0, t)$ pro $t \in [0, t_{max}]$ není splněna u nuly. Proto budeme muset modifikovat počáteční podmínku $v_1(0, 0) = 0$ na podmínku $v_1(0, 0) = 1$, tedy budeme uvažovat počáteční okrajovou podmínku $u_1(t) = 1, \forall t \in [0, t_{max}]$.¹² Pro ostatní $u_n(t)$ tento problém nenastává a můžeme uvažovat počáteční podmínky $u_i(0) = 0, \forall i = 2, 3, \dots, n$, což odpovídá podmínce $v_1(y, 0) = 0$ a obdobně $\tau(y, 0) = 0$, tedy $\tau_i(0) = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Implementaci horní okrajové podmínky $v_1(y_{max}, t) = 0, \forall t \in [0, t_{max}]$ realizujeme podmínkou $v_{1,n} = 0$, což implikuje podmínku $\tau(y_{max}, t) = 0, \forall t \in [0, t_{max}]$, tedy $\tau_n(t) = 0$.

V diskretizaci prostorové proměnné použijeme Eulerovu zpětnou metodu. Hodnotu dy volíme jako $\frac{y_{max}}{n}$. Dostáváme tedy soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - u_1(t), \\ \frac{\partial u_2(t)}{\partial t} &= \frac{\tau_2(t) - \tau_1(t)}{\rho dy}, \\ &\dots \\ \frac{\partial u_{n-1}(t)}{\partial t} &= \frac{\tau_{n-1}(t) - \tau_{n-2}(t)}{\rho dy}, \\ 0 &= \tau_n(t), \\ 0 &= \frac{u_1(t) - u_2(t)}{2 dy} + \alpha (1 + \beta (\tau_1(t))^2)^n \tau_1(t), \\ &\dots \\ 0 &= \frac{u_{n-1}(t) - u_n(t)}{2 dy} + \alpha (1 + \beta (\tau_{n-1}(t))^2)^n \tau_{n-1}(t), \\ 0 &= u_n(t), \\ u_1(t) &= 1, \forall t \in [0, t_{max}], \\ u_i(0) &= 0, \forall i = 2, 3, \dots, n, \\ \tau_i(0) &= 0, \forall i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

¹²Druhá možnost modifikace je zachování počáteční podmínky a eliminace okrajové. Tedy $u_1(0, 0) = 0$ a $u_1(0, t) = 1 - \varepsilon(t), \forall t \in (0, t_{max}]$, kde $\varepsilon(t)$ konverguje velice rychle k 0 pro $t \rightarrow \infty$. Tuto možnost ale dostaneme, vezmeme-li jako první hladinu funkce $v_1(y, t)$ jako $u_2(y, t)$.

Tímto jsme dostali soustavu diferenciálních algebraických rovnic (DAE), která je pomocí zabudované funkce *ode15s* viz [10] v programu Matlab řešitelná pro $n \in [-0.5; \infty)$. Pro $n < -0.5$ nastává stejná degenerace jako v případě explicitního modelu. Co se týče parametrů úlohy, konkrétně parametru α , nemůžeme být tak variabilní jako v případě explicitního modelu. Nicméně i tady funguje podobná transformace, což plyne z (5.4a). Řešení pro dvojici $[\alpha, t_{max,1}] = [1, 100]$ obrázek (5.12a) odpovídá – až na poměrovou konstantu $\frac{t_{max,1}}{t_{max,2}}$ – řešení pro dvojici $[\alpha, t_{max,2}] = [10, 1000]$ obrázek (5.12b). Další parametry zvolme bez újmy na obecnosti $\beta = 0.1$ a $n = 0.4$.



Obrázek 5.12: Ukázkové řešení pro implicitní model.

Závěr

Problematika neneutronovských tekutin je v současnosti velice populárním tématem matematického modelování. Umožňuje popsat chování různých tekutin ať už ve vědě, lékařství či v průmyslu. Existuje nepřeberné množství modelů, které lépe, či hůře popisují chování reálných materiálů. Jeden z ukázkových problémů pro studium modelů je jednoduchý smyk. První a druhý Stokesův problém jsou typickými představiteli jednoduchého smyku a skýtají ideální analýzu, ať už pro spojitě oscilační chování – druhý Stokesův problém, tak při nespojitěm chování – první Stokesův problém.

Inovační pojetí v případě implicitního modelu (1b) navíc otevírá další možnosti popisu chování neneutronovských tekutin. Tato práce by měla sloužit nejen jako analýza dalšího mocninného modelu, ale i jako inspirace pro zkoumání implicitních a jiných forem konstitutivních vztahů. V našem případě vede implicitní forma modelu na soustavu DAE. Nesetkáváme se tedy, jako v případě klasické formulace konstitutivního vztahu, s PDR, které po prostorové diskretizaci vedou na system ODR, nýbrž s poměrně složitou a obecně méně známou teorií DAE.

V neposlední řadě se věnujeme problematice space-time discretization neboli prostoročasové diskretizaci, kdy uvažujeme čas jako další prostorovou proměnnou. Dle mně dostupných informací nelze předem určit, zda je tento způsob nahlížení lepší než klasický způsob diskretizace v čase a převedení na soustavu ODR. Proto mě v případě prvního Stokesova problému, kde pracujeme s nespojitým chováním v čase $t = 0$, napadla myšlenka řešit tuto úlohu časoprostorovou diskretizací s využitím metody konečných prvků, která je ve dvou dimenzích spolu s možnou adaptivitou sítě velice silným numerickým nástrojem. Linearizující algoritmus, který jsem pro tuto úlohu vymyslel, je postavený na jednoduché myšlence a věřím, že by se dal použít i sofistikovanější přístup. Nicméně tato problematika nebyla cílem mé práce, proto zde není podrobněji diskutována.

Závěrem bych zmínil, že jsme vyřešili první a druhý Stokesův problém na konečné oblasti pro uvažované dva modely a parametry $n, m \geq -0.5$. Provedli jsme analýzu, kdy můžeme zaměnit nekonečnou oblast za konečnou a zkoumali jsme chování linearizujícího algoritmu pro případ prostoročasové diskretizace na explicitním modelu (1a), která nám pro určité hodnoty parametru m dávala přesnější aproximaci.

Literatura

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, editors. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Number 55 in Applied Mathematics Series. United States Dept. of Commerce, National Bureau of Standards, Washington D.C., 1964.
- [2] Alan W. Bush. *Perturbation methods for engineers and scientists*. CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [3] Pierre J. Carreau. Rheological equations from molecular network theories. *J. Rheol.*, 16(1):99–127, 1972.
- [4] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [5] Corina Fetecau, D. Vieru, and Constantin Fetecau. A note on the second problem of stokes for newtonian fluids. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43(5):451 – 457, 2008.
- [6] J. Málek, V. Průša, and K. R. Rajagopal. Generalizations of the Navier–Stokes fluid from a new perspective. *Int. J. Eng. Sci.*, 48(12):1907–1924, 2010.
- [7] J. Málek and K. R. Rajagopal. Mathematical issues concerning the Navier–Stokes equations and some of its generalizations. In C. M. Dafermos and E. Feireisl, editors, *Handbook of differential equations: evolutionary equations*, volume 2, chapter 5, pages 371–459. Elsevier, Amsterdam, 2005.
- [8] J. Málek and K.R. Rajagopal. Incompressible rate-type fluids with pressure and shear-rate dependent material moduli. *Nonlinear Anal., Real World Appl.*, 8(1):156–164, 2007.
- [9] Karel Rektorys. *Variational methods in mathematics, science and engineering*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, second edition, 1980. Translated from the Czech by Michael Basch.
- [10] Lawrence F. Shampine, Mark W. Reichelt, and Jacek A. Kierzenka. Solving index-1 daes in matlab and simulink. *SIAM Rev.*, 41:538–552, September 1999.
- [11] R. D. Skeel and M. Berzins. A method for the spatial discretization of parabolic equations in one space variable. *Journal on Scientific and Statistical Computing*, 11:1–32, 1990.