

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jan Kubíček

### Tenké disky a prstence jako zdroje Weylových prostorůčasů

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák Dr.,  
DSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2011

Chtěl bych poděkovat vedoucímu své práce, doc. RNDr. Oldřichu Semerákovi Dr., DSc., za poskytnuté studijní materiály, ochotu a velkou dávku trpělivosti. Bez jeho rad a připomínek by tato práce nemohla vzniknout.

Velké poděkování patří také mojí rodině, která mě vytrvale podporuje po celou dobu studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne.....

podpis

Název práce: Tenké disky a prstence jako zdroje Weylových prostoročasů

Autor: Jan Kubíček

Katedra / Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák Dr., DSc.; Ústav teoretické fyziky

Abstrakt:

Statická a axiálně symetrická vakuová řešení Einsteinových rovnic lze popsat Weylovou metrikou, která závisí jen na dvou neznámých funkcích, daných Laplaceovou rovnicí a křivkovým integrálem. V této práci studujeme některé vlastnosti dvou Weylových prostoročasů, jejichž zdroji jsou jednorozměrné prstence – Appellův prstenec, resp. Bachův-Weylův prstenec. Na chování vlastních vzdáleností a geodetik v centrální oblasti konkrétně ukazujeme, že při zobrazení ve Weylových souřadnicích představují tyto zdroje směrové singularity.

Klíčová slova: gravitace, obecná teorie relativity, Weylovy prostoročasy

Title: Thin discs and rings as sources of Weyl space-times

Author: Jan Kubíček

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: doc. RNDr. Oldřich Semerák Dr., DSc.; Institute of Theoretical Physics

Abstract:

Static and axially symmetric vacuum solutions of Einstein's equations can be described by the Weyl metric which only depends on two unknown functions, given by the Laplace equation and a line integral. In this thesis we study some properties of two Weyl space-times whose sources are one-dimensional rings – the Appell ring and the Bach-Weyl ring. On the behaviour of proper distances and geodesics in the central region we demonstrate that in Weyl coordinates these sources represent directional singularities.

Keywords: gravitation, general theory of relativity, Weyl space-times

# Obsah

<b>Obecná teorie relativity</b>	<b>1</b>
<b>1 Weylova řešení: obecné vlastnosti</b>	<b>4</b>
1.1 Metrika . . . . .	4
1.2 Řešení rovnic a jejich interpretace . . . . .	4
1.3 Self-konzistence . . . . .	5
<b>2 Weylova řešení: konkrétní případy</b>	<b>6</b>
2.1 Appellův prstenec . . . . .	6
2.1.1 Appellův potenciál . . . . .	6
2.1.2 Appellovo řešení v obecné relativitě . . . . .	7
2.1.3 Geodetiky v poli Appellova prstence . . . . .	8
2.1.4 Metoda efektivního potenciálu . . . . .	10
2.1.5 Vlastní vzdálenosti . . . . .	12
2.2 Bachův-Weylův prstenec . . . . .	16
2.2.1 Bachův-Weylův potenciál . . . . .	16
2.2.2 Vlastnosti geodetik . . . . .	16
2.2.3 Limitní chování vlastních vzdáleností . . . . .	18
2.2.4 Numerické výsledky . . . . .	18
<b>Závěr</b>	<b>22</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>23</b>
<b>A Geodetiky ve Weylových prostoročasech</b>	<b>24</b>
<b>B Metoda efektivního potenciálu ve Weylových prostoročasech</b>	<b>26</b>

# Obecná teorie relativity

## Historický úvod

Einsteinovy rovnice gravitace znamenaly důležitý přelom v chápání našeho vesmíru. Ve své době dokázal Einstein nahradit více než 200 let starý Newtonův zákon všeobecné gravitace, jenž využíval pojem síly, moderní teorií založenou na diferenciální geometrii na varietách.

Revize Newtonova pojetí gravitace se zdála nevyhnutelná, protože toto pojetí odporovalo principům speciální teorie relativity. Newtonův zákon gravitace v sobě obsahuje okamžité působení na dálku (actio á distance), nebere v úvahu maximální možnou rychlost šíření informace - rychlost světla. Navíc není kovariantní.

Přesto znamenala Einsteinova teorie revoluci. Jejím důsledkem nebyla pouze formulace konzistentní teorie gravitace, ale hlavně změna našeho pohledu na samotný prostor a čas, základní pojmy všech fyzikálních teorií. Prostor a čas byly do té doby chápány jako absolutní veličiny, existující nezávisle na fyzikálních dějích a rozložení hmoty.

První změnu v chápání prostoru a času znamenala už teorie speciální relativity, ze které plyne, že prostor a čas spolu úzce souvisejí. Dohromady tvoří fyzikální entitu zvanou prostoročas. Byla to ale až obecná teorie relativity, která definitivně změnila dosavadní představy o těchto pojmech. Prostoročas už nadále není nezávislý na odehrávajících se fyzikálních dějích: jeho vlastnosti jsou určeny rozložením a pohybem hmoty.

Gravitace samotná je v tomto pojetí pouze “zdánlivá síla“, která vzniká kvůli zakřivení prostoročasu hmotnými tělesy. John Wheeler popsal vzájemnou souvislost hmoty a geometrie slovy: „*Hmota říká prostoru, jak se zakřivovat, prostor říká hmotě, jak se pohybovat*“.

Vlastnosti prostoročasu se mohou výrazně měnit v “čase a prostoru”. Vůbec nejzajímavější důsledky této proměnlivosti se ukázaly při aplikaci obecné relativity na kosmologické modely. Z nich vyplynula dynamičnost našeho vesmíru. Vesmír se buď rozpíná, nebo smršťuje; statický vesmír je velmi nepravděpodobný.

Z pozorování pohybu galaxií dnes víme, že se náš vesmír rozpíná. Kdybychom si rozpínání vesmíru pustili pozpátku, dosáhli bychom okamžiku, kdy rozpínání začalo. Dnes se proto všeobecně přijímá představa, že vesmír neexistuje věčně, ale měl svůj počátek. Vznikl před nějakými 14 miliardami let a od té doby se rozpíná. Okamžiku vzniku vesmíru se začalo přezdívat Velký třesk.

Další zajímavý důsledek Einsteinovy obecné relativity představuje existence černých

děr. Zprvu nebylo jasné, zda černé díry představují pouze přípustné řešení rovnic, které se ovšem v přírodě nerealizuje, nebo zda se opravdu černé díry vyskytují ve vesmíru kolem nás. Nyní máme dostatek astronomických pozorování podporujících existenci černých děr.

Prostoročas s černými děrami má velmi neočekávané vlastnosti. Zmíňme například existenci tzv. horizontu událostí, strhávání inerciálních systémů v okolí rotujících černých děr (“frame dragging”) či nutný výskyt singularit v nitru černých děr.

Obecná teorie relativity předpovídá, na rozdíl od Newtonovy teorie, existenci gravitačních vln. Jedná se o příčné vlny křivosti prostoročasu šířící se rychlostí světla. Do dnešní doby se je nepodařilo detekovat přímo, máme k dispozici pouze nepřímé důkazy o jejich existenci z pozorování oběžných drah kompaktních binárních systémů. Astronomové věří, že detekcí a zkoumáním gravitačních vln získáme v budoucnosti informace o jejich zdrojích (binární systémy, supernovy, srážky černých děr), které nejsou dostupné jinými pozorovacími metodami.

## Studium problémů v obecné relativitě

Díky Einsteinovi známe rovnice popisující vlastnosti prostoročasu, když zadáme rozložení zdrojů. Bohužel je značný rozdíl mezi znalostí příslušných rovnic a schopností je vyřešit. Při řešení Einsteinových rovnic se totiž musíme potýkat hned s několika problémy. Mezi hlavní patří nelinearita rovnic, na rozdíl například od Maxwellových rovnic elektromagnetického pole. Přesná analytická řešení rovnic se tedy nalézají obtížně. Často se musíme uchýlit ke snížení obecnosti studovaného problému a zavést určitá zjednodušení, například požadovat jistou symetrii.

Studiu prostoročasů se symetriemi se proto věnuje řada úsilí. Úplně první řešení Einsteinových rovnic od Schwarzschilda popisuje sféricky symetrický vakuový prostoročas. Další řešení s vysokou mírou symetrie představuje třída statických axiálně symetrických prostoročasů, které jsou popsány Weylovou metrikou.

Výše uvedené případy se vyznačují relativně jednoduchou metrikou. S jejich aplikacemi na fyzikální svět kolem nás ale musíme být opatrní. Černé díry vzniklé kolapsem hvězd i ty nacházející se v centru galaxií zřejmě rotují. Podobně rotují i akreční disky kolem černých děr a disky galaxií jako takové. Rozdíl mezi fyzikálními jevy u rotujících a nerotujících zdrojů přitom může být v blízkosti horizontu značný. Kerrovo řešení pro rotující černé díry například popisuje už zmíněné strhávání inerciálních systémů a výskyt prstencové singularity v ekvatoriální rovině.

Modely s rotujícími zdroji jsou ovšem mnohem složitější než statické modely, proto se v této práci věnuji hlavně prostoročasům se statickými zdroji.

## Konvence

V celé práci používám metriku  $g_{\mu\nu}$  se signaturou  $(-, +, +, +)$ , sumační konvenci a geometrizované jednotky, v nichž  $c = 1$ ,  $G = 1$ . Čárka v dolním indexu značí parciální derivace dle následujících proměnných.



# 1 Weylova řešení: obecné vlastnosti

## 1.1 Metrika

Vakuové statické axiálně symetrické prostoročasy jsou popsány Weylovou metrikou [1]

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + \rho^2 e^{-2\nu} d\phi^2 + e^{2(\lambda-\nu)} (d\rho^2 + dz^2), \quad (1.1)$$

kde  $\rho$ ,  $z$ ,  $\phi$  jsou válcové a  $t$  časová souřadnice<sup>1</sup>. Souhrnně se tyto souřadnice nazývají Weylovy kanonické souřadnice.

Z Einsteinových rovnic plyne, že funkci (potenciál)  $\nu$  získáme řešením Laplaceovy rovnice<sup>2</sup> (zde ve válcových souřadnicích) [1]

$$\nu_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\nu_{,\rho} + \nu_{,zz} = 0. \quad (1.2)$$

Druhou funkci (potenciál) vyskytující se v (1.1) pak získáme integrací po libovolné křivce procházející vakuovou oblastí [1]

$$\lambda = \int_{\text{osa}}^{\rho,z} \rho[(\nu_{,\rho}^2 - \nu_{,z}^2)d\rho + 2\nu_{,\rho}\nu_{,z}dz]. \quad (1.3)$$

Linearita Laplaceovy rovnice dovoluje superponovat několik různých řešení pro první potenciál. Rovnice pro druhý potenciál už bohužel lineární není.

## 1.2 Řešení rovnic a jejich interpretace

Potenciál  $\nu$  splňuje stejnou rovnici jako Newtonův gravitační potenciál (či skalární potenciál v elektrostatice). Nabízí se možnost vzít známá řešení z Newtonovy teorie (nebo elektrostatiky) a pokusit se spočítat druhý potenciál. Musíme si však dávat pozor na interpretaci řešení, která vzniknou použitím Newtonových potenciálů v obecné relativitě. Povaha zdroje, který budí gravitační pole, může být v obecné

<sup>1</sup>V případě omezeného zdroje přechází Weylova metrika v nekonečnu na Minkowského metricku ve válcových souřadnicích. Časová souřadnice má potom význam vlastního času pozorovatele v nekonečnu.

<sup>2</sup>V literatuře se pro funkci  $\nu$  někdy používá označení harmonická funkce. Nicméně matematicky korektní definice harmonické funkce vyžaduje, aby splňovala Laplaceovu rovnici a zároveň byla třídy  $C^2$  v celém prostoru. Pak by ovšem nemohla popisovat pole buzené diskovým zdrojem, u kterého má potenciál při přechodu přes disk skok v první derivaci úměrný plošné hustotě disku. Přesnější by v našem kontextu bylo, místo o Laplaceově rovnici, mluvit o rovnici Poissonově s distribučním rozložením zdrojů

$$\nu_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\nu_{,\rho} + \nu_{,zz} = \delta(z)\sigma(\rho).$$

Přesto lze chápat Poissonovu rovnici pro diskové zdroje jako Laplaceovu rovnici s okrajovou podmínkou na chování potenciálu v rovině disku.

relativitě odlišná od Newtonovy teorie.

Například dosazením Newtonova potenciálu pro sféricky symetrický zdroj do Weylovy metriky získáme Curzonovu metriku [4]

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -\exp\left(\frac{-2m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) dt^2 + \rho^2 \exp\left(\frac{2m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) d\phi^2 \\
 & + \exp\left(\frac{2m}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} - \frac{m^2 \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^2}\right) (d\rho^2 + dz^2). \tag{1.4}
 \end{aligned}$$

Výsledkem není Schwarzschildovo řešení pro sféricky symetrické prostoročasy<sup>3</sup>. Birkhoffův teorém tvrdí, že každá vakuová sféricky symetrická oblast prostoročasu je popsána Schwarzschildovou metrikou. Curzonova metrika tedy nepopisuje sféricky symetrický zdroj v obecné relativitě.

### 1.3 Self-konzistence

Na superpozici dvou hmotných částic umístěných na ose  $z$  lze ilustrovat další charakteristický rys obecně relativistických řešení. Superpozicí těchto dvou částic můžeme získat opět statický prostoročas, ale ukazuje se, že mezi částicemi se na ose  $z$  vyskytuje singularita, kterou lze interpretovat jako “tuhou vzpěru” držící částice od sebe [3]. Bez ní by totiž částice díky vzájemnému přitahování spadly k sobě.

V případě diskových řešení se rovnováha udržuje tlakovými poli, která brání kolapsu, nebo lze statickou diskovou konfiguraci interpretovat pomocí kontrarotujících proudů látky.

Einsteinovy rovnice tedy pomocí singulárních “vzpěr” zajišťují požadovanou statickosti výsledného prostoročasu. Obecná relativita se z tohoto hlediska dá považovat za self-konzistentní teorii.

---

<sup>3</sup>Přesněji řečeno: řešení nejsou ekvivalentní, nelze najít souřadnicovou transformaci převádějící Curzonovu metriku na Schwarzschildovu.

## 2 Weylova řešení: konkrétní případy

### 2.1 Appellův prstenec

#### 2.1.1 Appellův potenciál

Newtonův potenciál Appellova prstence dostaneme jako reálnou část potenciálu pro částici s komplexní hmotností umístěnou s komplexní souřadnicí na ose  $z$  [3]

$$\nu = -\frac{\mathbb{M}}{\sqrt{\rho^2 + (z - \mathbb{Z})^2}}. \quad (2.1)$$

Linearita Laplaceovy rovnice zajišťuje, že reálná část potenciálu rovnici také řeší.

Nyní pár slov k (ne)vhodnosti názvu Appellův prstenec. Zvolíme-li polohu částice  $\mathbb{Z} = ia$ , bude potenciál (2.1) singulární pro  $z = 0$ ,  $\rho = a$ . Jedná se o prstenec s poloměrem  $\rho = a$ . Gleiser a Pullin [3]<sup>4</sup> však ukázali, že prstenec není jediný zdroj potenciálu (2.1). V rovině  $z = 0$  se nachází skok v derivaci potenciálu [2]<sup>5</sup>

$$\lim_{z \rightarrow 0} \nu_{,z} = -2 \mathbb{M} \mathbb{Z} (\rho^2 + \mathbb{Z}^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (2.2)$$

Vezmeme-li nyní pouze reálnou část (2.2) pro reálnou hmotnost  $M$  a  $\mathbb{Z} = ia$ , lze skok v derivaci potenciálu vysvětlit přítomností plošného rozložení hmoty s hustotou [2]

$$\sigma = \begin{cases} -4Ma(a^2 - \rho^2)^{-\frac{3}{2}}, & \rho < a \\ 0, & \rho > a. \end{cases} \quad (2.3)$$

Plošná hustota disku a hmota prstence mají navzájem opačná znaménka. Pokud prstenec tvoří “kladně nabitá hmota“, je disk záporně nabitý. Integrál hustoty (2.3) přes plochu disku je nekonečný. Hmota prstence je také nekonečná, celková gravitační hmotnost je ale konečná (rovná  $M$ ) [3]. Zdůrazněme, že disk se vyskytuje v Appellově řešení už v Newtonově teorii, nejedná se o důsledek obecné teorie relativity.

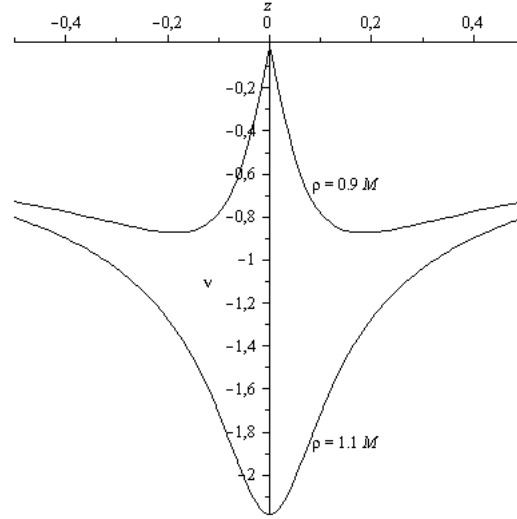
Přítomnost záporné hustoty hmoty není z fyzikálního hlediska příliš vhodná. V rámci obecné relativity lze přítomnost skoku v derivaci uskutečnit napojením dvou prostoročasových listů v rovině disku [6].

Ze vzorce (2.1) není přítomnost skoku v derivaci patrná na první pohled, pro názornost jsem vytvořil graf (Obr. 2.1) ilustrující nespojitost derivace při přechodu přes rovinu  $z = 0$ .

Explicitní výraz pro potenciál (2.1) při volbě  $\mathbb{Z} = ia$ ,  $M$  reálné lze nalézt v [1]

<sup>4</sup>V článku od zmíněných autorů nejspíš došlo tiskové chybě, u plošné hustoty uvádějí mocninu  $-\frac{1}{2}$ .

<sup>5</sup>V konvenci  $8\pi G = 1$ , viz [3]. Vztahuje se i na vzorec (2.3).



Obrázek 2.1: Graf Appellova potenciálu (2.1) pro prstenec umístěný v  $\rho = M$ , škálování souřadnic je v násobcích  $M$ . Pro  $\rho < M$  vidíme skok v derivaci potenciálu, pro  $\rho > M$  je potenciál hladký.

$$\nu = -\frac{M}{\sqrt{2}\sqrt{(\rho^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2}} \sqrt{\sqrt{(\rho^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2} + \rho^2 + z^2 - a^2}. \quad (2.4)$$

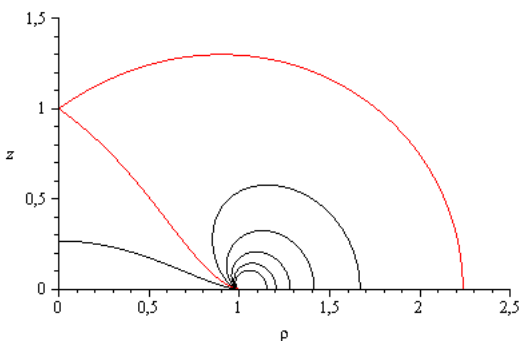
Pro představu o chování potenciálu jsem se snažil reprodukovat graf ekvipotenciál (Obr. 2.2), který publikovali Gleiser a Pullin [3]. Jejich článek se mimo jiné zabýval superpozicí Appellova prstence s částicí na ose  $z$ . Opět zjistili přítomnost vzpěr, které drží částici a prstenec s diskem od sebe. Když částici umístili do bodu  $z = a$ , vzpěry zmizely. Jako možné vysvětlení poukázali na existenci sedlového bodu v průběhu Newtonova potenciálu pro souřadnice  $\rho = 0$ ,  $z = a$  (červená ekvipotenciála). V tomto bodě se gravitační síly disku a prstence vyruší (v Newtonově teorii). Poukazují také na zjevnou nestabilitu rovnovážné polohy.

### 2.1.2 Appellovo řešení v obecné relativitě

K analýze vlastností prostoročasu potřebujeme znát ještě druhý metrický potenciál [1]<sup>6</sup>

$$\lambda = \frac{M^2}{8a^2} \left[ 1 - \frac{\rho^2 + z^2 + a^2}{\sqrt{(\rho^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2}} - \frac{2a^2\rho^2((\rho^2 + z^2 - a^2)^2 - 4a^2z^2)}{((\rho^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2)^2} \right]. \quad (2.5)$$

<sup>6</sup>Potenciál v tomto článku se od potenciálu v [3] liší faktorem 1/16. Provedl jsem dosazení do Einsteinových rovnic a potenciál (2.5) je splňuje.



Obrázek 2.2: Graf ekvipotenciál Appellova prstence pro prstenec umístěný v  $\rho = M$ , škálování souřadnic je v násobcích  $M$ . Červeně vyznačena ekvipotenciála se sedlovým bodem na ose  $z$ .

Pro úplnost je přiložen graf ekvičar druhého potenciálu (Obr. 2.3).

### 2.1.3 Geodetiky v poli Appellova prstence

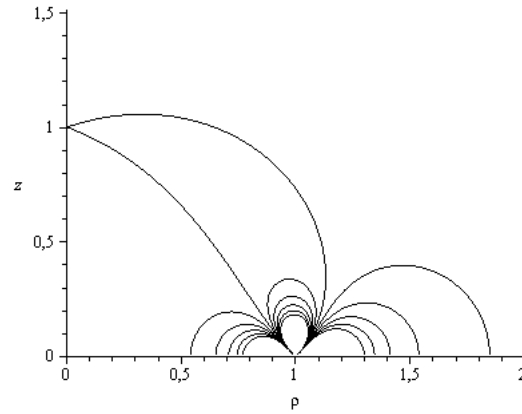
Zdroj složený z prstence a disku, které jsou tvořeny navzájem opačně nabitými nekonečnými hmotami, či napojení dvou prostoročasových listů, dává jistě vzniknout zajímavým vlastnostem příslušného prostoročasu. Sledoval jsem postup autorů [2], kteří analyzovali Bachův-Weylův prstenec. Snažil jsem se zjistit chování geodetik v blízkosti disku. Více o způsobu výpočtů se čtenář dozví v dodatku A, zde pouze uvedu hlavní výsledky.

Výsledky lze shrnout konstatováním, že se u Appellova prstence vyskytují znaky “směrové singularity”. Každá volná částice vypuštěná z klidu nakonec dosáhne prstence, ale některé směry pohybu k prstenci jsou ve Weylových souřadnicích preferované před ostatními. Žádná geodetika například nedosáhne prstence zevnitř. Všechny končí svou trajektorii přibližováním k prstenci ze směru osy  $z$ . Detailněji to ilustrují následující grafy.

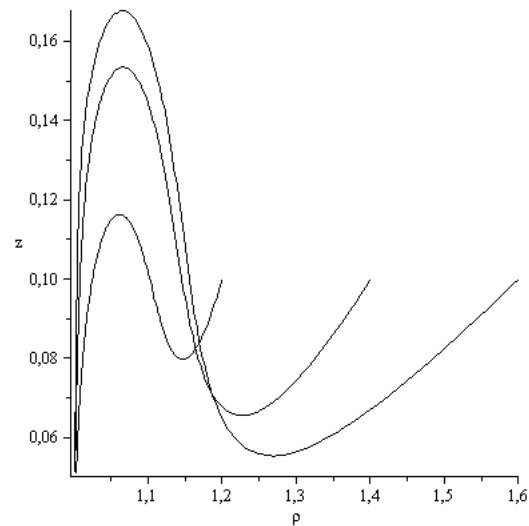
Vidíme (Obr. 2.4), že částice je přitahována v radiálním směru k prstenci, ale v jeho blízkosti pociťuje odpuzování ve směru osy  $z$ . Všechny geodetiky se nakonec přibližují k prstenci. Kvalitativně se všechny geodetiky v grafu chovají podobně.

Numerické výpočty naznačují, že částice prstence dosáhne v nekonečném vlastním čase, obdobně jako geodetiky u Bachova-Weylova prstence [2].

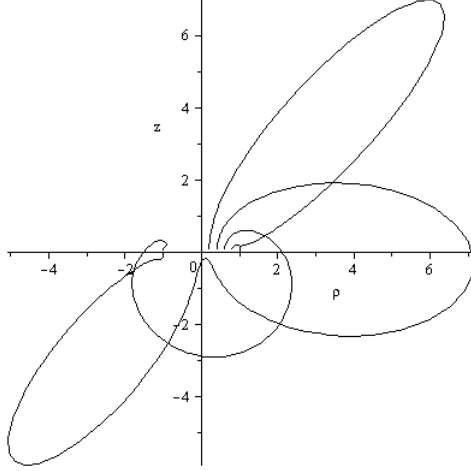
Průběh trajektorie se značně liší v závislosti na počáteční poloze. Částice vypuštěná blízko středu prstence vystřelí vysoko nad jeho rovinu, zatímco geodetiky startující blíže k prstenci se dostanou jen nízko nad jeho rovinu (viz Obr. 2.5 a



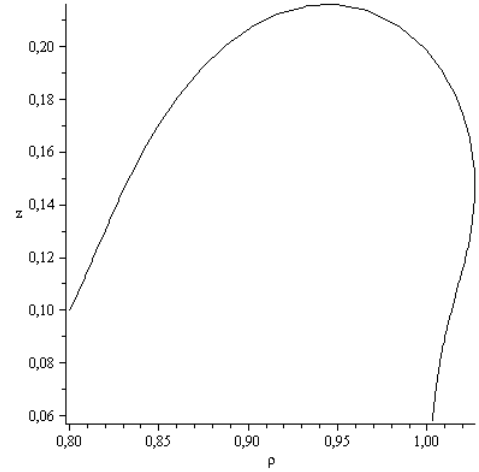
Obrázek 2.3: Graf ekvičar druhého Appellova potenciálu (2.5). Prstenec se nachází v  $\rho = M$ , škálování os je v násobcích  $M$ .



Obrázek 2.4: Pohyb testovací částice vypuštěné z klidu v různých bodech Appellova prostoročasu. Prstenec se nachází v  $\rho = M$ , škálování os je v násobcích  $M$ .



Obrázek 2.5: Pohyb testovací částice vypuštěné z klidu uvnitř Appellova prstence z místa se souřadnicemi  $[\rho, z] = [0.2, 0.1]$ ,  $[0.4, 0.1]$ ,  $[0.6, 0.1]$ ,  $[0.8, 0.1]$ . Prstenec se nachází v  $\rho = M$ , škálování os je v násobcích  $M$ .



Obrázek 2.6: Detail trajektorie geodetického pohybu částice v Appellově prostoročase pro počáteční polohu  $[\rho, z] = [0.8, 0.1]$ . Prstenec se nachází v  $\rho = M$ , škálování os je v násobcích  $M$ .

2.6). Trajektorie částice s počáteční polohou  $[\rho, z] = [0.8, 0.1]$  není na Obr. 2.5 příliš znatelná, Obr. 2.6 ji znázorňuje podrobněji.

Dosud byly zmíněny pouze geodetiky pro částice vypuštěné z klidu. Pokud udělíme částici malý nenulový moment hybnosti ( $\tilde{L} = 0.6$ ), postupně přejde na kruhový pohyb nad prstencem a opět se k němu přibližuje ze směru osy  $z$ , viz následující grafy (Obr. 2.7 a 2.8).

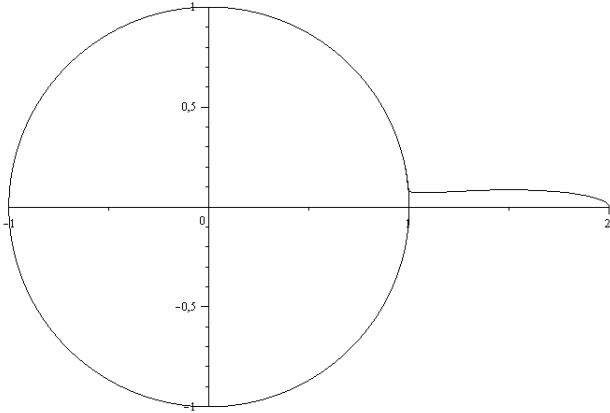
#### 2.1.4 Metoda efektivního potenciálu

Rychlou kvalitativní analýzu pohybu v gravitačním poli lze v Newtonově teorii provést metodou efektivního potenciálu. V našem případě lze použít funkci z [2], její odvození lze také nalézt v dodatku B

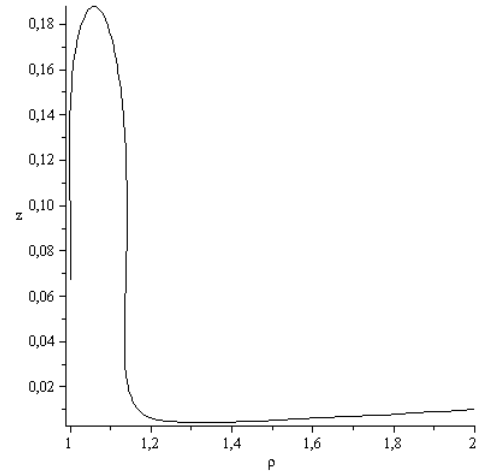
$$F(\rho, z) = 1 + \frac{e^{2\nu}}{\rho^2} \tilde{L}^2 - \frac{\tilde{E}^2}{e^{2\nu}}. \quad (2.6)$$

Pohyb je dovolen pouze v oblastech  $F(\rho, z) \leq 0$ .

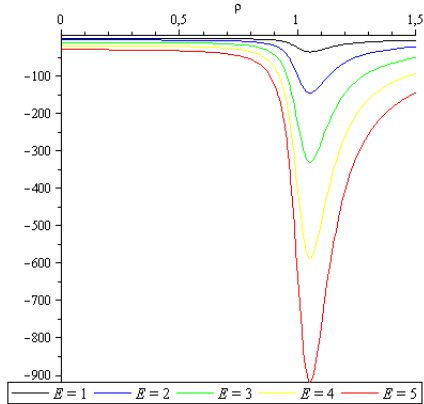
Částice s nulovým momentem hybnosti nemá žádné omezení na pohyb v blízkosti disku (Obr. 2.9 a 2.10), částice s nenulovým momentem hybnosti se nemůže dostat libovolně blízko k ose symetrie (Obr. 2.11 a 2.12).



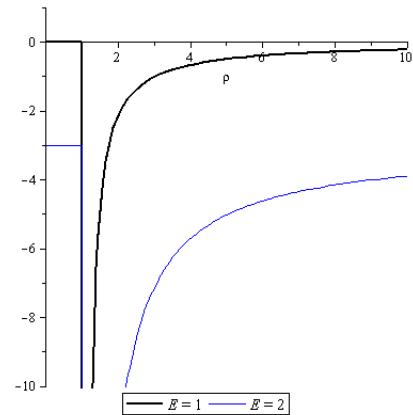
Obrázek 2.7: Pohyb testovací částice s momentem hybnosti  $\tilde{L} = 0.6$  v rovině  $\rho - \phi$  v Appellově prostoročasu. Počáteční poloha  $[\rho, z] = [2, 0.01]$ . Prstenec se nachází v  $\rho = M$ , škálování os je v násobcích  $M$ .



Obrázek 2.8: Pohyb testovací částice s momentem hybnosti  $\tilde{L} = 0.6$  v rovině  $\rho - z$  v Appellově prostoročasu. Prstenec se nachází v  $\rho = M$ , škálování os je v násobcích  $M$ .

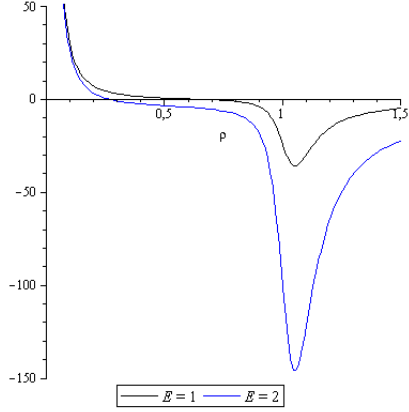


Obrázek 2.9: Efektivní potenciál (2.6) v Appellově prostoročasu pro  $\tilde{L} = 0$ ,  $z = 0.1M$  a různé hodnoty energie. Prstenec se nachází v  $\rho = M$ , škálování souřadnice je v násobcích  $M$ .

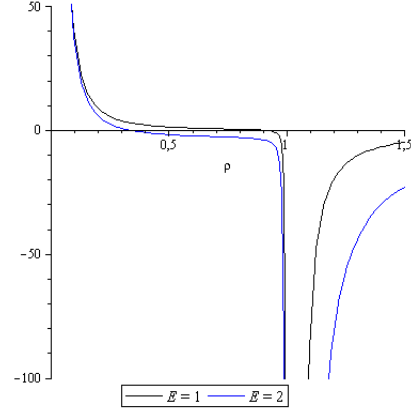


Obrázek 2.10: Efektivní potenciál (2.6) v Appellově prostoročasu pro  $\tilde{L} = 0$ ,  $z = 0$  a různé hodnoty energie. Prstenec se nachází v  $\rho = M$ , škálování souřadnice je v násobcích  $M$ .





Obrázek 2.11: Efektivní potenciál (2.6) v Appellově prostoročasu pro  $\tilde{L} = 0.6$ ,  $z = 0.1M$  a různé hodnoty energie. Prstenec se nachází v  $\rho = M$ , škálování souřadnice je v násobcích  $M$ .



Obrázek 2.12: Efektivní potenciál (2.6) v Appellově prostoročasu pro  $\tilde{L} = 0.6$ ,  $z = 0.01M$  a různé hodnoty energie. Prstenec se nachází v  $\rho = M$ , škálování souřadnice je v násobcích  $M$ .

### 2.1.5 Vlastní vzdálenosti

Dále jsem se zabýval počítáním vlastních délek některých geometrických útvarů v daném prostoročasu, abych ilustroval rozdíl mezi souřadnicovými a vlastními vzdálenostmi, a případně také mezi různými prstencovými řešeními.

Vlastní poloměr  $R$  a vlastní obvod  $O$  v závislosti na souřadnici  $\rho$  spočítáme jednoduše pomocí křivkových integrálů

$$R = \int_0^\rho \sqrt{g_{\rho\rho}(\rho, z=0)} d\rho = \int_0^\rho e^{\lambda-\nu} d\rho, \quad (2.7)$$

$$O = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi}(\rho, z=0)} d\phi = 2\pi\rho e^{-\nu}. \quad (2.8)$$

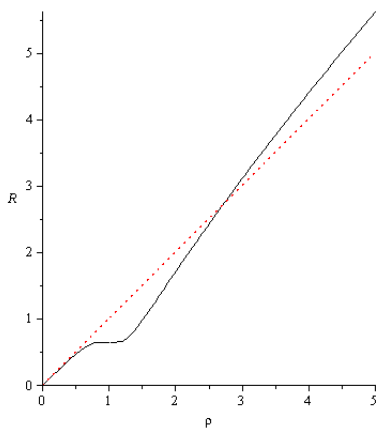
Zatímco vlastní poloměr prstence je konečný a v okolí prstence se jeho hodnota téměř nemění (dle Obr. 2.13), jeho vlastní obvod je nekonečný (Obr. 2.14).

Obdobný průběh vykazuje závislost obvodu na vlastním poloměru (viz Obr. 2.15). Ve vlastních vzdálenostech podél osy  $z$

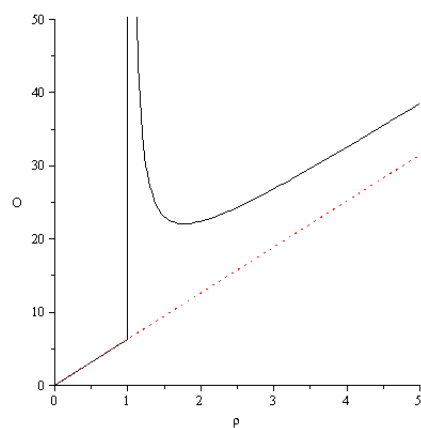
$$Z = \int_0^z \sqrt{g_{zz}(\rho=0, z)} dz \quad (2.9)$$

dochází k odchylce od klasických hodnot, ale od určité souřadnice se už příliš nezvětšuje (Obr. 2.16).

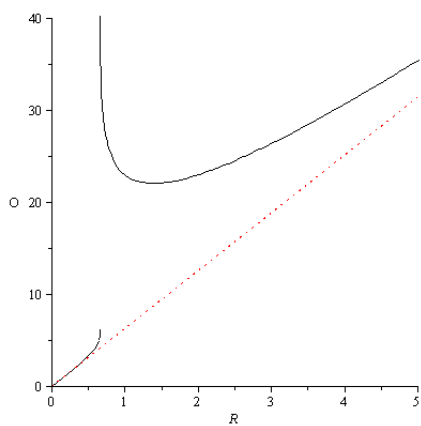
Průběh trajektorií geodetik svědčil o přítomnosti směrové singularity. Při počítání



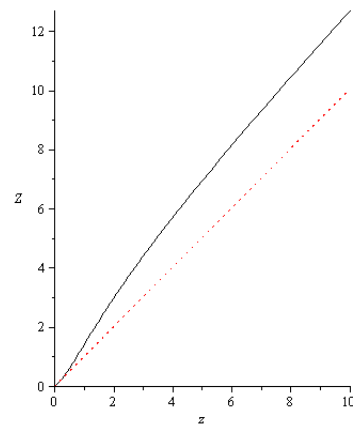
Obrázek 2.13: Závislost vlastního poloměru na radiální souřadnici  $\rho$  v rovině Appellova prstence, který je umístěn v  $\rho = M$ . Tečkovaný průběh odpovídá plochému prostoru.



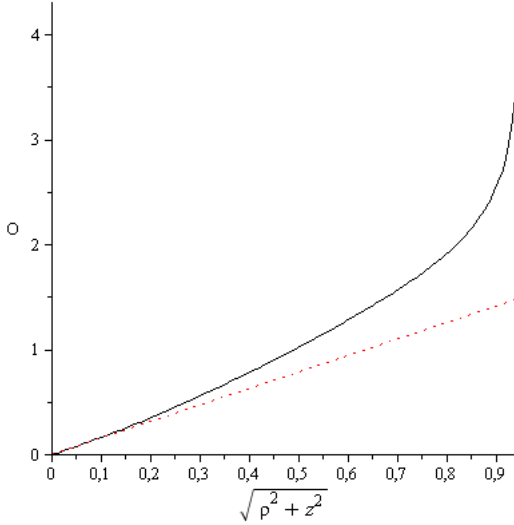
Obrázek 2.14: Závislost vlastního obvodu na radiální souřadnici  $\rho$  v rovině Appellova prstence, který je umístěn v  $\rho = M$ . Tečkovaný průběh odpovídá plochému prostoru.



Obrázek 2.15: Závislost vlastního obvodu na vlastním poloměru v rovině Appellova prstence, který je umístěn v  $\rho = M$ . Tečkovaný průběh odpovídá plochému prostoru.



Obrázek 2.16: Vlastní vzdálenost podél osy symetrie v závislosti na souřadnici  $z$  pro Appellovův prstenec umístěný v  $\rho = M$ . Tečkovaný průběh odpovídá plochému prostoru.



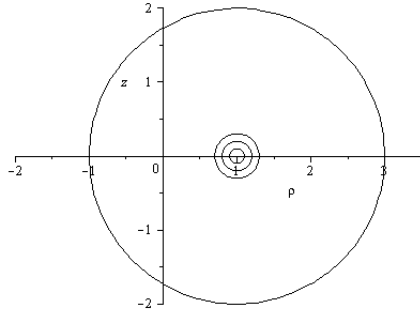
Obrázek 2.17: Obvod souřadnicové čtvrt-kružnice v rovině  $\rho - z$  v závislosti na jejím (souřadnicovém) poloměru  $\sqrt{\rho^2 + z^2}$  pro Appellův prstenec umístěný v  $\rho = M$ . Tečkovaný průběh odpovídá plochému prostoru.

vlastních vzdáleností jsme dosáhli prstence zevnitř a zjistili, že vlastní poloměr prstence je konečný. K prstenci se ovšem můžeme přiblížit i z jiných směrů. Vezměme například souřadnicovou čtvrt-kružnici v rovině  $\rho - z$  jejíž střed splývá se středem prstence. Obvod v závislosti na jejím (souřadnicovém) poloměru zobrazuje Obr. 2.17. Vzdálenost po čtvrt-kružnici k prstenci diverguje. I vlastní vzdálenosti tedy vykazují rozdílné vlastnosti v závislosti na směru přibližování k prstenci.

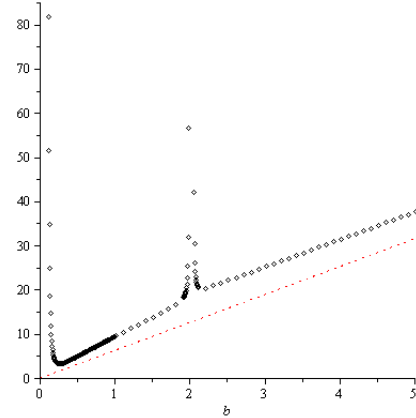
Vyšetřeme také chování souřadnicových kroužků okolo prstence (viz ilustrační Obr. 2.18). Konkrétně nás bude zajímat vlastní obvod kroužků v závislosti na jejich souřadnicovém poloměru  $b$

$$O = \int_{\text{kroužek}} \sqrt{g_{\rho\rho}(\rho, z)} \sqrt{(d\rho)^2 + (dz)^2} = \int_0^{2\pi} b \cdot \sqrt{g_{\rho\rho}(a + b \cos \theta, b \sin \theta)} d\theta. \quad (2.10)$$

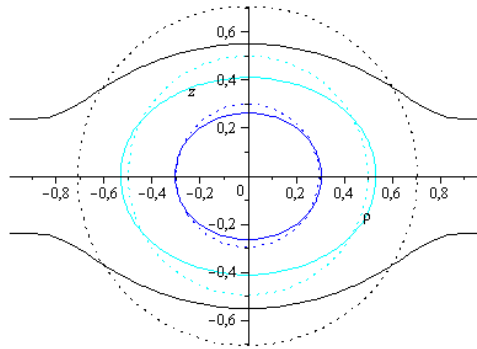
Výsledky jsou zachyceny na Obr. 2.19. Vlastní obvod kroužků diverguje s jejich stále těsnějším obepínáním prstence. Všimněme si i další divergence, která nastává, když kroužek protíná protilehlou stranu prstence (pro souřadnicový poloměr  $b = 2$ ). Asymptotika obvodů se příliš neliší od hodnot v plochem prostoru. Závislost vlastních obvodů těchto kroužků na jejich vlastním poloměru se liší pro různé směry, protože vlastní poloměr má odlišné hodnoty, když ho počítáme v různých směrech od prstence ke kroužku.



Obrázek 2.18: Několik souřadnicových kroužků okolo Appellova prstence v rovině  $\rho - z$ . Prstenec byl umístěn v  $\rho = M$ . Největší kroužek má poloměr  $b = 2M$ .



Obrázek 2.19: Graf závislosti vlastního obvodu souřadnicových kroužků okolo Appellova prstence na jejich souřadnicovém poloměru. Prstenec byl umístěn v  $\rho = M$ , pro souřadnicový obvod  $b = 2M$  dochází k divergenci vlastního obvodu, protože kroužek protíná prstenec na protilehlé straně (viz Obr. 2.18). Tečkovaný průběh odpovídá plochému prostoru.



Obrázek 2.20: Graf znázorňuje tři kružnice v rovině  $\rho - z$  s poloměry  $[0.3, 0.5, \sqrt{0.5}]$ . Plnou čarou jsou vyneseny body, jejichž vlastní vzdálenosti od středu prstence splňují rovnici kružnice. Tečkované jsou potom vyneseny souřadnicové kružnice o stejných poloměrech. Appellův prstenec byl umístěn v  $\rho = M$ , škálování os je v násobcích  $M$ .

Vzhled vlastních kružnic v Obr. 2.20 naplňuje očekávání. Pro malé poloměry (dále od prstence) se tvar kružnic jen lehce deformuje. U větších poloměřů jsou odchylky znatelnější. Zevnitř prstence roste vlastní vzdálenost pomalu (se souřadnicí  $\rho$ ) a rovnici kružnice splňují i body s vyšší souřadnicí  $\rho$ .<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Bohužel jsem nebyl schopen zobrazit celý průběh větší kružnice. Program Maple se ani po několika desítkách

## 2.2 Bachův-Weylův prstenec

### 2.2.1 Bachův-Weylův potenciál

Zdroj Bachova-Weylova potenciálu (2.11) tvoří (pouze) prstenec<sup>8</sup> umístěný v  $z=0$ ,  $\rho=a$  [2]. Potenciál je dán vzorcem [1]

$$\nu = -\frac{2M}{\pi\sqrt{(\rho+a)^2+z^2}}K(k), \quad (2.11)$$

kde  $M$  je hmotnost prstence,  $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2 \sin^2 t)^{-1/2} dt$  je úplný eliptický integrál prvního druhu a  $k = \sqrt{4a\rho/[(\rho+a)^2+z^2]}$ .

Druhý Bachův-Weylův potenciál ve Weylových souřadnicích nalezneme opět v [1]

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{M^2 k^4}{4\pi^2 a^2 \rho} [(\rho+a)(-K^2 + 4(1-k^2)K\dot{K} + 4k^2(1-k^2)\dot{K}^2) - \\ &\quad - 4\rho k^2(1-k^2)(3-k^2)\dot{K}^2] = \\ &= \frac{M^2 k^2}{4\pi^2 a^2 \rho(1-k^2)} [(\rho+a)(E^2 - (1-k^2)K^2) - \rho(3-k^2)(E - (1-k^2)K)^2], \end{aligned} \quad (2.12)$$

s označením  $\dot{K} = dK/d(k^2)$  a kde  $E = E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt$  je úplný eliptický integrál druhého druhu.

O hladkosti Bachova-Weylova potenciálu při přechodu přes rovinu  $z = 0$ <sup>9</sup> (a tedy neexistenci diskového rozložení hmoty) se můžeme přesvědčit na Obr. 2.21. Prstencovou strukturu zdroje lze snadno odhalit i z grafu ekvičar potenciálu (2.11) na Obr. 2.23.

### 2.2.2 Vlastnosti geodetik

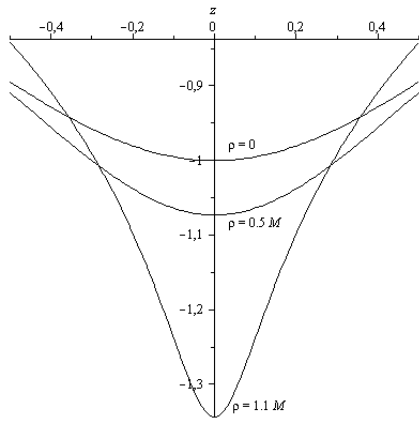
Studiem pohybu v poli Bachova-Weylova prstence se podrobně zabývá článek [2]. Autoři porovnávají pohyb v rámci Newtonovy teorie s geodetickým pohybem v obecné relativitě. Výsledky obecně relativistických pohybů autoři shrnují závěry, že u Bachova-Weylova prstence existují privilegované směry přibližování geodetik k prstenci a navíc geodetiky dosáhnou prstence v nekonečném vlastním čase. Na rozdíl od Appellova prstence je privilegovaným směrem vnitřek Bachova-Weylova prstence. Z toho vyvozují, že vnitřní strana prstence má složitější strukturu.

Geodetickým pohybem se zabývá i článek [7]. Také v něm se lze přesvědčit o přítomnosti směrové singularity. Navíc jsou v něm zmíněny vlastnosti vlastních vzdáleností.

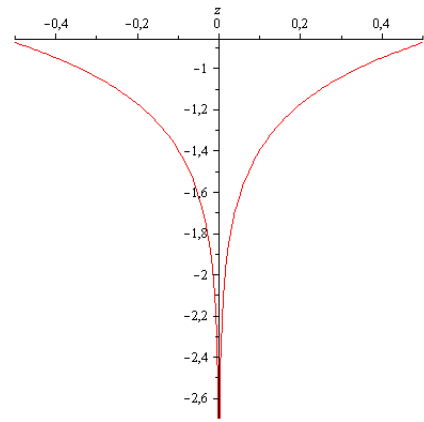
minut výpočtů nedobral výsledku pro body blízko prstence.

<sup>8</sup>V obecné relativitě není struktura prstence jednoduchá, [5] uvádí přítomnost směrové singularity.

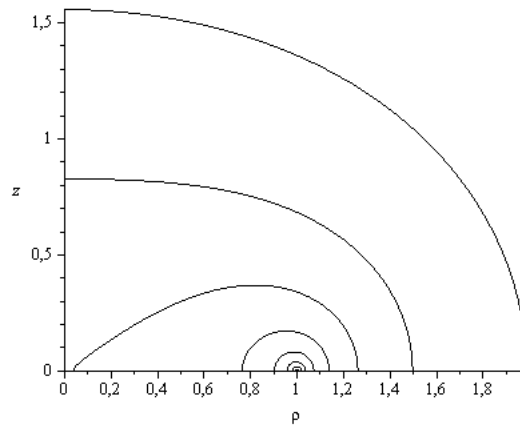
<sup>9</sup>Se zjevnou výjimkou v místě  $\rho = a$ , viz též Obr. 2.22.



Obrázek 2.21: Graf Bachova-Weylova potenciálu (2.11) v různých řezech  $z, \rho$  pro prstenec umístěný v  $\rho = M$ .



Obrázek 2.22: Průběh Bachova-Weylova potenciálu (2.11) v řezu  $z, \rho = M$  pro prstenec umístěný v  $\rho = M$ .



Obrázek 2.23: Graf ekvičar Bachova-Weylova potenciálu (2.11) pro prstenec umístěný v  $\rho = M$ , škálování os je v násobcích  $M$ .

### 2.2.3 Limitní chování vlastních vzdáleností

Nepodařilo se mi implementovat potenciál (2.12) do Maplu tak, aby splňoval Einsteinovy rovnice. První potenciál (2.11) řeší Laplaceovu rovnici (1.2), proto jsem se rozhodl, že pro kontrolu získám druhý potenciál přímou integrací dle vztahu (1.3). Už přímá integrace je výpočetně náročná a počítání vlastních délek znamená integraci funkce obou potenciálů (viz např. (2.7)), jedná se o úlohu ještě náročnější.

Nejdůležitější vlastnost vlastních délek, zda jsou konečné nebo nekonečné, lze zjistit rychleji. Konkrétně se budeme zabývat počítáním limitních vlastností vlastních vzdáleností, které jsou dány integrály typu

$$\int \exp(\lambda - \nu) dl. \quad (2.13)$$

Stačí sledovat chování integrandu<sup>10</sup>

$$\exp(\lambda - \nu). \quad (2.14)$$

Exponenciála je monotonní funkcí svého argumentu, k určení limitního chování vlastní délky tak nakonec stačí určit limitní vlastnosti rozdílu

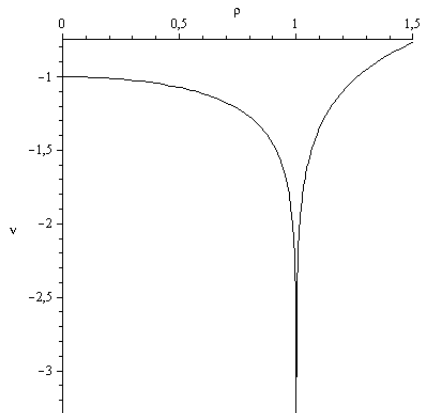
$$\lambda - \nu. \quad (2.15)$$

Pokud bude rozdíl (2.15) divergovat k  $+\infty$ , příslušná vlastní délka bude nekonečná, pokud bude divergovat k  $-\infty$ , vlastní délka bude konečná (integrand jde limitně k nule).

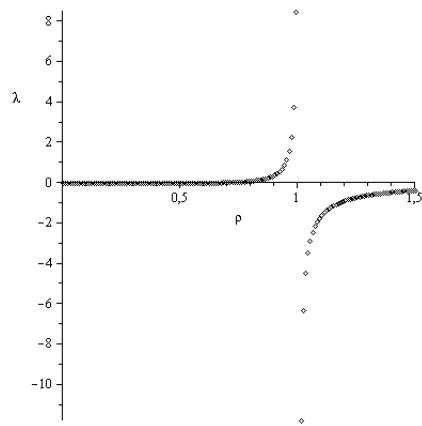
### 2.2.4 Numerické výsledky

Sledujme nejdříve vlastnosti potenciálů v rovině prstence dle Obr. 2.24 a 2.25. Zatímco první potenciál diverguje k  $-\infty$  z obou stran prstence, druhý potenciál vykazuje směrovou závislost. Zevnitř prstence diverguje k  $+\infty$ , z vnějšku pak k  $-\infty$ . Rozhodující pro limitní chování vlastní vzdálenosti (v tomto případě poloměru  $R$ ) je rozdíl (2.15), který je zachycen na Obr. 2.26. Vidíme, že vlastní poloměr prstence je nekonečný (přibližování z vnitřní strany), z vnější strany prstence je vlastní vzdálenost konečná (ve shodě s [2]).

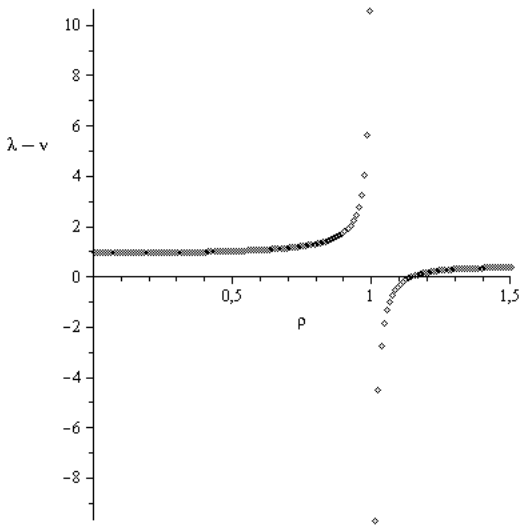
<sup>10</sup>Divergence integrandu nutně neznamená divergenci integrálu, viz např.  $\int_0^1 1/\sqrt{x} dx = 2$ . Integrand musí divergovat alespoň jako  $\sim 1/x$ . V případě divergence (2.15) integrand diverguje exponenciálně, což k divergenci integrálu bohatě postačuje. Podobně konečnost integrandu nezaručuje konečnost integrálu, pokud integrujeme přes neomezený interval, např.  $\int_1^\infty 1/x dx = \infty$ .



Obrázek 2.24: Graf Bachova-Weylova potenciálu (2.11) v rovině  $z = 0$ . Prsteneček se nachází v  $\rho = M$ , škálování souřadnice je v násobcích  $M$ .

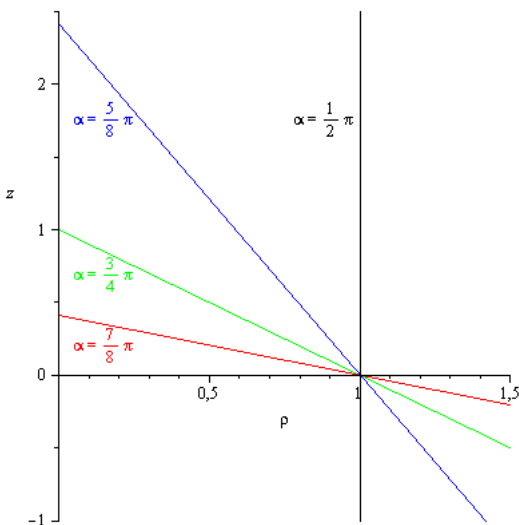


Obrázek 2.25: Druhý Bachův-Weylův potenciál v rovině  $z = 0$ , krok mezi sousedními hodnotami  $0.01M$ . Prsteneček se nachází v  $\rho = M$ , škálování souřadnice je v násobcích  $M$ .



Obrázek 2.26: Rozdíl Bachových-Weylových potenciálů (2.15) v rovině  $z = 0$ . Prsteneček se nachází v  $\rho = M$ , škálování souřadnice je v násobcích  $M$ .





Obrázek 2.27: Volba úseček, u kterých zjišťují vlastní délky.

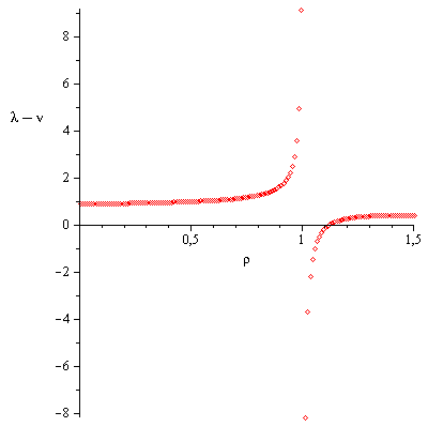
Počítat vlastní délky lze pro nepřeberné množství křivek. Nejjednodušším případem jsou souřadnicové přímky a úsečky (vlastní poloměr je speciální případ). Zvolil jsem několik přímek v rovině  $\rho - z$  procházejících prstencem a parametrizovaných úhlem, který svírají s osou  $\rho$

$$z = (\rho - a) \tan \alpha. \quad (2.16)$$

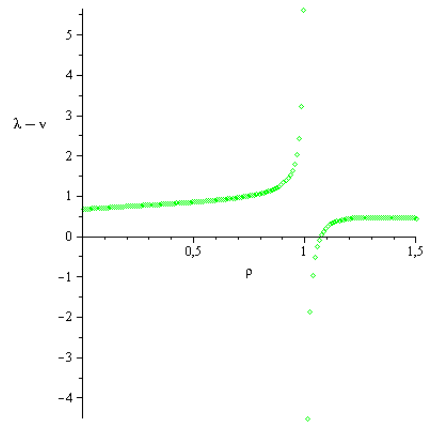
Konkrétní hodnoty úhlu  $\alpha$  jsou vyneseny v Obr. 2.27 společně s příslušnými přímkami. Přímkami dané úhly  $\alpha = [5/8\pi, 3/4\pi, 7/8\pi]$  vykazují podobné vlastnosti. Zevnitř prstence je jejich vlastní délka nekonečná, zvnějšku konečná (viz Obr. 2.28, 2.29 a 2.30). Vlastní délka úsečky kolmé na rovinu prstence (Obr. 2.31) je konečná.

Za poslední křivku vezmeme souřadnicovou čtvrt-kružnici v rovině  $\rho - z$  s poloměrem  $1M$  parametrizovanou úhlem  $\theta$  odečítaným od osy  $z$ . Očekáváme, že v blízkosti prstence ( $\theta = \pi/2$ ) se bude chovat obdobně jako úsečka kolmá na rovinu prstence (tj. Obr. 2.31). Graf na Obr. 2.32 to potvrzuje.

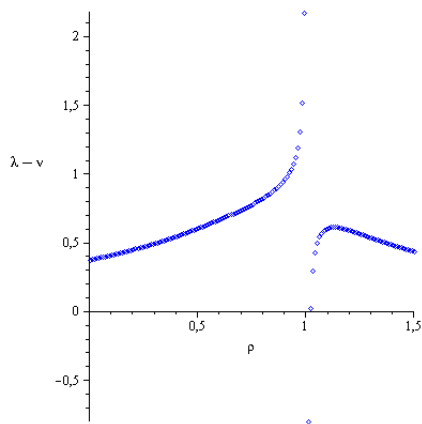
Podobně jako u Appellova prostoročasu jsme se přesvědčili o přítomnosti “směrové singularity”: vlastní vzdálenost vykazuje rozdílné chování v závislosti na směru přibližování k prstenci.



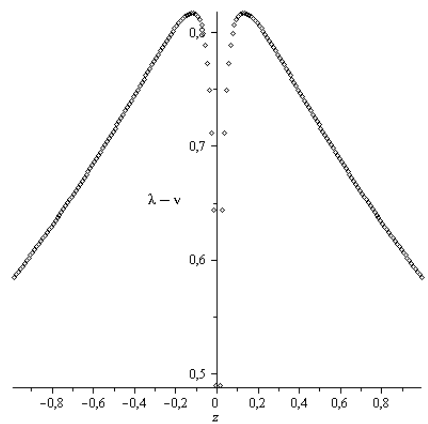
Obrázek 2.28: Rozdíl potenciálů (2.15) pro přímkou směřující pod úhlem  $\alpha = \frac{7}{8}\pi$ . Prsteneček se nachází v  $\rho = M$ , škálování souřadnice je v násobcích  $M$ .



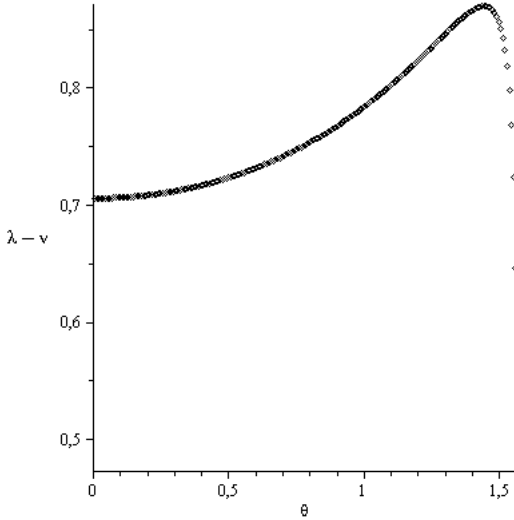
Obrázek 2.29: Rozdíl potenciálů (2.15) pro přímkou směřující pod úhlem  $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ . Prsteneček se nachází v  $\rho = M$ , škálování souřadnice je v násobcích  $M$ .



Obrázek 2.30: Rozdíl potenciálů (2.15) pro přímkou směřující pod úhlem  $\alpha = \frac{5}{8}\pi$ . Prsteneček se nachází v  $\rho = M$ , škálování souřadnice je v násobcích  $M$ .



Obrázek 2.31: Rozdíl potenciálů (2.15) pro přímkou směřující pod úhlem  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ . Prsteneček se nachází v  $\rho = M$ , škálování souřadnice je v násobcích  $M$ .



Obrázek 2.32: Rozdíl Bachových-Weylových potenciálů (2.15) pro souřadnicovou čtvrt-kružnici v rovině  $\rho - z$  s poloměrem  $1M$  parametrizovanou úhlem  $\theta$ , který je odečítán od osy  $z$ . Prstenec se nachází v  $\rho = M$ .

## Závěr

Na dvou statických axiálně symetrických prostoročasech jsme ilustrovali, že vlastnosti zdroje gravitačního pole nejsou v obecné relativitě jednoduché.

Zkoumáním geodetik a vlastních vzdáleností v poli Appellova prstence jsme se přesvědčili o přítomnosti směrové singularity ve Weylových souřadnicích. Geodetiky dosahují prstence přibližováním ve směru osy  $z$ . Vlastní délka souřadnicové čtvrt-kružnice, jejíž střed splývá se středem prstence a která zároveň protíná prstenec, tj. křivka přibližující se k prstenci ve směru osy  $z$ , je nekonečná. Vlastní poloměr prstence, což je křivka přibližující se k prstenci zevnitř, je konečný.

Směrovou singularitu jsme odhalili i v poli Bachova-Weylova prstence. Z článku [2] víme, že geodetiky dosahují prstence zevnitř. Vlastní vzdálenosti zevnitř prstence (např. vlastní poloměr) jsou nekonečné, viz kapitola 2.2. Zvenku prstence a v kolmém směru na prstenec jsou vlastní vzdálenosti konečné.

Lze tedy shrnout, že (v souladu s [2]) testovací částice je přitahována k prstenci ve směru s větší vlastní vzdáleností od prstence.

Členitost vesmíru kolem nás zřejmě nikdy nepostihneme modelem, který by bral v potaz všechny fyzikální jevy a proměnné. I díky Einsteinově obecné relativitě jsme ale schopni objevovat jednotlivé střípky mozaiky a těšit se z jejich krásy.

## Seznam použité literatury

- [1] O. Semerák, T. Zellerin, M. Žáček. The structure of superposed Weyl fields. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **308** (1999) 691-704.
- [2] L. A. D'Afonseca, P. S. Letelier, S. R. Oliveira. Geodesics around Weyl-Bach's ring solution. *Class. Quantum Grav.* **22** (2005) 3803-3814.
- [3] R. J. Gleiser, J. A. Pullin. Appell rings in general relativity. *Class. Quantum Grav.* **6** (1989) 977-985.
- [4] F. I. Cooperstock, G. J. Junevicius. Singularities in Weyl Gravitational Fields. *Int. J. Theor. Phys.* **9** (1974) 59-68.
- [5] C. Hoenselaers. The Weyl solution for a ring in a homogeneous field. *Class. Quantum Grav.* **12** (1995) 141-148.
- [6] D. M. Zipoy. Topology of Some Spheroidal Metrics. *J. Math. Phys.* **7** (1966) 1137-1143.
- [7] O. Semerák, M. Žáček, T. Zellerin. Test-particle motion in superposed Weyl fields. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **308** (1999) 705-706.

## A Geodetiky ve Weylových prostoročasech

Rovnice geodetiky má při afinní parametrizaci tvar

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\kappa\sigma} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \quad (\text{A.1})$$

kde  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$  jsou Christoffelovy symboly druhého druhu,  $x^\mu$  souřadnice a  $\tau$  v časupodobném případě vlastní čas. Jedná se o 4 obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu.

*Tvrzení:* Ve statických axiálně symetrických prostoročasech existují dva integrály geodetického pohybu

$$\tilde{E} = e^{2\nu} \dot{t}, \quad (\text{A.2})$$

$$\tilde{L} = \rho^2 e^{-2\nu} \dot{\phi}. \quad (\text{A.3})$$

Tečka nad symbolem značí derivaci podle vlastního času  $\tau$  a  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{L}$  jsou vztaženy na jednotku klidové hmotnosti.

*Důkaz:* Upravme rovnici geodetiky pro kovektor  $x_\mu$  s využitím relace mezi Christoffelovými symboly druhého druhu a metrikou

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} &= \Gamma_{\kappa\mu\sigma} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \frac{1}{2} (g_{\kappa\mu,\sigma} + g_{\sigma\kappa,\mu} - g_{\mu\sigma,\kappa}) \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \\ &= \frac{1}{2} (g_{\mu\kappa,\sigma} - g_{\mu\sigma,\kappa}) \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + \frac{1}{2} g_{\sigma\kappa,\mu} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Člen  $\frac{1}{2} (g_{\mu\kappa,\sigma} - g_{\mu\sigma,\kappa}) \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}$  je rovný nule, protože spolu újíme symetrický a antisymetrický výraz. Tedy

$$\frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\sigma\kappa,\mu} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}. \quad (\text{A.5})$$

Odtud ihned vidíme, že  $u_\mu$  je konstantní, pokud metrika nezávisí na souřadnici  $\mu$ . Souřadnice  $\mu$  se potom nazývá cyklická. Weylovy prostoročasy mají dvě cyklické souřadnice:  $t$  a  $\phi$ . Integrály pohybu nyní získáme jednoduchými úpravami

$$\text{konst.} = -mu_t = -mg_{t\sigma}u^\sigma = -mg_{tt}u^t = me^{2\nu}\frac{dt}{d\tau} \equiv E, \quad (\text{A.6})$$

$$\text{konst.} = mu_\phi = mg_{\phi\sigma}u^\sigma = mg_{\phi\phi}u^\phi = m\rho^2e^{-2\nu}\frac{dt}{d\tau} \equiv L, \quad (\text{A.7})$$

což mělo být dokázáno.

Zbylé dvě rovnice geodetiky nabývají tvaru (se značením ve shodě s [2])

$$\ddot{\rho} = -(\dot{\rho}^2 - \dot{z}^2)(\lambda_{,\rho} - \nu_{,\rho}) - 2\dot{\rho}\dot{z}(\lambda_{,z} - \nu_{,z}) - P, \quad (\text{A.8})$$

$$\ddot{z} = (\dot{\rho}^2 - \dot{z}^2)(\lambda_{,z} - \nu_{,z}) - 2\dot{\rho}\dot{z}(\lambda_{,\rho} - \nu_{,\rho}) - \nu_{,z}Q, \quad (\text{A.9})$$

kde

$$P = e^{-2\lambda} \left[ \nu_{,\rho}\tilde{E}^2 + \left( \nu_{,\rho} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{e^{4\nu}}{\rho^2}\tilde{L}^2 \right], \quad (\text{A.10})$$

$$Q = e^{-2\lambda} \left[ \tilde{E}^2 + \frac{e^{4\nu}}{\rho^2}\tilde{L}^2 \right]. \quad (\text{A.11})$$

Výše uvedené rovnice jsem zadal do Maplu a nechal vykreslit řešení. Pro kontrolu jsem geodetiky spočítal i z Hamiltonových rovnic (opět v Maplu). Výsledky byly totožné.

## B Metoda efektivního potenciálu ve Weylových prostoročasech

Cílem tohoto dodatku je odvodit funkci analogickou Newtonovu efektivnímu potenciálu. Omezíme se na speciální případ Weylových prostoročasů, jejich metrika je dána ve tvaru (1.1).

Vyjdeme z požadavku na normalizaci čtyřrychlosti

$$-1 = g_{\kappa\sigma} u^\kappa u^\sigma. \quad (\text{B.1})$$

Při úpravách využijeme některé relace z předchozího dodatku (viz (A.6) a (A.7)):  $u^t = -u_t/g_{tt} = \tilde{E}/g_{tt}$ ,  $u^\phi = u_\phi/g_{\phi\phi} = \tilde{L}/g_{\phi\phi}$ , a dále použijeme speciální vlastnost metriky (1.1):  $g_{\rho\rho} = g_{zz}$ . Rozepíšme tedy (B.1)

$$\begin{aligned} -1 &= g_{\kappa\sigma} u^\kappa u^\sigma = g_{tt} (u^t)^2 + g_{\phi\phi} (u^\phi)^2 + g_{\rho\rho} (u^\rho)^2 + g_{zz} (u^z)^2 = \\ &= \frac{(u_t)^2}{g_{tt}} + \frac{(u_\phi)^2}{g_{\phi\phi}} + g_{\rho\rho} [(u^\rho)^2 + (u^z)^2] = \frac{\tilde{E}^2}{g_{tt}} + \frac{\tilde{L}^2}{g_{\phi\phi}} + g_{\rho\rho} [(u^\rho)^2 + (u^z)^2] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Nyní rovnici (B.2) přeuspořádáme a rozepíšeme metrické koeficienty

$$-e^{2(\lambda-\nu)} (\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) = 1 - \frac{\tilde{E}^2}{e^{2\nu}} + \frac{e^{2\nu}}{\rho^2} \tilde{L}^2 \equiv F(\rho, z). \quad (\text{B.3})$$

Exponenciála je nezáporná funkce, stejně tak i kvadráty rychlostí. Částice se tedy může nacházet pouze v oblasti  $F(\rho, z) \leq 0$ .