Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petr Bulušek

Analýza zobecněného Stokesova systému s implicitně zadaným Cauchyho tenzorem napětí

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Miroslav Bulíček, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2011

Rád bych velmi poděkoval vedoucímu mojí bakalářské práce, panu Bulíčkovi, za jeho trpělivost. Vždy si na mě našel dostatek času a pomohl mi s matematickými obtížemi, na které jsem narážel.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 27.5.2011 Petr Bulušek

Název práce: Analýza zobecněného Stokesova systému s implicitně zadaným Cauchyho tenzorem napětí

Autor: Petr Bulušek

Katedra: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Miroslav Bulíček, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: Cílem této práce bylo provést existenční analýzu soustavy parciálních diferenciálních rovnic popisující zjednodušené ustálené proudění nestlačitelné tekutiny s implicitně zadaným Cauchyho tenzorem napětí. V kapitole 2 lze nalézt problematiku zobecňování konstitutivních vztahů pro Cauchyho tenzor napětí. Bylo potřeba seznámit se s matematickými prostředky, pomocí kterých se dá dokázat existence slabého řešení studovaných soustav rovnic. V kapitole 3 lze nalézt důkaz existence pro případ, kdy je tenzor napětí zadán jako spojitá funkce tenzoru rychlosti deformace splňující určité omezující podmínky. V kapitole 4 je podán podrobný důkaz pro implicitní vztah mezi oběma veličinami vedoucí na tzv. maximální monotónní r-graf. Zároveň jsou oba případy ilustrovány na konkrétních modelech.

Klíčová slova: implicitní vztah, tenzor napětí, maximální monotónní graf, slabé řešení, existence a jednoznačnost.

Title: Analysis of generalized Stokes system with implicitly given Cauchy stress tensor

Author: Petr Bulušek

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: RNDr. Miroslav Bulíček, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: The goal of the thesis was a qualitative analysis of system of partial differential equations describing simplified steady incompressible fluid flow with implicitly given Cauchy stress tensor. In chapter 2 one can find issues regarding generalization of constitutive relations for the Cauchy stress tensor. It was necesarry to get familiar with mathematical tools used for proving the existence of weak solutions of such studied equations. In chapter 3 we study stress tensor given as a continuous function of velocity gradient satisfying some restrictive conditions and prove the existence of weak solution. In chapter 4 detailed proof is presented for implicitly given stress tensor leading to the so called maximal monotone r-graph. Both cases are ilustrated on concrete models.

Keywords: implicit relation, stress tensor, maximal monoton graph, weak solution, existence and uniqueness.

Obsah

Úvod **2**

1 Prostory funkcí, značení, konvence a pomocná tvrzení **3**

2 Konstitutivní vztahy pro Cauchyho tenzor napětí. **5**
2.1 Newtonovské tekutiny 5
2.2 Nelineární rheologické vztahy 5

3 Existence řešení pro explicitní rheologický vztah **8**
3.1 Mocninný model a Ladyzhenské model 8

4 Existence řešení pro implicitní rheologický vztah **16**
4.1 Herschel-Bulkleyho model 16

Závěr **27**

Seznam použité literatury **28**

Úvod

V této práci se zabýváme existenční analýzou soustavy parciálních diferenciálních rovnic, která popisuje zjednodušený model ustáleného isotermálního proudění homogenní nestlačitelné tekutiny v omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (přičemž pro fyzikální aplikace nás zajímají zejména dimenze $d = 2, 3$). Pohyb takové tekutiny je popsán následující soustavou rovnic

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{v } \Omega, \tag{1}$$

$$-\operatorname{div} \mathbf{T} = \boldsymbol{f} \qquad \text{v } \Omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \qquad \text{v } \Omega, \tag{3}$$

ve které pro zjednodušení zápisu nepíšeme proměnnou $x \in \Omega$.

V systému (1)–(3) $\boldsymbol{v} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ značí rychlost tekutiny, $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ je vektor hustoty vnějších sil a $\mathbf{T} : \Omega \to \mathbb{R}^{d \times d}$ značí Cauchyho tenzor napětí.

První rovnice popisuje podmínku nestlačitelnosti, druhá rovnice popisuje redukovanou bilanci hybnosti (zde redukovanou znamená, že jsme zanedbali časovou derivaci hybnosti a tzv. konvektivní člen, který má tvar $\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v})$). Třetí rovnice je ekvivalentní bilanci momentu hybnosti pro izotropní materiály (izotropní materiál je takový materiál, který má ve všech směrech stejné vlastnosti).

I přesto, že uvažujeme zjednodušený model proudění, popsaný zjednodušeným systémem rovnic, výsledky popsané v této práci jsou netriviální a mohou nalézt široké uplatnění. Za prvé, při studiu komplikovaných systémů, se jako vychozí bod často (ne-li vždy) bere v úvahu analýza značně zjednodušeného modelu, který je pak postupně modifikován tak, aby popisoval původní problém v plné obecnosti. Za druhé pak, v mnoha inženýrských aplikacích je i zjednodušený model často velmi relevantní, neboť při mnoha fyzikálních procesech lze často i poměrně komplikovaný materiál aproximovat nestlačitelnou tekutinou (např. ledovec, polymery, krev, atd.). Zanedbání konvektivního členu $\operatorname{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v})$ lze také často ospravedlnit, protože při mnoha procesech jde o velmi pomalé proudění. Když nakonec vše zredukujeme na proudění ustálené, můžeme zanedbat i časovou derivaci, jak v této práci též činíme. I takto redukovaný systém rovnic má tedy z pohledu aplikací významnou vypovídající hodnotu.

Systém (1)–(3) je nutno doplnit o okrajové podmínky a pro jednoduchost v této práci uvažujeme pouze homogenní Dirichletovy podmínky pro rychlost $\boldsymbol{v}$, tedy $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ na $\partial\Omega$. Navíc systém (1)–(3) je neúplný (počet neznámých je vyšší než počet rovnic), a je nutno jej doplnit o příslušné "rheologické" rovnice pro Cauchyho tenzor napětí. Hlavním cílem této práce je identifikovat co nejširší třídu modelů (zkoumat co nejobecnější rheologické zákony pro Cauchyho tenzor napětí), pro které jsme schopni dokázat existenci *slabého* řešení systému (1)–(3).

1. Prostory funkcí, značení, konvence a pomocná tvrzení

V této sekci zavedeme konvence ve značení a zformulujeme bez důkazu potřebné vlastnosti prostorů funkcí, jejichž důkazy čtenář může nalézt např. ve skriptech [11] nebo v knize [7]. Zformulujeme též bez důkazu potřebná tvrzení s odkazem na literaturu, ve které se dají důkazy těchto tvrzení najít.

V textu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ bude vždy značit omezenou otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^d$ s Lipschitzovskou hranicí. Dimenze bude vždy značena d a uvažujeme, že $d \geq 2$. Prostor čtvercových symetrických matic dimenze d^2 je značen $\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$.

Pro jednoduchost a pro snadnou orientaci budeme skalární funkce značit malými písmeny, tedy např. $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$, vektorové funkce malými tučnými písmeny, tedy např. $\boldsymbol{v} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ a tenzorové funkce velkými tučnými tiskacími písmeny, tedy např. $\mathbf{T} : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$. Skalární součin v $\mathbb{R}^d$ je značen $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^d v_i w_i$, jsou-li $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^d$. Tenzorový skalární součin pak $\mathbf{S} : \mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^d S_{ij} T_{ij}$, jsou-li $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Výrazem $|\cdot|$ budeme značit Eukleidovskou normu jak pro vektory tak i pro tenzory, t.j. $|\boldsymbol{v}|^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$ a $|\mathbf{T}|^2 = \mathbf{T} : \mathbf{T}$.

Budeme používat standardní značení pro Lebesgueovy ($L^r(\Omega)$) a Sobolevovy ($W^{1,r}(\Omega)$) prostory. Pro jednoduchost zavedeme značení pro vektorové a tenzorové funkce a označíme $W^{1,r}(\Omega)^d := W^{1,r}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ a podobně je také chápán prostor $W^{1,r}(\Omega)^{d\times d}$. Pro úplnost dodejme, že $W^{1,r}(\Omega; \mathbb{R}^d) = \{\boldsymbol{v} : \Omega \to \mathbb{R}^d; v_i \in W^{1,r}(\Omega)\ \forall i = 1, \dots, d\}$. Sobolevovy prostory s nulovou stopou (operátor stopy je dobře definován neboť uvažujeme oblasti s Lipschitzovskou hranicí) budeme značit s indexem 0 tedy $W^{1,r}_0(\Omega) := \{v \in W^{1,r}(\Omega); v = 0 \text{ na } \partial\Omega\}$ (viz skripta [11], ve kterých lze operátor stop a potřebné věty nalézt). Zavedeme také značení pro prostor funkcí s nulovou divergencí

$$W^{1,r}_{0,\mathrm{div}} := \left\{\boldsymbol{v} \in W^{1,r}_0(\Omega)^d; \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \text{ v } \Omega\right\}, \text{ pro } r \in (1, \infty).$$

Protože se jedná o uzavřený podprostor prostoru $W^{1,r}_0(\Omega)^d$, který je Banachův pro $r \in [1, \infty]$, separabilní pro $r \in [1, \infty)$ a reflexivní pro $r \in (1, \infty)$, bude mít tyto vlastnosti i prostor $W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$. Výraz $\mathbf{D}(\boldsymbol{v}) := \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T\right)$ bude značit symetrický gradient vektorového pole $\boldsymbol{v}$.

Norma v Lebesgueových a Sobolevových prostorech je zavedena opět standardně (nerozlišujeme skalární, vektorové a tenzorové funkce) a je značena

$\|\cdot\|_r$ … L^r norma,
$\|\cdot\|_{1,r}$ … norma ve $W^{1,r}$.

V práci budeme používat následující věty:

Věta 1 (Kornova nerovnost)**.** *Nechť* $r \in (1, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *omezená otevřená s Lipschitzovskou hranicí. Pak existuje kladná konstanta* $K_r(\Omega)$ *taková, že pro všechny funkce* $\boldsymbol{v} \in W_0^{1,r}(\Omega)^d$ *platí, že*

$$K_r \|\boldsymbol{v}\|_{1,r} \leq \|\mathbf{D}(\boldsymbol{v})\|_r.$$

Důkaz viz např. [9], Věta 1.10, str. 196-198.

Věta 2 (Eberlein-Šmuljanova charakteristika reflexivity)**.** *Buď* X *reflexivní Banachův prostor a buď* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *omezená posloupnost v* X*, t.j.* $\|x_n\|_X \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$*. Pak existuje vybraná podposloupnost* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *z* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*, která je slabě konvergentní v* X*, t.j.* $\exists x \in X$ *tak, že* $f(x_{n_k}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \forall f \in X'$.

Viz např. [8], věta 16.14 na str. 144. Věta ve skutečnosti říká víc, a sice, že prostor je reflexivní, právě tehdy když z každé omezené posloupnosti můžeme vybrat slabě konvergentní podposloupnost. My ale budeme potřebovat jen tuto jednu implikaci. V souvislosti s touto větou dodejme, že se často používá konvence označení vybrané podposloupnosti stejným indexem jako posloupnosti původní. My tak budeme v důkazech činit též.

Věta 3 (Důsledek Brouwerovy věty o pevném bodě)**.** *Mějme spojité zobrazení* $\boldsymbol{p} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$*. Jestliže pro nějaké* $r > 0$ *platí:*

$$\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^N, |\boldsymbol{d}| \geq r \Rightarrow \boldsymbol{p}(\boldsymbol{d}) \cdot \boldsymbol{d} \geq 0,$$

pak existuje bod $\boldsymbol{d} \in B(\mathbf{0}, r)$ *takový, že* $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{d}) = \mathbf{0}$.

Důkaz viz např. [4], Lemma (Zeros of a vector field) na str. 493.

Věta 4 (Jensenova nerovnost)**.** *Nechť* μ *je pravděpodobnostní míra na měřitelném prostoru* (Ω, σ)*. Jestliže* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *je* μ*-měřitelná funkce a je-li* $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *konvexní funkce, pak je*

$$\varphi\left(\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu\right) \leq \int_\Omega \varphi \circ f \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz viz např. [12], Věta 3.3. na str. 78. Jensenovu nerovnost budeme v textu používat pro tenzorové funkce $\mathbf{S} : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$, a proto budeme dále mlčky ztotožňovat prostor matic $\mathbb{R}^{d\times d}$ s prostorem $\mathbb{R}^{d^2}$.

Lemma 5 (Mocninná nerovnost)**.** *Pro každé reálné* $p > 0$ *existuje konstanta* $C(p) > 0$ *taková, že pro libovolná reálná čísla* $a, b \geq 0$ *platí, že*

$$(a + b)^p \leq C(p)(a^p + b^p). \tag{1.1}$$

2. Konstitutivní vztahy pro Cauchyho tenzor napětí.

Tzv. rheologické rovnice charakterizují vztahy mezi tenzorem napětí a ostatními veličinami popisujícími proudění tekutin a s tím i vlastnosti jednotlivých látek. Bez nich bychom měli v systému (1)–(3) více neznámých než rovnic. Pro nestlačitelné materiály je Cauchyho tenzor napětí rozdělen na tlak $p : \Omega \to \mathbb{R}$ a vazkou část $\mathbf{S} : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$, tedy na $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}$.

2.1 Newtonovské tekutiny

Pro modelování tekutin jsou nejvíce používané Navier-Stokesovy rovnice. Tyto rovnice popisují tekutiny, kterým se říká Newtonovské. Pro ně je z tzv. Stokesových postulátů (které se zdají být pro tekutinu přirozené a byly vypozorovány experimentálně) odvozen lineární vztah mezi vazkou složkou tenzoru napětí a tenzorem rychlosti deformace (viz např. [5])

$$\mathbf{S} = 2\nu\mathbf{D}, \tag{2.1}$$

kde konstanta úměrnosti je kinematická viskozita ν, a kde pro jednoduchost značíme $\mathbf{D} := \mathbf{D}(\boldsymbol{v})$. Ukazuje se však, že ne vždy stačí kontinuum modelovat tímto lineárním vztahem a je potřeba uvažovat složitější závislosti mezi oběma veličinami.

2.2 Nelineární rheologické vztahy

U některých tekutin (či komplikovanějších materiálů jako např. ledovce, polymery, krev, synoviální tekutiny a další) pozorujeme, že viskozita nebude stále konstantní, ale buď se zvyšuje nebo snižuje se zvyšující se smykovou rychlostí částic tekutiny. Ilustrujme tento fenomén na příkladu jednoduchého ustáleného smykového proudění (převzatého z [10]), kde pole rychlosti bude mít tvar

$$\boldsymbol{v} = u(y)\boldsymbol{i} \tag{2.2}$$

v kartézském souřadném systému (x, y, z) s bázovými vektory $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. Díky (2.2) je automaticky splněna podmínka $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$. Je-li $\mathbf{S}$ dáno vztahem 2.1, pak vidíme, že jediná nenulová složka smykového napětí je

$$\mathbf{S}_{xy}(y) = \nu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}, \tag{2.3}$$

kde kinematická viskozita ν tvoří konstantu úměrnosti. Označme nyní $\kappa := \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$ a definujme zobecněnou viskozitu vztahem

$$\nu_z := \frac{\mathbf{S}_{xy}}{\kappa}. \tag{2.4}$$

Tato zobecněná viskozita je dobře měřitelná fyzikální veličina a v mnohých materiálech pozorujeme, že je buď monotónně neklesající nebo nerostoucí se zvyšujícím se smykovým napětím a $\nu = const.$ pro Newtonovské tekutiny je pak jen speciálním případem.

Další významný jev, který chceme (a musíme, pokud nám jde o fyzikálně relevantní výsledky) zahrnout do třídy přípustných modelů jsou i různé nespojitosti v grafech závislosti pro ν_z způsobené tím, že se určité tekutiny začnou chovat jako Newtonovské až po překročení kritické hranice smykového napětí nazývané "mez skluzu". Nespojitosti mohou být ale též způsobeny chemickými reakcemi, které proběhnou za určitých hodnot smykového napětí (a to velmi rychle), a proto se tyto změny z makroskopického hlediska dají označit za skokové. Z fyzikálního hlediska je ale přirozenější uvažovat, že místo nespojitosti (skoku) funkce v nějakém bodě je funkce v tomto bodě mnohoznačná. T.j. mějme např. funkci $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s $\lim_{x\to a_-} = c$ a $\lim_{x\to a_+} = d$, kde a,c,$d \in \mathbb{R}$ a $c < d$, pak uvažujeme, že "funkce" f může v bodě a nabývat všech hodnot z intervalu $[c, d]$. Tato vlastnost je pak matematicky odražena v definici maximálního monotónního grafu (viz kapitola 4).

Zabývejme se nyní prvním případem, t.j. případem, kdy jde o tekutinu zesilující/zeslabující smyk. Nebudeme uvažovat Stokesovy postuláty a vztah pro Newtonovskou tekutinu (2.1) zobecníme na explicitní vzorec

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{D}), \tag{2.5}$$

kde $\mathbf{S} : \mathbb{R}^{d\times d}_{sym} \to \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ je spojitá funkce. V knize [10] je uveden důležitý výsledek, který říká, že má-li být splněn princip materiálové invariance a princip objektivity, musí být vztah typu (2.5) tvaru

$$\mathbf{S}(\mathbf{D}) = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{D} + \alpha_2\mathbf{D}^2, \tag{2.6}$$

kde skalární funkce α_i mohou záviset pouze na invariantech pohybu, což jsou $\operatorname{tr}\mathbf{D}$, $\frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{D})^2 - \operatorname{tr}\mathbf{D}^2\right]$ a $\det\mathbf{D}$. Protože uvažujeme nestlačitelné proudění, je $\operatorname{tr}\mathbf{D} = \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = 0$ a $\operatorname{tr}\mathbf{D}^2 = |\mathbf{D}|^2$. Vidíme tedy, že "explicitní" model (2.5) je schopen pokrýt celou třídu modelů, a to zejména mocninný (nebo Ladyzhenské) model, který je často používán v inženýrské praxi a je schopen popsat fenomén nekonstantní viskozity popsaný výše. Tento model je charakterizován konstitutivním vztahem

$$\mathbf{S}(\mathbf{D}) = \nu_0(\nu_1 + |\mathbf{D}|^2)^{\frac{r-2}{2}}\mathbf{D}, \tag{2.7}$$

kde $\nu_0 > 0$, $\nu_1 \geq 0$ jsou dané materiálové konstanty a $r \in (1, \infty)$. Poznamenejme, že v případě kdy $\nu_1 = 0$ jde o tzv. mocninný model, a pokud $\nu_1 > 0$, pak jde o Ladyzhenské model.

Tyto modely však nejsou schopné popsat procesy s různými aktivačními kritérii, jak bylo popsáno výše. V nedávné době, však byla rigorózně odvozena tzv. teorie o implicitních konsitutivních vztazích (viz [13]), kde namísto explicitní rovnice (2.5) byla celá rheologie daného materiálu popsána pomocí implicitní rovnice tvaru

$$\mathbf{F}(\mathbf{S}, \mathbf{D}) = \mathbf{0}. \tag{2.8}$$

Má-li být splněn princip invariance a objektivity, implicitní vztah (2.8) musí mít tvar (viz [10])

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{S} + \alpha_2 \mathbf{D} + \alpha_3 \mathbf{S}^2 + \alpha_4 \mathbf{D}^2 + \alpha_5 (\mathbf{SD} + \mathbf{DS}) \\
&+ \alpha_6 (\mathbf{S}^2\mathbf{D} + \mathbf{DS}^2) + \alpha_7 (\mathbf{SD}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{S}) + \alpha_8 (\mathbf{S}^2\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{S}^2) = \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

kde proměnné α_i, $i = 0, \ldots, 8$ opět závisejí na všech invariantech, které mají ale tentokrát tvar

$$
\operatorname{tr} \mathbf{D},\ \operatorname{tr} \mathbf{S},\ \operatorname{tr} \mathbf{S}^2,\ \operatorname{tr} \mathbf{D}^2,\ \operatorname{tr} \mathbf{S}^3,\ \operatorname{tr} \mathbf{D}^3,\ \operatorname{tr}(\mathbf{SD}),\ \operatorname{tr}(\mathbf{S}^2\mathbf{D}),\ \operatorname{tr}(\mathbf{D}^2\mathbf{S}),\ \operatorname{tr}(\mathbf{S}^2\mathbf{D}^2).
$$

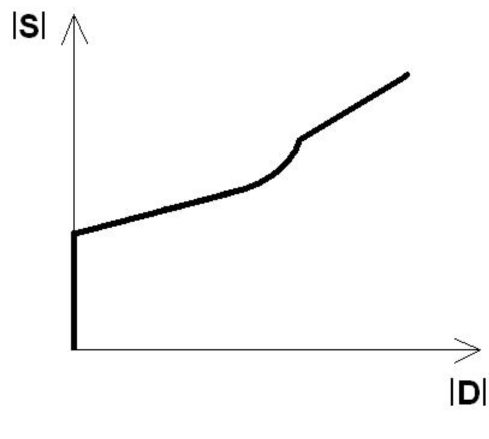
Je zřejmé, že model (2.8) je schopen popsat mnohem obecnější materiál než (2.5) a jako typický příklad uveďme modely Binghamovy tekutiny s konstitutivním vztahem

$$
\begin{cases} |\mathbf{S}| \le \tau_* & \Longleftrightarrow \ \mathbf{D} = \mathbf{0}, \\ |\mathbf{S}| > \tau_* & \Longleftrightarrow \ \mathbf{S} = \tau_* \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} + \nu^* \mathbf{D}, \end{cases} \tag{2.10}
$$

a Herschel-Bulkleyho tekutiny s konstitutivním vztahem

$$
\begin{cases} |\mathbf{S}| \le \tau_* & \Longleftrightarrow \ \mathbf{D} = \mathbf{0}, \\ |\mathbf{S}| > \tau_* & \Longleftrightarrow \ \mathbf{S} = \tau_* \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} + 2\mu |\mathbf{D}|^{r-2} \mathbf{D}, \end{cases} \tag{2.11}
$$

které popisují fenomén skoku tenzoru napětí pro $|\mathbf{D}| = 0$. Binghamova tekutina se pro $|\mathbf{D}| \neq 0$ chová jako Newtonovská a u Herschel-Bulkleyho tekutiny uvažujeme pro $|\mathbf{D}| \neq 0$ mocninný model. Tyto vztahy se dají ekvivalentně popsat implicitním vztahem (2.8), kde $\mathbf{F}$ je spojitá funkce, a který vede na na tzv. maximální monotónní r-graf (detaily čtenář najde v kapitole 4). Je tedy obecně potřeba uvažovat modely tekutin, které při ustáleném smykovém proudění vykazují konstitutivní vztahy jako např. na následujícím grafu dole



Ve zbytku práce se pak soustředíme na tyto modely popsané (2.5) a (2.8). V Sekci 3 uvažujeme že $\mathbf{S}$ je funkcí $\mathbf{D}$, tedy model (2.5) a ukážeme existenci slabého řešení pokud je tato funkce monotónní, koercivní a splňuje danou růstovou podmínku. Abychom pokryli i třídu implicitních modelů (2.8), uvažujeme v Sekci 4 vztah (2.8) s $\mathbf{F}$ generující maximální monotónní graf (viz sekce 4 pro definici maximálního monotónního grafu) a opět dokážeme (za určitých podmínek na růst a koercivitu) existenci slabého řešení.

3. Existence řešení pro explicitní rheologický vztah

V následující sekci dokážeme existenci slabého řešení studované soustavy parciálních diferenciálních rovnic v případě explicitního vztahu (2.5), tedy

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{D}),$$

kde $\mathbf{S} : \mathbb{R}^{d\times d}_{sym} \to \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ je spojitou funkcí. Jak jsme již předeslali, existenci slabého řešení dokážeme za předpokladu, že funkce $\mathbf{S}$ splňuje jisté vlastnosti, které nyní zformulujeme a také ukážeme, že model Ladyzhenské tyto podmínky splňuje.

Buď $r \in (1, \infty)$. Existují konstanty $C_1 > 0$ a $D_1, C_2, D_2 \geq 0$ takové, že pro všechna $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ je

(i) $\mathbf{S}(\mathbf{D}) : \mathbf{D} \geq C_1 |\mathbf{D}|^r - D_1$, ($r$-koercivita)

(ii) $|\mathbf{S}(\mathbf{D})| \leq C_2 |\mathbf{D}|^{r-1} + D_2$, (omezený $(r-1)$-růst)

(iii) Pro všechna $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ je $(\mathbf{S}(\mathbf{D}_1) - \mathbf{S}(\mathbf{D}_2)) : (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \geq 0$. (monotonie)

3.1 Mocninný model a Ladyzhenské model

Před zformulováním hlavní věty této sekce ověříme, že model Ladyzhenské a mocninný model splňují vlastnosti (i)-(iii).

Lemma 6. *Buď $r \in (1, \infty)$ a $\varepsilon \geq 0$. Pak zobrazení $\mathbf{S} : \mathbb{R}^{d\times d}_{sym} \to \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ s předpisem $\mathbf{S}(\mathbf{D}) = \left(\varepsilon + |\mathbf{D}|^2\right)^{\frac{r-2}{2}} \mathbf{D}$ je spojité a splňuje vlastnosti (i)–(iii).*

Důkaz.
Spojitost zobrazení $\mathbf{S}$ je zřejmá.
(i) Vidíme, že

$$\mathbf{S}(\mathbf{D}) : \mathbf{D} = \left(\varepsilon + |\mathbf{D}|^2\right)^{\frac{r-2}{2}} |\mathbf{D}|^2.$$

Pro $r = 2$ nerovnost (i) zřejmě platí (dosadíme např. $C_1 = 1$ a $D_1 = 0$). Dále rozlišíme dva případy:
(a) $r > 2$: Pak exponent $\frac{r-2}{2}$ je kladný a můžeme psát

$$\left(\varepsilon + |\mathbf{D}|^2\right)^{\frac{r-2}{2}} |\mathbf{D}|^2 \geq \left(|\mathbf{D}|^2\right)^{\frac{r-2}{2}} |\mathbf{D}|^2 = |\mathbf{D}|^{r-2} |\mathbf{D}|^2 = |\mathbf{D}|^r.$$

Můžeme tedy opět vzít např. $C_1 = 1$ a $D_1 = 0$.
(b) $r < 2$: V tomto případě dostáváme, díky tomu, že $\frac{r-2}{2} < 0$

$$\begin{aligned}\left(\varepsilon + |\mathbf{D}|^2\right)^{\frac{r-2}{2}} |\mathbf{D}|^2 &= \left(\varepsilon + |\mathbf{D}|^2\right)^{\frac{r-2}{2}} \left(\varepsilon + |\mathbf{D}|^2\right) - \varepsilon \left(\varepsilon + |\mathbf{D}|^2\right)^{\frac{r-2}{2}} \\ &\geq \left(\varepsilon + |\mathbf{D}|^2\right)^{\frac{r}{2}} - \varepsilon^{1+\frac{r-2}{2}} \\ &\geq |\mathbf{D}|^r - \varepsilon^{\frac{r}{2}}.\end{aligned}$$

Zvolíme-li $C_1 = 1$ a $D_1 = \varepsilon^{\frac{r}{2}}$, dostáváme (i).

(ii) Díky nerovnosti

$$(a+b)^{\frac{1}{2}} \leq a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$$

platné pro $a, b \geq 0$ je

$$|\mathsf{S}(\mathsf{D})| = \left(\varepsilon + |\mathsf{D}|^2\right)^{\frac{r-2}{2}} |\mathsf{D}| \leq (\varepsilon^{\frac{1}{2}} + |\mathsf{D}|)^{r-2} |\mathsf{D}|.$$

Dalšími úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}|\mathsf{S}(\mathsf{D})| &\leq (\varepsilon^{\frac{1}{2}} + |\mathsf{D}|)^{r-2} |\mathsf{D}| \leq (\varepsilon^{\frac{1}{2}} + |\mathsf{D}|)^{r-2} (|\mathsf{D}| + \varepsilon^{\frac{1}{2}}) = (\varepsilon^{\frac{1}{2}} + |\mathsf{D}|)^{r-1} \\ &\overset{(1.1)}{\leq} C(r)(\varepsilon^{\frac{r-1}{2}} + |\mathsf{D}|^{r-1}) = C(r)|\mathsf{D}|^{r-1} + C(r)\varepsilon^{\frac{r-1}{2}},\end{aligned}$$

a tedy plastnost nerovnosti (ii).

(iii)
Označme $\nu(x) = (\varepsilon + x^2)^{\frac{r-2}{2}}$ $(\geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R})$. Pak

$$\begin{aligned}&(\mathsf{S}(\mathsf{D}_1) - \mathsf{S}(\mathsf{D}_2)) : (\mathsf{D}_1 - \mathsf{D}_2) \\ &= \nu(|\mathsf{D}_1|)|\mathsf{D}_1|^2 + \nu(|\mathsf{D}_2|)|\mathsf{D}_2|^2 - (\mathsf{D}_1 : \mathsf{D}_2)\left(\nu(\mathsf{D}_1) + \nu(\mathsf{D}_2)\right).\end{aligned}$$

Jesliže je $(\mathsf{D}_1 : \mathsf{D}_2) \leq 0$, jsme hotovi. V druhém případě

$$\begin{aligned}&\nu(|\mathsf{D}_1|)|\mathsf{D}_1|^2 + \nu(|\mathsf{D}_2|)|\mathsf{D}_2|^2 - (\mathsf{D}_1 : \mathsf{D}_2)\left(\nu(\mathsf{D}_1) + \nu(\mathsf{D}_2)\right) \\ &\geq \nu(|\mathsf{D}_1|)|\mathsf{D}_1|^2 + \nu(|\mathsf{D}_2|)|\mathsf{D}_2|^2 - |\mathsf{D}_1||\mathsf{D}_2|\left(\nu(\mathsf{D}_1) + \nu(\mathsf{D}_2)\right) \\ &= \nu(|\mathsf{D}_1|)|\mathsf{D}_1|\left(|\mathsf{D}_1| - |\mathsf{D}_2|\right) + \nu(|\mathsf{D}_2|)|\mathsf{D}_2|\left(|\mathsf{D}_2| - |\mathsf{D}_1|\right) \\ &= \left(|\mathsf{D}_1| - |\mathsf{D}_2|\right)\left(\nu(|\mathsf{D}_1|)|\mathsf{D}_1| - \nu(|\mathsf{D}_2|)|\mathsf{D}_2|\right).\end{aligned}$$

Problém se tedy redukuje na to, zda-li je funkce $x \mapsto \nu(x)x$ neklesající pro $x \geq 0$. Spočteme její derivaci.

$$\begin{aligned}(\nu(x)x)' &= \left(\varepsilon + x^2\right)^{\frac{r-2}{2}} \cdot 1 + \left(\frac{r-2}{2}\right)\left(\varepsilon + x^2\right)^{\frac{r-4}{2}} \cdot 2x \cdot x \\ &= \left(\varepsilon + x^2\right)^{\frac{r-4}{2}} \left((r-2)x^2 + \varepsilon + x^2\right) \\ &= \left(\varepsilon + x^2\right)^{\frac{r-4}{2}} \left((r-1)x^2 + \varepsilon\right) \geq 0\end{aligned}$$

a vidíme, že (iii) platí.

$\square$

Zformulujme nyní hlavní větu tohoto oddílu.

Věta 7 (Existence a jednoznačnost)**.** *Nechť $r \in (1, \infty)$ a nechť spojité zobrazení $\mathsf{S} : \mathbb{R}^{d\times d}_{sym} \to \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ splňuje (i)–(iii). Nechť je dána funkce $\boldsymbol{f} \in L^{r'}(\Omega)^d$. Pak existuje $\boldsymbol{v} \in W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$ takové, že pro všechny $\boldsymbol{\omega} \in W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$ platí*

$$\int_\Omega \mathsf{S}\big(\mathsf{D}(\boldsymbol{v})\big) : \nabla \boldsymbol{\omega} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\omega} \,\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

a tedy $\boldsymbol{v}$ je slabým řešením soustavy (1)–(3).

Jestliže navíc zobrazení $\mathbf{S}$ splňuje podmínku (striktní monotonie)

(iii) Pro všechna $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ platí*

$$(\mathbf{S}(\mathbf{D}_1) - \mathbf{S}(\mathbf{D}_2)) : (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2, \tag{3.2}$$

pak existuje právě jedno slabé řešení.

Poznámka 8. Podívejme se krátce na to, proč pod slabým řešením rozumíme právě tuto podmínku. V sekci 2 jsme si řekli, že Cauchyho tenzor napětí je rozdělen na tlak a vazkou část, tedy $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}$, a $\mathbf{S}$ je nyní spojitá funkce tenzoru rychlosti deformace $\mathbf{D} := \mathbf{D}(\boldsymbol{v})$. Rovnice (2), ze které vycházíme, tak bude mít tvar

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(-p\mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{D})) = \nabla p - \operatorname{div}\mathbf{S}(\mathbf{D}) = \boldsymbol{f} \qquad & \text{v } \Omega, \\ \iff -\operatorname{div}\mathbf{S}(\mathbf{D}) = -\nabla p + \boldsymbol{f} \qquad & \text{v } \Omega. \end{aligned}$$

Předpokládali jsme nulovou Dirichletovu okrajovou podmínku, takže obvyklým způsobem odvození slabého řešení přenásobíme rovnici funkcí $\boldsymbol{\omega}$ z $C_0^\infty(\Omega)^d$ a zintegrujeme přes Ω. Jako optimální Sobolevův prostor pro hledání slabého řešení se pak díky hustotě hladkých funkcí a podmínce $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ z první rovnice nabízí prostor $W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$. Levou stranu i první výraz na pravé straně upravíme pomocí Gauss-Ostrogradského věty a všimneme si, že pro funkce $\boldsymbol{\omega}$ z prostoru $W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$ je (za předpokladu, že všechny integrály jsou dobře definované)

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega p \cdot \operatorname{div}\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}x = 0,$$

neboť $\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = 0$. Takto tedy dojdeme k podmínce (3.1) formulované výše. Další poznatek, který budeme dále v textu mlčky používat je rovnost

$$\int_\Omega \mathbf{S}(\mathbf{D}(\boldsymbol{v})) : \nabla\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{S}(\mathbf{D}(\boldsymbol{v})) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}x$$

pokud mají integrály smysl a $\mathbf{S}(\mathbf{D}) \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$. Pro každý symetrický tenzor A a tenzor B totiž platí, že $A : B = A : (B_{\text{sym. část}} + B_{\text{antisym. část}}) = A : B_{\text{sym. část}}$, jelikož $A : B_{\text{antisym. část}} = 0$ díky symetričnosti tenzoru A.

Důkaz Věty 7. Buď $\{\boldsymbol{\omega}_j\}_{j=1}^\infty$ spočetná hustá lineárně nezávislá podmnožina prostoru $W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$. Zkonstruujeme Galerkinovy aproximace: $\boldsymbol{v}^N = \sum_{j=1}^N c_j^N \boldsymbol{\omega}_j$, kde koeficienty c_j^N zvolíme tak, aby funkce $\boldsymbol{v}^N$ řešily soustavu N rovnic:

$$\int_\Omega \mathbf{S}(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\omega}_j)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\omega}_j\,\mathrm{d}x \qquad (j = 1, \dots, N). \tag{3.3}$$

Lemma 9. *Pro všechna přirozená čísla N existuje funkce $\boldsymbol{v}^N$ tvaru $\sum_{j=1}^N c_j^N \boldsymbol{\omega}_j$ splňující rovnice* (3.3)

Důkaz lemmatu 9. Budeme chtít využít důsledek Brouwerovy věty o pevném bodě. Definujeme zobrazení $\boldsymbol{p} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{p} = (p^1, ..., p^N)$ předpisem

$$p^k(\boldsymbol{d}) := \int_\Omega \mathsf{S}\big(\sum_{j=1}^N d_j \mathsf{D}(\boldsymbol{\omega}_j)\big) : \mathsf{D}(\boldsymbol{\omega}_k) - \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\omega}_k \, \mathrm{d}x, \qquad k = 1, ..., N$$

pro každý bod $\boldsymbol{d} = (d_1, ..., d_N) \in \mathbb{R}^N$. Označíme-li $\boldsymbol{v}^N = \sum_{j=1}^N d_j \boldsymbol{\omega}_j$, dostaneme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}(\boldsymbol{d}) \cdot \boldsymbol{d} &= \int_\Omega \mathsf{S}\Big(\sum_{j=1}^N d_j \mathsf{D}(\boldsymbol{\omega}_j)\Big) : \Big(\sum_{j=1}^N d_j \mathsf{D}(\boldsymbol{\omega}_j)\Big) - \boldsymbol{f}\Big(\sum_{j=1}^N d_j \boldsymbol{\omega}_j\Big) \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \mathsf{S}\Big(\mathsf{D}\big(\sum_{j=1}^N d_j \boldsymbol{\omega}_j\big)\Big) : \Big(\mathsf{D}\big(\sum_{j=1}^N d_j \boldsymbol{\omega}_j\big)\Big) - \boldsymbol{f}\Big(\sum_{j=1}^N d_j \boldsymbol{\omega}_j\Big) \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \mathsf{S}\Big(\mathsf{D}\big(\boldsymbol{v}^N\big)\Big) : \mathsf{D}\big(\boldsymbol{v}^N\big) - \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}^N \, \mathrm{d}x \\
&\overset{(i)}{\geq} \int_\Omega C_1 |\mathsf{D}(\boldsymbol{v}^N)|^r - D_1 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}^N \, \mathrm{d}x \\
&= C_1 \|\mathsf{D}(\boldsymbol{v}^N)\|_r^r - D_1 |\Omega| - \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}^N \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Pomocí Kornovy nerovnosti odhadneme

$$C_1 \|\mathsf{D}(\boldsymbol{v}^N)\|_r^r \geq C_1 K_r \|\boldsymbol{v}^N\|_{1,r}^r.$$

Druhý integrál odhadneme pomocí Hölderovy nerovnosti a využijeme též toho, že $\|\boldsymbol{v}^N\|_r \leq \|\boldsymbol{v}^N\|_{1,r}$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}^N \, \mathrm{d}x \leq \left| \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}^N \, \mathrm{d}x \right| &\leq \int_\Omega |\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}^N| \, \mathrm{d}x \\
&\leq \|\boldsymbol{f}\|_{r'} \|\boldsymbol{v}^N\|_r \leq \|\boldsymbol{f}\|_{r'} \|\boldsymbol{v}^N\|_{1,r}.
\end{aligned}$$

V posledním výrazu použijeme ε-Youngovu nerovnost s $\varepsilon := \frac{C_1 K_r}{2}$

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{f}\|_{r'} \|\boldsymbol{v}^N\|_{1,r} &\leq \varepsilon \|\boldsymbol{v}^N\|_{1,r}^r + C(\varepsilon) \|\boldsymbol{f}\|_{r'}^{r'} \\
-\|\boldsymbol{f}\|_{r'} \|\boldsymbol{v}^N\|_{1,r} &\geq -\varepsilon \|\boldsymbol{v}^N\|_{1,r}^r - C(\varepsilon) \|\boldsymbol{f}\|_{r'}^{r'}.
\end{aligned}$$

Celkově tedy máme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}(\boldsymbol{d}) \cdot \boldsymbol{d} &= C_1 \|\mathsf{D}(\boldsymbol{v}^N)\|_r^r - D_1 |\Omega| - \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}^N \, \mathrm{d}x \\
&\geq \frac{C_1 K_r}{2} \|\boldsymbol{v}^N\|_{1,r}^r - D_1 |\Omega| - C(\varepsilon) \|\boldsymbol{f}\|_{r'}^{r'}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Potřebujeme dostatečně zvětšit $\|\boldsymbol{v}^N\|_{1,r}^r$ tak, aby pravá strana byla větší než 0. Funkce $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_N$ generují díky lineární nezávislosti zvolené husté podmnožiny N-dimenzionální podprostor prostoru $W_{0,\mathrm{div}}^{1,r}$ a čísla $d_1, \cdots, d_N$ jsou souřadnice funkce $\boldsymbol{v}^N$ vzhledem k této bázi. Díky ekvivalenci norem na konečně dimenzionálních prostorech bude nyní stačit, když zvolíme dostatečně velké R, neboť dokážeme najít $R > 0$ tak, že pokud $|\boldsymbol{d}| \geq R$, pak výraz na pravé straně (3.4) je nezáporný a tím je důkaz hotov.

□

Pokračování Důkazu věty 7.

J-tou rovnici v (3.3) vynásobíme koeficientem c_j^N z lemmatu 9 a rovnice sečteme. Dostaneme tak

$$\int_\Omega \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)\big) : \mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}^N\,\mathrm{d}x \qquad (j = 1, \dots, N). \tag{3.5}$$

Nyní pomocí stejných odhadů, které jsme použili v důkazu předchozího lemmatu obdržíme

$$\frac{C_1 K_r}{2}\|\boldsymbol{v}^N\|_{1,r}^r \leq D_1|\Omega| + C(\varepsilon)\|\boldsymbol{f}\|_{r'}^{r'}$$

a jednoduchá algebraická manipulace pak vede ke stejnoměrnému odhadu

$$\|\boldsymbol{v}^N\|_{1,r} \leq C, \tag{3.6}$$

kde pro jednoduchost píšeme C pro kladnou konstantu, která závisí na datech úlohy.

Prostor $W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$ je pro $r \in (1,\infty)$ reflexivní a posloupnost funkcí $\boldsymbol{v}^N$ je omezená. Věta 2 pak říká, že z ní můžeme vybrat slabě konvergentní podposloupnost

$$\boldsymbol{v}^{N_j} \rightharpoonup \boldsymbol{v} \quad \text{ve } W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}. \tag{3.7}$$

Bez újmy na obecnosti budeme psát při vybírání podposloupnosti $\boldsymbol{v}^N$ místo $\boldsymbol{v}^{N_j}$. Spočtěme následující normu (ve druhé nerovnosti využíváme konvexitu zobrazení $x \mapsto x^{\frac{r}{r-1}}$).

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)\big)\|_{r'}^{r'} &= \int_\Omega \big|\mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)\big)\big|^{\frac{r}{r-1}}\,\mathrm{d}x \overset{(ii)}{\leq} \int_\Omega \big(C_2|\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)|^{r-1} + D_2\big)^{\frac{r}{r-1}}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_\Omega \frac{1}{2}\left(2C_2|\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)|^{r-1}\right)^{\frac{r}{r-1}} + \frac{1}{2}(2D_2)^{\frac{r}{r-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \hat{C}_2|\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)|^r + \hat{D}_2\,\mathrm{d}x \\
&= \hat{C}_2\|\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)\|_r^r + \hat{D}_2|\Omega| \leq \hat{C}_2\|\boldsymbol{v}^N\|_{1,r}^r + \hat{D}_2|\Omega| \leq C,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

kde poslední nerovnost dostaneme použitím (3.6) a C je opět zjednodušené označení konstanty na pravé straně. Můžeme tedy i zde vybrat slabě konvergentní posloupnost

$$\mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)\big) \rightharpoonup \bar{\mathbf{S}} \quad \text{v } L^{r'}(\Omega)^{d\times d}. \tag{3.9}$$

Zafixujme nyní j, jelikož $\mathbf{S} \mapsto \int_\Omega \mathbf{S} : \mathbf{D}(\boldsymbol{\omega}_j)\,\mathrm{d}x$ je spojitý lineární funkcionál, prvek z prostoru $\big(L^{r'}(\Omega)^{d\times d}\big)^*$, dostaneme z (3.5) a (3.9)

$$\int_\Omega \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)\big) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\omega}_j)\,\mathrm{d}x \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{D}(\boldsymbol{\omega}_j)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\omega}_j\,\mathrm{d}x.$$

Jelikož je množina $\{\boldsymbol{\omega}_j\}_{j=1}^\infty$ hustá v prostoru $W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$, platí tato rovnost pro všechny funkce $\boldsymbol{\varphi}\in W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$, tedy

$$\int_\Omega \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x, \tag{3.10}$$

a navíc volbou $\boldsymbol{\varphi} := \boldsymbol{v}$ dostáváme

$$\int_\Omega \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{D}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x. \tag{3.11}$$

Nyní lze použitím (3.5) odvodit, že

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\int_\Omega \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)\big) : \mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}^N\,\mathrm{d}x &\overset{(*)}{=} \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x\\ &\overset{(3.11)}{=} \int_\Omega \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{D}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{3.12}$$

kde rovnost (*) platí ze stejného důvodu jako předtím, neboť $\boldsymbol{v}\mapsto\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x$ je prvkem $\big(L^r(\Omega)^d\big)^* \supset \big(W^{1,r}_0(\Omega)^d\big)^*$.

Nakonec využijeme monotonii operátoru $\mathbf{S}$. Pro libovolnou $\boldsymbol{\varphi}\in W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$ dostáváme díky (ii)

$$\begin{aligned}0 &\le \int_\Omega \Big(\mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)\big) - \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\big)\Big) : \Big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N) - \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)\big) : \mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N) - \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)\big) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) - \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\big) : \big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N) - \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\big)\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.13}$$

Poznamenejme, že integrály jsou dobře definovány, neboť $\mathbf{S}\left(\mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\right)\in L^{r'}(\Omega)^{d\times d}$, což plyne z odhadu (3.8), kde zaměníme $\boldsymbol{v}^N$ za $\boldsymbol{\varphi}$. V nerovnosti přejdeme k limitě $N \longrightarrow \infty$, takže nerovnost zůstane zachována, a podíváme se na limity jednotlivých členů na pravé straně.

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\int_\Omega \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)\big) : \mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)\,\mathrm{d}x &\overset{(3.12)}{=} \int_\Omega \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{D}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}x\\ \lim_{N\to\infty}\int_\Omega \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N)\big) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}x &\overset{(3.9)}{=} \int_\Omega \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}x\\ \lim_{N\to\infty}\int_\Omega \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\big) : \big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^N) - \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\big)\,\mathrm{d}x &\overset{(3.7)}{=} \int_\Omega \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\big) : \big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}) - \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Vrátíme-li se k naší nerovnosti, dostaneme, že pro všechna $\boldsymbol{\varphi}\in W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$ platí

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_\Omega \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{D}(\boldsymbol{v}) - \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi}) - \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\big) : \big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}) - \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\big) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \Big(\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\big)\Big) : \Big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}) - \mathbf{D}(\boldsymbol{\varphi})\Big) \,\mathrm{d}x. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

K dokončení důkazu bude stačit ukázat, že

$$
\int_\Omega \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{D}(\boldsymbol{\omega}) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v})\big) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\omega}) \,\mathrm{d}x \qquad (3.15)
$$

pro všechny $\boldsymbol{\omega} \in W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$, neboť použitím (3.10) ihned dostáváme (3.1).

Zvolíme-li v (3.14) za $\boldsymbol{\varphi}$ speciálně $\boldsymbol{\varphi} := \boldsymbol{v} - \lambda \boldsymbol{w}$, s $\lambda > 0$ a $\boldsymbol{\omega} \in W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$ libovolnou, dostaneme po následném vydělení nerovnosti λ následující

$$
0 \leq \int_\Omega \Big(\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v} + \lambda \boldsymbol{w})\big)\Big) : \mathbf{D}(\boldsymbol{w}) \,\mathrm{d}x. \qquad (3.16)
$$

Při limitním přechodu $\lambda \to 0_+$ dostaneme použitím spojitosti zobrazení $\mathbf{S}$

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\lambda \to 0_+} \int_\Omega \Big(\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v} - \lambda \boldsymbol{w})\big)\Big) : \mathbf{D}(\boldsymbol{w}) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \lim_{\lambda \to 0_+} \Big(\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v} + \lambda \boldsymbol{w})\big)\Big) : \mathbf{D}(\boldsymbol{w}) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \Big(\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v})\big)\Big) : \mathbf{D}(\boldsymbol{w}) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{D}(\boldsymbol{w}) - \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v})\big) : \mathbf{D}(\boldsymbol{w}) \,\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \int_\Omega \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v})\big) : \mathbf{D}(\boldsymbol{w}) \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{D}(\boldsymbol{w}) \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Protože výsledná nerovnost platí i pro $-\boldsymbol{\omega}$, ihned dostaneme (3.15). Zbývá nám ale ještě zdůvodnit prohození limitního přechodu $\lambda \to 0_+$ a integrálu. Najdeme vhodnou majorantu, abychom mohli použít Lebesgueovu větu. Hledáme tedy majorantu pro výraz pod intergrálem v (3.16).

$$
\begin{aligned}
&\Big|\Big(\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v} + \lambda \boldsymbol{w})\big)\Big) : \Big(\mathbf{D}(\boldsymbol{w})\Big)\Big| \\
&\leq \Big(\big|\bar{\mathbf{S}}\big| + \big|\mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v} + \lambda \boldsymbol{w})\big)\big| \Big) |\mathbf{D}(\boldsymbol{w})| \\
&= \Big(\big|\bar{\mathbf{S}}\big| + \big|\mathbf{S}\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}) + \lambda \mathbf{D}(\boldsymbol{w})\big)\big| \Big) |\mathbf{D}(\boldsymbol{w})| \\
&\overset{(ii)}{\leq} \Big(\big|\bar{\mathbf{S}}\big| + C_2 \left|\mathbf{D}(\boldsymbol{v}) + \lambda \mathbf{D}(\boldsymbol{w})\right|^{r-1} + D_2 \Big) |\mathbf{D}(\boldsymbol{w})| \\
&\leq \Big(\big|\bar{\mathbf{S}}\big| + C_2 \left(|\mathbf{D}(\boldsymbol{v})| + |\lambda|\, |\mathbf{D}(\boldsymbol{w})|\right)^{r-1} + D_2 \Big) |\mathbf{D}(\boldsymbol{w})| \\
&\leq \Big(\big|\bar{\mathbf{S}}\big| + \hat{C}_2 \left(|\mathbf{D}(\boldsymbol{v})|^{r-1} + |\mathbf{D}(\boldsymbol{w})|\right)^{r-1} + D_2 \Big) |\mathbf{D}(\boldsymbol{w})| \in L^1,
\end{aligned}
$$

kde poslední nerovnost platí pro $\lambda \in (0, 1)$ a tím jsme tedy nalezli majorantu. Její integrovatelnost plyne z (3.7), (3.9) a z Hölderovy nerovnosti.

Věnujme se nyní jednoznačnosti řešení: Nechť existují slabá řešení $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$. Pak pro všechny funkce $\boldsymbol{\omega} \in W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$ platí

$$\int_\Omega \mathsf{S}\big(\mathsf{D}(\boldsymbol{v}_1)\big) : \mathsf{D}(\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathsf{S}\big(\mathsf{D}(\boldsymbol{v}_2)\big) : \mathsf{D}(\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}x,$$

a tedy pro všechny funkce $\boldsymbol{\omega} \in W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$ je

$$\int_\Omega \Big(\mathsf{S}\big(\mathsf{D}(\boldsymbol{v}_1)\big) - \mathsf{S}\big(\mathsf{D}(\boldsymbol{v}_2)\big)\Big) : \mathsf{D}(\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}x = 0.$$

Dosadíme-li zde speciálně $\boldsymbol{\omega} := \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$, dostaneme z monotonie, že skoro všude v Ω je

$$\Big(\mathsf{S}\big(\mathsf{D}(\boldsymbol{v}_1)\big) - \mathsf{S}\big(\mathsf{D}(\boldsymbol{v}_2)\big)\Big) : (\mathsf{D}(\boldsymbol{v}_1) - \mathsf{D}(\boldsymbol{v}_2)) = 0$$

a při platnosti podmínky $(iii)^*$ tedy $\mathsf{D}(\boldsymbol{v}_1) = \mathsf{D}(\boldsymbol{v}_2)$ skoro všude v Ω. Pak tedy nutně

$$\|\mathsf{D}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\|_r = 0$$

a použitím Kornovy nerovnosti (podotkněme, že $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \in W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$) ihned máme, že $\|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|_{1,r} = 0$ a tedy $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ s.v. na Ω.

$\square$

4. Existence řešení pro implicitní rheologický vztah

V předchozí sekci jsme dokázali existenci řešení za předpokladu, že zobrazení $\mathbf{S}$ je spojité, což jsme také mimo jiné v důkazu využili. Důkaz v případě implicitně zadaného rheologického vztahu bude tedy muset vypadat trochu jinak. Jako v předchozí sekci i zde se omezíme na takový implicitní vztah, který vede na tzv. maximální monotónní r-graf splňující jisté podmínky na "růst" a koercivitu. Definujme graf $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^{d\times d}_{sym} \times \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ vztahem

$$(\mathbf{D}, \mathbf{S}) \in \mathbf{A} \iff \mathbf{G}(\mathbf{D}, \mathbf{S}) = \mathbf{0}$$

Řekneme, že $\mathbf{A}$ je maximální monotónní r-graf, jestliže splňuje

(A1) $\mathbf{A}$ prochází počátkem, t.j. $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \mathbf{A}$.

(A2) $\mathbf{A}$ je monotónní graf, t.j.
$(\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2) : (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \geq 0$ pro všechna $(\mathbf{D}_1, \mathbf{S}_1), (\mathbf{D}_1, \mathbf{S}_2) \in \mathbf{A}$.

(A3) $\mathbf{A}$ je maximální monotónní graf, t.j.
Nechť $(\mathbf{D}, \mathbf{S}) \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym} \times \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$.
Jestliže $(\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{S}) : (\bar{\mathbf{D}} - \mathbf{D}) \geq 0$ pro všechna $(\bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{S}}) \in \mathbf{A}$, pak $(\mathbf{D}, \mathbf{S}) \in \mathbf{A}$.

(A4) Pro všechna $(\mathbf{D}, \mathbf{S}) \in \mathbf{A}$ je
$\mathbf{S} : \mathbf{D} \geq C(|\mathbf{D}|^r + |\mathbf{S}|^{r'}) - m$, kde $C > 0$ a $m \geq 0$.

Jak jsme již řekli, graf $\mathbf{A}$ nemusí reprezentovat funkční vztah, ale určitě můžeme najít zobrazení $\mathbf{S}_* : \mathbb{R}^{d\times d}_{sym} \to \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$, zvané též selekce, přiřazující prvku $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ právě jeden prvek $\mathbf{S}(\mathbf{D}) \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ tak, že $(\mathbf{D}, \mathbf{S}(\mathbf{D})) \in \mathbf{A}$. Náš důkaz budeme moci provést díky následující důležité větě (viz [2]).

Věta 10. *Nechť $\mathbf{A}$ je maximální monotónní r-graf. Pak je možné vybrat borelovsky měřitelnou selekci $\mathbf{S}_*$, která splňuje podmínku (A4) ve smyslu*

$$(A4)_* \quad \mathbf{S}_*(\mathbf{D}) : \mathbf{D} \geq C(|\mathbf{D}|^r + |\mathbf{S}_*(\mathbf{D})|^{r'}) - m \quad \text{pro všechna } \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}.$$

Navíc platí následující analogie podmínky (A3) (viz [1]):

$(A3)_*$ *Nechť* $(\mathbf{D}, \mathbf{S}) \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym} \times \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$.
Jestliže $(\mathbf{S} - \mathbf{S}_*(\mathbf{B})) : (\mathbf{D} - \mathbf{B}) \geq 0$ *pro všechna* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$, *pak* $(\mathbf{D}, \mathbf{S}) \in \mathbf{A}$.

4.1 Herschel-Bulkleyho model

Tzv. Herschel-Bulkleyho tekutina je popsána konstitutivním vztahem, který nesplňuje požadavek spojitosti zobrazení $\mathbf{S}$, ale splňuje požadavky na maximální monotónní r-graf a bude nám tedy sloužit jako modelový příklad konstitutivního vztahu spadajícího do této kategorie. Vztah mezi $\mathbf{D}$ a $\mathbf{S}$ je definován následovně ($\tau_* > 0$)

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{S}| \le \tau_* &\iff \mathbf{D} = \mathbf{0}, \\
|\mathbf{S}| > \tau_* &\iff \mathbf{S} = \tau_* \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} + 2\mu|\mathbf{D}|^{r-2}\mathbf{D}, \mathbf{D} \neq \mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Toto se dá ekvivalentně přepsat implicitním vztahem $\mathbf{G}(\mathbf{D},\mathbf{S}) = \mathbf{0}$, kde

$$
\mathbf{G}(\mathbf{D},\mathbf{S}) = 2\mu|\mathbf{D}|^{r-2}\big(\tau_* + (|\mathbf{S}| - \tau_*)^+\big)\mathbf{D} - (|\mathbf{S}| - \tau_*)^+\mathbf{S} \tag{4.2}
$$

$$
\text{a } u^+ := \max\{u, 0\}.
$$

Opravdu, jestliže $|\mathbf{S}| \le \tau_*$, pak $\mathbf{G}(\mathbf{D},\mathbf{S}) = 2\mu|\mathbf{D}|^{r-2}\tau_*\mathbf{D} = \mathbf{0}$ implikuje $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ a obráceně, jestliže $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, pak $\mathbf{G}(\mathbf{D},\mathbf{S}) = (|\mathbf{S}| - \tau_*)^+\mathbf{S} = \mathbf{0}$, což implikuje $|\mathbf{S}| \le \tau_*$. Jestliže $|\mathbf{S}| > \tau_*$, pak $\mathbf{G}(\mathbf{D},\mathbf{S}) = 2\mu|\mathbf{D}|^{r-2}|\mathbf{S}|\mathbf{D} - (|\mathbf{S}| - \tau_*)\mathbf{S} = \mathbf{0}$ je ekvivalentní $2\mu|\mathbf{D}|^{r-2}\mathbf{D} = (|\mathbf{S}| - \tau_*)\frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|} \iff 2\mu|\mathbf{D}|^{r-1}\frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} = (|\mathbf{S}| - \tau_*)\frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|}$. Z této maticové rovnosti plyne rovnost norem, takže dostaneme $2\mu|\mathbf{D}|^{r-1} = (|\mathbf{S}| - \tau_*)$ a tedy $|\mathbf{D}| = \left(\frac{(|\mathbf{S}| - \tau_*)}{2\mu}\right)^{\frac{1}{r-1}}$ a také rovnost

$$
\mathbf{D} = |\mathbf{D}|\frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|} = \left(\frac{|\mathbf{S}| - \tau_*}{2\mu}\right)^{\frac{1}{r-1}} \frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|} \overset{\mathbf{D} \neq \mathbf{0}}{\iff} \mathbf{S} = \tau_* \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} + |\mathbf{D}|^{r-2}\mathbf{D}. \tag{4.3}
$$

Lemma 11. *Vztah* (4.1) *(resp.* (4.2)*) splňuje podmínky na maximální monotónní r-graf.*

Důkaz.
(A1) zřejmě platí.

(A2) Rozlišíme tři případy.
(1) $|\mathbf{S}_1| < |\mathbf{S}_2| \le \tau_*$, pak $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{0}$ a (A2) je splněna triviálně.
(2) $|\mathbf{S}_1| \le \tau_* < |\mathbf{S}_2|$, pak $\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}$ a $\mathbf{D}_2$ je díky (4.3) dáno $\mathbf{D}_2 := \left(\frac{|\mathbf{S}_2| - \tau_*}{2\mu}\right)^{\frac{1}{r-1}} \frac{\mathbf{S}_2}{|\mathbf{S}_2|}$. Jednoduchý výpočet pak vede k odhadu

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) : (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= (\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) : \left(\frac{|\mathbf{S}_2| - \tau_*}{2\mu}\right)^{\frac{1}{r-1}} \frac{\mathbf{S}_2}{|\mathbf{S}_2|} \\
&= \left(\frac{|\mathbf{S}_2| - \tau_*}{2\mu}\right)^{\frac{1}{r-1}} \left(|\mathbf{S}_2| - \frac{\mathbf{S}_1 : \mathbf{S}_2}{|\mathbf{S}_2|}\right) \\
&\ge \left(\frac{|\mathbf{S}_2| - \tau_*}{2\mu}\right)^{\frac{1}{r-1}} \Big(|\mathbf{S}_2| - |\mathbf{S}_1|\Big) > 0,
\end{aligned}
$$

kde jsme použili nerovnost $\mathbf{S}_1 : \mathbf{S}_2 \le |\mathbf{S}_1||\mathbf{S}_2|$.

(3) $\tau_* < |\mathbf{S}_1| \le |\mathbf{S}_2|$. Označíme $\nu(s) := \left(\frac{s - \tau_*}{2\mu}\right)^{\frac{1}{r-1}}$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{S}_2-\mathbf{S}_1):(\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2) &= (\mathbf{S}_2-\mathbf{S}_1):\left(\frac{\nu(|\mathbf{S}_2|)}{|\mathbf{S}_2|}\mathbf{S}_2-\frac{\nu(|\mathbf{S}_1|)}{|\mathbf{S}_1|}\mathbf{S}_1\right)\\
&= \nu(|\mathbf{S}_2|)|\mathbf{S}_2|+\nu(|\mathbf{S}_1|)|\mathbf{S}_1|-(\mathbf{S}_2:\mathbf{S}_1)\left(\frac{\nu(|\mathbf{S}_2|)}{|\mathbf{S}_2|}+\frac{\nu(|\mathbf{S}_1|)}{|\mathbf{S}_1|}\right)\\
&\geq \nu(|\mathbf{S}_2|)|\mathbf{S}_2|+\nu(|\mathbf{S}_1|)|\mathbf{S}_1|-\nu(|\mathbf{S}_2|)|\mathbf{S}_1|-\nu(|\mathbf{S}_1|)|\mathbf{S}_2|\\
&= (|\mathbf{S}_2|-|\mathbf{S}_1|)(\nu(|\mathbf{S}_2|)-\nu(|\mathbf{S}_1|))\geq 0,
\end{aligned}
$$

kde poslední nerovnost plyne z toho, že funkce $\nu(s)$ je na intervalu $[\tau_*,\infty)$ neklesající ($r>1$).

(A3) plyne ze spojitosti funkce $\mathbf{G}$. Skutečně, mějme libovolné $(\mathbf{D},\mathbf{S})\in\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}\times\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$. Víme, že pro všechna $(\bar{\mathbf{D}},\bar{\mathbf{S}})\in\mathbf{A}$ platí, že

$$
(\mathbf{S}-\bar{\mathbf{S}}):(\mathbf{D}-\bar{\mathbf{D}})\geq 0. \tag{4.4}
$$

Zvolme za $\bar{\mathbf{S}}$ speciálně $\bar{\mathbf{S}}:=\mathbf{S}-\lambda\tilde{\mathbf{S}}$, kde $\lambda>0$ a $\tilde{\mathbf{S}}\in\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ je libovolné. Najdeme takové $\bar{\mathbf{D}}(\lambda)$, aby $(\bar{\mathbf{D}}(\lambda),\bar{\mathbf{S}})\in\mathbf{A}$. Pro $\bar{\mathbf{D}}(\lambda)$ známe dokonce explicitní vyjádření

$$
\bar{\mathbf{D}}(\lambda)=\left(\frac{(|\bar{\mathbf{S}}|-\tau_*)_+}{2\mu}\right)^{\frac{1}{r-1}}\frac{\bar{\mathbf{S}}}{|\bar{\mathbf{S}}|}=\left(\frac{(|\mathbf{S}-\lambda\tilde{\mathbf{S}}|-\tau_*)_+}{2\mu}\right)^{\frac{1}{r-1}}\frac{\mathbf{S}-\lambda\tilde{\mathbf{S}}}{|\mathbf{S}-\lambda\tilde{\mathbf{S}}|}. \tag{4.5}
$$

Pro limitu $\lambda\to 0_+$ díky spojitosti funkce napravo dostaneme

$$
\bar{\mathbf{D}}(\lambda)\overset{\lambda\to 0_+}{\longrightarrow}\left(\frac{(|\mathbf{S}|-\tau_*)_+}{2\mu}\right)^{\frac{1}{r-1}}\frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|}. \tag{4.6}
$$

Vezměme nerovnost (4.4) s námi zvoleným $\bar{\mathbf{S}}$ a $\bar{\mathbf{D}}(\lambda)$, dělme λ a vezměme limitu $\lambda\to 0_+$. Použitím (4.6) tak dostáváme, že pro všechna $\tilde{\mathbf{S}}\in\mathbb{R}^{d\times d}$ platí

$$
\tilde{\mathbf{S}}:\left(\mathbf{D}-\left(\frac{|\mathbf{S}|-\tau_*}{2\mu}\right)^{\frac{1}{r-1}}\frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|}\right)\geq 0.
$$

Jelikož nerovnost platí pro libovolné $\tilde{\mathbf{S}}$, pak nutně platí, že $\mathbf{D}=\left(\frac{|\mathbf{S}|-\tau_*}{2\mu}\right)^{\frac{1}{r-1}}\frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|}$ a jsme hotovi, neboť to znamená, že je $(\mathbf{D},\mathbf{S})\in\mathbf{A}$.

(A4) Pro $\mathbf{D}\neq\mathbf{0}$ použijeme $(4.3)_2$

$$
\mathbf{S}:\mathbf{D}=(\tau_*\frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|}+2\mu|\mathbf{D}|^{r-2}\mathbf{D}):\mathbf{D}=\tau_*|\mathbf{D}|+2\mu|\mathbf{D}|^r\geq 2\mu|\mathbf{D}|^r,
$$

$$
|\mathbf{S}|^{r'}=\left|\tau_*\frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|}+2\mu|\mathbf{D}|^{r-2}\mathbf{D}\right|^{r'}\leq(\tau_*+2\mu|\mathbf{D}|^{r-1})^{r'}.
$$

Navíc výše uvedené odhady platí i pro $\mathbf{D}=\mathbf{0}$, což ověříme dosazením do nerovností. Protože $x\mapsto x^{\frac{r}{r-1}}$ je pro $r>1$ na $(0,\infty)$ konvexní, dostaneme nerovnost

$$
(\tau_*+2\mu|\mathbf{D}|^{r-1})^{r'}\leq\frac{1}{2}(2\tau_*)^{r'}+\frac{1}{2}(4\mu|\mathbf{D}|^{r-1})^{r'}=C+\tilde{C}|\mathbf{D}|^r.
$$

Celkově tedy

$$|\mathsf{S}|^{r'} \leq C + \tilde{C}|\mathsf{D}|^r \iff |\mathsf{D}|^r \geq \frac{|\mathsf{S}|^{r'}}{\tilde{C}} - \frac{C}{\tilde{C}}.$$

Použijeme obdržené nerovnosti a vidíme, že podmínka (A4) skutečně platí

$$\mathsf{S} : \mathsf{D} \geq 2\mu|\mathsf{D}|^r = \mu(|\mathsf{D}|^r + |\mathsf{D}|^r) \geq \mu\Big(|\mathsf{D}|^r + \frac{|\mathsf{S}|^{r'}}{\tilde{C}} - \frac{C}{\tilde{C}}\Big).$$

□

Podívejme se nyní na formulaci a důkaz existence slabého řešení problému (1)–(3) za předpokladu, že vazká část Cauchyho tenzoru napětí $\mathbf{S}$ není svázána funkčím vztahem s tenzorem rychlosti deformace $\mathbf{D}(\boldsymbol{v})$, nýbrž dvojice $(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}), \mathbf{S})$ tvoří obecně prvky nějakého maximálního monotónního r-grafu $\mathbf{A}$. Rozdíl ve slabé formulaci bude tedy ten, že nebudeme v rovnici (2) psát $\mathbf{S}(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}))$, ale pouze $\mathbf{S}$ a slabým řešením pro nás bude dvojice funkcí $(\boldsymbol{v}, \mathbf{S})$ taková, že $(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}), \mathbf{S})$ bude patřit do grafu $\mathbf{A}$ (pro skoro všechna $x \in \Omega$).

Věta 12 (Existence a jednoznačnost)**.** *Nechť $r \in (1, \infty)$. Buď $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^{d\times d}_{sym} \times \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ maximální monotónní r-graf, který splňuje podmínky (A1)–(A4). Nechť je dána funkce $\boldsymbol{f} \in L^{r'}(\Omega)^d$. Pak existuje dvojice $(\boldsymbol{v}, \mathbf{S})$ taková, že $\boldsymbol{v} \in W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$, $\mathbf{S} \in L^{r'}(\Omega)^{d\times d}$ a platí, že*

$$\int_\Omega \mathbf{S} : \nabla \boldsymbol{\omega} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\omega} \,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechny } \boldsymbol{\omega} \in W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}, \tag{4.7}$$

$$(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}), \mathbf{S}) \in \mathbf{A} \qquad \text{pro skoro všechna } x \in \Omega, \tag{4.8}$$

a tedy $\boldsymbol{v}$ je slabým řešením soustavy (1)–(3).

Jestliže navíc $\mathbf{A}$ splňuje podmínku

(A2) Pro všechna $(\mathbf{D}_1, \mathbf{S}_1), (\mathbf{D}_2, \mathbf{S}_2) \in \mathbf{A}$ platí*

$$(\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2) : (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2, \tag{4.9}$$

pak existuje právě jedno slabé řešení.

Důkaz Věty 12. Způsob, jak tuto větu dokázat, čerpáme ze sekce 1.3 v [3]. Použitím věty 10 vybereme selekci $\mathbf{S}_*$, která je borelovsky měřitelná a zavedeme její ε-zhlazení $\mathbf{S}^\varepsilon_*$ stejně, jako se zhlazují funkce s hodnotami v $\mathbb{R}$. Právě díky borelovské měřitelnosti selekce $\mathbf{S}_*$ bude mít tato definice smysl. Máme tedy

$$\mathbf{S}^\varepsilon_*(\mathbf{X}) := (\mathbf{S}_* * \rho^\varepsilon)(\mathbf{X}) = \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \mathbf{S}_*(\mathbf{Y}) \rho^\varepsilon(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \,\mathrm{d}\mathbf{Y}, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}, \tag{4.10}$$

kde $\rho^\varepsilon(\mathbf{Y}) = \frac{1}{\varepsilon^{d^2}} \rho\left(\frac{\mathbf{Y}}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$ a $\rho \in C^\infty_0(\mathbb{R}^{d\times d}_{sym})$ je zhlazující jádro, tedy radiálně symetrická funkce s nosičem v množině $B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ a s vlastností $\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \rho(\mathbf{Y}) \,\mathrm{d}\mathbf{Y} = 1$.

Použijeme opět Galerkinovu aproximaci. Buď tedy $\{\boldsymbol{\omega}_j\}_{j=1}^\infty$ spočetná hustá lineárně nezávislá podmnožina prostoru $W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$. Zafixujme přirozené číslo N. K danému ε z předchozí definice zhlazení najdeme funkci tvaru $\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N} = \sum_{j=1}^N c_j^{\varepsilon,N} \boldsymbol{\omega}_j$, kde koeficienty $c_j^{\varepsilon,N}$ zvolíme tak, aby funkce $\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}$ řešily soustavu N rovnic:

$$\int_\Omega \mathbf{S}^\varepsilon_*\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N})\big) : \nabla \boldsymbol{\omega}_j \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\omega}_j \,\mathrm{d}x \qquad (j = 1, \dots, N). \tag{4.11}$$

Všimneme si, že se jedná o stejnou situaci jako v důkazu v předchozí sekci. Z podmínky $(A4)_*$ a použitím stejných technik obdržíme existenci takové funkce $\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}$ a odhad

$$\|\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}\|_{1,r} + \|\mathbf{S}_*\big(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N})\big)\|_{r'} \le C(N), \tag{4.12}$$

musíme ale ještě ověřit, že se podmínka $(A4)_*$ v analogii přenese i na "ε-zhlazení" selekce $\mathbf{S}_*$, t.j., že platí následující podmínka

$(A4)_*^\varepsilon$ Existuje $\varepsilon_0 > 0$ a konstanty $C > 0, m \geq 0$ takové, že pro všechna $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ platí $\quad \mathbf{S}_*^\varepsilon(\mathbf{D}) : \mathbf{D} \geq C(|\mathbf{D}|^r + |\mathbf{S}_*^\varepsilon(\mathbf{D})|^{r'}) - m, \quad$ pro všechna $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$.

Dokažme nejdříve, že podmínka $(A4)_*$ implikuje analogickou růstovou podmínku selekce $\mathbf{S}_*$ jako byla podmínka (ii). Budeme již postupovat rychleji, podotkněme jen, že je pouze potřeba správně použít ε-Youngovu nerovnost. Stejně tak zde budeme psát pro konstanty stále C a m, i když se po použití různých nerovností změní

$$\begin{aligned} &C(|\mathbf{D}|^r + |\mathbf{S}_*(\mathbf{D})|^{r'}) - m \leq \mathbf{S}_*(\mathbf{D}) : \mathbf{D} \leq \varepsilon|\mathbf{S}_*|^{r'} + C(\varepsilon)|\mathbf{D}|^r + m \\ \Rightarrow &|\mathbf{S}_*|^{r'} \leq C(|\mathbf{D}|^{r-1} + m) \leq C|\mathbf{D}|^{r-1} + m. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Rozepišme tedy nyní výraz

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_*^\varepsilon(\mathbf{D}) : \mathbf{D} &= \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \mathbf{S}_*(\mathbf{Y})\rho^\varepsilon(\mathbf{D}-\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} : \mathbf{D} = \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \mathbf{S}_*(\mathbf{D}-\mathbf{Y})\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} : \mathbf{D} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \mathbf{S}_*(\mathbf{D}-\mathbf{Y}) : (\mathbf{D}-\mathbf{Y})\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} + \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \mathbf{S}_*(\mathbf{D}-\mathbf{Y}) : \mathbf{Y}\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Pro první integrál máme

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \mathbf{S}_*(\mathbf{D}-\mathbf{Y}) : (\mathbf{D}-\mathbf{Y})\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \Big(C|(\mathbf{D}-\mathbf{Y})|^r + C|\mathbf{S}_*(\mathbf{D}-\mathbf{Y})|^{r'} - m\Big)\,\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} \\ &= C\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} |(\mathbf{D}-\mathbf{Y})|^r\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} + C\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} |\mathbf{S}_*(\mathbf{D}-\mathbf{Y})|^{r'}\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} - m \\ &\geq C\left|\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} (\mathbf{D}-\mathbf{Y})\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y}\right|^r + C\left|\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \mathbf{S}_*(\mathbf{D}-\mathbf{Y})\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y}\right|^{r'} - m \\ &= C|\mathbf{D}|^r + C|\mathbf{S}_*^\varepsilon(\mathbf{D})|^{r'} - m, \end{aligned}$$

kde jsme v poslední nerovnosti použili Jensenovu nerovnost, což je možné, jelikož "$\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y}$" je pravděpodobnostní míra a funkce $|\cdot|^r$ je konvexní. Odhadněme ještě zespodu druhý integrál

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \mathbf{S}_*(\mathbf{D}-\mathbf{Y}) : \mathbf{Y}\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} \\ &\geq -\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} |\mathbf{S}_*(\mathbf{D}-\mathbf{Y})||\mathbf{Y}|\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} \\ &\overset{(4.13)}{\geq} -\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \big(C|\mathbf{D}-\mathbf{Y}|^{r-1} + m\big)\,|\mathbf{Y}|\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} \\ &\overset{(1.1)}{\geq} -\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \big(C(r)|\mathbf{D}|^{r-1} + C(r)|\mathbf{Y}|^{r-1} + m\big)\,|\mathbf{Y}|\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} \\ &= -C(r)|\mathbf{D}|^{r-1}\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} |\mathbf{Y}|\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} - C(r)\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} |\mathbf{Y}|^r\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} - m\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} |\mathbf{Y}|\rho^\varepsilon(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Při zavedení substituce $\mathsf{Z} := \frac{\mathsf{Y}}{\varepsilon}$ mají tyto integrály tvar

$$-C(r)|\mathsf{D}|^{r-1}\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} |\mathsf{Z}|\rho(\mathsf{Z})\,\mathrm{d}\mathsf{Z} - C(r)\varepsilon^r \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} |\mathsf{Z}|^r\rho(\mathsf{Z})\,\mathrm{d}\mathsf{Z} - m\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} |\mathsf{Z}|\rho(\mathsf{Z})\,\mathrm{d}\mathsf{Z}.$$

Nyní použitím vlastností ρ je snadné odhadnout výsledné integrály jako

$$\leq -C\varepsilon(|\mathsf{D}|^{r-1} + 1).$$

Nyní kombinací výše uvedených nerovností vidíme, že dokážeme najít dostatečně malé ε_0 tak, že $(A4)^{\varepsilon}_{*}$ platí.

Mohli bychom pomocí věty v předchozí sekci nalézt slabé řešení pro operátor $\mathsf{S}^{\varepsilon}_{*}$, budeme ale postupovat trochu jinak. Necháme $N \in \mathbb{N}$ zafixované a podíváme se na odhad (4.12). Z něj vyplývá, že

$$|c_j^{\varepsilon,N}| \leq C(N) \quad \text{pro všechna } j = 1, \dots, N.$$

Podívejme se nyní na limitu $\varepsilon \to 0_+$. Díky Heineho větě si pod touto limitou můžeme představovat posloupnosti tvaru $\varepsilon_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0_+$. Jelikož pro každé $j \in \mathbb{N}$ je $c_j^{\varepsilon,N}$ omezená posloupnost v $\mathbb{R}$, můžeme z ní vybrat silně konvergentní podposloupnost, kterou budeme opět značit $c_j^{\varepsilon,N}$ tak, že

$$c_j^{\varepsilon,N} \longrightarrow c_j^N \quad \text{silně v } \mathbb{R} \ \text{ pro } \varepsilon \to 0_+. \tag{4.14}$$

Zároveň dostaneme existenci funkce $\boldsymbol{v}^N$ takové, že

$$\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N} \longrightarrow \boldsymbol{v}^N \quad \text{silně v } W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}. \tag{4.15}$$

Z reflexivity prostoru $L^{r'}(\Omega)^{d\times d}$ a odhadu (4.12) též dostaneme, že existuje slabě konvergentní podposloupnost

$$\mathsf{S}^{\varepsilon}_{*}\big(\mathsf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N})\big) \rightharpoonup \mathsf{S}^N \quad \text{slabě v } L^{r'}(\Omega)^{d\times d}. \tag{4.16}$$

Vzhledem k tomu, že $\boldsymbol{\omega}_j \in W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$, je $\nabla\boldsymbol{\omega}_j \in L^r(\Omega)^{d\times d}$ a ze slabé konvergence (4.16) dostaneme

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_\Omega \mathsf{S}^{\varepsilon}_{*}\big(\mathsf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N})\big) : \nabla\boldsymbol{\omega}_j \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathsf{S}^N : \nabla\boldsymbol{\omega}_j \,\mathrm{d}x \overset{(4.11)}{=} \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\omega}_j \,\mathrm{d}x, \tag{4.17}$$

pro všechna $j = 1, \dots, N$. Ukážeme, že $(\mathsf{D}(\boldsymbol{v}^N), \mathsf{S}^N)$ leží v grafu A. Na selekci S_* se zřejmě přenese monotonie grafu A, a proto pro každé dvě matice $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ platí, že

$$(\mathsf{S}_*(\mathsf{A}) - \mathsf{S}_*(\mathsf{B})) : (\mathsf{A} - \mathsf{B}) \geq 0. \tag{4.18}$$

Přičteme a odečteme $\mathsf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N})$ v pravé závorce a upravíme na

$$(\mathsf{S}_*(\mathsf{A}) - \mathsf{S}_*(\mathsf{B})) : (\mathsf{A} + \mathsf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathsf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathsf{B}) \geq 0$$

$$(\mathsf{S}_*(\mathsf{A}) - \mathsf{S}_*(\mathsf{B})) : (\mathsf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathsf{B}) \geq (\mathsf{S}_*(\mathsf{A}) - \mathsf{S}_*(\mathsf{B})) : (\mathsf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathsf{A}).$$

Nerovnosti přenásobíme výrazem $\rho^\varepsilon(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{A})$ a zintegrujeme podle $\mathbf{A}$

$$\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} (\mathbf{S}_*(\mathbf{A}) - \mathbf{S}_*(\mathbf{B})) : (\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{B})\rho^\varepsilon(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{A})\,\mathrm{d}\mathbf{A}$$
$$\geq \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} (\mathbf{S}_*(\mathbf{A}) - \mathbf{S}_*(\mathbf{B})) : (\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{A})\rho^\varepsilon(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{A})\,\mathrm{d}\mathbf{A}.$$

Výraz na levé straně můžeme díky nezávislosti výrazů na integrační proměnné upravit na

$$\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} (\mathbf{S}_*(\mathbf{A}) - \mathbf{S}_*(\mathbf{B})) : (\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{B})\rho^\varepsilon(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{A})\,\mathrm{d}\mathbf{A}$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \mathbf{S}_*(\mathbf{A})\rho^\varepsilon(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{A})\,\mathrm{d}\mathbf{A} - \mathbf{S}_*(\mathbf{B})\right) : (\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{B})$$
$$= \big(\mathbf{S}^\varepsilon_*(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{S}_*(\mathbf{B})\big) : (\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{B}).$$

Podívejme se nyní na druhý integrál. Zavedeme substituci $\mathbf{Z} := \mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{A}$

$$\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} (\mathbf{S}_*(\mathbf{A}) - \mathbf{S}_*(\mathbf{B})) : (\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{A})\rho^\varepsilon(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{A})\,\mathrm{d}\mathbf{A}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \big(\mathbf{S}_*(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{Z}) - \mathbf{S}_*(\mathbf{B})\big) : \mathbf{Z}\rho^\varepsilon(\mathbf{Z})\,\mathrm{d}\mathbf{Z}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \mathbf{S}_*(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{Z}) : \mathbf{Z}\rho^\varepsilon(\mathbf{Z})\,\mathrm{d}\mathbf{Z} - \mathbf{S}_*(\mathbf{B}) : \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \mathbf{Z}\rho^\varepsilon(\mathbf{Z})\,\mathrm{d}\mathbf{Z}.$$

Druhý integrál je roven nule díky lichosti funkce $\mathbf{Z} \mapsto \mathbf{Z}$ a obdržíme nerovnost

$$\big(\mathbf{S}^\varepsilon_*(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{S}_*(\mathbf{B})\big) : (\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{B})$$
$$\geq \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \mathbf{S}_*(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{Z}) : \mathbf{Z}\rho^\varepsilon(\mathbf{Z})\,\mathrm{d}\mathbf{Z}. \tag{4.19}$$

Vezmeme libovolnou nezápornou funkci $\varphi \in L^\infty$, vynásobíme ji nerovnost (4.19) a vše zintegrujeme přes Ω:

$$\int_\Omega \varphi(x)\,\big(\mathbf{S}^\varepsilon_*(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{S}_*(\mathbf{B})\big) : (\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{B})\,\mathrm{d}x$$
$$\geq \int_\Omega \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \mathbf{S}_*(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{Z}) : \mathbf{Z}\rho^\varepsilon(\mathbf{Z})\,\mathrm{d}\mathbf{Z}\,\mathrm{d}x. \tag{4.20}$$

Naším cílem bude nyní ukázat, že výraz na pravé straně v (4.20) konverguje pro $\varepsilon \to 0_+$ k nule. Odhadněme nejdříve integrál v (4.19). Používáme růstový odhad, trojúhelníkovou a mocninnou nerovnost (Lemma (5))

$$\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \mathbf{S}_*(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{Z}) : \mathbf{Z}\rho^\varepsilon(\mathbf{Z})\,\mathrm{d}\mathbf{Z}$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \big(C(r)\,\big(|\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N})|^{r-1} + |\mathbf{Z}|^{r-1}\big) + m\big)\,|\mathbf{Z}|\rho^\varepsilon(\mathbf{Z})\,\mathrm{d}\mathbf{Z}.$$

Zavedeme substituci $\mathbf{Y} := \frac{\mathbf{Z}}{\varepsilon}$ a upravíme na (můžeme se omezit na $\varepsilon \in (0,1)$)

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \left(C(r)\left(|\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N})|^{r-1} + |\mathbf{Z}|^{r-1}\right) + m\right) |\mathbf{Z}|\rho^{\varepsilon}(\mathbf{Z})\,\mathrm{d}\mathbf{Z} \\
=&\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \left(C(r)\left(|\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N})|^{r-1} + \varepsilon^{r-1}|\mathbf{Y}|^{r-1}\right) + m\right) \varepsilon|\mathbf{Y}|\rho(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} \\
\leq&\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \left(C(r)|\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N})|^{r-1} + C(r)\cdot 1 + m\right) \varepsilon\rho(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} \\
=&\varepsilon\left(C(r)|\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N})|^{r-1} + C(r)\cdot 1 + m\right)\int_{\mathbb{R}^{d\times d}_{sym}} \rho(\mathbf{Y})\,\mathrm{d}\mathbf{Y} \\
=&\varepsilon\left(C(r)|\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N})|^{r-1} + \tilde{C}(r)\right).
\end{aligned}$$

Druhý integrál v (4.20) teď budeme moci odhadnout pomocí Hölderovy nerovnosti

$$\begin{aligned}
\leq&\varepsilon\int_{\Omega}\varphi(x)\left(C(r)|\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N})|^{r-1} + \tilde{C}(r)\right)\,\mathrm{d}x \\
\leq&\varepsilon\|\varphi\|_{\infty}\|C(r)|\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N})|^{r-1} + \tilde{C}(r)\|_{1} \\
\leq&\varepsilon\|\varphi\|_{\infty}\left(C(r)\int_{\Omega}|\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N})|^{r-1}\,\mathrm{d}x + \tilde{C}(r)|\Omega|\right) \overset{\varepsilon\to 0_+}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Pro levou stranu v nerovnosti (4.20) platí díky (4.15) a slabé konvergenci $\mathbf{S}^{\varepsilon}_{*}(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}))$ (4.16)

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_{\Omega}\left(\mathbf{S}^{\varepsilon}_{*}(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{S}_{*}(\mathbf{B})\right) : (\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{\varepsilon,N}) - \mathbf{B})\varphi\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega}\left(\mathbf{S}^{N} - \mathbf{S}_{*}(\mathbf{B})\right) : (\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{N}) - \mathbf{B})\varphi\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Přejdeme-li tedy v nerovnosti (4.19) k limitě $\varepsilon \to 0_+$, dostaneme nerovnost

$$\int_{\Omega}\left(\mathbf{S}^{N} - \mathbf{S}_{*}(\mathbf{B})\right) : (\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{N}) - \mathbf{B})\varphi\,\mathrm{d}x \geq 0, \tag{4.21}$$

pro všechny $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$, pro všechny $\varphi \geq 0$ a s.v. $x \in \Omega$. Jelikož má tato integrální nerovnost platit pro všechny funkce $\varphi \geq 0$, musí platit

$$\left(\mathbf{S}^{N} - \mathbf{S}_{*}(\mathbf{B})\right) : (\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{N}) - \mathbf{B}) \geq 0, \text{ pro s.v. } x \in \Omega \tag{4.22}$$

a pro libovolné $\mathbf{B}$, což díky $(A3)_*$ implikuje $(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{N}), \mathbf{S}^{N}) \in \mathbf{A}$, pro s.v. $x \in \Omega$.

Vezměme nakonec limitu $N \longrightarrow \infty$. Jako v předchozí sekci vynásobíme rovnice (4.17) koeficienty c^{N}_{j} a rovnice sečteme. Dostaneme

$$\int_{\Omega}\mathbf{S}^{N} : \nabla\boldsymbol{v}^{N}\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega}\mathbf{S}^{N} : \mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{N})\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}^{N}\,\mathrm{d}x, \tag{4.23}$$

Nyní nám již stejně jako předtím stačí opět použít apriorní odhady a Kornovu nerovnost, abychom obdrželi

$$\|\boldsymbol{v}^{N}\|_{1,r} + \|\mathbf{S}_{*}(\mathbf{D}(\boldsymbol{v}^{N}))\|_{r'} \leq C, \tag{4.24}$$

a s tím díky reflexivitě prostorů i vybrané slabě konvergentní posloupnosti

$$\boldsymbol{v}^N \rightharpoonup \boldsymbol{v} \quad \text{slabě ve } W^{1,r}_{0,\mathrm{div}} \tag{4.25}$$

$$\mathsf{S}^N \rightharpoonup \mathsf{S} \quad \text{slabě v } L^{r'}(\Omega)^{d\times d} \tag{4.26}$$

a z toho při přechodu k limitě $N \longrightarrow \infty$ v (4.17)

$$\int_\Omega \mathsf{S} : \mathsf{D}(\boldsymbol{\omega}_j)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\omega}_j\,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } j\in\mathbb{N}. \tag{4.27}$$

Z hustoty množiny $\{\boldsymbol{\omega}_j\}_{j=1}^\infty$ v prostoru $W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}$ finálně dostaneme

$$\int_\Omega \mathsf{S} : \nabla\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechny } \boldsymbol{\omega}\in W^{1,r}_{0,\mathrm{div}}, \tag{4.28}$$

a tedy podmínku (4.7).

Zbývá ovšem ještě ukázat, že nalezené řešení $(\mathsf{D}(\boldsymbol{v}),\mathsf{S})$ patří do grafu A. Pro jednoduchost budeme psát D místo $\mathsf{D}(\boldsymbol{v})$ a D^N místo $\mathsf{D}(\boldsymbol{v}^N)$. Vynásobíme rovnice (4.27) koeficienty c_j^N, rovnice sečteme a dostaneme

$$\int_\Omega \mathsf{S} : \mathsf{D}^N\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}^N\,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } j\in\mathbb{N}. \tag{4.29}$$

S ohledem na právě dokázanou rovnost a na rovnost (4.23) dostaneme díky (4.25)

$$\lim_{N\to\infty}\int_\Omega \mathsf{S}^N : \mathsf{D}^N\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\int_\Omega \mathsf{S} : \mathsf{D}^N\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathsf{S} : \mathsf{D}\,\mathrm{d}x. \tag{4.30}$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\int_\Omega \big(\mathsf{S}^N - \mathsf{S}_*(\mathsf{D})\big) : \big(\mathsf{D}^N - \mathsf{D}\big)\ \mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to\infty}\int_\Omega \mathsf{S}^N : \mathsf{D}^N - \mathsf{S}_*(\mathsf{D}) : \mathsf{D}^N - \mathsf{S}^N : \mathsf{D} + \mathsf{S}_*(\mathsf{D}) : \mathsf{D}\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{N\to\infty}\int_\Omega \mathsf{S}^N : \mathsf{D}^N\,\mathrm{d}x - \lim_{N\to\infty}\int_\Omega \mathsf{S}_*(\mathsf{D}) : \mathsf{D}^N\,\mathrm{d}x\\
&- \lim_{N\to\infty}\int_\Omega \mathsf{S}^N : \mathsf{D}\,\mathrm{d}x + \lim_{N\to\infty}\int_\Omega \mathsf{S}_*(\mathsf{D}) : \mathsf{D}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega \mathsf{S} : \mathsf{D}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathsf{S}_*(\mathsf{D}) : \mathsf{D}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathsf{S} : \mathsf{D}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathsf{S}_*(\mathsf{D}) : \mathsf{D}\,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

Jelikož je A monotónní, t.j. $\big(\mathsf{S}^N - \mathsf{S}_*(\mathsf{D})\big) : \big(\mathsf{D}^N - \mathsf{D}\big) \geq 0$, je

$\big(\mathsf{S}^N - \mathsf{S}_*(\mathsf{D})\big) : \big(\mathsf{D}^N - \mathsf{D}\big) = |\,\big(\mathsf{S}^N - \mathsf{S}_*(\mathsf{D})\big) : \big(\mathsf{D}^N - \mathsf{D}\big)\,|$, a proto

$$\lim_{N\to\infty}\int_\Omega |\,\big(\mathsf{S}^N - \mathsf{S}_*(\mathsf{D})\big) : \big(\mathsf{D}^N - \mathsf{D}\big)\,|\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.31}$$

Tato rovnice vlastně říká, že posloupnost $\big(\mathsf{S}^N - \mathsf{S}_*(\mathsf{D})\big) : \big(\mathsf{D}^N - \mathsf{D}\big)$ konverguje k $\mathbf{0}$ v prostoru $L^1(\Omega)$. Jestliže v tomto prostoru konverguje silně, konverguje proto k nulové funkci i slabě. Pro všechny funkce $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ tedy platí, že

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega \big(\mathsf{S}^N - \mathsf{S}_*(\mathsf{D})\big) : \big(\mathsf{D}^N - \mathsf{D}\big)\,\varphi\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.32}$$

Z konvergencí (4.25) a (4.26) dostaneme

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega \mathsf{S}^N : \mathsf{D}^N \varphi\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_\Omega \mathsf{S}^N(\mathsf{D}) : \mathsf{D}\varphi\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_\Omega \mathsf{S} : \mathsf{D}\varphi\,\mathrm{d}x. \tag{4.33}$$

Jelikož je graf monotónní, dostaneme, že pro všechny matice $\mathsf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym}$ a všechny nezáporné funkce $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ platí, že

$$0 \le \lim_{N\to\infty} \int_\Omega \big(\mathsf{S}^N - \mathsf{S}_*(\mathsf{B})\big) : \big(\mathsf{D}^N - \mathsf{B}\big)\,\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (\mathsf{S} - \mathsf{S}_*(\mathsf{B})) : (\mathsf{D} - \mathsf{B})\,\varphi\,\mathrm{d}x, \tag{4.34}$$

kde jsme opět využily (4.25), (4.26) a (4.33). Jelikož tato nerovnost platí pro libovolnou funkci $0 \le \varphi \in L^\infty(\Omega)$, dostaneme, že musí platit

$$0 \le (\mathsf{S} - \mathsf{S}_*(\mathsf{B})) : (\mathsf{D} - \mathsf{B}) \quad \text{pro všechny } \mathsf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{sym} \quad \text{a s.v. } x \in \Omega. \tag{4.35}$$

Z toho už použitím $(A3)^*$ obdržíme $(\mathsf{D}(\boldsymbol{v}), \mathsf{S}) \in \mathsf{A}$ pro s.v. $x \in \mathsf{A}$.

Jednoznačnost řešení se nyní ukáže stejně jako v předchozí kapitole. Dostaneme ale pouze jednoznačnost $\boldsymbol{v}$. Abychom dostali jednoznačnost tenzoru napětí S, potřebovali bychom analogickou podmínku $(A2)^*$ i pro tenzor S.

$\square$

Závěr

Na závěr dodejme, že tento výsledek je pro maximální monotónní r-graf pro třídu L^r-prostorů optimální. Věty by se daly ještě zobecnit v tom smyslu, že bychom pro data uvažovali $\boldsymbol{f} \in (W^{1,r}_{0,\mathrm{div}})^*$, aby v integrálech vycházela příslušná dualita. Jsou známy výsledky i pro komplikovanější soustavy rovnic, kde se členy které my jsme zanedbali, uvažují také. Čtenáře bych zde odkázal např. na literaturu [6] nebo [3].

Seznam použité literatury

[1] ALBERTI, G., AMBROSIO, L. *A geometrical approach to monotone functions in* $\mathbb{R}^N$. Math. Z., 230(2), 259-316.

[2] AUBIN, J.-P., FRANKOWSKA, H. *Set-valued analysis.* Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 2009.

[3] BULÍČEK, M., GWIAZDA, P., MÁLEK, J., SWIERCZEWSKA-GWIAZDA, A. AND RAJAGOPAL K.M. *On Flows of fluids described by an implicit constitutive equation characterized by a maximal monotone graph.* Dostupné z URL `http://ncmm.karlin.mff.cuni.cz/preprints/11100193452pr7.pdf`[cit. 2011-05-26].

[4] EVANS, L.C. *Partial differential equations.* 2nd ed. Providence, R.I.: American Mathematical Society, c2010.

[5] FELCMAN, J. *Matematické modelování ve fyzice.* Dostupné z URL `http://kubaz.cz/texty/FelcmanMatematickeModelovaniVeFyzice.pdf`[cit. 2011-05-26].

[6] GWIAZDA, P., MÁLEK, J., AND SWIERCZEWSKA, A. *On flows of an incompressible fuid with discontinuous power-law-like rheology.* Comput. Math. Appl. 53 (2007), 531–546.

[7] JOHN, O., KUFNER, A., FUČÍK, S. *Function spaces.* 1.vydání. Praha: Academia, 1977.

[8] LUKEŠ, J. *Zápisky z funkcionální analýzy.* UK v Praze - Nakladatelství Karolinum, 2002.

[9] MÁLEK J., NEČAS J., ROKYTA M., RŮŽIČKA M. *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs* 1st ed. London: Chapman and Hall, 1996.

[10] MÁLEK, J., RAJAGOPAL, K.R. Mathematical Issues Concerning the Navier-Stokes Equations and Some if Its Generalizations. In *Handbook of differential equations:Evolutionary equations. Volume 2.* 1st ed. Amsterdam: Elsevier, 2005. Kapitola 5, s. 371-459

[11] ROKYTA M., JOHN O., MÁLEK J., POKORNÝ M., STARÁ J., *Úvod do teorie parciálních diferenciálních rovnic.* Dostupné z URL `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/skripta-pdr/`[cit. 2011-05-26].

[12] RUDIN, W. *Analýza v reálném a komplexním oboru.* Vyd. 2., přeprac. Praha: Academia, 2003.

[13] SPENCER, A.J.M. Theory of invariants, Continuum Physics I, New York: Academic Press, 1971