Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Karel Kadlec

Spojité modifikace stochastických procesů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc.
Studijní program: Matematika

2010

Rád bych poděkoval panu prof. RNDr. Josefu Štěpánovi za hodnotné rady, doporučenou literaturu a vstřícný přístup při vedení bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne Karel Kadlec

Obsah

Název práce: Spojité modifikace stochastických procesů
Autor: Karel Kadlec
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
e-mail vedoucího: Josef.Stepan@mff.cuni.cz
Abstrakt: V této bakalářské práci se zabývám spojitou modifikací stochastických procesů s hodnotami v metrických prostorech. V první části jsou definovány základní pojmy týkající se tohoto problému a stručně vysvětleny některé vztahy mezi nimi. Ve druhé části prezentuji několik konstrukcí spojitých modifikací náhodných procesů a předvádím důkaz jejich existence vždy za platnosti některých předpokladů. Začínám speciálním případem a to stochastickým procesem s hodnotami v $\mathbb{R}$ a poté předvádím důkaz existence za určitých podmínek spojité modifikace stochastického procesu s hodnotami v obecnějším úplném separabilním metrickém prostoru, konkrétně Kolmogorovu-Chentsovovu větu.
Klíčová slova: stochastický proces, Kolmogorova věta, metrický prostor, spojitá modifikace

Title: The continuous versions of the stochastic processes
Author: Karel Kadlec
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor's e-mail address: Josef.Stepan@mff.cuni.cz
Abstract: In this bachelor thesis, I am concerned with the continuous version of the stochastic processes with values in metric spaces. Basic terms of this problems are defined and some relations between them are briefly explained in the first part. In the second part, I present some constructions of the continuous modifications and demonstrate proofs of their existence under certain conditions. The paper starts with a special case: the stochastic process with values in $\mathbb{R}$. I also present a proof of the existence of the continuous modification of the stochastic process with values in more general complete separable metric space under certain conditions, to be specific, the Kolmogorov-Chentsovov's theorem.
Keywords: the stochastic process, the Kolmogorov's theorem, the metric space, the continuous version

0.1 Úvod

Mým úkolem je předvést důkaz existence spojité modifikace pro stochastický proces s hodnotami v obecnějším metrickém prostoru. Předtím ale začínám s podrobnějšími důkazy existence takové modifikace za určitých předpokladů pro procesy s hodnotami v metrickém prostoru reálných čísel s příslušnou metrikou. Kromě jiného podrobně rozeberu důkaz Kolmogorovi věty o spojité modifikaci. Dále bylo mým úkolem poté, jak jsem se již zmínil, předvést důkaz mnohem obecnějšího tvrzení a to Kolmogorov-Chentsovovy věty, která se zabývá existencí spojité modifikace pro stochastický proces s hodnotami v úplném separabilním metrickém prostoru. Kromě předvedení několika typů konstrukcí spojitých modifikací stochastických procesů je také součástí této práce přehledné shrnutí některých důležitých až klíčových pojmů pro porozumění této teorii.

Kapitola 1

Definice a pojmy

1.1 Pojem stochastického procesu

Klíčový pojem tohoto tématu je pojem stochastického procesu. Proto je zřejmě vhodné začít jeho definováním.

Definice 1 *(Stochastický proces se stavy v metrickém prostoru)*
Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, M separabilní metrický prostor a $T \subset [0, \infty)$ interval. Stochastický proces se stavy v M a s časem v T je definován jako množina náhodných veličin $(X(t), t \in T)$ takových, že $\forall_{t \in T} : X(t)$ je definovaná na $(\Omega, \mathcal{A})$ s hodnotami v prostoru $(M, \mathcal{B}(M))$.

Velmi často se pracuje s jedním konkrétním speciálním případem metrického prostoru, a to s množinou reálných čísel (s metrikou definovanou klasicky s pomocí normy absolutní hodnoty), pro který jsou mlčky předpokládány pro něj známé užitečné vlastnosti metrických prostorů, jako například úplnost a separabilita. Proto definuji ještě speciální případ stochastického procesu se stavy v tomto metrickém prostoru a tímto speciálním případem se budu nemalou část tohoto textu zabývat.

Definice 2 *(Stochastický proces)*
Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Stochastický proces je definován jako stochastický proces se stavy v $\mathbb{R}$ a s časem v $[0, \infty)$.

Také mohou být v následujícím textu a v teorii která se ho týká užitečné následující tři pojmy:

Definice 3 *(Trajektorie stochastického procesu)*
Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobností prostor, M separabilní metrický prostor, $(X(t), t \in T)$ stochastický proces se stavy v M a s časem T definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Potom $\forall_{\omega \in \Omega} : X_\omega = X_\omega(.) \in M^T$ se nazývá trajektorie stochastického procesu $(X(t), t \in T)$.

Definice 4 *(Rozdělení stochastického procesu)*
Nechť M je separabilní metrický prostor, $(X(t), t \in T)$ stochastický proces se stavy v M a s časem v T. Rozdělení $(X(t), t \in T)$ je definováno jako pravděpodobnostní míra $P_{(X(t), t \in T)}$ definovaná na $(M^T, \mathcal{B}(M)^T)$ tak, že

$$\forall_{B \in \mathcal{B}(M)^T} : P_{(X(t), t \in T)}(B) = P[(X(t), t \in T) \in B].$$

Jako $k(T)$ označím množinu všech konečných podmnožin příslušné množiny T.

Definice 5 *(Konečměrozměrná rozdělení stochastického procesu)*
Nechť M je separabilní metrický prostor, $(X(t), t \in T)$ stochastický proces se stavy v M a s časem v T. $\forall_{J \in k(T)}$: pravděpodobností míra $P_{(X(t), t \in J)}$ definovaná na $(E^J, \mathcal{B}(E)^J)$ a taková, že

$$\forall_{B \in \mathcal{B}(E)^J} : P_{(X(t), t \in J)}(B) = P[(X(t), t \in J) \in B].$$

je nazývána konečně-rozměrným rozdělením $(X(t), t \in T)$.

Stochastický proces je vlastně funkce dvou proměnných. Při pevně daném $t \in T$ je $(X(t), t \in T)$ náhodná veličina

$$X(t) = X_{(.)}(t) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{B}(M)),$$

což přesně kromě jiného říká *Definice 1.* Pro pevné $\omega \in \Omega$ jde o funkci

$$X_\omega(.) : T \to M.$$

Proto je možné pro každý stochastický proces definovat zobrazení (zatím označím jako)

$$\tilde{X} : \Omega \to M^T$$

a to tak že

$$\forall_{\omega\in\Omega} \tilde{X} : \omega \mapsto X_\omega(.),$$

neboli

$$\forall_{\omega\in\Omega} \tilde{X} : \omega \mapsto (X_\omega(t), t \in T).$$

Označím $X \stackrel{\text{def}}{=} (X(t), t \in T)$. Protože $p_{\{t\}} \circ X = X(t)$ (kde $p_{\{t\}}$ je kanonická projekce $(M^T, \mathcal{B}(M)^T) \to (M^{\{t\}} = M, \mathcal{B}(M))$), $\forall_{t\in T} X(t) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{B}(M))$ a $\otimes_{t\in T}(M, \mathcal{B}(M)) = (M^T, \mathcal{B}(M)^T)$, tvrzení I.3.4 [2] říká, že se stochastickým procesem $(X(t), t \in T)$ je tedy možné pracovat jako s náhodnou veličinou

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (M^T, \mathcal{B}(M)^T).$$

Totéž platí i pro všechna konečně-rozměrná rozdělení stochastického procesu X. Stačí $\forall_{J\in k(T)} : T = T_J \stackrel{\text{def}}{=} J$. Zde navíc vzhledem k separabilitě prostoru M a spočetnosti (dokonce konečnosti) množiny J tvrzení I.2.3 [2] říká, že $\otimes_{t\in J}(M, \mathcal{B}(M)) = (M^J, \mathcal{B}(M^J))$. V tomto případě je tedy možné výraz dále upravit na tvar

$$X_J \stackrel{\text{def}}{=} (X(t), t \in J) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (M^J, \mathcal{B}(M^J)).$$

Poznamenám, že $\forall_{J\in k(T)} P_{X_J}$ definovaná klasickým způsobem je pravděpodobnostní míra na $(M^J, \mathcal{B}(M)^J) = (M^J, \mathcal{B}(M^J))$, dále $P_{X_J} = p_J(P_X)$ (kde p_J je kanonická projekce $(M^T, \mathcal{B}(M)^T) \to (M^J, \mathcal{B}(M)^J)$). Neboli

$$\forall_{B\in(M^J,\mathcal{B}(M^J))} : P_X(B_J) = p_J(P_X)(B_J) = P_{p_J\circ X}(B)$$

kde $B \in (M^T, \mathcal{B}(M)^T)$ je měřitelný válec se základnou B_J, vzhledem k tomu, že $p_J : (M^T, \mathcal{B}(M)^T) \to (M^J, \mathcal{B}(M^J))$. Tedy P_X je projektivní limita $\{P_{X_J}, j \in k(T)\}$ a tedy dle I.9.2 [2] je rozdělení každého stochastického procesu X se stavy v M a s časem v T dáno jednoznačně svými konečněrozměrnými rozděleními.

Pro další zobecnění tvrzení o spojitých modifikacích náhodných procesů později bude vhodné definici stochastického procesu rozšířit. V Kolmogorově-Chentsenově větě totiž bude uvažován vícerozměrný (konečněrozměrný) parametr z normovaného lineárního prostoru $(T = R^p, ||.||)$, kde $p \in \mathbb{N}$. Proto už v tomto případě není výstižné říkat "stochastický proces X s časem v T" a tedy budu místo toho používat výraz "stochastický proces X (definovaný) na T" analogicky jako by bylo přirozené nazývat pro pevné ω fuknci $X_\omega(t), t \in T$. Definuji tedy obecně stochastický proces X (definovaný) na T se stavy v metrickém prostoru (M, ρ) pro libovolnou neprázdnou množinu T.

Definice 6 *(Stochastický proces definovaný na indexové množině)*
Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, M separabilní metrický prostor a $T \neq \emptyset$ je množina. Stochastický proces se stavy v M a s časem v T se definuje jako množina náhodných veličin $(X(t), t \in T)$ takových, že $\forall_{t\in T} : X(t)$ je definovaná na $(\Omega, \mathcal{A})$ a má hodnoty v prostoru $(M, \mathcal{B}(M))$.

Speciálními případy jsou již zmíněný stochastický proces na $(R^p, ||.||)$ s hodnotami v (M, ρ) nebo už v *Definici 2* definovaný stochastický proces na $[0, \infty)$ s hodnotami v $(R, |.-.|)$. Pro metrický prostor $(R, |.-.|)$ byla úplnost mlčky předpokládána, zde je třeba jí v předpokladech věty zdůraznit, neboť obecný metrický prostor tuto vlastnost nemusí nutně mít.

1.2 Pojmy modifikace a spojitosti stochastického procesu

Pojem spojité modifikace stochastického procesu a pojmy potřebné k jeho zadefinování zformuluji pro stochastický proces na obecné indexové množině.

Definice 7 *(Ekvivalence stochastických procesů)*
Nechť M je separabilní metrický prostor, $T \neq \emptyset$ množina (speciálně interval $I \subset [0, \infty)$), X_1 a X_2 stochastické procesy se stavy v M a definované na T (speciálně s časem v T). Procesy X_1 a X_2 se nazývají ekvivalentní, jestliže $P_{X_1} = P_{X_2}$ v prostoru M^T.

Dalším klíčovým pojmem tohoto tématu je pojem modifikace stochastického procesu.

Definice 8 *(Modifikace stochastického procesu)*
Nechť M je separabilní metrický prostor, $T \neq \emptyset$ množina, X a Y stochastické procesy se stavy v M definované na T (speciálně s časem v T). Proces Y je modifikací procesu X jestliže,

$$\forall_{t \in T} : P[X(t) = Y(t)] = 1.$$

Je-li stochastický proces Y modifikací stochastického procesu X (neboli X je modifikací procesu Y), potom X a Y jsou ekvivalentní. Tedy při nahrazení nějakého stochastického procesu X s hodnotami v separabilním metrickém prostoru M a časem v T libovolnou jeho modifikací neovlivní jeho rozdělení v M^T.

Dále budu pracovat s indexovou množinou T rovnou metrickému prostoru. Pojem spojitosti stochastického procesu definovaného na metrickém prostoru (M_1, ρ_1) a s hodnotami v separabilním metrickém prostoru (M_2, ρ_2) je při znalosti pojmu spojitosti funkce $(M_1, \rho_1) \to (M_2, \rho_2)$ intuitivní. Přesto zde explicitně definici tohoto pojmu zformuluji.

Definice 9 *(Spojitost stochastického procesu)*

Nechť X je stochastický proces definovaný na metrickém prostoru M_1 a s hodnotami v separabilním metrickém prostoru M_2. Říkáme, že X je spojitý stochastický proces, jestliže platí $\forall_{\omega\in\Omega} : X_\omega$ je spojitá funkce z M_1 do M_2.

Nyní s pomocí předchozích definic zformuluji, co to je spojitá modifikace stochastického procesu.

Definice 10 *(Spojitá modifikace stochastického procesu)*
Nechť X a Y jsou stochastické procesy definované na metricém prostoru M_1 a s hodnotami v separabilním metrickém prostoru M_2. Řekneme, že Y je spojitou modifikací X, jestliže Y je modifikací X (ekvivalentně X je modifikací Y) a současně Y je spojitý.

Další možná vlastnost stochastických procesů, silnější než spojitost, je Hölderovská spojitost. Pro její pohodlnější definování je potřeba si nejprve zavést další užitečný pojem a to pojem modu spojitosti.

Definice 11 *(Modus spojitosti)*
Nechť (M_1, ρ_1), (M_2, ρ_2) jsou metrické prostory, $f : (M_1, \rho_1) \to (M_2, \rho_2)$. Modus spojitosti je definován jako reálná funkce

$$g_f(r) = \sup_{\{s,t\in M_1, \rho_1(s,t)\leq r\}} \rho_2(f(s), f(t)), r > 0.$$

Definice 12 *(Hölderovská spojitost)*
Nechť $f : (M_1, \rho_1) \to (M_2, \rho_2)$, kde (M_1, ρ_1), (M_2, ρ_2) jsou metrické prostory, nechť g_f je její modus spojitosti. Potom řekneme, že f je Hölderovsky spojitá, jestliže

$$\exists_{K>0, c\in R, r_0>0} \forall_{r\in(0,r_0)} g_f(r) \leq Kr^c.$$

Teď už mi nic nebrání pohodlně definovat Hölderovskou spojitost pro stochastický proces a to analogicky jako předtím běžně známou spojitost.

Definice 13 *(Hölderovská spojitost stochastického procesu)*
Nechť M_1 je metrický prostor a M_2 separabilní metrický prostor. Nechť X je stochastický proces definovaný na M_1 a s hodnotami v M_2. X je Hölderovsky spojitý, jestliže $\forall_{\omega\in\Omega} X_\omega$ je Hölderovsky spojitá funkce $M_1 \to M_2$.

Kapitola 2

Věty o spojité modifikaci stochastických procesů

2.1 Stochastocký proces se stavy v $\mathbb{R}$

Nejprve se tedy budu zabývat speciálním případem stochastického procesu a to stochastickým procesem se stavy v $\mathbb{R}$ (neboli zkráceně *stochastickým procesem*, jak bylo definováno v *Definici 2*). Předvedu zde důkazy dvou tvrzení. První věta (*Kolmogorova o spojité modifikaci*, *Věta 1*) obsahuje postačující podmínku pro existenci spojité modifikace, druhá (*Věta 2*) vyjadřuje ekvivalenci s danými podmínkami (za určitých předpokladů).

Věta 1 *(Kolmogorova věta o spojité modifikaci)*
Nechť $(X(t), t \in [0, \infty))$ je stochastický proces takový, že

$$\forall_{t_1,t_2 \in [0,\infty)} \exists_{\alpha,\beta,K \in (0,\infty)} : E|X(t_1) - X(t_2)|^\alpha \leq K|t_1 - t_2|^\beta \tag{2.1}$$

Potom $(X(t), t \in [0, \infty))$ má spojitou modifikaci.

Důkaz:
$\forall_{n \in \mathbb{N}}$ definuji stochastický proces $X^{(n)} = (X(t), t \in [0, 1])$ tak, že

$$\forall_{\omega \in \Omega, k \in \{0,1,..,2^n\}} X^{(n)}_\omega(k.2^{(-n)}) = X_\omega(k.2^{(-n)})$$

a navíc

$$\forall_{\omega\in\Omega,k\in\{1,..,2^n\}} X_\omega^{(n)}|_{[(k-1).2^{(-n)},k.2^{(-n)}]}$$

je lineární.

$$\begin{aligned}
\forall_{n\in\mathbb{N}} :& S_n \overset{\text{def}}{=} \{k.2^{(-n)}; k = 0,1,..,2^{(-n)}\}\\
\forall_{n\in\mathbb{N}} :& O_n \overset{\text{def}}{=} \{(2k-1).2^{(-n)}; k = 1,..,2^{(-(n-1))}\}\\
\forall_{n\in\mathbb{N}} :& E_n \overset{\text{def}}{=} S_n \setminus O_n
\end{aligned}$$

Nechť $\omega \in \Omega, (n-1) \in \mathbb{N}$, z definice normy separabilního Banachova prostoru $C([0,1])$ (spojité funkce na kompaktní množině nabývají maxima, $[0,1]$ je kompaktní, tedy můžu se supremem pracovat jako s maximem) platí:

$$||X_\omega^{(n)} - X_\omega^{(n-1)}|| = ||X_\omega^{(n)} - X_\omega^{(n-1)}||_{\max} = \max_{t\in[0,1]} |X_\omega^{(n)}(t) - X_\omega^{(n-1)}(t)|$$

Zvolím $t_0 \in [0,1]$ tak aby

$$|X_\omega^{(n)}(t_0) - X_\omega^{(n-1)}(t_0)| = \max_{t\in[0,1]} |X_\omega^{(n)}(t) - X_\omega^{(n-1)}(t)|.$$

(Jak už bylo zmíněno, alespoň jedno takové t_0 existuje.)
Z linearity $X_\omega^{(n)}$ na intervalech $[(k-1).2^{(-n)}, k.2^{(-n)}]\forall_{k=1,..,2^n}$ a $X_\omega^{(n-1)}$ na intervalech $[(k-1).2^{(-(n-1))}, k.2^{(-(n-1))}]\forall_{k=1,..,2^{(n-1)}}$ je zřejmé, že $t_0 \in O_n$.

$$\begin{aligned}
e_n^1(t_0) &\overset{\text{def}}{=} t_0 - 2^{(-n)}\\
e_n^2(t_0) &\overset{\text{def}}{=} t_0 + 2^{(-n)}\\
E_n(t_0) &\overset{\text{def}}{=} \{e_n^1(t_0), e_n^2(t_0)\}
\end{aligned}$$

(Zřejmě pro libivolné $t_0 \in O_n$ $e_n^1(t_0)$ a $e_n^2(t_0)$ existují vzhledem k definici O_n a vzhledem k tomu, že 2^n je sudé.)
Navíc z linearity $X_\omega^{(n-1)}$ na intervalech $[(k-1).2^{(-(n-1))}, k.2^{(-(n-1))}]\forall_{k=1,..,2^{(n-1)}}$

plyne, že

$$X_\omega^{(n-1)}(e_n^1(t_0)) \leq X_\omega^{(n-1)}(t_0) \leq X_\omega^{(n-1)}(e_n^2(t_0)) \vee X_\omega^{(n-1)}(e_n^1(t_0)) \geq X_\omega^{(n-1)}(t_0) \geq X_\omega^{(n-1)}(e_n^2(t_0)).$$

Tedy zřejmě platí (a rozborem možností $X_\omega^{(n)}(t_0) \leq X_\omega^{(n-1)}(t_0) \vee X_\omega^{(n)}(t_0) \geq X_\omega^{(n-1)}(t_0)$ se snadno dokáže):

$$|X_\omega^{(n)}(t_0) - X_\omega^{(n-1)}(t_0)| \leq \max_{e \in E_n(t_0)} |X_\omega^{(n)}(t_0) - X_\omega^{(n-1)}(e)|$$

Z definice $X_\omega^{(n)}$ a $X_\omega^{(n-1)}$ $(X_\omega^{(n)}(t_0) = X_\omega(t_0),\ \forall_{s \in E_n(t_0) = S_{(n-1)}} : X_\omega^{(n)}(s) = X_\omega(s))$ dále platí:

$$\max_{e \in E_n(t_0)} |X_\omega^{(n)}(t_0) - X_\omega^{(n-1)}(e)| = \max_{e \in E_n(t_0)} |X_\omega(t_0) - X_\omega(e)|$$

$$\max_{e \in E_n(t_0)} |X_\omega(t_0) - X_\omega(e)| \leq \max_{k \in \{0,1,..,2^n-1\}} |X_\omega(k.2^{(-n)}) - X_\omega((k+1).2^{-(n-1)})|$$

Tedy celkem:

$$\forall_{\omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}} : ||X_\omega^n - X_\omega^{(n-1)}|| \leq \max_{k \in \{0,1,..,2^n-1\}} |X_\omega(k.2^{(-n)}) - X_\omega((k+1).2^{-(n-1)}|.$$

Nechť $c > 0$. Platí:

$$[||X^{(n)} - X^{(n-1)}|| > 2^{(-nc)}] \subseteq \cup_{k=0}^{2^n-1} [|X_\omega(k.2^{(-n)}) - X_\omega((k+1).2^{(-(n-1))}| > 2^{(-nc)}]$$

$$P[||X^{(n)} - X^{(n-1)}|| > 2^{(-nc)}] \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} P[|X_\omega(k.2^{(-n)}) - X_\omega((k+1).2^{-(n-1)}| > 2^{(-nc)}]$$

Podle *Čebyševovi nerovnosti* platí $\forall_{k=0,1,..,2^n-1}$:

$$P[|X_\omega(k.2^{(-n)}) - X_\omega((k+1).2^{-(n-1)}| > 2^{(-nc)}] \leq \frac{E|X(k.2^{(-n)}) - X((k-1).2^{(-n)})|^\alpha}{2^{(-nc\alpha)}}$$

Podle (2.1) platí $\forall_{k=0,1,..,2^n-1}$:

$$\frac{E|X(k.2^{(-n)}) - X((k-1).2^{(-n)})|^\alpha}{2^{(-nc\alpha)}} \leq K.2^{nc\alpha}.2^{(-n(1+\beta))} = 2^{(-n)}.2^{n(c\alpha-\beta)}.K$$

Tedy celkem platí:

$$P[||X^{(n)} - X^{(n-1)}|| > 2^{(-nc)}] \leq K.2^{n(c\alpha-\beta)}$$

Nechť $c \in (0, \frac{\beta}{\alpha})$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[||X^{(n)} - X^{(n-1)}|| > 2^{(-nc)}] \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(c\alpha-\beta)}.K < \infty.$$

Tedy dle *Cantelliho věty* $P[||X^{(n)} - X^{(n-1)}|| > 2^{-nc}$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}] = 0$ a tedy $P[\sum_{n=2}^{\infty} ||X^{(n)} - X^{(n-1)}|| = \infty] = 0$ neboli $P[\sum_{n=2}^{\infty} ||X^{(n)} - X^{(n-1)}|| < \infty] = 1$. Tedy

$$\exists_{A \subset \Omega, P(A)=1} \forall_{\omega \in A} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} ||X^n_\omega - X^{(n-1)}_\omega|| = 0.$$

Tedy

$$\forall_{\omega\in A, \epsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>m\geq n_0} : ||X^n_\omega - X^m_\omega|| \leq \sum_{k=m+1}^{n} ||X^k_\omega - X^{(k-1)}_\omega|| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} ||X^k_\omega - X^{(k-1)}_\omega|| < \epsilon.$$

Tedy $\forall_{\omega\in A} X^{(n)}_\omega$ je Cauchyovská. Protože $\forall_{n\in\mathbb{N}, \omega\in A} : X^{(n)}_\omega \in C[0,1]$, z úplnosti $C[0,1]$ plyne konvergence $X^{(n)}_\omega \forall_{\omega\in A}$ k nějaké funkci $Y_\omega \in C[0,1]$. Neboli

$$\forall_{\omega\in A} \lim_{n\to\infty} X^{(n)}_\omega = Y_\omega.$$

$$\begin{aligned} \forall_{\omega\in A, t\in[0,1]} :& Y_\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} X^{(n)}_\omega \\ \forall_{\omega\in \Omega\setminus A, t\in[0,1]} :& Y_\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} c(t), \end{aligned}$$

kde $c \in C[0,1]$ je libovolná.

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{n=1}^{\infty} S_n$$
$$\forall_{s\in S} : P[X(s) = Y(s)] = 1$$

Nechť $t \in [0,1]$.

Protože S je hustá v $[0,1]$ a $C[0,1]$ je úplný, existuje posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\forall_{n\in\mathbb{N}} s_n \in S$ a $\lim_{n\to\infty} s_n = t$.
Z *Čebyševovi nerovnosti* a (2.1) plyne, že

$$\forall_{\epsilon>0} : P[|X(s_n) - X(t)| > \epsilon] \leq \frac{E|X(s_n) - X(t)|^{\alpha}}{\epsilon^{\alpha}} \leq \frac{K.|s_n - t|^{(1+\beta)}}{\epsilon^{\alpha}}.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K.|s_n - t|^{(1+\beta)}}{\epsilon^{\alpha}} = 0,$$

podle *Lemmatu "o dvou policajtech"*

$$\forall_{\epsilon>0} : \lim_{n\to\infty} P[|X(s_n) - X(t)| > \epsilon] = 0.$$

Lze tedy vybrat rostoucí posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $P[\lim_{k\to\infty} X(s_{n_k}) = X(t)] = 1$.
Navíc

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} : P[X(s_n) = Y(s_n)] = 1$$
$$\forall_{\omega\in\Omega} : \lim_{n\to\infty} Y(s_n) = Y(t),$$

tedy $P[X(t) = Y(t)] = 1$.
Protože t bylo voleno libovolné z intervalu $[0,1]$, celkem platí:

$$\forall_{t\in[0,1]} : P[X(t) = Y(t)] = 1.$$

Totéž je možné udělat na každém intervalu $[k-1,k]$, kde $k \in \mathbb{N}$. Definuji proto procesy $Y^{(k)} = (Y^{(k)}(t), t \in [k-1,k])$ tak aby

$$\forall_{k\in\mathbb{N}, t\in[k-1,k]} : P[Y^{(k)}(t) = X(t)] = 1.$$

$$A \stackrel{\text{def}}{=} [Y^{(k)}(k) = Y^{(k+1)}(k), k \in \mathbb{N}]$$
$$\forall_{k\in\mathbb{N}} : A_k \stackrel{\text{def}}{=} [Y^{(k)}(k) = Y^{(k+1)}(k)]$$

Protože $\forall_{k\in\mathbb{N}} : P[Y^{(k)}(k) = X(k)] = 1 \wedge P[Y^{(k+1)}(k) = X(k)] = 1$, platí $\forall_{k\in\mathbb{N}} : P[Y^{(k)}(k) = Y^{(k+1)}(k)] = 1$, tedy

$$P(A) = P(\cap_{k=1}^{\infty} A_n) = 1.$$

$$\begin{aligned}\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{\omega\in A, t\in[n,n+1]} :& Z_\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} Y_\omega^n(t)\\ \forall_{\omega\notin A, t\in[0,\infty)} :& Z_\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} g,\end{aligned}$$

kde g je nějaká spojitá funkce definovaná na $[0,\infty)$.
Zřejmě $\forall_{t\in[0,\infty)} : P[Z(t) = X(t)] = 1$, tedy $(Z(t), t \in [0,\infty))$ je spojitá modifikace $(X(t), t \in [0,\infty))$.

Věta 2
Stochastický proces $(X(t), 0 \le t \le 1)$, pro který platí, že

$$\forall_{\epsilon>0, 0\le t_0\le 1} : \lim_{t\to t_0} P[|X(t) - X(t_0)| > \epsilon] = 0 \tag{2.2}$$

má spojitou modifikaci právě tehdy, když existuje spočetná hustá množina $S \subset [0,1]$ taková, že

$$\forall_{\epsilon>0} : \lim_{\delta\downarrow 0} P[\sup_{\{s_1,s_2\in S, |s_1-s_2|<\delta\}} |X(s_1) - X(s_2)| > \epsilon] = 0. \tag{2.3}$$

<u>Důkaz:</u>

$$\begin{aligned}&U(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega; \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{s,t\in S} : |s-t| < \delta \Rightarrow |X_\omega(s) - X_\omega(t)| < \epsilon\}\\ &U(S) = \{\omega \in \Omega; \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{s,t\in S; |s-t|<\delta} |X_\omega(s) - X_\omega(t)| = 0\}\end{aligned}$$

Snažím se dokázat ekvivalenci tvrzení (2.3) a $P(U(S)) = 1$ neboli ekvivalenci (2.3) s tvrzením, že

$$P[\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{s,t\in S} : |s-t| < \delta \Rightarrow |X_\omega(s) - X_\omega(t)| < \epsilon] = 1.$$

Tedy předpokládám nejprve, že platí (2.3), a dokazuji, že potom $P((U(S))^C) = 0$. Neboť

$$(U(S))^C = \{\omega; \exists_{\epsilon>0}\forall_{\delta>0}\exists_{s,t\in S,|s-t|<\delta} : |X_\omega(s) - X_\omega(t)| > \epsilon\}$$
$$(U(S))^C = \cup_{n=1}^{\infty}\{\omega; \forall_{\delta>0}\exists_{s,t\in S,|s-t|<\delta} : |X_\omega(s) - X_\omega(t)| > \frac{1}{n}\}$$

tak

$$P((U(S))^C) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P[\forall_{\delta>0}\exists_{s,t\in S,|s-t|<\delta} : |X_\omega(s) - X_\omega(t)| > \frac{1}{n}].$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\forall_{\delta_0>0} : [\forall_{\delta>0}\exists_{s,t\in S;|s-t|<\delta} : |X(s) - X(t)| > \frac{1}{n}] \subseteq [\exists_{s,t\in S;|s-t|<\delta_0} : |X(s) - X(t)| > \frac{1}{n}]$$
$$\forall_{\delta_0>0} : P[\forall_{\delta>0}\exists_{s,t\in S;|s-t|<\delta} : |X(s) - X(t)| > \frac{1}{n}] \leq P[\exists_{s,t\in S;|s-t|<\delta_0} : |X(s) - X(t)| > \frac{1}{n}]$$
$$\lim_{\delta_0\downarrow 0} P[\forall_{\delta>0}\exists_{s,t\in S;|s-t|<\delta} : |X(s) - X(t)| > \frac{1}{n}] \leq \lim_{\delta_0\downarrow 0} P[\exists_{s,t\in S;|s-t|<\delta_0} : |X(s) - X(t)| > \frac{1}{n}]$$
$$P[\forall_{\delta>0}\exists_{s,t\in S;|s-t|<\delta} : |X(s) - X(t)| > \frac{1}{n}] \leq \lim_{\delta\downarrow 0} P[\exists_{s,t\in S;|s-t|<\delta} : |X(s) - X(t)| > \frac{1}{n}]$$

dle *Věty o vztahu limit a nerovností* (která říká, že při limitním přechodu zůstává neostrá nerovnost zachována), s využitím toho, že levá strana je vzhledem k δ_0 konstanta, a s využitím předpokladu (2.3), kde $\forall_n \in \mathbb{N} : \epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}$. Tedy

$$P((U(S))^C) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 0$$
$$P((U(S))^C) = 0$$
$$P(U(S)) = 1 - 0$$
$$P(U(S)) = 1$$

Implikace zleva do prava je tedy dokázána a pro ekvivalenci zbývá ověřit, že $P(U(S)) = 1$ implikuje (2.3). Nechť je dáno libovolné $\epsilon > 0$. Dle *Heineho věty* platí

$$\lim_{\delta\downarrow 0} P[\sup_{\{s,t\in S,|s-t|<\delta\}} |X(s)-X(t)|>\epsilon] = \lim_{n\to\infty} P[\sup_{\{s,t\in S,|s-t|<\frac{1}{n}\}} |X(s)-X(t)|>\epsilon]$$

$$\forall_{\omega\in\Omega} : \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{\{s,t\in S,|s-t|<\delta\}} |X_\omega(s)-X_\omega(t)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{\{s,t\in S,|s-t|<\frac{1}{n}\}} |X_\omega(s)-X_\omega(t)|$$

$$\forall_n \in \mathbb{N} : Z_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\{s,t\in S;|s-t|<\frac{1}{n}\}} |X(s)-X(t)|$$

Protože podle *Věty o vztahu konvergence v pravděpodobnosti a konvergence skoro jistě* platí, že

$$P(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0) = 1 \Rightarrow \forall_{\epsilon>0} : \lim_{n\to\infty} P(|Z_n|>\epsilon) = 0,$$

platí

$$P[\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{\{s,t\in S;|s-t|<\delta\}} |X(s)-X(t)| = 0] = 1 \Rightarrow \forall_{\epsilon>0} \lim_{\delta\downarrow 0} P[\sup_{\{s,t\in S;|s-t|<\delta\}} |X(s)-X(t)|>\epsilon] = 1.$$

Celkem

$$(2.3) \Leftrightarrow P(U(S)) = 1.$$

Zřejmě z existence spojité modifikace procesu X plyne, že $P(U(S)) = 1$. Chci dokázat opačnou implikaci. Nechť tedy $P(U(S)) = 1$.

$$\forall_{\omega\in U(S),s\in S} : Y_\omega(s) \stackrel{\text{def}}{=} X_\omega(s)$$

Nechť je dáno $t \in [0,1]$. Zvolím libovolnou posloupnost $\{s_n\} \subset S$ takovou aby $\lim_{n\to\infty} s_n = t$ (vím, že existuje, neboť množina S je hustá v [0,1]).

$$\forall_{t\in[0,1],\omega\in U(S)} : Y_\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} Y_\omega(s_n)$$

$$\forall_{t\in[0,1],\omega\notin U(S)} : Y_\omega(t) \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

Navíc $\forall_{t_0\in[0,1],\epsilon>0} : \lim_{t\to t_0} P[|X(t)-X(t_0)|>\epsilon] = 0$, tedy dle *Heineho věty* $\lim_{n\to\infty} P(|X(t_n)-X(t_0)|>\epsilon) = 0$ pro vhodně zvolenou posloupnost $\{t_n\} \subset S, \lim_{n\to\infty} t_n = t_0$. Podle *Věty o vztahu konvergence v pravděpodobnosti a konvergence skoro jistě* tedy lze vybrat podposloupnost $\{t_{n_k}\}$ posloupnosti $\{t_n\}$ tak aby $P[\lim_{k\to\infty} |X(t_{n_k})-X(t_0)| = 0] = 1$, tedy $\forall_{t\in[0,1]} \lim_{n\to\infty} X(s_n) = X(t) s.j.$. Navíc $\forall_{n\in\mathbb{N},\omega\in U(S)} : Y_\omega(s_n) = X_\omega(s_n)$. Celkem $\forall_{t\in[0,1]} : P[X(t) = Y(t)] = 1$, tedy Y je spojitá modifikace stochastického procesu X.

2.2 Stochastiský proces se stavy v metrickém prostoru

V této kapitole předvedu důkaz *Kolmogorovi-Chentsovovi věty* pro stochastický proces na R^p s hodnotami v úplném metrickém prostoru.

Věta 3 *(Kolmogorova-Chentsovova věta)*
Nechť $(X(t), t \in R^d)$ je stochastický proces s hodnotami v úplném metrickém prostoru (M, ρ) a nechť

$$\forall_{s,t \in R^d} \exists_{a,b,K>0} E(\rho(X(s), X(t))^a) \leq ||s-t||^{(d+b)}. \tag{2.4}$$

Potom X má spojitou modifikaci, která je Hölderovsky spojitá s exponentem c $\forall_{c \in (0, \frac{b}{a})}$.

<u>Důkaz:</u>
Za předpokladu, že je věta dokázána pro $(X(t), t \in [0,1]^d)$, analogicky jako ve *Větě 1 (Kolmogorově o spojité modifikaci)* můžu $\forall_{k=(k_1,..,k_d), j=(j_1,..j_d) \in Z^d}$ definovat množiny $K_{j,k} \overset{\text{def}}{=} [j_1, k_1] \times .. \times [j_d, k_d]$ a $\forall_{j,k \in Z^d}$ takto zkonstruuji stochastické procesy $(Y^{(j),(k)}(t), t \in K_{j,k})$. Navíc $\forall_{j^{(1)}, k^{(1)}, j^{(2)}, k^{(2)} \in Z^d}$ takové že

$$K_{j^{(1)},k^{(1)}} \cap K_{j^{(2)},k^{(2)}} \overset{\text{def}}{=} K_{j^{(2)},k^{(2)},j^{(2)},k^{(2)}} \neq \emptyset$$

platí s.j., že

$$\forall_{t \in K_{j^{(2)},k^{(2)},j^{(2)},k^{(2)}}} Y^{(j^{(1)}),(k^{(1)})}(t) = X(t) = Y^{(j^{(2)}),(k^{(2)})}(t),$$

Z^{4d} je spočetná a tedy

$$P[\forall_{j^{(1)},k^{(1)},j^{(2)},k^{(2)} \in Z^{4d}} \forall t \in K_{j^{(1)},k^{(1)},j^{(2)},k^{(2)}} Y^{(j^{(1)}),(k^{(1)})}(t) = Y^{(j^{(2)}),(k^{(2)})}(t)] = 1.$$

Zřejmě tedy stačí uvažovat $X|_{[0,1]^d}$.
Nechť tedy $(X(t), t \in [0,1]^d)$ je stochastický proces se stavy v (M, ρ). $\forall_{n \in \mathbb{N}}$ definuji

$$D_n \overset{\text{def}}{=} \{(k_1 2^{(-n)}, .., k_d 2^{(-n)}); k_1, ..k_d \in \{1, .., 2^n\}\}$$

a $\forall_{n\in\mathbb{N},\omega\in\Omega}$ definuji

$$\xi_{n,\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\rho(X_\omega(s), X_\omega(t)), ; s,t \in D_n, ||s-t|| = 2^{(-n)}\}.$$

$\forall_{n\in\mathbb{N}}$ množina D_n obsahuje $(2^n)^d$ prvků. Každý z těchto prvků má nejvýše $2d$ sousedů (tj. prvků množiny D_n ve vzdálenosti $2^{(-n)}$ definované podle příslušné normy používané zde na R^d od něj). Takto $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ získám nejvýše (ve skutečnosti méně, ale stačí horní odhad) $d2^{(nd)}$ dvojic $s,t \in D_n$ splňujících podmínku $|s-t| = 2^{(-n)}$ (vzhledem k tomu, že na základě předchozího postupu bych každou dvojici započítal pro každý prvek z této dvojice jednou, tedy celkem dvakrát).

$$E\sum_{n\in\mathbb{N}}(2^{(cn)}\xi_n)^a = E\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(2^{(cn)}\xi_n)^a$$

Z definice ξ_n s pomocí metriky daným způsobem plyne, že $\forall_{n\in\mathbb{N},\omega\in\Omega}\xi_{n,\omega} \geq 0$, dále dle (2.4) a z definice ξ_n platí

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}E|\sum_{n=1}^{k}(2^{(cn)}\xi_n)^a| = E\sum_{n=1}^{k}(2^{(cn)}\xi_n)^a = \sum_{n=1}^{k}2^{(acn)}E\xi_n^a < \infty$$

(s využitím už zmíněného $\forall_{n\in\mathbb{N},\omega\in\Omega}\xi_{n,\omega} \geq 0$). Tedy celkem můžu použít *Větu o monotonní konvergenci* a platí:

$$E\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(2^{(cn)}\xi_n)^a = \lim_{k\to\infty}E\sum_{n=1}^{k}(2^{(cn)}\xi_n)^a = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}2^{(acn)}E\xi_n^a = \sum_{n\in\mathbb{N}}2^{(acn)}E\xi_n^a$$

Podle definice mohu pro přehlednost přepsat:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}2^{acn}E\xi_n^a = \sum_{n\in\mathbb{N}}2^{acn}E(\max_{s,t\in D_n,||s-t||=2^{(-n)}}\rho(X(s),X(t)))^a$$

a dále $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ (s využitím zřejmé konečnosti $\{s,t \in D_n, ||s-t|| = 2^{(-n)}\}$) platí:

$$E(\max_{s,t\in D_n,||s-t||=2^{(-n)}}\rho(X(s),X(t))^a \leq E\sum_{\{s,t\in D_n,||s-t||=2^{(-n)}\}}(\rho(X(s),X(t)))^a$$

$$E \sum_{\{s,t \in D_n, ||s-t||=2^{(-n)}\}} (\rho(X(s), X(t)))^a = \sum_{\{s,t \in D_n, ||s-t||=2^{(-n)}\}} E(\rho(X(s), X(t)))^a$$

Podle (2.4) $\exists_{K^*>0} \forall_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{\{s,t \in D_n, ||s-t||=2^{(-n)}\}} E(\rho(X(s) - X(t)))^a \leq \sum_{\{s,t \in D_n, ||s-t||=2^{(-n)}\}} K^*(2^{(-n)})^{(d+b)}$$

$$K \stackrel{\text{def}}{=} K^* d$$

Tedy vzhledem k předešlé úvaze $\exists_{K>0} \forall_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{\{s,t \in D_n, ||s-t||=2^{(-n)}\}} E(\rho(X(s), X(t)))^a \leq K.2^{dn}(2^{(-n)})^{(d+b)} \leq K.2^{(ac-b)n} \forall_{c\in(0,\frac{b}{a})}$$

Celkem $\exists_{K>0}$ takové, že

$$E \sum_{n\in\mathbb{N}} (2^{(cn)}\xi_n)^a \leq K \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{(ac-b)n} < \infty.$$

Tedy $\sum_{n\in\mathbb{N}}(2^{(cn)}\xi_n)^a$ konverguje v L_1 (a tedy konverguje v pravděpodobnosti a tedy lze vybrat podposloupnost částečných součtů konvergující s.j.), navíc z definice ξ_n platí $\forall_{n\in\mathbb{N}}(2^{(cn)}\xi_n)^a \geq 0$ (tedy $\forall_{\omega\in\Omega} \sum_{n\in\mathbb{N}}(2^{(cn)}\xi_{n,\omega})^a$ je neklesající), tedy celkem $\sum_{n\in\mathbb{N}}(2^{(cn)}\xi_n)^a$ konverguje s.j. a tedy $\exists_{k>0, n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n\geq n_0} \xi_n \leq k.2^{-cn}$ s.j.
Nechť $m \in \mathbb{N}$, nechť $r \in [2^{(-m-1)}, 2^{(-m)}]$, nechť $\omega \in \Omega$.

$$\sup_{\{s,t \in \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n, ||s-t|| \leq r\}} \rho(X_\omega(s), X_\omega(t)) \leq \sup_{\{s,t \in \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n, ||s-t|| \leq 2^{(-m)}\}} \rho(X_\omega(s), X_\omega(t))$$

Vzhledem k tomu, že

$$\forall_{s,t \in (\cup_{n\in\mathbb{N}} \setminus \cup_{\{n\in\mathbb{N}, n\geq m\}}} ||s-t|| > 2^{(-m)},$$

dostáváme, že

$$\sup_{\{s,t \in \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n, ||s-t|| \leq 2^{(-m)}\}} \rho(X_\omega(s), X_\omega(t)) = \sup_{\{s,t \in \cup_{\{n\in\mathbb{N}, n\geq m\}} D_n, ||s-t|| \leq 2^{(-m)}\}} \rho(X_\omega(s), X_\omega(t)).$$

Jestliže $s, t \in \cup_{\{n\in\mathbb{N}, n\geq m\}}$, potom je možné zvolit takové n_0, že existuje mezi

s a t po částech lineární cesta o maximálně $2d$ n_0-krocích, kde n_0-krok je definován jako lineární cesta mezi dvěma sousedy v množině D_{n_0} o "délce" (délkou lineární cesty je zde myšlena příslušná metrika daného R^d koncových bodů této cesty) $2^{(-n_0)}$. Tedy

$$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq m} ||s-t|| = 2d.2^{(-n_0)}.$$

Tedy $\exists_{K>0}$ takové, že

$$\sup_{\{s,t \in \cup_{\{n \in \mathbb{N}, n \geq m\}} D_n, ||s-t|| \leq 2^{(-m)}\}} \rho(X_\omega(s), X_\omega(t)) \leq K \sum_{n=m}^{\infty} \max_{s,t \in D_n, ||s-t||=2^{(-n)}} \rho(X_\omega(s), X_\omega(t))$$

a hned z definice

$$K \sum_{n=m}^{\infty} \max_{s,t \in D_n, ||s-t||=2^{(-n)}} \rho(X_\omega(s), X_\omega(t)) = K \sum_{n=m}^{\infty} \xi_{n,\omega}.$$

Podle již dokázaného, podle vzorečku pro součet geometrické řady a podle volby r

$$\exists_{K_1,K_2,K_3>0} \sum_{n=m}^{\infty} \xi_{n,\omega} \leq K_1 \sum_{n=m}^{\infty} 2^{(-cn)} \leq K_2.2^{(-m)} \leq K_3.r^c.$$

Přímo z definice už plyne, že X je Hölderovsky spojitá s exponentem c na $\cup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ s.v. Speciálně vím, že existuje spojitý stochastický proces Y (definuje se analogicky jako ve *Větě 1 (Kolmogorově o spojité modifikaci)*) takový, že

$$\forall_{t \in \cup_{n \in \mathbb{N}} D_n} P[X(t) = Y(t)] = 1.$$

Ze spojitost Y na $[0,1]^d$ a Hölderovské spojitosti Y na $\cup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ plyne Hölderovská spojitost Y na $[0,1]^d$. I při důkazu rovnosti

$$\forall_{t \in [0,1]^d} P[X(t) = Y(t)] = 1$$

se postupuje analogicky jako ve *Větě 1 (Kolmogorově o spojité modifikaci).*

Opět stačí si $\forall_{t\in[0,1]^d}$ definovat posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} t_n \in \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n$$

a současně

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t.$$

Vím, že taková posloupnost existuje, neboť $\cup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ je hustá v $[0,1]^d$ a R^d je úplný. Podle dokázaného $\forall_{n\in\mathbb{N}} P[X_{(t)} = Y_{(t_n)}] = 1$, ze spojitosti Y hned plyne, že

$$P[\lim_{n\to\infty} Y(t_n) = Y(n)] = 1.$$

Vzhledem k tomu, že $\forall_{\omega\in\Omega}\rho(X(t_n), X(t)) \geq 0$ platí $E\rho((X(t_n), X(t)) = E|\rho((X(t_n), X(t))|$ a tedy z *Čebyševovi nerovnosti* a z *Věty o vstahu limity a nerovností* i zde

$$\forall_{\epsilon>0} : \lim_{n\to\infty} P(\rho(X(t_n), X(t)) > \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{E\rho((X(t_n), X(t))^a}{\epsilon^a}$$

a dále z (2.4)

$$\exists_{K>0} \lim_{n\to\infty} \frac{E\rho((X(t_n), X(t))^a}{\epsilon^a} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{K.||s-t||^{(b+d)}}{\epsilon^a} = 0.$$

Tedy pokud neplatí, že $\lim_{n\to\infty} X(t_n) = X(t)$ s.j., z $\{X(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ lze vybrat podposloupnost $\{X(t_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{k\to\infty} X(t_{n_k}) = X(t)$ s.j. a původní posloupnost jí nahradit. Celkem $\forall_{t\in[0,1]^d} P[X(t) = Y(t)] = 1$. Tedy stochastický proces $(Y(t), t \in [0,1]^d)$ je spojitou modifikací stochastickího procesu $(X(t), t \in [0,1]^d)$.

Literatura

[1] Kallenberg, O.: *Foundations of Modern Probability*, Springer, Berlín, 1997.

[2] Štěpán, J.: *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha, 1987.