Univerzita Karlova v Praze, Filozofická fakulta
Katedra logiky

Zuzana Dolejší

Důkazy v přirozené dedukci a sekventovém kalkulu v substrukturální logice FL

Proofs in natural deduction and sequent system in substructural logic FL

Bakalářská práce

Vedoucí práce: Mgr. Marta Bílková PhD.

2011

Děkuji vedoucí bakalářské práce Mgr. Martě Bílkové PhD. za cenné rady, připomínky a veškerý čas, který mi věnovala.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně, že jsem uvedla všechny použité prameny a literaturu a že práce nebyla využita v rámci jiného vysokoškolského studia či k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze 12. ledna 2011

Zuzana Dolejší

Abstrakt

Cílem práce je definovat kalkul přirozené dedukce a popsat vztah s Gentzenovským sekventovým kalkulem v substrukturálních logikách (např. FL, FLew).

Abstract

The object of the tesis is definition of the natural deduction and description of the relation with Gentzen's sequent calculus in substructural logics (for example FL, FLew).

Obsah

1 Úvod

Tématem této bakalářské práce je logika FL, kterou zavedeme v kapitole 2, a vztah dvou důkazových systémů pro tuto logiku. Jak udává název práce, zaměříme se na důkazové systémy v substrukturální logice FL. Budeme se pohybovat v logice, kde nejsou povolena žádná strukturální pravidla. Logiku FL budeme uvažovat v jazyce s konstantami. Celá práce se bude zabývat pouze výrokovou logikou.

Tato práce je strukturována následovně: v úvodní části budou na příkladech stručně popsány dva formalismy - sekventové kalkuly a kalkuly přirozené dedukce. Dále bude představena logika FL a její sekventový kalkul a kalkul přirozené dedukce. Poté dokážeme ekvivalenci těchto důkazových systémů. V závěru práce budou zmíněna některá rozšíření logiky FL strukturálními pravidly.

1.1 Přirozená dedukce

V historii přirozené dedukce jsou dva důležité mezníky. Prvním je rok 1935, kdy Gentzen sepsal pravidla přirozené dedukce, přesněji pravidla pro intuicionistickou a klasickou predikátovou logiku. Dalším, neméně důležitým datem, je rok 1965, kdy Prawitz dokázal větu o normalizaci pro tyto třídy pravidel. Význam této události spočívá především v důkazu existence protipólu důkazové metody s eliminací řezu (vyvinuté Gentzenem pro sekventové kalkuly) v přirozené dedukci.[4]

V intuicionistické logice (která je jedním z rozšíření logiky FL, proto se blíže týká hlavního cíle práce) přirozená dedukce odráží konstruktivní význam logických spojek a kvantifikátorů. V neformální sémantice intuicionistické logiky vysvětlují tzv. "BHK-podmínky"logické operace výrokové intuicionistické logiky v termech přímého dokazování. Představme kalkul přirozené dedukce N_i intuicionistické logiky v jazyce se spojkami $\wedge, \vee, \rightarrow, \perp$, jak je definován např. v [3]. Kalkuly přirozené dedukce obsahují dva typy pravidel pro každou spojku - pravidlo zavedení a eliminace spojky. Spolu s pravidly zavedení spojek v kalkulu N_i formulujeme i příslušné BHK podmínky:

1. Přímý důkaz formule A $\wedge$ B spočívá v důkazu tvrzení A a v důkazu B. To vyjadřuje pravidlo pro zavedení konjunkce:

$$\frac{\mathrm{A} \quad \mathrm{B}}{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}} \wedge\mathrm{I}$$

2. Přímý důkaz formule A $\vee$ B spočívá v důkazu tvrzení A nebo v důkazu B (jak ukazuje pravidlo pro zavedení disjunkce):

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A} \vee \mathrm{B}}\ \vee\mathrm{I}$$

3. Přímý důkaz formule A→B spočívá v důkazu tvrzení B z předpokladu, že máme důkaz tvrzení A. Předpoklady, které se při odvození použijí, škrtneme (značíme $_v$):

$$\begin{array}{c} [\mathrm{A}^v] \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}\ {\to}\mathrm{I}_v \end{array}$$

4. Přímý důkaz sporu ⊥ neexistuje.

V kalkulu N_i jsou pravidla pro zavedení $\wedge, \vee, \to$ uvedena výše, zmiňme nyní pravidla pro eliminaci těchto spojek.

Disjunkci A∨B lze eliminovat právě tehdy, když je z obou disjunktů A, B zvlášť odvozena formule C:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma[\mathrm{A}\Delta]^{\vee} & \Theta & [\Gamma\mathrm{B}]^{\vee}\ \Delta \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$
$$\frac{\mathrm{C} \qquad \mathrm{A}\vee\mathrm{B} \qquad \mathrm{C}}{\mathrm{C}}\ \vee\mathrm{E}_{\vee}$$

V eliminačních pravidlech pro konjunkci i pro implikaci jsou závěry "přímé podformule"jejich premis. Tedy pokud je odvozena celá formule, lze odvodit i její příslušnou podformuli:

$$\begin{array}{cc} \Gamma & \Delta \\ \vdots & \vdots \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \end{array}$$
$$\frac{\mathrm{A} \qquad \mathrm{A}\to\mathrm{B}}{\mathrm{B}}\ {\to}\mathrm{E} \qquad\qquad \frac{\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\ (\wedge\mathrm{E})$$

Nakonec zmiňme konstantu ⊥ - pravidlo eliminace sporu:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \dfrac{\bot}{\mathrm{A}} \end{array}$$

Odvození v kalkulu N_i je strom, v jehož kořeni se nachází odvozená formule, v listech stromu jsou předpoklady, ze kterých se odvozuje. Každý vrchol stromu odpovídá korektnímu užití některého pravidla kalkulu N_i.

1.2 Sekventové kalkuly

V sekventovém kalkulu, na rozdíl od kalkulu přirozené dedukce, lze explicitně definovat strukturální pravidla (jak uvidíme v pozdější kapitole). Formát sekventového kalkulu byl rovněž zaveden Gentzenem. V článku [6] definoval sekventové kalkuly klasické a intuicionistické logiky a dokázal pro ně větu o eliminaci řezu. Jak už napovídá název, základní jednotkou důkazu v sekventovém kalkulu je sekvent - uspořádaná dvojice dvou konečných posloupností (případně multimnožin nebo množin) formulí.

Opět představíme verzi sekventového kalkulu pro intuicionistickou logiku v jazyce se spojkami $\wedge, \vee, \rightarrow, \bot$. Kalkul $G1_i$, jak je zaveden např. v [3]. Důkaz sekventu $\Gamma \Rightarrow \mathrm{A}$ v kalkulu $G1_i$ je strom ohodnocený sekventy. V listech se nachází axiomy (což jsou sekventy tvaru $A \Rightarrow A$ nebo $\bot \Rightarrow A$), v kořeni sekvent $\Gamma \Rightarrow \mathrm{A}$ a v každém vrcholu sekvent odvozený pravidly kalkulu $G1_i$ ze sekventů předchozích.

V sekventovém kalkulu jsou pravidla pro zavedení spojek, strukturální pravidla, případně pravidlo řezu. Rozdělujeme je na pravá a levá podle pozice zaváděné spojky vůči sekventové šipce.

Pravé pravidlo pro konjunkci vypadá takto:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \qquad \Gamma \Rightarrow \mathrm{B}}{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}} \Rightarrow\wedge$$

Levá pravidla pro konjunkci vypadají takto:

$$\frac{\Gamma, \mathrm{A}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}}{\Gamma, \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}} \wedge\Rightarrow \qquad \frac{\Gamma, \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}}{\Gamma, \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}} \wedge\Rightarrow$$

Pravá pravidla pro disjunkci vypadají takto:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A}}{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \vee \mathrm{B}} \Rightarrow\vee \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{B}}{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \vee \mathrm{B}} \Rightarrow\vee$$

Levé pravidlo pro disjunkci vypadá takto:

$$\frac{\Gamma, \mathrm{A}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C} \qquad \Gamma, \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}}{\Gamma, \mathrm{A} \vee \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}} \vee\Rightarrow$$

Pravé a levé pravidlo pro implikaci vypadá takto:

$$\frac{\mathrm{A}, \Gamma \Rightarrow \mathrm{B}}{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \to \mathrm{B}} \Rightarrow\to \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \qquad \Pi, \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}}{\Pi, \Gamma, \mathrm{A} \to \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}} \to\Rightarrow$$

Vedle logických pravidel obsahuje kalkul $G1_i$ i strukturální pravidla oslabení a kontrakce a pravidlo řezu (viz [3] nebo též kapitola 2.1 a 3.1 této práce).

Sekventovou šipku lze intuitivně číst jako dokazatelnost formule, která je napravo od šipky ze skupiny předpokladů, která je nalevo od šipky (tedy zápis $\Gamma \Rightarrow$ A přečteme jako $\Gamma \vdash$ A - A je dokazatelná z předpokladů Γ).

V intuicionistické logice platí ekvivalence obou zmíněných kalkulů:

Věta 1.
$\Gamma \vdash_{Ni} A$ *iff* $\vdash_{G1i} \Gamma \Rightarrow A$

Důkaz této věty lze nalézt v [3].

2 Lambekův kalkul a logika FL

Logika nazývaná Lambekův kalkul byla zavedena Joachimem Lambekem v roce 1958 v článku "Mathematics of Sentence Structure". Byla definována ve formátu sekventového kalkulu, v jazyce pouze se dvěma implikacemi. Rozšířením jazyka o další spojky vznikne logika Full Lambek, zkráceně logika FL. Název logiky Full Lambek je odvozen od příjmení autora a od slova full (=plný) ve smyslu definovám v plném jazyce.

Substrukturální logiky, jako na příklad lineární logika, logika BCK (= intuicionistická logika bez strukturálního pravidla kontrakce) nebo relevanční logika, mohou být nahlíženy jako rozšíření logiky FL o strukturální pravidla. Taková rozšíření rozlišují různé interpretace skupin předpokladů (v sekventovém kalkulu levé strany sekventů, v přirozené dedukci předpokladů). Na příklad intuicionistická lineární logika a BCK logika interpretují předpoklady Γ jako multimnožiny formulí, intuicionistická relevanční logika je interpretuje jako množiny formulí. V logice FL budou skupiny předpokladů vždy interpetovány jako posloupnosti formulí - záleží tedy na pořadí a počtu výskytů formulí v posloupnosti.

Jazyk logiky FL obsahuje množinu výrokových atomů, logické symboly, čili binární spojky $\rightarrow$ (implikace doprava), $\leftarrow$(implikace doleva), $\bullet$ (fúze), $\wedge$ (konjunkce), $\vee$ (disjunkce), pravdivostní konstanty 1, 0, $\top$, $\bot$, a pomocné symboly, např. závorky.

Definice 1. Každý atom a každá konstanta jsou formule, jsou-li A, B formule, jsou formule i $A{\rightarrow}B$, $A{\leftarrow}B$, $A{\bullet}B$, $A{\wedge}B$, $A{\vee}B$.

Nejprve představíme logiku FL ve formě sekventového kalkulu (tak, jak je definován v článku [5]).

2.1 Sekventový kalkul logiky FL

Sekvent je uspořádaná dvojice konečných posloupností (které mohou být i prázdné) formulí: $\Gamma \Rightarrow \Delta$ (posloupnost formulí vlevo od sekventové šipky nazýváme antecedent, posloupnost vpravo od šipky sukcedent). V logice FL smí posloupnost vpravo od sekventové šipky obsahovat nejvýše jednu formuli: sekventy tedy jsou tvaru $\Gamma \Rightarrow A$ nebo $\Gamma \Rightarrow$

Intuitivně lze číst zápis $\Gamma \Rightarrow A$ dvěma způsoby:

- z posloupnosti předpokladů Γ je dokazatelná A, tedy $\Gamma \vdash A$ (Formule je dokazatelná, pokud je dokazatelná z prázdné posloupnosti předpokladů)

- fúze všech formulí v Γ implikuje formuli A, tedy $\vdash \bullet\, \Gamma \rightarrow A$

Vzhledem k pozdějšímu důkazu ekvivalence sekventového kalkulu logiky FL, jak je definován v [5] (my ho zde nazveme G_{FL}) s přirozenou dedukcí a nezbytné potřebě simulovat jak pravidla zavedení tak eliminace spojek v přirozené dedukci, představíme Gentzenovský sekventový kalkul s pravidlem řezu. Volbu řezového důkazového systému provádíme bez újmy na obecnosti, protože platí, že každý sekvent dokazatelný s pravidlem řezu lze dokázat i bez tohoto pravidla a to nejen v klasické a intuicionistické logice ale i v logice FL [5]:

Věta 2. *Tvrzení o eliminovatelnosti řezu platí pro sekventový kalkul G_{FL}. Platí rovněž pro další, později zmíněné substrukturální logiky kromě FLc.*

Pravidlo řezu vypadá takto:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \qquad \Sigma, \mathrm{A}, \Pi \Rightarrow \mathrm{B}}{\Sigma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \mathrm{B}} \;(\mathrm{cut})$$

2.1.1 Pravidla sekventového kalkulu G_{FL}

Definici sekventového kalkulu logiky FL převezmeme z [5], kalkul nazveme G_{FL}.

Axiom sekventového kalkulu G_{FL} je každý sekvent tvaru A⇒A.

Sekventy $\Gamma \Rightarrow \top$, $\bot \Rightarrow \Delta$ pro pravdivostní konstanty $\top$, $\bot$ jsou axiomy.

Sekvent pro pravdivostní konstantu 1, který vypadá takto: ⇒1 je axiom, vlevo od sekventové šipky musí být prázdná posloupnost předpokladů. V sekventu pro pravdivostní konstantu 0 nesmí být naopak nic vpravo od sekventové šipky: 0⇒ je axiom.

Ekvivalence konstant 1, $\top$ a konstant 0, $\bot$ v logice FL neplatí. K jejímu důkazu je zapotřebí použít pravidlo oslabení, tedy jedno ze strukturálních pravidel, proto se k ní dostaneme až po rozšíření logiky FL.

V sekventovém kalkulu definujeme dva typy pravidel: strukturální a logická. Strukturální pravidla v logice FL nemáme, proto se v kalkulu G_{FL} budeme zabývat pouze pravidly logickými. Ta můžeme rozdělit na pravá a levá podle pozice spojky vůči sekventové šipce.

Konjunkce vpravo může být zavedena pouze v případě, že jsme konjunkty A, B odvodili ze stejných předpokladů, tedy konjunkty stojí na pravé straně od sekventové šipky a na této straně zůstane i výsledná formule A∧B:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \qquad \Gamma \Rightarrow \mathrm{B}}{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}} \Rightarrow\wedge$$

Konjunkce vlevo se může použít pro odvození formule C z posloupnosti předpokladů sjednocené s konjunkcí A∧B jen v případě, že jsme ze stejné posloupnosti předpokladů sjednocené s libovolným z konjunktů odvodili formuli C:

$$\frac{\Gamma,\ A,\ \Sigma \Rightarrow C}{\Gamma,\ A \wedge B,\ \Sigma \Rightarrow C}\ \wedge\Rightarrow \qquad\qquad \frac{\Gamma,\ B,\ \Sigma \Rightarrow C}{\Gamma,\ A \wedge B,\ \Sigma \Rightarrow C}\ \wedge\Rightarrow$$

Disjunkce vpravo může být zavedena v případě, že lze odvodit libovolný disjunkt (v našem případě A nebo B) z posloupnosti předpokladů Γ:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ \Rightarrow\vee \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ \Rightarrow\vee$$

Disjunkce vlevo může být zavedena jako odvození formule C, pokud lze formuli C odvodit z obou disjunktů A, B spolu s posloupností předpokladů Γ

$$\frac{\Gamma,\ A,\ \Sigma \Rightarrow C \qquad \Gamma,\ B,\ \Sigma \Rightarrow C}{\Gamma,\ A \vee B,\ \Sigma \Rightarrow C}\ \vee\Rightarrow$$

Fúze vlevo jednoduše říká, že kombinaci předpokladů interpretujeme jako fúzi:

$$\frac{\Gamma,\ A,\ B,\ \Sigma \Rightarrow C}{\Gamma,\ A \bullet B,\ \Sigma \Rightarrow C}\ \bullet\Rightarrow$$

Fúze vpravo potřebuje ke svému zavedení odvození obou formulí A i B z posloupností (i různých) předpokladů, abychom z jejich sjednocení mohli odvodit fúzi A•B.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Sigma \Rightarrow B}{\Gamma,\ \Sigma \Rightarrow A \bullet B}\ \Rightarrow\bullet$$

Po uvedení dosavadních pravidel můžeme vyslovit následující tvrzení:

Věta 3. *V sekventovém systému s pravidly pro fúzi • a s pravidlem řezu je sekvent $A_1, \ldots, A_m \Rightarrow B$ dokazatelný právě tehdy, když $A_1 \bullet \ldots \bullet A_m \Rightarrow B$ je dokazatelný. [5]*

V sekventovém systému logiky FL nemáme povoleno žádné strukturální pravidlo, tedy ani pravidlo záměny. Důsledkem je, že dvě implikace zavedené následujícími pravidly nejsou ekvivalentní.

Implikace $\rightarrow$, vlevo: může být zavedena, byla-li v předchozím kroku odvozena formule A z posloupnosti předpokladů Γ, a z formule B a případně dalších posloupností předpokladů byla odvozena formule C. Ze vzniklé implikace sjednocené s posloupnostmi předpokladů, ze kterých se odvozovalo v předchozím kroku ve správném pořadí, pak odvodíme formuli C:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \qquad \Pi, \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}}{\Pi, \Gamma, \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}} \rightarrow\Rightarrow$$

Implikace $\leftarrow$, vlevo má podobný postup, zavede se za stejných podmínek při zachování stejného antecedentu a sukcedentu, jejichž pozice se však obrátí:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \qquad \Pi, \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}}{\Pi, \mathrm{B} \leftarrow \mathrm{A}, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}} \leftarrow\Rightarrow$$

Implikace $\rightarrow$, vpravo lze zavést jen tehdy, stojí-li antecedent A úplně vlevo:

$$\frac{\mathrm{A}, \Gamma \Rightarrow \mathrm{B}}{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}} \Rightarrow\rightarrow$$

Implikace $\leftarrow$, vpravo se zavede analogicky:

$$\frac{\Gamma, \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}}{\Gamma \Rightarrow \mathrm{B} \leftarrow \mathrm{A}} \Rightarrow\leftarrow$$

Představme si nyní důležitý vztah mezi fúzí a implikacemi.

Lemma 1. *Ve Full Lambekově kalkulu jsou následující tři podmínky vzájemně ekvivalentní, pro jakékoli formule A, B, C:*

1. *$A \bullet B \Rightarrow C$ je dokazatelné,*
2. *$A \Rightarrow C \leftarrow B$ je dokazatelné,*
3. *$B \Rightarrow A \rightarrow C$ je dokazatelné.*

Pro ilustraci předvedeme důkaz ekvivalence 1. a 3. podmínky: Sekvent $\mathrm{A} \bullet \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C}$ je dokazatelný právě tehdy, když je dokazatelné $\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{C}$.

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení se obejde bez strukturálních pravidel, pro jednoduchost použijeme pravidlo řezu. Předpokládejme, že $A \bullet B \Rightarrow C$ je dokazatelné. Pak $A, B \Rightarrow C$ je také díky řezu $A, B \Rightarrow A \bullet B$ dokazatelné. Použitím $(\Rightarrow \rightarrow)$ dostaneme, že $B \Rightarrow A \rightarrow C$ je dokazatelné.

Předpokládejme naopak, že $B \Rightarrow A \rightarrow C$ je dokazatelné. Pak $A, B \Rightarrow C$ je dokazatelné s využitím pravidla řezu, jak ukazuje tento důkaz:

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow B \rightarrow C \qquad \dfrac{B \Rightarrow B \qquad C \Rightarrow C}{B \rightarrow C, B \Rightarrow C}}{A, B \Rightarrow C}\,(\text{cut})}{A \bullet B \Rightarrow C}$$

A tedy $A \bullet B \Rightarrow C$ je dokazatelné. □

Přítomnost 0 v jazyce umožňuje definovat negaci (a nezavádět pro ni tedy zvláštní pravidla) pomocí implikace. Vzhledem k přítomnosti dvou implikací v logice FL, má smysl mluvit o dvou negacích: $A \rightarrow 0$, $0 \leftarrow A$.

Důkaz v sekventovém kalkulu

Definice 2. Důkaz sekventu $\Gamma \Rightarrow A$ kalkulu G_{FL} je strom, v jehož kořeni je sekvent $\Gamma \Rightarrow A$, v jeho listech jsou axiomy a v každém vrcholu, který není list, je sekvent získaný ze sekventů v bezprostředních přechůdcích tohoto vrcholu korektním použitím některého pravidla kalkulu G_{FL}. Dokazatelnost sekventu v kalkulu G_{FL} značíme $\vdash_G$.

2.2 Kalkul přirozené dedukce logiky FL

Logiku FL lze definovat i jako kalkul přirozené dedukce, jak ukázal Zimmermann v článku "Lambek Calculus in natural deduction"[4], kde ale uvažuje logiku FL v jazyce bez pravdivostních konstant.

Nejprve představíme Zimmermanovu definici kalkulu v tomto jazyce bez konstant, kalkul nazveme N^-_{FL}. Později se pokusíme přidat pravidla pro pravdivostní konstanty 1, 0, $\top$, $\bot$, což si vyžádá modifikaci některých dalších pravidel - základního pravidla a pravidel zavedení obou implikací. Nový kalkul nazveme N_{FL}. Jelikož v této logice záleží na pořadí a počtu předpokladů, jsou skupiny předpokladů opět interpretovány jako posloupnosti výskytů předpokladů.

Základní pojem, který je v přirozené dedukci třeba definovat, je odvození. Odvození v kalkulu N^-_{FL} je strom, v jehož kořeni se nachází odvozená formule, v listech stromu jsou předpoklady, ze kterých se odvozuje, v některých pravidlech explicitně škrtáme výskyty některých předpokladů. Takové předpoklady (posloupnosti předpokladů) označíme indexem ^{v} a jejich škrtnutí vyznačíme v příslušném kroku odvození opět v. Každý vrchol pak odpovídá korektnímu užití některého pravidla přirozené dedukce. V ostatních listech se mohou vyskytovat předpoklady, které explicitně nezmiňujeme.

Definice 3. Odvoditelnost formule A z předpokladů Γ v kalkulu N^-_{FL} značíme $\Gamma \vdash_{N^-} A$, což znamená, že z posloupností předpokladů Γ je odvoditelná formule A.

- jedno použití základního pravidla (BR) je odvození

$$\frac{A}{A}$$

- z odvození formule A získané z posloupnosti výskytů předpokladů Γ ($\Gamma \vdash_{N^-} A$) z odvození formule B získané z posloupnosti předpokladů Γ ($\Gamma \vdash_{N^-} B$) odvodíme použitím pravidla pro zavedení konjunkce formuli A$\wedge$B z posloupnosti předpokladů Γ ($\Gamma \vdash_{N^-} A\wedge B$). Pravidlo zapsané v kalkulu N^-_{FL} vypadá takto, vyznačené výskyty předpokladů se škrtají:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\Gamma\ ^v] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \wedge B}\ {\scriptstyle \wedge\, I, v}$$

- z odvození formule A odvozené z posloupnosti předpokladů Γ a použitím pravidla pro zavedení disjunkce, získáme odvození formule A∨B z posloupnosti předpokladů Γ (Disjunkt je odvozený z posloupnosti předpokladů Γ.)

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ \mathrm{A}\end{matrix}}{\mathrm{A}\vee\mathrm{B}} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ \mathrm{B}\end{matrix}}{\mathrm{A}\vee\mathrm{B}}$$

- z odvození formule A z posloupnosti předpokladů Γ a z odvození formule B z posloupnosti předpokladů Δ získáme použitím pravidla pro zavedení fúze odvození formule A•B z posloupností předpokladů Γ, Δ.

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma & \Delta\\ \vdots & \vdots\\ \mathrm{A} & \mathrm{B}\end{matrix}}{\mathrm{A}\bullet\mathrm{B}}\ \bullet\mathrm{I}$$

- z odvození formule B z posloupnosti předpokladů Γ a předpokladu A získáme použitím pravidla pro zavedení implikace doprava odvození formule A→B z posloupnosti předpokladů Γ

$$\dfrac{\begin{matrix}[\mathrm{A}^v] & \Gamma\\ \vdots & \\ \mathrm{B} & \end{matrix}}{\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}}\ \rightarrow\mathrm{I},v$$

- z odvození formule B z posloupnosti předpokladů Γ a předpokladu A získáme použitím pravidla pro zavedení implikace doprava odvození formule A←B z posloupnosti předpokladů Γ

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma & [\mathrm{A}^v]\\ & \vdots\\ & \mathrm{B}\end{matrix}}{\mathrm{B}\leftarrow\mathrm{A}}\ \leftarrow\mathrm{I},v$$

- z odvození formule A∧B z posloupnosti předpokladů Γ získáme po použití pravidla pro eliminaci konjunkce odvození formule A nebo odvození formule B

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\wedge B\end{matrix}}{A}\ (\wedge E) \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\wedge B\end{matrix}}{B}\ (\wedge E)$$

- z odvození formule C z posloupnosti předpokladů Γ, Δ a předpokladu A, z odvození formule A∨B z posloupnosti předpokladů Θ, a formule C odvozené z posloupnosti předpokladů Δ, Γ a A, získáme po použití pravidla pro eliminaci disjunkce odvození formule C, vyznačené výskyty předpokladů se škrtají

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma[A\Delta]^v\\ \vdots\\ C\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Theta\\ \vdots\\ A\vee B\end{matrix}\qquad \begin{matrix}[\Gamma B]^v\ \Delta\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\ \vee E{,}v$$

- z odvození formule A z posloupnosti předpokladů Γ a z odvození formule A→B z posloupnosti předpokladů Δ získáme použitím pravidla pro eliminaci implikace doprava formuli B

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ A\rightarrow B\end{matrix}}{B}\ \rightarrow E$$

- z odvození formule A z posloupnosti předpokladů Γ a z odvození formule A←B z posloupnosti předpokladů Δ získáme pravidlem pro eliminaci implikace doleva formuli B

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ B\leftarrow A\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ A\end{matrix}}{B}\ \leftarrow E$$

- z odvození formule C z posloupnosti předpokladů Γ, A, B a Δ, z odvození formule A•B z posloupnosti předpokladů Θ a z odvození formule C z posloupnosti předpokladů Δ, A, B a Γ získáme po použití pravidla pro eliminaci fúze odvození formule C, vyznačené výskyty předpokladů se škrtají

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma[\mathrm{AB}\Delta]^v\\ \vdots\\ \mathrm{C}\end{array}\qquad \begin{array}{c}\Theta\\ \vdots\\ \mathrm{A}\bullet\mathrm{B}\end{array}\qquad \begin{array}{c}[\Gamma\mathrm{AB}]^v\ \Delta\\ \vdots\\ \mathrm{C}\end{array}}{\mathrm{C}}\,\bullet\mathrm{E},v$$

2.2.1 Pravdivostní konstanty

V jazyce logiky FL jsou obsaženy pravdivostní konstanty 1, 0, $\top$, $\bot$. Rozšíříme původní Zimmeramnovu definici kalkulu přirozené dedukce (N_{FL}^{-}) o pravidla pro tyto konstanty. Kalkul s pravidly pro konstanty a modifikací základního pravidla a pravidla pro implikace nazveme N_{FL}. Nejprve si připomeneme, jak jsou konstanty zavedeny v sekvenotvém kalkulu.

Ze sekventu $\Rightarrow 1$ je zřejmě, že pravdivostní konstantu 1 je třeba odvodit z prázdné posloupnosti předpokladů, což se v přirozené dedukci zapíše takto:

$$\frac{\emptyset}{1}$$

Pro ilustraci ukažme užití tohoto pravidla v důkazu tautologie (1→A)→A v kalkulu N_{FL}^{-} s tímto nově přidaným pravidlem

$$\dfrac{\dfrac{1\to\mathrm{A}\qquad \begin{array}{c}\emptyset\\ \vdots\\ 1\end{array}}{\mathrm{A}}}{(1\to\mathrm{A})\to\mathrm{A}}$$

Důkaz tautologie A $\to$ (1 $\to$ A) však bude komplikovanější, protože se zprvu zdá, že se bez nějaké formy pravidla oslabení nebo bez odvození z alespoň dvou předpokladů neobejdeme.

To motivuje následující modifikaci základního pravidla, díky které budeme později moci simulovat oslabení 1 v sekventovém kalkulu. Pro n$\geq$0 definujeme 1^n jako posloupnost n výskytů 1. Nyní definujme základní pravidlo v kalkulu N_{FL} takto:

$$\frac{1^n \qquad \mathrm{A}}{\mathrm{A}} \qquad\qquad \frac{\mathrm{A} \qquad 1^n}{\mathrm{A}}$$

Pro důkaz tautologie A→(1→A) použijeme instanci základního pravidla pro n=1:

$$\frac{1 \quad A}{A} \qquad\qquad \frac{A \quad 1}{A}$$

A důkaz tedy bude vypadat takto:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{1 \quad A}{A}}{1{\rightarrow}A}}{A{\rightarrow}(1{\rightarrow}A)}$$

Je však také nutné pozměnit i pravidla pro zavedení obou implikací, jak bude zřejmé z důkazu ekvivalence obou kalkulů v kapitole 2.3. Při zavádění implikace doprava je v pravidle kalkulu N_{FL}^{-} jasně určeno omezení výskytu předpokladů: nalevo od předpokladu, ze kterého potom konečně mnoha kroky odvodíme formuli pro konsekvent implikace, bude prázdná posloupnost předpokladů. Vzhledem k výše zmíněné modifikaci však povolíme v kalkulu N_{FL} namísto prázdné posloupnosti posloupnost n-mnoha 1. V případě, že n=0, označuje 1^n prázdnou posloupnost. Nová pravidla zavedení obou implikací v kalkulu N_{FL} vypadají takto::

$$\frac{\begin{matrix} 1^n & [A^v] & \Gamma \\ & \vdots & \\ & B & \end{matrix}}{A \rightarrow B}\ {\scriptstyle \rightarrow\mathrm{I},v} \qquad\qquad \frac{\begin{matrix} \Gamma & [A^v] & 1^n \\ & \vdots & \\ & B & \end{matrix}}{B \leftarrow A}\ {\scriptstyle \leftarrow\mathrm{I},v}$$

Sekventový axiom pro pravdivostní konstantu 0 vypadá takto: $0 \Rightarrow$. V přirozené dedukci 0 zavedeme pouze instancí základního pravidla a nedefinujeme pro ni zvláštní zaváděcí pravidlo:

$$\frac{0}{0}$$

$\top$ - konstantu pravdivosti lze odvodit z posloupnosti jakýchkoli předpokladů ($\Gamma \Rightarrow \top$). V kalkulu N_{FL} pravidlo pro zavedení definujeme takto:

$$\frac{\begin{matrix} \Gamma \\ \vdots \end{matrix}}{\top}$$

Stejně jako 0 byla protipólem 1, pro $\top$ je protipól pravdivostní konstanta sporu: $\bot$. Nejznámější skutečnost, která platí i v logice FL o sporu je, že ze sporu lze odvodit cokoli. Spor můžeme eliminovat, ale nelze ho zavést. Eliminační pravidlo bude vypadat takto:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \perp\end{array}}{\mathrm{A}}$$

Zavedení pravdivostních konstant v přirozené dedukci (poté, co byly již definovány v sekventovém kalkulu) bylo poslední částí přípravy pro důkaz ekvivalence obou důkazových systémů.

Definice 4. Odvození formule v kalkulu N_{FL} je stejné jako odvození v kalkulu N_{FL}^{-}, až na to, že v něm používáme pravidla N_{FL}. Odvoditelnost formule z předpokladů v kalkulu N_{FL} značíme $\vdash_N$.

2.3 Ekvivalence kalkulu přirozené dedukce a sekventového kalkulu logiky FL

Ekvivalence důkazových systémů znamená, že cokoli je dokazatelné v jednom, je dokazatelné i v druhém. A naopak: co není v jednom z nich dokazatelné, nemůže být dokazatelné ani v druhém. Tuto skutečnost vyjádříme v našem případě následující větou:

Věta 4. *Kalkul přirozené dedukce N_{FL} je ekvivalentní s Gentzenovským sekventovým kalkulem G_{FL} obsahujícím pravidlo řezu. Jinými slovy, formule A je dokazatelná z posloupnosti předpokladů Γ v přirozené dedukci právě tehdy, když je sekvent $\Gamma \Rightarrow A$ dokazatelný v Gentzenovském sekventovém kalkulu:*

$$\Gamma \vdash_{N} A \quad \textit{iff} \;\; \vdash_{G} \Gamma \Rightarrow A$$

0 je dokazatelná z posloupnosti předpokladů Γ v přirozené dedukci právě tehdy, když je sekvent $\Gamma \Rightarrow \emptyset$ dokazatelný v Gentzenovském sekventovém kalkulu.

$$\Gamma \vdash_{N} 0 \quad \textit{iff} \;\; \vdash_{G} \Gamma \Rightarrow \emptyset$$

Věta 4 je tedy tvaru ekvivalence. Abychom ji mohli dokázat, musíme ukázat implikace obou směrů nezávisle na sobě. Budeme postupovat indukcí.

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle hloubky příslušných stromů důkazu.

Strom hloubky 0:

Nulový počet větví stromu odpovídá v sekventovém kalkulu axiomům, to je sekventům tvaru $A \Rightarrow A$ a v přirozené dedukci základnímu pravidlu. V následujícím zápisu je zřejmé, že se dají vzájemně simulovat, oběma směry:

$$A \Rightarrow A \qquad \leftrightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}}$$

Další strom o nulovém počtu větví je axiom, že ze sporu plyne cokoli, jehož sekvent i zápis pravidlem přirozené dedukce opět umíme vzájemně simulovat:

$$\bot \Rightarrow A \qquad \leftrightsquigarrow \qquad \frac{\bot}{\mathrm{A}}$$

Ukažme, že i instanci základního pravidla s posloupností 1^n v přirozené dedukci umíme simulovat v sekventovém tvaru:

Odvození vyjadřující A,1^n $\vdash$ A (resp. 1^n, A $\vdash$ A) přepíšeme do axiomatického sekventu A$\Rightarrow$A a poté použijime oslabení 1 v počtu odpovídajícím velikosti n, čímž dostaneme sekvent A,1^n $\Rightarrow$ A (resp. sekvent 1^n, A $\Rightarrow$ A).

$$\frac{\mathrm{A} \qquad 1^n}{\mathrm{A}} \qquad \leftrightsquigarrow \qquad \mathrm{A}, 1^n \Rightarrow \mathrm{A}$$

$$\frac{1^n \qquad \mathrm{A}}{\mathrm{A}} \qquad \leftrightsquigarrow \qquad 1^n, \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A}$$

Poslední ukázkou simulace stromů hloubky 0 v obou důkazových systémech bude zavedení pravdivostních konstant. V případě konstanty 0 se jedná o instanci základního pravidla v přirozené dedukci:

$$\Rightarrow 1 \qquad \leftrightsquigarrow \qquad \frac{\emptyset}{1}$$

$$0 \Rightarrow 0 \qquad \leftrightsquigarrow \qquad \frac{0}{0}$$

Podle principu důkazu indukcí můžeme předpokládat, že věta platí pro strom hloubky n.

Indukční krok bude spočívat v rozboru případů důkazů podle posledního použitého pravidla ve stromě. Začneme implikací doprava, tedy simulací odvození v kalkulu N_{FL} důkazy kalkulu G_{FL}.

$\Longrightarrow$

Pravidlům zavedení kalkulu N_{FL} odpovídají pravá pravidla kalkulu G_{FL}. Eliminačním pravidlům odpovídají levá pravidla. Rozlišme případy podle posledního kroku odvození $\Gamma \vdash_{N} \mathrm{A}$:

Nechť je poslední krok odvození zavedení konjunkce:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots \\ \mathrm{A}\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\Gamma^v] \\ \vdots \\ \mathrm{B}\end{array}}{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}} \wedge\mathrm{I}, v$$

Podle indukčního předpokladu umíme odvození $\Gamma \vdash_{N} \mathrm{A}$ a $\Gamma \vdash_{N} \mathrm{B}$ v kalkulu N_{FL} simulovat důkazy sekventů $\Gamma \Rightarrow \mathrm{A}$ a $\Gamma \Rightarrow \mathrm{B}$ v kalkulu G_{FL}. Čili pro simulaci posledního kroku odvození konjunkce použijeme následující pravidlo v sekventovém tvaru:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \qquad \Gamma \Rightarrow \mathrm{B}}{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}} \Rightarrow \wedge$$

U dalších pravidel zavedení spojek budeme postupovat analogicky. Ukážeme poslední krok důkazu v kalkulu N_{FL} a způsob simulace kalkulu G_{FL}.

Nechť je posledním krokem v odvození kalkulu N_{FL} zavedení disjunkce:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \mathrm{A}\end{array}}{\mathrm{A}\vee\mathrm{B}}$$

Z indukčního předpokladu umíme simulovat odvození $\Gamma \vdash_N$ A v kalkulu N_{FL} důkazem sekventu $\Gamma \Rightarrow$ A. K simulaci posledního kroku použijeme následující pravidlo kalkulu G_{FL}:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A}}{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A}\vee\mathrm{B}}\ {\Rightarrow\vee}$$

Nechť je posledním krokem v odvození zavedení implikace doprava v kalkulu N_{FL} (simulace pravidla zavedení implikace doleva bude probíhat analogicky):

$$\dfrac{\begin{array}{ccc}1^n & [\mathrm{A}^v] & \Gamma\\ & \vdots & \\ & \mathrm{B} & \end{array}}{\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}}\ {\rightarrow}\mathrm{I},v$$

Z indukčního předpokladu simulujeme odvození 1^n, A, $\Gamma \vdash_N$ B v přirozené dedukci důkazem sekventu 1^n, A, $\Gamma \Rightarrow$ B. Použijeme n-krát pravidlo řezu se sekventem $\Rightarrow 1$, což je axiom, a dostaneme důkaz sekventu A, $\Gamma \Rightarrow$ B. Použitím pravidla implikace doprava na pravé straně získáme důkaz sekventu $\Gamma \Rightarrow$ A$\rightarrow$B. Pak už stačí použít n-krát oslabení 1, čímž vznikne důkaz sekventu 1^n, $\Gamma \Rightarrow$ A$\rightarrow$B.

Jako poslední překlad zaváděcího pravidla ukážeme pravidlo pro zavedení fúze. V kalkulu N_{FL} můžeme zavést fúzi jen tehdy, jsou-li obě formule odvozené z ne nutně stejných posloupností předpokladů.

Nechť je tedy toto zavedení posledním krokem v odvození v kalkulu N_{FL}:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma & \Delta\\ \vdots & \vdots\\ \mathrm{A} & \mathrm{B}\end{array}}{\mathrm{A}\bullet\mathrm{B}}\ \bullet\mathrm{I}$$

Z indukčního předpokladu umíme simulovat odvození důkazy sekventů kalkulu G_{FL}. Použitím pravidla $\Rightarrow \bullet$ získáme následující pravidlo:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \qquad \Delta \Rightarrow \mathrm{B}}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \mathrm{A} \bullet \mathrm{B}} \Rightarrow \bullet$$

Eliminačním pravidlům v přirozené dedukci odpovídají levá pravidla sekventového kalkulu. Pro jejich převedení nám velmi pomůže pravidlo řezu, které jsme v kalkulu G_{FL} povolili.

Nechť je posledním krokem v odvození kalkulu N_{FL} eliminace konjunkce:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}}{\mathrm{A}} \; (\wedge \mathrm{E}) \end{array}$$

Z indukčního předpokladu umíme simulovat odvození formule A∧B z posloupnosti předpokladů Γ důkazem sekventu $\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$. Můžeme tedy poslední krok důkazu simulovat s využitím řezu levým pravidlem sekventového kalkulu:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \qquad \dfrac{\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A}}{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}} \wedge \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A}} \text{cut}$$

Nechť je posledním krokem odvození v kalkulu N_{FL} eliminace disjunkce:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma[\mathrm{A}\Delta]^v \\ \vdots \\ \mathrm{C} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Theta \\ \vdots \\ \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\Gamma \mathrm{B}]^v \; \Delta \\ \vdots \\ \mathrm{C} \end{array}}{\mathrm{C}} \vee \mathrm{E}, v$$

Z indukčního předpokladu umíme simulovat odvození formule C z posloupností předpokladů Γ, A, Δ důkazem sekventu $\Gamma,\mathrm{A},\Delta \Rightarrow \mathrm{C}$, odvození formule A∨B z posloupnosti předpokladů Θ důkazem sekventu $\Theta \Rightarrow \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ a odvození formule C z posloupností předpokladů Γ, B, Δ důkazem sekventu $\Gamma,\mathrm{B},\Delta \Rightarrow \mathrm{C}$.

Simulaci eliminace disjunkce provedeme ve dvou krocích. Nejprve použijeme na sekventy $\Gamma,\mathrm{A},\Delta \Rightarrow \mathrm{C}$ a $\Gamma,\mathrm{B},\Delta \Rightarrow \mathrm{C}$ levé pravidlo disjunkce, čímž získáme sekvent $\Gamma,\mathrm{A} \vee \mathrm{B},\Delta \Rightarrow \mathrm{C}$.

Poté využijeme pravidlo řezu na nově získaný sekvent $\Gamma,\mathrm{A} \vee \mathrm{B},\Delta \Rightarrow \mathrm{C}$ a na sekvent $\Theta \Rightarrow \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$, abychom simulovali odvození C z posloupností předpokladů Γ, Θ, Δ.

Celý zápis stromového důkazu simulující eliminaci disjunkce v kalkulu N_{FL} bude v kalkulu G_{FL} vypadat takto:

$$\dfrac{\Theta \Rightarrow A\vee B \qquad \dfrac{\Gamma,A,\Delta \Rightarrow C \qquad \Gamma,B,\Delta \Rightarrow C}{\Gamma,A\vee B,\Delta \Rightarrow C}\vee\Rightarrow}{\Gamma,\Theta,\Delta \Rightarrow C}\text{cut}$$

Nechť je posledním krokem kalkulu N_{FL} eliminace implikace doprava:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ A\to B\end{matrix}}{B}\to\text{E}$$

Z indukčního předpokladu umíme simulovat odvození formule A z posloupnosti předpokladů Γ důkazem sekventu $\Gamma \Rightarrow A$ a odvození formule $A\to B$ z posloupnosti předpokladů Δ důkazem sekventu $\Delta \Rightarrow A\to B$. Na sekvent $\Gamma \Rightarrow A$ a na axiom $B\Rightarrow B$ použijeme levé pravidlo pro implikaci, čímž získáme sekvent $\Gamma,A\to B \Rightarrow B$.

Pomocí pravidla řezu z nově získaného sekventu a ze sekventu $\Delta \Rightarrow A\to B$, který máme rovněž k dispozici získáme sekvent $\Gamma,\Delta \Rightarrow B$, který odpovídá odvození formule v pravidle eliminace implikace v přirozené dedukci:

$$\dfrac{\Delta \Rightarrow A\to B \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A \qquad B\Rightarrow B}{\Gamma,A\to B \Rightarrow B}\to\Rightarrow}{\Gamma,\Delta \Rightarrow B}\text{cut}$$

V případě, že je posledním krokem eliminace implikace doleva, postupujeme podobně. Pravidlo v kalkulu N_{FL}:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ B\leftarrow A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta\\ \vdots\\ A\end{matrix}}{B}\leftarrow\text{E}$$

simulujeme opět aplikací levého pravidla pro implikaci doleva a pravidla řezu:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow B\leftarrow A \qquad \dfrac{\Delta \Rightarrow A \qquad B\Rightarrow B}{B\leftarrow A,\ \Delta \Rightarrow B}\leftarrow\Rightarrow}{\Gamma,\Delta \Rightarrow B}\text{cut}$$

Nechť je posledním krokem odvození v kalkulu N_{FL} eliminace fúze:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma[AB\Delta]^v\\ \vdots\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Theta\\ \vdots\\ A\bullet B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\Gamma AB]^v\ \Delta\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\bullet\text{E},v$$

Předpokládáme, že odvození formule C z posloupností předpokladů Γ, A, B, Δ lze simulovat důkazem sekventu Γ,A,B,Δ ⇒ C a odvození formule A•B z posloupností předpokladů Θ důkazem sekventu Θ ⇒ A•B. Po použití pravidla pro zavedení fúze vlevo a pravidla řezu získáme sekvent Γ,Θ,Δ ⇒ C, který odpovídá odvození C z posloupností předpokladů Γ, Θ, Δ v přirozené dedukci. Poslední krok simulujeme v sekventovém kalkulu takto:

$$\dfrac{\Theta \Rightarrow \mathrm{A}\bullet\mathrm{B} \qquad \dfrac{\Gamma,\mathrm{A},\mathrm{B},\Delta \Rightarrow \mathrm{C}}{\Gamma,\mathrm{A}\bullet\mathrm{B},\Delta \Rightarrow \mathrm{C}}\,{\bullet\Rightarrow}}{\Gamma,\Theta,\Delta \Rightarrow \mathrm{C}}\,\text{cut}$$

Vidíme tedy, že každé pravidlo pro binární spojky přirozené dedukce umíme přepsat do sekventového tvaru, čímž je dokázána jedna strana ekvivalence.

$\Longleftarrow$

Pro dokončení důkazu ekvivalence obou systému je nutné dokázat i opačný směr, tedy že každé pravidlo Gentzenovského kalkulu umíme simulovat pravidlem přirozené dedukce. Opět postupujeme indukcí podle hloubky důkazu v G_{FL}, rozlišíme případy podle posledního kroku důkazu.

Nechť je poslední krok důkazu v kalkulu G_{FL} zavedení konjunkce vlevo:

$$\dfrac{\Gamma,\ \mathrm{A},\ \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}}{\Gamma,\ \mathrm{A} \wedge \mathrm{B},\ \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}}\,{\wedge\Rightarrow}$$

Důkaz sekventu Γ, A, Σ ⇒ C umíme dle indukčního předpokladu přepsat na odvození D_1:

$$\begin{array}{c} \underline{\Gamma\ \ \mathrm{A}\ \ \Sigma} \\ \vdots_{D_1} \\ \mathrm{C} \end{array}$$

Důkaz sekventu Γ, A ∧ B, Σ ⇒ C umíme pak přepsat na toto odvození:

$$\begin{array}{c} \underline{\Gamma \qquad \dfrac{\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\,{\wedge\,\mathrm{E}} \qquad \Sigma} \\ \vdots_{D_1} \\ \mathrm{C} \end{array}$$

Analogicky bychom simulovali i pravidlo pro druhý konjunkt.

Nechť je posledním krokem v důkazu kalkulu G_{FL} pravé pravidlo pro konjunkci:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \qquad \Gamma \Rightarrow \mathrm{B}}{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}}$$

Z indukčního předpokladu umíme přepsat důkaz sekventu $\Gamma \Rightarrow$A kalkulu G_{FL} na odvození D_1 kalkulu N_{FL} a důkaz sekventu $\Gamma \Rightarrow$ B na odvození D_2.

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots_{D_1}\\ \mathrm{A}\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots_{D_2}\\ \mathrm{B}\end{array}$$

Po zavedení konjunkce škrtneme jednu posloupnost předpokladů Γ a získáme tedy odvození formule A$\wedge$B z posloupnosti předpokladů Γ:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots_{D_1}\\ \mathrm{A}\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\Gamma\ ^v]\\ \vdots_{D_2}\\ \mathrm{B}\end{array}}{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}} \wedge \mathrm{I},v$$

Nechť je poslední krok v důkazu kalkulu G_{FL} levé pravidlo pro disjunkci:

$$\frac{\Gamma,\mathrm{A},\Sigma \Rightarrow \mathrm{C} \qquad \Gamma,\mathrm{B},\Sigma \Rightarrow \mathrm{C}}{\Gamma,\mathrm{A}\vee\mathrm{B},\ \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}}$$

Podle indukčního předpokladu umíme přepsat sekvent Γ,A,$\Sigma \Rightarrow$ C na odvození D_1 a sekvent Γ,B,$\Sigma \Rightarrow$ C na odvození D_2 v kalkulu N_{FL}:

$$\begin{array}{c}\underline{\Gamma\ \mathrm{A}\ \Sigma}\\ \vdots_{D_1}\\ \mathrm{C}\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}\underline{\Gamma\ \mathrm{B}\ \Sigma}\\ \vdots_{D_2}\\ \mathrm{C}\end{array}$$

Důkaz sekventu Γ,A$\vee$B, $\Sigma \Rightarrow$ C tedy přepíšeme na toto odvození:

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma[\mathrm{A}\Sigma]^v\\ \vdots_{D_1}\\ \mathrm{C}\end{array} \qquad \mathrm{A}\vee\mathrm{B} \qquad \begin{array}{c}[\Gamma\mathrm{B}]^v\ \Sigma\\ \vdots_{D_2}\\ \mathrm{C}\end{array}}{\mathrm{C}} \vee\mathrm{E},v$$

Nechť je posledním krokem důkazu kalkulu G_{FL} disjunkce vpravo (který ukážeme pro jeden disjunkt, pro druhý bude pravidlo i simulace fungovat analogicky):

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A}}{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \vee \mathrm{B}}$$

Podle indukčního předpokladu přepíšeme sekvent $\Gamma \Rightarrow \mathrm{A}$ na odvození D_1 a použijeme pravidlo pro zavedení disjunkce v přirozené dedukci:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots_{D_1} \\ \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{A} \vee \mathrm{B}} \end{array}$$

Nechť je poslední krok důkazu v Gentzenovském kalkulu zavedení implikace doprava na levé straně:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \qquad \Pi, \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}}{\Pi, \Gamma, \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}}$$

Podle indukčního předpokladu umíme důkaz sekventu $\Gamma \Rightarrow \mathrm{A}$ přepsat na odvození D_1 v přirozené dedukci a důkaz sekventu $\Pi, \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}$ na odvození D_2.

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots_{D_1} \\ \mathrm{A} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \underline{\Pi \ \ \mathrm{B} \ \ \Sigma} \\ \vdots_{D_2} \\ \mathrm{C} \end{array}$$

Důkaz sekventu $\Pi, \Gamma, \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}$ pak umíme převést na toto odvození v přirozené dedukci:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\Pi \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \vdots_{D_1} \\ \mathrm{A}\end{array} \qquad \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}}{\mathrm{B}} \qquad \Sigma}{} \\ \vdots_{D_2} \\ \mathrm{C} \end{array}$$

Nechť je posledním krokem v důkazu kalkulu G_{FL} levé pravidlo implikace doleva:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \qquad \Pi, \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}}{\Pi, \mathrm{B} \leftarrow \mathrm{A}, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}} \leftarrow\Rightarrow$$

Podle indukčního předpokladu umíme důkaz sekventu $\Gamma \Rightarrow \mathrm{A}$ přepsat na odvození D_1 v kalkulu N_{FL} a důkaz sekventu $\Pi, \mathrm{B}, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}$ na odvození D_2.

$$
\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots_{D_1} \\ A \end{array}
\qquad\qquad\qquad
\begin{array}{c} \underline{\Pi \;\; B \;\; \Sigma} \\ \vdots_{D_2} \\ C \end{array}
$$

Důkaz sekventu $\Pi, \Gamma, A \to B, \Sigma \Rightarrow C$ pak umíme převést na toto odvození v kalkulu N_{FL}:

$$
\begin{array}{c}
\underline{\Pi \qquad \dfrac{B \leftarrow A \qquad \begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots_{D_1} \\ A \end{array}}{B} \qquad \Sigma} \\
\vdots_{D_2} \\
C
\end{array}
$$

Chceme-li simulovat poslední krok kalkulu G_{FL} pro pravé pravidlo implikace doprava, které vypadá takto:

$$
\frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}
$$

potřebujeme z indukčního předpokladu přepsat sekvent $A, \Gamma \Rightarrow B$ na odvození formule B z posloupnosti předpokladů A, Γ, a aplikovat pravidlo v kalkulu N_{FL} pro zavedení implikace, v tomto případě pro n=0:

$$
\dfrac{A^{v} \qquad \begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \to B}\;{\scriptstyle \to\mathrm{I},v}
$$

Pravé pravidlo implikace doleva, které vypadá takto:

$$
\frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow B \leftarrow A}
$$

simulujeme přepsáním důkazu sekventu $\Gamma, A \Rightarrow B$ (z indukčního předpokladu) na odvození formule B z posloupnosti předpokladů Γ, A; a aplikujeme pravidlo kalkulu N_{FL} pro zavedení implikace pro n=0:

$$
\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ B \end{array} \qquad A^{v}}{B \leftarrow A}\;{\scriptstyle \leftarrow\mathrm{I},v}
$$

Nechť je posledním krokem v kalkulu G_{FL} levé pravidlo pro fúzi:

$$\frac{\Gamma,\, \mathrm{A},\, \mathrm{B},\, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}}{\Gamma,\, \mathrm{A} \bullet \mathrm{B},\, \Sigma \Rightarrow \mathrm{C}} \bullet\Rightarrow$$

Z indukčního předpokladu umíme důkaz sekventu Γ, A, B, $\Sigma \Rightarrow$ C přepsat na odvození D_1:

$$\begin{array}{c} \underline{\Gamma\ \ \mathrm{A}\ \ \mathrm{B}\ \ \Sigma} \\ \vdots_{D_1} \\ \mathrm{C} \end{array}$$

Poté už lze přepsat důkaz sekventu Γ, A $\bullet$ B, $\Sigma \Rightarrow$ C na toto odvození v kalkulu přirozené dedukce:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma[\mathrm{AB}\Sigma]^v \\ \vdots_{D_1} \\ \mathrm{C} \end{array} \qquad \mathrm{A}\bullet\mathrm{B} \qquad \begin{array}{c} [\Gamma\mathrm{AB}]^v\ \Sigma \\ \vdots_{D_1} \\ \mathrm{C} \end{array}}{\mathrm{C}} \bullet\mathrm{E},v$$

V případě, že posledním krokem v důkazu kalkulu G_{FL} je pravé pravidlo pro spojku fúze, které vypadá takto:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \qquad \Sigma \Rightarrow \mathrm{B}}{\Gamma,\, \Sigma \Rightarrow \mathrm{A} \bullet \mathrm{B}} \Rightarrow\bullet$$

přepíšeme z indukčního předpokladu důkaz sekventu $\Gamma \Rightarrow$ A a důkaz sekventu $\Sigma \Rightarrow$ B na příslušná odvození v kalkulu N_{FL} a aplikujeme pravidlo pro zavedení fúze, čímž získáme odvození formule A$\bullet$B z posloupností předpokladů Γ, Δ, což odpovídá simulovanému důkazu sekventu:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \mathrm{A} \end{array} \quad \begin{array}{c} \Sigma \\ \vdots \\ \mathrm{B} \end{array}}{\mathrm{A} \bullet \mathrm{B}} \bullet\mathrm{I}$$

Důležité a specifické pravidlo sekventového kalkulu, které je také nutné simulovat v přirozené dedukci je pravidlo řezu. Nechť je pravidlo řezu posledním krokem v důkazu Gentzenovského kalkulu:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} \qquad \Sigma,\, \mathrm{A},\, \Pi \Rightarrow \mathrm{C}}{\Sigma,\, \Gamma,\, \Pi \Rightarrow \mathrm{C}}$$

Z indukčních předpokladů přepíšeme sekventy pravidel kalkulu N_{FL} na odvození v přirozené dedukci. Celá simulace tohoto pravidla tedy bude vypadat takto:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & [\Gamma] & \\ & \vdots_{D_1} & \\ [\Sigma] & A & [\Pi] \end{array} \\ \hline \vdots_{D_2} \\ \hline C \end{array}$$

Nechť je posledním krokem v důkazu kalkulu G_{FL} pravidlo pro oslabení 1 vlevo:

Z indukčního předpokladu existuje odvození

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ A \end{array}$$

Připsáním 1 zleva

$$\begin{array}{cc} 1 & \Gamma \\ & \vdots \\ & A \end{array}$$

získáme opět korektní odvození v kalkulu N_{FL}: probráním jednotlivých kroků snadno nahlédneme, že jsou opět korekntími instancemi pravidel kalkulu N_{FL}. V tomto kroku uplatníme modifikaci základního pravidla a pravidel zavedení obou implikací: přidáním výskytu konstanty 1 vlevo opět vznikne korektní instance téhož pravidla.

Ekvivalence sekventového systému a přirozené dedukce je dokázána. $\square$

3 Substrukturální logiky

Výše uvedená logika FL nemá žádná strukturální pravidla, tudíž je považována za nejslabší ze substrukturálních logik. Můžeme ji však rozšířit na další substrukturální logiky přidáním nějaké množiny strukturálních pravidel. Strukturální pravidla představíme v sekventovém tvaru.

3.1 Strukturální pravidla

Bez strukturálních pravidel nelze dokázat některé platné principy intuicionistické logiky. Na příklad distributivita spojek konjunkce $\wedge$ a disjunkce $\vee$ neplatí v logice FL, ale v logikách se strukturálními pravidly ano. Naopak distributivita spojek fúze a disjunkce v logice FL platí. Strukturální pravidla se týkají výskytu, pořadí nebo počtu předpokladů, a jako všechna pravidla sekventového kalkulu, mají i strukturální pravidla dvě varianty - levou a pravou - podle pozice, v jaké se předpoklady, na které se pravidlo aplikuje, nachází vůči sekventové šipce.

V našem případě však zpravidla smíme (s výjimkou pravidla oslabení) použít pouze levá pravidla, protože jsme vázaní omezením výskytu maximálně jedné formule vpravo od sekventové šipky. Přesto představíme i pravou variantu každého strukturálního pravidla, která se vyskytuje v klasické logice.

Exchange rule - pravidlo záměny ($e\Rightarrow$, $\Rightarrow e$) na příklad umožní dokázat ekvivalenci obou implikací.

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Sigma \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, B, A, \Theta}$$

Weakening rule - pravidlo oslabení ($w\Rightarrow$, $\Rightarrow w$) dovoluje přidat předpoklad k posloupnostem předpokladů, ze kterých odvozujeme (oslabit jím):

$$\frac{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, A, \Theta}$$

Contraction rule - pravidlo kontrakce ($c\Rightarrow$, $\Rightarrow c$) vypadá následovně:

$$\frac{\Gamma, A, A, \Sigma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, \Sigma \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Lambda, A, A, \Theta}{\Gamma \Rightarrow \Lambda, A, \Theta}$$

Pro ilustraci strukturálních pravidel ukažme, jak poslouží pravidlo oslabení pro důkaz ekvivalence pravdivostních konstant v logice FL_w, která by v logice FL neplatila:

$\mathbf{1} \Leftrightarrow \top$ (jinými slovy $\vdash 1 \Rightarrow \top$ iff $\vdash \top \Rightarrow 1$)

Důkaz. Na pravou stranu: $\langle\ 1 \Rightarrow \top\ \rangle$ je axiom.

Na levou stranu: $\langle\ \top \Rightarrow 1\ \rangle$ platí, protože použijeme pravidlo oslabení, které aplikujeme na $\top$:

$$\frac{\Rightarrow 1}{\top \Rightarrow 1}\,w$$

□

$\mathbf{0} \Leftrightarrow \bot$

Důkaz. Na pravou stranu: $\langle\ 0 \Rightarrow \bot\ \rangle$ platí, protože $\bot$ lze oslabit vpravo:

$$\frac{0 \Rightarrow}{0 \Rightarrow \bot}\,w$$

Na levou stranu: $\langle\ \bot \Rightarrow 0\ \rangle$ je axiom. □

Pro shrnutí důsledku užití strukturálních pravidel uveďme, že v sekventovém kalkulu, který obsahuje všechna strukturální pravidla, skutečnost, že sekvent $A_1, \ldots, A_m \Rightarrow$ B je dokazatelný, znamená, že formule B může být odvozena z předpokladů $A_1, \ldots, A_m$ v jakémkoli pořadí a s jakýmkoli počtem výskytů (včetně žádného výskytu).[5]

Proto substrukturální logiky, které nemají žádné strukturální pravidlo, jako na příklad FL, jsou někdy přezdívány "citlivé na výskyty", protože rozlišují počty výskytů byť stejných předpokladů a záleží na pořadí výsyktů těchto předpokladů.

3.2 Rozšíření FL

Kalkul FL můžeme rozšířit přidáním jednoho nebo více strukturálních pravidel, jejichž pojemnování označíme v indexu. Na příklad FL s pravidlem záměny (exchange) značíme FL_e. Tento systém je ekvivalentní intuicionistické lineární logice.

FL s pravidly záměny (e) a oslabení (w) se jmenuje FL_{ew}, někdy bývá označován jako monoidní logika. Důležitá rozšíření FL_{ew} jsou např. Hájkova fuzzy logika a Lukasiewiczova vícehodnotová logika.

Je zřejmé, že FL s jediným přidaným strukturálním pravidlem oslabení se značí FL_w a s pravidlem kontrakce FL_c.

Přesto, že jsme právě uvedli několik systémů sekventových kalkulů, které se liší počtem a druhem strukturálních pravidel, všechny vychází ze stejného základu a lze je vzájemně určitým způsobem nahradit a zastoupit, podle vlastností pravidel, kterými disponují a podle poměru strukturálních pravidel a pravidel pro spojky. Mezi posledními dvěma uvedenými systémy dokonce platí vztah, který vyjádříme následujícím tvrzením:

Lemma 2. *Pro libovolné formule A a B je sekvent $A \bullet B \Rightarrow A \wedge B$ dokazatelný ve FL_w a také sekvent $A \wedge B \Rightarrow A \bullet B$ je dokazatelný ve FL_c.*

Lemma 2 vlastně říká, že v systému FL_{cw} jsou formule A $\wedge$ B a A $\bullet$ B ekvivalentní. (Proto také v silnějších logikách, kde máme strukturální pravidla, vystačíme jen se spojkou $\wedge$.) Z toho, že A $\bullet$ B $\Rightarrow$ B $\wedge$ A je dokazatelné, je také A $\bullet$ B $\Rightarrow$ B $\bullet$ A dokazatelné, z čehož plyne, že v systému FL_{cw} nepotřebujeme pravidlo záměny, neboť ho umíme odvodit. FL_{cw} je vlastně sekventový systém intuicionistické logiky.

3.3 Další rozšíření strukturálními pravidly

Stejným způsobem lze uvažovat některé sekventové systémy vzniklé z kalkulu klasické logiky odebráním strukturálních pravidel. GK je Gentzenův systém klasické logiky, kde se v závěru sekventu může vyskytnout jakýkoli počet formulí [5] (na rozdíl od LJ, pro intuicionistickou logiku, kde se v této pozici může vyskytnou nejvýše jedna formule).

Pokud, na příklad, systém postrádá pravidlo záměny, existuje stále mnoho možností, jak zavést fúzi nebo implikaci, ale nemáme žádná rozumná kritéria pro výběr jen jedné ze spojek. Proto bude výhodnější pracovat se systémem, který disponuje levým i pravým pravidlem záměny a vznikl z GK odebráním pravidel oslabení a kontrakce, označme ho CFL_e, kde "C"na začátku znamená "classical". Takový systém je ekvivalentní s additivní lineární logikou.

Přidáním levého i pravého pravidla oslabení by vznikl systém CFL_{ew}, přidáním pravidla kontrakce systém CFL_{ec}.

Přidáme-li k intuicionistické logice zákon dvojité negace, dostaneme systém ekvivalentní klasické variantě, jak říká následující lemma:

Lemma 3. *[5] Systém CFL_e je ekvivalentní systému FL_e s iniciálním sekventem tvaru $\neg\neg\, A \Rightarrow A$. Tedy pro každou formuli B platí, že je dokazatelná v systému CFL_e právě tehdy, když je dokazatelná v FL_e užitím sekventu tvaru $\neg\neg\, A \Rightarrow A$.*

Tento vztah platí mezi CFL_{ew} a FL_{ew}, CFL_{ec} a FL_{ec}, a mezi LK a LJ.

4 Závěr

V této práci jsme dokázali ekvivalenci důkazových systémů přirozené dedukce a sekventového kalkulu logiky FL. Vycházeli jsme z citovaných článků, ale nově jsme zavedli pravdivostní konstanty v kalkulu přirozené dedukce. To si vynutilo modifikaci několika již známých pravidel.

Tato oblast skýtá mnoho námětů pro další práci, na příklad by bylo vhodné dokázat normalizovatelnost kalkulu N_{FL} nebo podobně pojednat o logice FL_{ew} a dalších substrukturálních logikách.

Reference

[1] Švejdar, Vítězslav. *Logika-neúplnost, složitost a nutnost.* Academia, Praha, 2002

[2] Negri, Sara; Jan Von Plato. *Structural proof theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[3] Troelstra, A.S., Schwichtenberg, H. *Basic Proof Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[4] Zimmermann, Ernst. *Full Lambek Calculus in natural deduction v Mathematical Logic Quaterly*, str. 85 - 88, 2010.

[5] Ono, Hiroakira. *article: Substructural Logics nad Residuated Lattices - an introduction; sborník Trends in Logic 20*, str. 177-212 Kluwer Academic Publishers, 2003.

[6] Gentzen, Gerhard (1934/1935). *Untersuchungen über das logische Schließen. I. Mathematische Zeitschrift 39 (2)*, str. 176-210