Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Diplomová práce

Karel Vostruha

Asymptotické chování nelineárních evolučních rovnic hyperbolického typu

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák Ph.D.

Studijní program: Matematická analýza

2011

Kapitola 1

Úvod

Studium evolučních rovnic je velmi stará oblast matematické fyziky a evoluční rovnice hyperbolického typu patří mezi jedny z nejdůležitějších typů. Mezi nejznámější zástupce patří zákony zachování, vlnová rovnice a Schrödingerova rovnice. V této práci bude studována rovnice tvaru:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} + A(u) + G(u_t) + F(u) = 0 \quad v \quad \Omega \times (0, \infty),\\
u|_{\partial\Omega} = 0; u(.,0) = u_0, u_t(.,0) = u_1
\end{aligned}
$$

O rovnici v tomto velmi obecném tvaru se nedá mnoho říci. V této práci bude A lineární eliptický operátor, G a F spojité reálné funkce, na které budeme požadovat jisté růstové podmínky.

Obsah práce: v kapitole 2 shrneme základní značení a zadefinujeme použité pojmy s odkazy na příslušnou literaturu. V kapitole 3 shrneme základní vlastnosti laplasiánu a vybudujeme základy teorie prostorů H^α, které budou užitečným nástrojem pro studovanou rovnici. S mírnými úpravami se bude jednat o rozšíření a zobecnění sekce 2.2 z diplomové práce Mgr. Evy Fašangové [13, str. 9 - 12]. Dále ukážeme vztah mezi prostory H^α a Sobolevovými prostory. Prostory H^α se dají chápat jako možná definice Sobolevových prostorů funkcí s neceločíselnou derivací. A zavedeme pojem fraktální mocniny positivního operátoru a ukážeme souvislost definičního oboru fraktální mocniny laplasiánu a prostorů H^α. V kapitole 4 dokážeme existenci a jednoznačnost slabého řešení rovnice kmitání pevného tělesa se slabým třením:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} + (\text{-}\Delta)^n u + g(u_t) + f(u) = 0 \quad v \quad \Omega \times (0, \infty),\\
(\text{-}\Delta)^k u|_{\partial\Omega} = 0, k = 1, \cdots n-1,\\
u(.,0) = u_0 \in H^n, \quad u_t(.,0) \in H^0,
\end{aligned}
$$

kde $\partial\Omega \in C^\infty$ nebo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, omezená kychle. Navíc $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou hladké funkce s následujícími podmínkami na derivace: existují kladná čísla α, c a γ, navíc budeme požadovat jistou růstovou podmínku na f tak, že

$$\begin{aligned} 0 < \alpha \leq g'(x) &\leq c\alpha < \infty, \\ |f'(x)| \leq \gamma &< \infty, \\ \liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} &> -\lambda_1^n, \end{aligned}$$

kde λ_1 je nejmenší vlastní číslo -Δ na Ω s nulovými Dirichletovými okrajovými podmínkami. Navíc g má nulový bod $g(0)$. Tyto podmínky se dají přeformulovat pro funkce z prostorů H^s, $s \in [0, n]$

$$\begin{aligned} (g(u) - g(v), u - v) &\geq \alpha\|u - v\|_{H^0}^2, \\ \|g(u) - g(v)\|_{H^0} &\leq \alpha c\|u - v\|_{H^0}, \\ \|f(u) - f(v)\|_{H^0} &\leq \gamma\|u - v\|_{H^s} \quad s \in [0, n), \\ g(0) &= 0 \\ \liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} &> -\lambda_1^n. \end{aligned}$$

Důkaz existence a jednoznačnosti slabého řešení provedeme pomocí "Galerkinovy"metody a metody shlazení počáteční podmínky, která je neobvyklá pro tento typ úloh. Při důkazu existence a jendoznačnosti slabého řešení pomocí "Galerkinovy"metody dostaneme mnoho užitečných informací a nerovností, které použijeme v pozdějších kapitolách. V kapitole 5 dokážeme, že dynamický systém indukovaný řešící semigrupou je disipativní. V kapitole 6 dokážeme existenci globálního atraktoru a explicitní odhad jeho fraktální dimenze pomocí dat z rovnice a pomocí citované literatury [3], [4]. Dále aplikujeme získané výsledky na speciální případ dat a dáme odpověď na některé otázky z diplomové práce Mgr. Evy Fašangové [13]. V kapitole 7 shrneme získané poznatky.

Kapitola 2

Symboly a použité prostory funkcí

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ bude otevřená, jednoduše souvislá množina a $\partial\Omega \in C^\infty$, nebo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, omezená krychle, kde pod pojmem $\partial\Omega \in C^k$ rozumíme, že existuje přirozené číslo $m < \infty$ tak, že $\partial\Omega$ se dá pokrýt pomocí m otevřených množin U_i a N - množina miry 0. A existuje m lokálních souřadných systémů tak, že restrikce $\partial\Omega|_{U_i}$ je graf funkce z třídy $C^k(U_i)$. Rigorozněji definovaný pojem hranice lze nalézt v Evans [1, str. 626]

$X \hookrightarrow Y$ ($X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$) - prostor X je spojitě (kompaktně) vnořen do prostoru Y

V definicích Sobolevových prostorů je $a \in \mathbb{N}^d$ multiindex. Jako výšku multiindexu definujeme $|a| := \sum\limits_{j=1}^{d} a_j$. Pod znakem
D^a budeme rozumět distributivní derivaci podle multiindexu a

Sobolevův prostor distributivně (slabě) diferencovatelných funkcí:
$W^{k,2}(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega); D^a f \in L^2(\Omega), \forall |a| \leq k\}$.

Pojem stop: Nechť $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $u \in W^{1,2}(\Omega)$ potom řekneme, že $u = 0$ na $\partial\Omega$ ve smyslu stop, pokud existuje posloupnost $u_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $u_n \to u$ ve $W^{1,2}(\Omega)$ a $u_n = 0$ na $\partial\Omega$.

Greenova identita: Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je omezená, jednoduše souvislá, otevřená množina. Nechť dále $\partial\Omega$ je lipschitzovská a $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ potom platí:

$$\int_\Omega \partial_x uv = \int_{\partial\Omega} uv\mathbf{n} dS_x - \int_\Omega v\partial_x u,$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vnější normálový vektor k $\partial\Omega$.

Důkaz lze nalézt Evans [1, Theorem 2, str.628]. Této identitě se říká "per-partes" v d-dimenzích

Sobolevův prostor $W_0^{k,2}(\Omega) := \{f \in W^{k,2}(\Omega), D^\beta f = 0$, na $\partial\Omega$ pro všechna $|\beta| \leq k$ a $D^\alpha u = 0$ pro $|\alpha| \leq k-1$ na $\partial\Omega$ ve smyslu stop $\}$

Pro více informací o teorii Sobolevových prostoru lze nahlédnout do Adams, Fournier [10]

Práce je o evolučních rovnicích a přirozenými nástroji a prostory pro práci s tímto typem parciálních diferenciálních rovnic jsou Bochnerovy prostory - prostory funkcí závísejících na čase s hodnotami v Banachových prostorech.

Bochnerův prostor: $L^p(0,T;X)$, kde $1 \leq p \leq \infty$ a X je Banachův prostor. Normu definujeme jako $\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \|\|u\|_X(t)\|_{L^p(0,T)}$.

Více informací o teorii Bochnerových prostorů se dá nalézt v Gajevski et. al. [8]

Sobolevův prostor: $W^{1,p}(0,T;X)$, kde $1 \leq p \leq \infty$ a X je Banachův prostor, obsahuje všechny funkce $u \in L^p(0,T;X)$ jejichž slabá časová derivace $u_t \in L^p(0,T;X)$. Normu definujeme jako
$\|u\|_{W^{1,q}(0,T;X)} := \left(\int\limits_0^T \|u\|_X(t) + \|u_t\|_X(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$ pro $1 \leq q < \infty$ a
$\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;X)} :=$ ess-sup$_{0\leq t\leq T}(\|u\|_X(t) + \|u_t\|_X)$ pro $q = \infty$.

Kapitola 3

Prostory H^α

3.1 Laplasián

V této subkapitolce shrneme základní vlastnosti laplasiánu, které budeme mlčky používat dál v práci.

Definice 3.1. Laplaceovým operátorem (laplasiánem) rozumíme operátor $-\Delta : W^{2,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$, kde $-\Delta = -\sum\limits_{k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_k^2}$, dále značíme $(-\Delta)^n = -\Delta(-\Delta)^{n-1} : W^{2n,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$ a $(-\Delta)^0 = I$.

Věta 3.2. (vlastní čísla a vlastní funkce laplasiánu)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je jednoduše souvislá, omezená množina a $\partial\Omega \in C^\infty$. Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} -\Delta\, \omega(x) &= \lambda\omega(x), x \in \Omega, \\ \omega(x) &= 0, x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Potom existuje spočetná množina reálných čísel tak, že $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$, $\omega_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\{\omega_k\}$ tvoří ortonormální bázi $L^2(\Omega)$. λ_k se nazývají vlastní čísla a ω_k vlastní funkce laplaciánu.

Důkaz lze najít Evans [1, Theorem 1, str.335].

Poznámka 3.3. V předpokladech jsme uvažovali "hladší"hranici, aniž by to bylo potřeba. Toto zesílení předpokladů na hranici je pro potřeby následujících vět a důkazu existence řešení.

Věta 3.4. (Regularita u hranice) Nechť $m \in \mathbb{N}$, $f \in W^{m,2}(\Omega)$, $\partial\Omega \in C^{m+2}$ a $u \in W_0^{1,2}$ je řešením úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta\, u &= f \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

Potom $u \in W^{m+2,2} \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ a platí následující odhad

$$\|u\|_{W^{m+2,2}(\Omega)} \leq C(m,\Omega)(\|f\|_{W^{m,2}}(\Omega) + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Věta je speciálním případem věty o vyšší regularitě řešení u hranice viz, Evans [1, Theorem 5,str.323].

Důsledek 3.5. Nechť $\partial\Omega \in C^\infty$, potom vlastní funkce ω_k z Věty 3.2 jsou nekonečně diferencovatelné funkce až do hranice. tj. $\omega_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Důkaz. Stačí použít předchozí větu na funkce ω_k. □

Lemma 3.6. Nechť X je vektorový prostor, $A : X \to X$ lineární operátor (může být i neomezený) a nechť existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ a $x \in X$, tak že $Ax = \lambda x$. Potom platí $A^n x = \lambda^n x$

Důkaz. Uvaž λ a x z předpokladů, potom

$$A^n x = A^{n-1}(Ax) = A^{n-1}\lambda x = \cdots \lambda^n x.$$

□

Věta 3.7. (růst vlastních čísel laplasiánu)
Uvažujme vše jako ve Větě 3.2, potom $\lambda_k \sim k^{\frac{2}{d}}$ pro $d = 1, 2, 3, \cdots\cdots$.

Důkaz lze nalézt Davies [12, Theorem 6.3.1, str. 135]

Věta 3.8. (vlastní čísla a vlastní funkce $(\text{-}\Delta)^n$)
Nechť jsou splněny stejné předpoklady jako ve Větě 3.2, uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} (\text{-}\Delta)^n v(x) &= \mu v(x), x \in \Omega, \\ (\text{-}\Delta)^m v(x) &= 0, m = 0, 1, \cdots n-1, x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Potom existuje spočetná množina reálných čísel tak, že $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_k \leq \cdots$, $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k = \infty$, $v_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\{v_k\}$ tvoří ortonormální bázi $L^2(\Omega)$, $\mu_k \sim k^{\frac{2n}{d}}$, $d = 1, 2, 3, \cdots$.

Důkaz. Z Věty 3.2 a Lemmatu 3.6 dostáváme, že funkce ω_k z Věty 3.2 a Důsledku 3.5 jsou vlastní funkce operátoru $(\text{-}\Delta)^n$ na Ω a čísla $\mu_k = \lambda_k^n$ jsou k nim příslušející vlastní čísla, hladkost vlastních funkcí dostáváme z Důsledku 3.5. Z Věty 3.2 víme, že systém $\{\omega_k\}$ tvoří ortonormální bázi $L^2(\Omega)$. Nyní dokážeme, že žádná další vlastní čísla a vlastní funkce neexistují. Pro spor předpokládejme, že existuje β a v tak, že $\beta \neq \mu_k$ pro všechna k a v je příslušející vlastní funkce.

$$\beta(v, \omega_k)_{L^2(\Omega)} = ((\text{-}\Delta)^n v, \omega_k)_{L^2(\Omega)} = (v, (\text{-}\Delta)^n \omega_k)_{L^2(\Omega)} = \mu_k (v, \omega_k)_{L^2(\Omega)} \quad (3.1)$$

z toho nám plyne, že $(v, \omega_k)_{L^2(\Omega)} = 0$, k bylo libovolné. A tedy v je kolmé na bázi $L^2(\Omega)$. Spor

$\mu_k \sim k^{\frac{2n}{d}}$, $d = 1, 2, 3, \cdots$ plyne z předchozího a tvrzení Věty 3.2. □

Definice 3.9. Otevřenou krychlí v $\mathbb{R}^d$ budeme rozumět kartezký součin otevřených intervalů $(0, L)$, tj. $\prod_{i=1}^{d}(0, L)$.

Věta 3.10. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, omezená krychle: $\{x = \{x_1, \cdots, x_d\} : 0 < x_i < L; i = 1, \cdots, d\}$. Uvažujme úlohu na vlastní čísla

$$
\begin{aligned}
\text{-}\Delta\, u(x) &= \lambda u(x), x \in \Omega, \\
u(x) &= 0, x \in \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Potom funkce

$$\omega_{\tilde{k}} := \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{i=1}^{d} \sin\left(\pi \frac{k_i x_i}{L}\right) \tag{3.2}$$

parametrizované multiindexem kladných přirozených čísel $\tilde{k} := (k_1, \cdots, k_d)$ tvoří úplnou ortonormální bázi prostoru $L^2(\Omega)$ a příslušející vlastní čísla jsou

$$\lambda_{\tilde{k}} := \frac{\pi^2}{L^2}(k_1^2 + \cdots + k_d^2). \tag{3.3}$$

Poznámka 3.11. Pro usnadnění zápisu si uspořádáme vlastní čísla, dle výšky multiindexu do neklesající posloupnosti a očíslujeme je pomoci $k \in \mathbb{N}$

Důkaz. Že funkce ω_k a čísla λ_k jsou vlastní funkce a vlastní čísla se ověří přímým výpočtem. Ortogonalita plyne z ortogonality trigonometrického systému $\{\sin kx\}$ a Fubiniho Věty. Normalita se obdrží přímým výpočtem: stačí si uvědomit, že $\int_0^L \sin^2\left(\frac{k\pi}{L} x_i\right) dx_i = \frac{L}{2}$ a použít Fubiniho větu. Že funkce ω_k tvoří bázi $L^2(\Omega)$ se dostane z Evans [1, Theorem 1, str.335]. $\square$

Poznámka 3.12. Funkce ω_k z Věty 3.10 jsou prvky $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Následující věta je analogií Věty 3.8.

Věta 3.13. Nechť jsou splněny všechny předpoklady jako ve Větě 3.10. Uvažujme následující úlohu:

$$
\begin{aligned}
(\text{-}\Delta)^n v(x) &= \mu v(x), x \in \Omega, \\
(\text{-}\Delta)^m v(x) &= 0, m = 0, 1, \cdots n - 1, x \in \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Potom funkce

$$\omega_{\tilde{k}} := \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{i=1}^{d} \sin\left(\pi \frac{k_i x_i}{L}\right) \tag{3.4}$$

parametrizováné multiindexem kladných přirozených čísel $\tilde{k} := (k_1, \cdots, k_d)$ tvoří úplnou ortonormální bázi prostoru $L^2(\Omega)$ a příslušející vlastní čísla jsou

$$\lambda_{\tilde{k}} := \left(\frac{\pi^2}{L^2}(k_1^2 + \cdots + k_d^2)\right)^n. \tag{3.5}$$

Důkaz. Důkaz je analogický důkazu Věty 3.8 a díky poznámce máme $\omega_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

□

3.2 Prostory H^α

V této kapitole si zadefinujeme prostory funkcí H^α, které jsou přirozeným definičním oborem pro studovanou rovnici. Ukážeme základní vlastnosti těchto prostorů a jejich vnoření do jiných prostorů funkcí.

V této podkapitole bude $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ jednoduše souvislá, omezená, otevřená množina, $\partial\Omega \in C^\infty$, nebo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ bude otevřená, omezená krychle , ω_k, λ_k vlastní funkce a vlastní čísla laplasiánu z Věty 3.2, v případě krychle z Věty 3.4. V obou případech jsou funkce ω_k prvky $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Definice 3.14. Pro $\alpha \geq 0$ definujme prostor
$H^\alpha := \{f \in L^2(\Omega); \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha (f, \omega_k)^2_{L^2(\Omega)} < \infty\}$.
Označme $c_k := (f, \omega_k)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f\omega_k dx$. Na prostoru H^α uvažujeme skalární součin a normu

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\omega_k \quad (.,.)_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha c_k d_k \\ \|f\|_{H^\alpha} &= \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha c_k^2} = \sqrt{(f, f)_\alpha}. \end{aligned}$$

Konvergenci těchto formálních řad bereme ve smyslu prostoru $L^2(\Omega)$.

Ověřme, že takto definovaný skalární součin je skutečně skalární součin. Stačí ověřit, že pro $f, g \in H^\alpha$ je $(f, g)_\alpha \in \mathbb{R}$:

$$|(f, g)_\alpha| = |\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{\alpha}{2}} \lambda_k^{\frac{\alpha}{2}} c_k d_k| \leq \sqrt{\sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l^\alpha c_l^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha d_k^2} < \infty.$$

Poznámka 3.15. Pro $\alpha = 0$ dostáváme prostor $L^2(\Omega)$ - přímo z Parsevalovy rovnosti.

Lemma 3.16. $T = \{f \in L^2(\Omega), f = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k\omega_k, a_k \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}\}$ je hustý v H^α.

Důkaz. Vol $\varepsilon > 0$ a $g \in H^\alpha$. Reprezentujme $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k$. Potom existuje $n_0 > 1$ tak, že platí $\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} \lambda_k^\alpha c_k^2 < \varepsilon^2$, potom položme
$f := \sum\limits_{k=1}^{n_0} c_k\omega_k$ a platí $\|f - g\|_{H^\alpha} < \varepsilon$. $\square$

Věta 3.17. Prostor H^α se skalárním součinem $(.,.)_\alpha$ tvoří Hilbertův prostor.

Důkaz. H^α je lineární - snadné ze Schwarzovy nerovnosti. K dokončení důkazu stačí ukázat, že prostor H^α je úplný (norma je indukována skalárním součinem $(.,.)_\alpha$). Nechť $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost v H^α

$$f_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^n\omega_k \qquad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

Položme $c_k := \lim\limits_{n\to+\infty} c_k^n$, tato limita existuje z cauchyovskovosti posloupnosti f_n. Dále položme $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k$, potom z definice cauchyovské posloupnosti volme $\varepsilon > 0$, k tomuto ε najděme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geq n_0$: $\|f_n - f_m\|_{H^\alpha} < \varepsilon$. Limitní přechod $m \to \infty$ dává $\|f_n - g\|_{H^\alpha} \leq \varepsilon$. Z nerovnosti $|\|f_n\|_{H^\alpha} - \|g\|_{H^\alpha}| \leq \|f_n - g\|_{H^\alpha} \leq \varepsilon$ plyne, že $g \in H^\alpha$. Tedy prostor H^α je úplný v normě $\|.\|_{H^\alpha}$, norma vznikla ze skalárního součinu, tedy H^α je Hilbertův. $\square$

Pro potřeby další práce budeme potřebovat vědět, jak vypadá duální prostor k prostoru H^α.

Definice 3.18. Definujme prostor formálních řad $H^{-\alpha} := \{\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k\omega_k$, kde $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-\alpha} d_k^2 < \infty\}$. Na prostoru $H^{-\alpha}$ uvažujeme přirozenou normu
$h = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k\omega_k \in H^{-\alpha}$, potom $\|h\|_{H^{-\alpha}}^2 := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-\alpha} d_k^2$.

Poznámka 3.19. Konvergence řady v definici prostoru $H^{-\alpha}$ není ve smyslu prostoru $L^2(\Omega)$, ale $L^2(\Omega)$ je spojitě vnořeno do $H^{-\alpha}$.

Důkaz. Vol $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k \in L^2(\Omega)$. Potom

$$\|f\|_{H^{-\alpha}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-\alpha} c_k^2 = \lambda_1^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{-\alpha} c_k^2 \leq \lambda_1^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \lambda_1^{-\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

$\square$

Věta 3.20. $H^{-\alpha}$ je duální prostor k prostoru H^α s následující reprezentací: nechť $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k \in H^\alpha$ a $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k\omega_k \in H^{-\alpha}$ tak, že

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k$$

Důkaz. inkluze $H^{-\alpha} \subset \left(H^\alpha\right)^*$ je jasná. Dokažme obrácenou implikaci. Zvol $G \in \left(H^\alpha\right)^*$ definujme posloupnost čísel $d_k = \langle F, \omega_k\rangle$, a položme $u := \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k\omega_k$. Potom pro každou $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k \in H^\alpha$

$$\langle G, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k. \tag{3.6}$$

Zvol $c_k := d_k\lambda_k^{-\alpha}$ pro $k \leq N$,$c_k := 0$ jinak. Potom s využitím Cauchy-Schwarzovy nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k &= \sum_{k=1}^{N} c_k d_k = \sum_{k=1}^{N} d_k^2\lambda_k^{-\alpha} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{N} d_k^2\lambda_k^{-\alpha}}\sqrt{\sum_{k=1}^{N} d_k^2\lambda_k^{-\alpha}} \leq \\ &\leq \|G\|\sqrt{\sum_{k=1}^{N} d_k^2\lambda_k^{-\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Z předchozího sledu nerovností dostáváme:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{N} d_k^2\lambda_k^{-\alpha}} \leq \|G\| < \infty, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Tímto jsme dokázali, že $u \in H^{-\alpha}$. Takto získané u nám reprezentuje funkcionál G. Tedy $H^{-\alpha} \supset \left(H^\alpha\right)^*$

□

Poznámka 3.21. Předchozí věta říká, že prostor $H^{-\alpha}$ je duální prostor k prostoru H^α. Z vět z funkcionální analýzy víme, že duální prostor je vždy úplný. Tedy dostáváme, že lineární normovaný prostor $H^{-\alpha}$ je úplný. Podobně jako v Lemmatu 3.16 bychom dokázali, že prostor $H^{-\alpha}$ je separabilní.

Věta 3.22. Nechť $0 \leq \beta < \alpha$, potom $H^\alpha \hookrightarrow\hookrightarrow H^\beta$ a toto vnoření je husté a kompaktní.

Důkaz. Vnoření $H^\alpha \hookrightarrow H^\beta$: vol $f \in H^\beta$. $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k$

$$||f||^2_{H^\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\beta c_k^2 = \lambda_1^\beta \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^\beta c_k^2 \leq \lambda_1^\beta \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^\alpha c_k^2 = \lambda_1^{\beta-\alpha} ||f||^2_{H^\alpha}.$$

Kompaktnost vnoření $H^\alpha \hookrightarrow H^\beta$: Nechť $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v H^α, potom lze $\{f_n\}$ vybrat konvergentní podposloupnost v H^β. $f_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{k,n}\omega_k$ a $\|f_n\|_{H^\beta} \leq C$ Vol $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{\beta-\alpha+\alpha} c_{k,n}^2 \leq \frac{1}{\left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1}\right)^{\alpha-\beta}} \sum_{k=N_n}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^\alpha c_{k,n}^2 \leq \frac{C}{\left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1}\right)^{\alpha-\beta}} < \varepsilon \qquad (3.8)$$

pro N dost velké. Potom N-tice posloupností $\{c_{k,n}\}$ jsou omezené číselné posloupnosti (koeficienty posloupnosti stejnoměrně normově omezených funkcí) , diagonálním vyběrem výběreme konvergentní podposloupnosti, označme je $\{c_{k,m}\}$ a k nim vybrané funkce f_{n_m}. K danému ε z konvergence $\{c_{k,m}\}$ existuje n_0; $\forall m, l > n_0$:
$\sum\limits_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^\beta (c_{k,m}^2 - c_{k,l}^2) < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \|f_{n_m} - f_{n_l}\|_{H^\beta} &= \lambda_1^\beta (\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^\beta (c_{k,m}^2 - c_{k,l}^2) + \sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^\beta (c_{k,m}^2 - c_{k,l}^2)) \\ &\leq \lambda_1^\beta (\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^\beta (c_{k,m}^2 - c_{k,l}^2) + 2\varepsilon) < \lambda_1^\beta 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost říká, jak vybírat cauchyovskou podposloupnost a prostor H^β je úplný. Z toho nám plyne kompaktnost operátoru identity.

□

Nyní máme vyšetřenou hierarchii prostorů H^α.

Z poznámky za definicí prostoru $H^{-\alpha}$ víme, že prostor $L^2(\Omega)$ se dá spojitě vnořit do $H^{-\alpha}$ pro $\alpha > 0$. Následující lemma nám dá vztah mezi normami v prostorech H^α a H^β, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Lemma 3.23. (vztah norem) Nechť $\beta < \alpha$ a $f \in H^\beta$, potom $\|f\|^2_{H^\beta} \leq \lambda_1^{\alpha-\beta} \|f\|^2_{H^\alpha}$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{H^\beta} &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha c_k^2 = \lambda_1^\beta \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^\beta c_k^2 = \lambda_1^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{\beta-\alpha+\alpha} c_k^2 \leq \\ &\leq \lambda_1^\beta \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^\alpha c_k^2 = \lambda_1^{\beta-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\beta c_k^2 = \lambda_1^{\beta-\alpha} \|f\|^2_{H^\beta}. \end{aligned}$$

□

Důležitý případ je $\beta = 0$. Potom nerovnost má tvar

$$\|f\|_{H^0}^2 \leq \lambda_1^{-\alpha}\|f\|_{H^\alpha}^2. \tag{3.9}$$

Nyní ukážeme, že $H^n \hookrightarrow W^{n,2}(\Omega)$

Věta 3.24. $H^{2n} \hookrightarrow W^{2n,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$

Důkaz. Nechť $f \in H^{2n}$, $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k$, potom ve smyslu distribucí

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \nabla\omega_k \\
\text{-}\Delta\, f &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k \omega_k \\
\nabla(\text{-}\Delta\, f) &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k \nabla\omega_k \\
&\vdots \\
(\text{-}\Delta)^n f &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n c_k \omega_k \Rightarrow \|(\text{-}\Delta)^n f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2n} c_k^2 \\
&= \|f\|_{H^{2n}}^2.
\end{aligned}$$

Poslední řada konverguje ve smyslu prostoru $L^2(\Omega)$. Konvergence předchozích řad se získá pomocí Cauchy-Schwarzovy nerovnosti nebo pomocí per-partes: předpokládejme, že $f \in H^1$ a $\nabla f \in L^2(\Omega)$ potom

$$\begin{aligned}
\|\nabla f\|_{L^2}^2 &= (\sum_{k=1}^{\infty} c_k \nabla\omega_k, \sum_{l=1}^{\infty} c_l \nabla\omega_l) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} c_k c_l (\nabla\omega_k, \nabla\omega_l) = \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} c_k c_l \int_\Omega \nabla\omega_k \nabla\omega_l = \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} c_k c_l \Big[\int_{\partial\Omega} \omega_k \nabla\omega_l - \int_\Omega \omega_k \Delta\omega_l\Big] \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} c_k c_l \lambda_l \delta_{k,l} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} c_k^2 \lambda_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k = \|f\|_{H^1}^2.
\end{aligned}$$

Další případy se udělají zcela analogicky. Takto derivované funkce mají svého reprezentanta v H^{2n} určeného jednoznačně s.v. .

Vnoření $H^{2n} \hookrightarrow W_0^{2n,2} \cap W_0^{1,2}(\Omega)$:
Z předchozích nerovností dostáváme, že pro $f \in H^{2n}$ je $\nabla f \in L^2(\Omega)$. Označme -$\Delta\, f = g \in L^2(\Omega)$ jako pravou stranu slabě formulované rovnice:

$$
\begin{aligned}
(\nabla f, \nabla\omega) &= (g, \omega) \quad \omega \in W_0^{1,2}(\Omega),\\
f|_{\partial\Omega} &= 0.
\end{aligned}
$$

Dle Věty 3.4 dostáváme, že $f \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$. Nyní budeme iterovat předchozí úvahu ($(\text{-}\Delta)^2 f = g$)a postupně obdržíme $f \in W^{2n,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$. Z vlastností funkcí ω_k plyne, že $(\text{-}\Delta)^j f|_{\partial\Omega} = 0$ ve smyslu stop pro $j = 1, 2, \cdots n-1$.

Celkově dostáváme tuto hierarchii:

$$
\begin{aligned}
H^0 &= L^2(\Omega),\\
H^1 &= W_0^{1,2}(\Omega),\\
H^2 &\hookrightarrow W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2},\\
&\vdots\\
H^{2n} &\hookrightarrow W^{2n,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}.
\end{aligned}
$$

□

3.3 Alternativní zavedení prostorů H^α

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, jednoduše souvislá, omezená množina a $\partial\Omega \in C^\infty$, nebo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená, otevřená krychle. Potom systém vlastních funkcí Laplaceova operátoru $\{\omega_k\}$ tvoří ortonormální bázi $L^2(\Omega)$. Dále z důsledku Věty 3.4 víme, že $\omega_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$ pro $\partial\Omega \in C^\infty$. A z Věty 3.10 víme, že $\omega_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$ pro $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená, otevřená krychle. Dále z "per-partes"pro $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ dostaneme:

$$
(\text{-}\Delta\, u, u)_{L^2(\Omega)} = (\nabla u, \nabla u)_{L^2(\Omega)} \geq c\|u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.10}
$$

Tedy -Δ je positivní operátor. Každou funkci $f \in L^2(\Omega)$ můžeme napsat ve tvaru $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (f, \omega_k)_{L^2(\Omega)}\omega_k$. Tento zápis motivuje k přirozenému zavedení "fraktální mocniny"$(\text{-}\Delta)^\alpha$ pro $\alpha \geq 0$:

Definice 3.25. Fraktální mocninu $(\text{-}\Delta)^\alpha$ pro $\alpha \geq 0$ a $f \in L^2(\Omega)$ definujeme jako:

$$
(\text{-}\Delta)^\alpha f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha (f; \omega_k)_{L^2(\Omega)}\omega_k. \tag{3.11}
$$

Definičním oborem $(\text{-}\Delta)^\alpha$ je
$D((\text{-}\Delta)^\alpha) = \{u \in L^2(\Omega); \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha}(f,\omega_k)^2_{L^2(\Omega)} < \infty\}$. A jako normu na $D((\text{-}\Delta)^\alpha)$ uvažujeme:

$$\|u\|^2_{D((\text{-}\Delta)^\alpha)} := ((\text{-}\Delta)^\alpha u; (\text{-}\Delta)^\alpha u)_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha}(f,\omega_k)^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.12}$$

Norma na $D((\text{-}\Delta)^\alpha)$ vznikne ze skalárního součinu $(u,v)_{D((\text{-}\Delta)^\alpha)} := ((\text{-}\Delta)^\alpha)u; v)_{L^2(\Omega)}$. Nyní je vidět, že definiční obor $(\text{-}\Delta)^\alpha$ je vlastně v předchozí podkapitole definovaný prostor $H^{2\alpha}$.

Kapitola 4

Existence a jednoznačnost slabého řešení

Po zbytek práce bude $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, jednoduše souvislá, omezená množina a $\partial\Omega \in C^\infty$, nebo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená, otevřená krychle. Hlavním cílem a náplní této kapitoly bude dokázání existence a jednoznačnosti slabého řešení rovnice:

$$\begin{aligned} u_{tt} + (\text{-}\Delta)^n u + g(u_t) + f(u) = 0 \ v \ \Omega \times (0,\infty), \\ (\text{-}\Delta)^k u|_{\partial\Omega} = 0, k = 1, \cdots n-1, \\ u(.,0) = u_0 \in H^n, u_t(.,0) \in H^0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Kde $[u, u_t] \in C([0,\infty); H^n) \times C([0,\infty); H^0)$. Po zbytek práce budeme používat označení pro energetický funkcionál $E[u](t) := \|u_t\|^2_{H^0}(t) + \|u\|^2_{H^n}(t)$.

Definice 4.1. (slabá časová derivace) Nechť H je Hilbertův prostor se skalárním součinem $(.,)_H$ a B je Banachův prostor tak, že

$$B \hookrightarrow H \cong H' \hookrightarrow B'$$

Nechť B je hustý v H, je-li $u \in L^p(0,T;B)$, označme u_t prvek z $L^{p'}(0,T;B)$ takový, že

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle_{\langle B',B\rangle}\varphi(t)dt = -\int_0^T (u,v)_H \varphi'(t)dt \tag{4.2}$$

$\forall v \in B, \varphi \in C_0^\infty(0,T)$. Potom funkci u_t nazýváme slabou časovou derivací. Vyšší derivace definujeme analogicky.

V našem případě je $B = H^n$ a $H = L^2(\Omega)$.

Definice 4.2. (slabé řešení) Řekneme, že $u \in L^\infty(0,T;H^n)$ s $u_t \in L^\infty(0,T;H^0)$ a $u_{tt} \in L^2(0,T;H^{-n})$ je slabé řešení (4.1) s $(\text{-}\Delta)^k u(.,t)|_{\partial\Omega} = 0, k = 0, 1 \cdots n$ jestliže platí:

$$\begin{aligned}\langle u_{tt},\varphi\rangle \quad + & \quad ((\text{-}\Delta)^{\frac{n}{2}}u,(\text{-}\Delta)^{\frac{n}{2}}\varphi)+(g(u_t),\varphi)+(f(u),\varphi)=0, \quad \textit{pro s.v. } t\in[0,T],\\ & \quad \varphi\in H^n \quad a \quad u(0)=u_0 \quad u_t(0)=u_1.\end{aligned}$$

Lemma 4.3. Nechť H je Hilbertův prostor se skalárním součinem $(.,.)_H$ a B je Banachův prostor takový, že $B\hookrightarrow H\cong H^*\hookrightarrow B^*$. Nechť B je hustý v H, $1<p<\infty$. Potom prostor $W=\{u\in L^p(0,T;B);u_t\in L^{p'}(0,T;B^*)\}$ je spojitě vnořen do $C([0,T];H)$

důkaz lze najít v Gajevski et al. [8]

Věta 4.4. Nechť $0<T<\infty$ pevné a $u\in W^{1,p}(0,T;X)$ pro nějaké $1\le p\le\infty$. Potom

(i) $u\in C([0,T],X)$ (po předefinování na množině míry 0),

(ii) $\max\limits_{0\le t\le T}\|u(t)\|_X\le C(T)\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$.

Důkaz lze nalézt Evans [1, Theorem 2, str.286]

Poznámka 4.5. V definici slabého řešení požadujeme omezenost řešení v normě prostoru $L^\infty(0,T;H^n)$ a časové derivace v normě prostoru $L^\infty(0,T;H^0)$, toto slabé řešení patří speciálně do prostoru
$W=\{u\in L^2(0,T;H^0),u_t\in L^2(0,T;H^0)\}$ a dle Lemmatu 4.3 se dá
$W\hookrightarrow C([0,T],H^0)$. Z tohoto vnoření nám plyne spojitost u.

Z definice slabého řešení rovnice (4.1) požadujeme aby $u_t\in L^\infty(0,T;H^0)$ a $u_{tt}\in L^\infty(0,T;H^{-n})$. Z toho nám plyne, že $u_t\in W^{1,\infty}(0,T;H^{-n})$.
($H^0\subset H^{-n}$) Dle Věty 4.4 je $u_t\in C([0,T];H^{-n})$. Spojitost v čase nám říká, že se počáteční podmínky nabývá.

Věta 4.6. (Aubin-Lionsovo lemma) Nechť $\alpha\in(1,\infty)$, $\beta\in[1,\infty]$. Je-li X Banachův a X_0,X_1, reflexivní separabilní Banachovy prostory takové, že

$$X_0\hookrightarrow\hookrightarrow X\hookrightarrow X_1$$

pak

$$\{v\in L^\alpha(0,T;X_0);v_t\in L^\beta(0,T;X_1)\}\hookrightarrow\hookrightarrow L^\alpha(0,T;X).$$

důkaz lze najít v Simon [7]

Věta 4.7. (Gronwallovo lemma) Nechť $y(t)$, $g(t)$, $h(t)\ge 0$ $\forall t\in(0,T)$ a $h,g\in L^1(0,T)$. Pak pro absolutně spojitou funkci $y(t)$, která splňuje nerovnici:

$$\frac{d}{dt}y(t)\le g(t)+h(t)y(t)\quad\forall t\in[0,T].$$

Platí

$$y(t) \le y(0)\,\mathrm{e}^{\int\limits_0^t h(s)ds} + \int\limits_0^t g(s)\,\mathrm{e}^{\int\limits_0^t h(v)dv}\,ds \quad \forall t \in [0,T].$$

V případě, že $\frac{d}{dt}y(t) \le h(t)y(t)$ na $[0,T]$ a $y(0) = 0$. Potom $y \equiv 0$ na $[0,T]$

Důkaz lze nalézt v Evans [1, Theorem J, str. 624]

Lemma 4.8. Nechť $[u, u_t] \in L^\infty(0,T;H^n) \times L^\infty(0,T;H^0)$, označíme-li $E[u](t) := \|u\|_{H^n}^2 + \|u_t\|_{H^0}^2$ a $E_\delta[u](t) = E[u](t) + \delta(u_t, u)_{L^2(\Omega)}$. Za předpokladu, že $\delta \le \frac{\lambda_1^{\frac{n}{2}}}{2}$, potom dostáváme $\frac{1}{2}E[u](t) \le E_\delta[u](t) \le \frac{3}{2}E[u](t)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \delta|(w_t, w)_{L^2(\Omega)}| &\le \delta\|w_t\|_{H^0}\|w\|_{H^0} \le \frac{\|w_t\|_{H^0}^2}{2} + \frac{2\lambda_1^n}{4}\|w\|_{H^0}^2 \le \\ &\le \frac{\|w_t\|_{H^0}^2}{2} + \frac{\|w\|_{H^n}^2}{2} = \frac{E[w](t)}{2}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Z předchozího sledu nerovností dostáváme ekvivalenci $E[u](t)$ a $E_\delta[u](t)$ tj.:

$$\frac{1}{2}E[w](t) \le E_\delta[w](t) \le \frac{3}{2}E[w](t). \tag{4.4}$$

□

Věta 4.9. (Existence a jednoznačnost slabého řešení) Pokud navíc platí: $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou reálné funkce a $\forall [u, u_t], [v, v_t] \in H^n \times H^0$ platí

$$(g(u) - g(v), u - v) \ge \alpha\|u - v\|_{H^0}^2, \tag{4.5}$$
$$\|g(u) - g(v)\|_{H^0} \le c\alpha\|u - v\|_{H^0}, \tag{4.6}$$
$$\|f(u) - f(v)\| \le \gamma\|u - v\|_{H^s}, \quad s \in [0, n), \tag{4.7}$$
$$g(0) = 0, \tag{4.8}$$
$$\liminf_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{x} > -\lambda_1^n. \tag{4.9}$$

Potom pro každou dvojici $[u_0, u_1] \in H^n \times H^0$ existuje jednoznačné $u \in C([0,\infty); H^n)$ a $u_t \in C([0,\infty); H^0)$ řešení (4.1).

Než přistoupíme k vlastnímu důkazu věty, zmíníme několik pozorování o nelineárních členech a dokážeme několik užitečných pomocných tvrzení.

Poznámka 4.10. Několik slov o růstových podmínkách:
(4.5) a (4.6) říká, že funkce g je monotonní a koercivní,
(4.6) říká, že funkce g je lipschitzovská,
(4.7) říká, že funkce f je lipschitzovská.

O významu podmínky (4.9) pojednávají následující lemmata.

Lemma 4.11. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá. Potom je ekvivaletní:

(i) $\exists \theta > 0$,$C \in \mathbb{R}$: $(-\lambda_1^n + \theta)x^2 - C \leq xf(x)$ $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\liminf\limits_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} > -\lambda_1^n$.

Důkaz. $(i) \Rightarrow (ii)$: snadno plyne z limitního přechodu
$(ii) \Rightarrow (i)$: plyne z definice lim inf a spojitosti f □

Lemma 4.12. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá, nechť dále je splněna následující růstová podmínka: $\exists \theta > 0$,$C \in \mathbb{R}$: $(-\lambda_1^n + \theta)x^2 - C \leq xf(x)$ $x \in \mathbb{R}$. Potom $\exists \varepsilon > 0, C_1 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\frac{1}{2}(-\lambda_1^n + \varepsilon)x^2 - C \leq \int_0^x f(t)dt.$$

Důkaz. Z předchozího lemmatu víme, že růstová podmínka je ekvivalentní $\liminf\limits_{|x| \to \infty} \frac{f(x)}{x} = -\lambda_1^n + \theta > -\lambda_1^n$, kde $\theta > 0$. Nejdříve budeme předpokládat, že $x > 0$: z definice lim inf existuje $M > 0$ tak, že pro $x > M$ platí: $\frac{f(x)}{x}x \geq (-\lambda_1^n + \theta)x$. Ze spojitosti f dostáváme:

$$f(x) \geq (\lambda_1^n + \theta)x - C, \quad x \in (0, \infty),$$

kde $C > 0$. Konečně integrací a použitím Youngovy nerovnosti dostáváme:

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)dt &\geq (\lambda_1^n + \theta)\frac{x^2}{2} - C_1 x \geq (\lambda_1^n + \theta)\frac{x^2}{2} - \frac{\theta}{2} - \frac{C_1^2}{2\theta} \\ &= (\lambda_1^n + \frac{\theta}{2})\frac{x^2}{2} - \frac{C^2}{2\theta} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Pro $x < 0$ se vše udělá analogicky. Nyní se určí ε a C pomocí následujících rovnosti:

$$\varepsilon := \frac{\theta}{2}, \tag{4.11}$$

$$C := \max\{C_1; C_2\}\frac{1}{2\theta}. \tag{4.12}$$

□

Důsledek 4.13. Označme F primitivní funkci k f. Za předpokladů Lemmatu 4.12 dostáváme tyto nerovnosti:

$$\int_\Omega f(u)u \geq (\theta - \lambda_1^n)\|u\|^2_{H^0} - C_1 \geq (\theta\lambda_1^{-n} - 1)\|u\|^2_{H^n} - C_1, \quad (4.13)$$

$$\int_\Omega F(u) \geq \frac{\varepsilon - \lambda_1^n}{2}\|u\|^2_{H^0} - C_2 \geq \frac{\varepsilon\lambda_1^{-n} - 1}{2}\|u\|^2_{H^n} - C_2. \quad (4.14)$$

, kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Důkaz. důkaz je přímým důsledkem předchozího lemmatu □

Lemma 4.14. Předpokládejme, že existuje řešení (4.1) s počátečními podmínkami $[u_0, u_1] \in H^n \times H^0$ na $[0, \infty)$. Za předpokladu (4.9). Potom energetický funkcionál řešení $[u, u_t]$ rovnice (4.1) s počátečními podmínkami $[u_0, u_1]$ je omezená funkce na $[0, \infty)$.

Důkaz. Rovnici (4.1), přenásobíme u_t a integrujeme přes Ω:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E[u](t) + \int_0^t \int_\Omega f(u)u_t dxdt = -\int_\Omega g(u_t)u_t dx \leq -\alpha\|u_t\|^2_{H^0} \leq 0$$

úpravou dostáváme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E[u](t) + \frac{d}{dt}\int_\Omega F(u(x,t))dx \leq 0$$

Integrujme předchozí nerovnost přes $(0, t)$ a použijme důsledek 4.13 a obdržíme:

$$\begin{aligned} 0 &\geq E[u](t) + 2\int_\Omega F(u)dx - E[u](0) - \int_\Omega F(u(x,0)dx \\ &\geq \|u\|^2_{H^n} + \|u_t\|^2_{H^0} - (1 - \lambda_1^{-n}\varepsilon)\|u\|^2_{H^n} - C_1 \\ &\geq CE[u](t) - C_1 \quad (4.15) \end{aligned}$$

, kde $C := \min\{1, \varepsilon\lambda_1^{-n}\}$ a $C_1 := -C_2 - E[u](0) - \int_\Omega F(u(x,0)dx$. Z předchozí nerovnosti plyne, že $E[u](t)$ je omezená funkce na $[0, \infty)$.

□

Díky předchozímu lemmatu má smysl požadovat omezenost řešení v čase v normě prostoru $L^\infty(0, \infty, H^n) \times L^\infty(0, \infty, H^0)$.

Nyní přejdeme k vlastnímu důkazu Věty o existenci a jednoznačnosti řešení 4.9.

Důkaz. jednoznačnost: Nechť existují dvě řešení u a v, polož $w := u - v$

$$u_{tt} - v_{tt} + (\text{-}\Delta)^n u - (\text{-}\Delta)^n v + g(u_t) - g(v_t) + f(u) - f(v) = 0 \quad (4.16)$$
$$u(.,0) = u_t(.,0) = 0; (\text{-}\Delta)^k u(.,t)|_{\partial\Omega} = 0; k = 0.\cdots n-1$$

Rovnici (4.16) "otestujeme" $w_t := u_t - v_t$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E[w](t) + \alpha\|w_t\|^2_{H^0} \le \gamma\|w\|_{H^s}\|w_t\|_{H^0} \le \frac{\gamma^2}{2\alpha}\|w\|_{H^s} + \frac{\alpha}{2}\|w_t\|^2_{H^0},$$
$$\frac{d}{dt}E[w](t) + \alpha\|w_t\|^2_{H^0} \le \frac{\gamma^2}{2\alpha}\|w\|_{H^s}. \tag{4.17}$$

Zavedeme označení $E_\delta[w](t) = E[w](t) + \delta(w_t, w)_{L^2(\Omega)}$. Snadno vyjde, že platí: $\frac{d}{dt}(w_t, w)_{L^2(\Omega)} - (w_{tt}, w)_{L^2(\Omega)} = \|w_t\|^2_{H^0}$. Z Lemmatu o vztahu norem (3.23) víme, že $\|w\|^2_{H^s} \le \lambda_1^{-s}\|w\|^2_{H^0}$.
Rovnici (4.16) "otestujeme" $w := u - v$:

$$\begin{aligned}(w_{tt}, w)_{L^2(\Omega)} &+ \|w\|^2_{H^n} = \frac{d}{dt}(w_t, w)_{L^2(\Omega)} - \|w_t\|^2_{H^0} + \|w\|^2_{H^n} \le \\ &\le c\alpha\|w_t\|_{H^0}\|w\|_{H^0} + \gamma\|w\|_{H^s}\|w\|_{H^0} \le \\ &\le c\frac{\alpha^2}{2}\|w_t\|^2_{H^0} + c\frac{1}{2}\|w\|^2_{H^0} + \gamma\lambda_1^{\frac{-s}{2}}\|w\|^2_{H^s} \le \\ &\le c\alpha^2\|w_t\|^2_{H^0} + c\lambda_1^{-s}\|w\|^2_{H^s} + \gamma\lambda_1^{\frac{-s}{2}}\|w\|^2_{H^s}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Konečně dostáváme:

$$\frac{d}{dt}(w_t, w)_{L^2(\Omega)} + \|w\|^2_{H^n} \le (c\alpha^2 + 1)\|w\|^2_{H^0} + (c\lambda_1^{-s} + \gamma\lambda_1^{\frac{-s}{2}})\|w\|^2_{H^s}. \tag{4.19}$$

Nerovnost (4.19) vynásobíme $\delta > 0$ a přičteme k (4.17)

$$\frac{d}{dt}E_\delta[w](t) + (\alpha - \delta(c\alpha^2 + 1)\|w_t\|^2_{H^0} + \delta\|w\|^2_{H^n} \le \frac{\gamma^2}{\alpha} + \delta(c\lambda_1^{-s} + \gamma\lambda_1^{\frac{-s}{2}})\|w\|^2_{H^s}.$$

Položme $\delta := \frac{1}{2}\min\{\frac{\alpha}{c\alpha^2+1}, \lambda_1^{\frac{n}{2}}\}$ a označme $K := \frac{\gamma^2}{\alpha} + \delta(c\lambda_1^{-s} + \gamma\lambda_1^{\frac{-s}{2}})$. Potom

$$\frac{d}{dt}E_\delta[w](t) + \delta E_[w](t) \le K\|w\|^2_{H^s}, \tag{4.20}$$

δ bylo voleno tak, aby splnilo předpoklady Lemmatu 4.8. Tedy dostáváme tyto odhady na chování energií:

$$\frac{1}{2}E[w](t) \le E_\delta[w](t) \le \frac{3}{2}E[w](t). \tag{4.21}$$

Když dáme dohromady (4.20) a (4.21), potom Gronwallovo lemma použité na interval $[0, T]$ říká:

$$\sup_{t\in[0,T]} E[w](t) \le C(T)(\|w_t\|^2_{H^0}(0) + \|w\|^2_{H^n}(0)) = 0. \tag{4.22}$$

Z toho plyne, že řešení je jednoznačné pro $T < \infty$ libovolné, z toho nám plyne globální jednoznačnost v čase.

existence: nejdříve budeme předpokládat, že $[u_0, u_1] \in H^{n+1} \times H^1$
Krok I.
Galerkinovské aproximace

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} C_j^N(t)\omega_k, \tag{4.23}$$

s počátečními podmínkami $C_j^N(0) = (u_0, \omega_j)_{L^2(\Omega)}$ a $(C_j^N)_t(0) = (u_1, \omega_j)_{L^2(\Omega)}$
Toto aproximativní řešení splňuje následující slabě formulovanou obyčejnou diferenciální rovnici:

$$\begin{aligned}
(u_{tt}^N, \omega_l) &+ ((\text{-}\Delta)^n u^N, \omega_l) + (g(u_t^N), \omega_l) + (f(u^N), \omega_l) = 0, \quad l = 1, 2, \cdots N, \\
u^N(0) &= \sum_{k=1}^{N} (u_0, \omega_k)_{L^2(\Omega)} \quad u_t^N(0) = \sum_{k=1}^{N} (u_1, \omega_k)_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Podle Peanovy (klasické) teorie $\exists T_N > 0$ (všechny členy v rovnici jsou spojité funkce) tak, že existuje řešení rovnice (4.24) na $[0, T_N]$. Dále dostáváme, že $[u^N, u_t^N] \in H^{n+1} \times H^1$.

Krok 2. Máme slabou formulaci úlohy (4.1)

$$(u_{tt}^N, \omega) + ((\text{-}\Delta)^n u^N, \omega) + (g(u_t^N), \omega) + (f(u^N), \omega) = 0, \quad \forall \omega \in \operatorname{span}\{\omega_1, \cdots, \omega_N\}.$$

Rovnici (4.24) "otestujeme" u_t^N:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_{tt}^N u_t^N &+ \int_\Omega (\text{-}\Delta)^n u^N u_t^N + \int_\Omega g(u_t^N) u_t^N + \int_\Omega f(u^N) u_t^N = 0, \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^N\|_{H^0}^2 &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(\text{-}\Delta)^n u^N\|_{H^0}^2 + \int_\Omega g(u_t^N) u_t^N = -\int_\Omega f(u^N) u_t^N, \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E[u^N](t) &+ \alpha\|u_t^N\|_{H^0}^2 \le \gamma\|u^N\|_{H^s}\|u_t^N\|_{H^0}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Z Youngovy nerovnosti snadno obdržíme: $\|u^N\|_{H^n}\|u_t^N\|_{H^0} \le \frac{E[u^N](t)}{2}$, dále víme, že $\|u^N\|_{H^s} \le \lambda_1^{\frac{s-n}{2}}\|u^N\|_{H^n}$.
Poslední nerovnost v (4.24) implikuje:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E[u^N](t) \le \frac{1}{2}\frac{d}{dt}E[u^N](t) + \alpha\|u_t^N\|_{H^0}^2 \le \gamma\lambda_1^{\frac{s-n}{2}}\frac{E[u^N](t)}{2}. \tag{4.25}$$

A tedy

$$\frac{d}{dt}E[u^N](t) \le \gamma\lambda_1^{\frac{s-n}{2}} E[u^N](t) \overset{Gronwall}{\Rightarrow} \sup_{t\in[0,T]} E[u^N](t) \le \mathrm{e}^{CT_N}) < \infty. \tag{4.26}$$

Tento odhad dostaneme, když $0 < T_N < \infty$ pevné. Dále z odhadu plyne, že dostáváme stejnoměrné omezení konstantou závislou na T_N a T_N může být libovolně veliké a konečné. Z toho nám plyne, že maximální řešení Galerkinovské aproximace (4.24) existuje na $[0,\infty)$ - metoda hledání maximálního řešení u obyčejných diferenciálních rovnic. V další části důkazu bude $0 < T < \infty$ pevné a libovolné (nezávisí na počáteční podmínce a ani na N).

Z (4.26) dostáváme stejnoměrný odhad $\forall N, 0 < T < \infty$:

$$\begin{aligned} \|u^N\|_{L^\infty(0,T;H^n)} &\leq C < \infty, & (4.27)\\ \|u_t^N\|_{L^\infty(0,T;H^0)} &\leq C < \infty. & (4.28) \end{aligned}$$

Rovnici (4.24) "otestujeme"-$\Delta\, u_t^N$ a označme $\tilde{E}[u](t) = \|u_t\|^2_{H^1} + \|u\|^2_{H^{n+1}}$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_{tt}^N(\text{-}\Delta\, u_t^N) &+ \int_\Omega (\text{-}\Delta)^n u^N(\text{-}\Delta\, u_t^N) + \int_\Omega g(u_t^N)(\text{-}\Delta\, u_t^N) + \int_\Omega f(u^N)(\text{-}\Delta\, u_t^N) = 0,\\
\int_\Omega u_{tt}^N(\text{-}\Delta\, u_t^N) &+ \int_\Omega (\text{-}\Delta)^{n+1} u^N u_t^N = -\int_\Omega g(u_t^N)(\text{-}\Delta\, u_t^N) - \int_\Omega f(u^N)(\text{-}\Delta\, u_t^N),\\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t^N\|^2_{H^1} &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^N\|^2_{H^{n+1}} = -\int_\Omega g(u_t^N)(\text{-}\Delta\, u_t^N) - \int_\Omega f(u^N)(\text{-}\Delta\, u_t^N) \leq\\
&= -\int_\Omega \nabla g(u_t^N)\nabla u_t^N + \int_\Omega \nabla f(u^N)(\nabla u_t^N) \leq\\
&\leq c\alpha\|u_t^N\|^2_{H^1} + \gamma\|u^N\|_{H^0}\|u_t^N\|_{H^0} \leq\\
&\leq c\alpha(\|u_t^N\|^2_{H^1} + \|u^N\|^2_{H^{n+1}} + \frac{\gamma}{2}(\|u^N\|^2_{H^1} + \|u_t^N\|_{H^1}) \leq\\
&\leq c\alpha\tilde{E}[u^N](t) + \frac{\gamma}{2}(\lambda_1^{-n-1}\|u^N\|^2_{H^n} + \|u_t^N\|_{H^1}).
\end{aligned}$$

Z (4.26) víme, že existuje $C > 0$ tak, že $\sup\limits_{t\in[0,T]} (\|u_t^N\|_{H^0} + \|u^N\|_{H^n}) \leq C < \infty$. Předchozí řetězec nerovností dává:

$$\frac{d}{dt}\tilde{E}[u^N](t) \leq C_1 + C_2\tilde{E}[u^N](t) \overset{Gronwall}{\Rightarrow} \sup_{t\in[0,T]} \tilde{E}[u^N](t) \leq \tilde{C} < \infty. \quad (4.29)$$

Vol $w \in H^n$, $\|w\|_{H^n} \leq 1$ a rozložme $w = w^1 + w^2$ tak, že $w^1 \in \operatorname{span}\{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$ a $(w^2, \omega_k)_{L^2(\Omega)} = 0$ pro $k = 1, \cdots, N$. Potom $\|w^1\|_{H^n} \leq \|w\|_{H^n}$.

$$
\begin{aligned}
\langle u_{tt}^N; w\rangle &= (u_{tt}^N; w^1) = -((\text{-}\Delta^n)u^N; w^1) - (g(u_t^N); w) - (f(u^N); w) \\
|(u_{tt}^N; w^1)_{L^2(\Omega)}| &\leq \|u^N\|_{H^n}\|w^1\|_{H^n} + c\alpha\|u_t^N\|_{H^0} + \gamma\|u^N\|_{H^s}\|w\|_{H^0} \\
&\leq C(\alpha, c, \gamma, \lambda_1, n)(\|u^N\|_{H^n}^2 + \|u_t^N\|_{H^0}^2)\|w\|_{H^0} \\
\sup_{\|w\|_{H^0}\leq 1} |(u_{tt}^N; w)_{L^2(\Omega)}| &= \|u_{tt}^N\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\alpha, c, \gamma, \lambda_1, n)(\|u^N\|_{H^n}^2 + \|u_t^N\|_{H^n}^2) \\
&\overset{(4.22)}{\leq} C_3(\|u\|_{H^n}^2(0) + \|u_t\|_{H^0}^2(0)). \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

Z předchozího sledu nerovností a duálního vyjádření normy v Banachových prostorech dostaneme:

$$
\|u_{tt}^N\|_{H^{-n}} = \sup_{\|w\|_{H^n}\leq 1} |(u_{tt}^N; w)_{L^2(\Omega)}| \leq C_3(\|u\|_{H^n}^2(0) + \|u_t\|_{H^0}^2(0)). \qquad (4.31)
$$

Nyní stačí poslední nerovnost integrovat přes $(0, T)$ a obdržíme

$$
\int_0^T \|u_{tt}^N\|_{H^{-n}}^2 dt \leq TC_3(\|u\|_{H^n}^2(0) + \|u_t\|_{H^0}^2(0)) \leq C_4 < \infty. \qquad (4.32)
$$

Nerovnosti (4.29) a (4.32) říkají pro $\forall N$:

$$
\begin{aligned}
\|u_t^N\|_{L^\infty(0,T;H^1)} &\leq C_1 < \infty, && (4.33) \\
\|u^N\|_{L^\infty(0,T;H^{n+1})} &\leq C_1 < \infty, && (4.34) \\
\|u_{tt}^N\|_{L^2(0,T;H^{-n})} &\leq C_4 < \infty. && (4.35)
\end{aligned}
$$

Existuje podposloupnost (značená stejně) tak, že

$$
\begin{aligned}
u^N &\rightharpoonup^* u \ v\ L^\infty(0, T; H^{n+1}), && (4.36) \\
u_t^N &\rightharpoonup^* u_t \ v\ L^\infty(0, T; H^1), && (4.37) \\
u_{tt}^N &\rightharpoonup u_{tt} \ v\ L^2(0, T; H^{-n}). && (4.38)
\end{aligned}
$$

Krok 3:
Na limitní přechod v lineárních členech mi stačí slabá konvergence, na přechod v nelinearitách potřebujeme silnou konvergenci (spojitost nelinearit). K tomu nám poslouží Aubin-Lionsovo lemma. Jen stačí ověřit předpoklady:
Z věty o hierarchii prostorů H^α 3.22 dostáváme:

$$
H^{n+1} \hookrightarrow\hookrightarrow H^{n+1-\varepsilon} \hookrightarrow H^1,
$$

$$
H^1 \hookrightarrow\hookrightarrow H^{1-\varepsilon} \hookrightarrow H^{-n},
$$

kde $\varepsilon \in (0, 1)$. Pro $0 < T < \infty$ dostáváme:

$$L^\infty(0,T) \hookrightarrow L^p(0,T), \quad p < \infty.$$

Z definice prostorů H^α (pro $\alpha > 0$) máme, že jsou separabilní (Lemma 3.16) a reflexivní Banachovy prostory (H^α jsou Hilbertovy prostory. Prostor $H^{-\alpha}$ je separabilní a reflexivní - duální prostor k Hilbertově prostoru. Potom položme v Aubin-Lionsově lemmatu:

$$\begin{aligned} 1) \quad X_0 &:= H^{n+1}, \quad X_1 := H^1, \quad X := H^{n+1-\varepsilon}, \\ 2) \quad X_0 &:= H^1, \quad X_1 := H^{-n}, \quad X := H^{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Potom Aubins-Lionsovo lemma říká:

$$\{u \in L^p(0,T;H^{n+1}); u_t \in L^p(0,T;H^1) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(0,T;H^{n+1-\varepsilon}),$$

$$\{u_t \in L^p(0,T;H^1); u_{tt} \in L^2(0,T;H^{-n}) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(0,T;H^{1-\varepsilon}).$$

Z těchto kompaktních vnoření dostáváme existenci vybrané konvergentní podposloupnosti (značené stejně) tak, že:

$$\begin{aligned} u^N &\to u \ v \ L^p(0,T;H^{n+1-\varepsilon}), \forall p < \infty; \varepsilon > 0, && (4.39) \\ u_t^N &\to u_t \ v \ L^p(0,T;H^{1-\varepsilon}), \forall p < \infty; \varepsilon > 0. && (4.40) \end{aligned}$$

Limitní přechod v rovnici (4.1):
uvažujme slabou formulaci pro $[u^N, u_t^N]$ a podívejme se na limitní přechody v nelineárních členech (v lineárních členech nám stačí slabá konvergence):

$$\lim_{N\to\infty} |\int_\Omega (g(u_t^N) - g(u_t))\omega| \le \lim_{N\to\infty} c\alpha \|u_t^N - u_t\|_{H^0} \|\omega\|_{H^0} = 0,$$

pro s.v. $t \in [0,T]$, $\forall \omega \in H^n$.

$$\lim_{N\to\infty} |\int_\Omega (f(u^N) - f(u))\omega| \le \lim_{N\to\infty} \gamma \|u_t^N - u_t\|_{H^s} \|\omega\|_{H^0} = 0,$$

pro s.v. $t \in [0,T]$, $\forall \omega \in H^n$, $s \in [0,n)$.

Tyto limitní přechody dávají existenci řešení pro počáteční podmínky $[u_0, u_1] \in H^{n+1} \times H^1$ na $[0,T]$, protože T bylo libovolné, dostáváme existenci řešení na $[0,\infty)$.

Krok 4:
Existence řešení pro $[u_0, u_1] \in H^n \times H^0$
Z hustého vnoření $H^{n+1} \hookrightarrow H^n$ a hustého vnoření $H^1 \hookrightarrow H^0$, existuje:

$$\begin{aligned} u_0^k &\in H^{n+1}; u_0^k \to u_0, \\ u_1^k &\in H^1; u_1^k \to u_1. \end{aligned}$$

Dle Kroku 2 existuje řešení u^k rovnice (4.1) s počátečními podmínkami $[u_0^k, u_1^k]$. Dle (4.22) je u^k cauchyovská v normách

$$\begin{aligned} u^k &\in C([0,T]; H^n), \\ u_t^k &\in C([0,T]; H^0). \end{aligned}$$

Prostory $L^\infty(0,T;H^n)$ a $L^\infty(0,T;H^0)$ jsou Banachovy a tudíž u^k má limity v těchto prostorech. Silná konvergence stačí na přechod v rovnici (lineární členy jsou bez problému, nelinearity jsou spojité funkce), tedy $[u, u_t]$ je řešením pro původní počáteční podmínky $[u_0, u_1]$.

□

Poznámka 4.15. V důkazu Věty 4.9 jsme dokázali navíc regularitu slabé řešení, tj. pro "hladší"počáteční podmínky máme "hladší"slabé řešení.

Věta 4.16. (spojitá závislost na počátečních podmínkách) Nechť u a v jsou řešení (4.1) s počátečními podmínkami $[u_0, u_1]$ a $[v_0, v_1]$. Potom pro $w := u - v$ platí:

$$\sup_{[0,T]}(\|w(t)\|_{H^n} + \|w_t(t))\|_{H^0}) \leq K(\|w_0\|_{H^n} + \|w_1\|_{H^0}).$$

Důkaz. Užijme (4.22)

$$\sup_{t\in[0,T]} E[w](t) \leq C(\|w_t\|^2_{H^0}(0) + \|w\|^2_{H^n}(0)). \tag{4.41}$$

□

Kapitola 5

Disipace

V předchozí kapitole jsme dokázali, že rovnice (4.1) má řešení pro každou přípustnou počáteční podmínku. Označme $X := H^n \times H^0$ a uvažujme na X dvě ekvivalentní metriky: $\rho(u,v) := \sqrt{E[u-v]}$ a $\tilde{\rho}(u,v) := \sqrt{E_\delta[u,v]}$, kde E_δ je definováno v Lemmatu 4.8. Řešící semigrupa $S(t) : X \to X$ je dána vztahem $S(t) : [u_0, u_1] \to [u(t), u_t(t)]$.

Definice 5.1. Nechť X je metrický prostor, potom vzdáleností množin $A, B \subset X$ nazveme číslo

$$\mathrm{dist}_X(A,B) = \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \{||b-a||_X\}$$

Poznámka 5.2. Funkce distance není symetrická, tj.$\mathrm{dist}_X(A,B) \neq \mathrm{dist}_X(B,A)$ obecně

Definice 5.3. Nechť X je normovaný lineární prostor, potom množinu $A \subset X$ nazveme globálním atraktorem pro dynamický systém $(S(t), X)$, je-li splněno:

1 $A \subset X$ je kompakt,

2 $S(t)A \subset A$ pro všechna $t \geq 0$, t.j. A je positivně invariantní,

3 $\mathrm{dist}(S(t)B, A) \to 0$ pro $t \to \infty$ pro libovolnou $B \subset X$ omezenou.

Definice 5.4. Nechť X je metrický prostor, nechť $A \subset X$, potom fraktální dimenze A je definována jako

$$\dim_f^X(A) = \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{N_X(A,\varepsilon)}{-\log \varepsilon}, \tag{5.1}$$

kde $N_X(A,\varepsilon)$ je nejmenší počet koulí v X o poloměru ε pokrývající A se středy v A

Definice 5.5. Dynamický systém $(S(t), X)$ se nazve disipativní, jestliže existuje $W \subset X$ omezená množina, jež je uniformně pohlcující, t.j. pro každou $B \subset X$ omezenou existuje $t_0 = t_0(B)$ tak, že $S(t)B \subset W$ pro všechny $t \geq t_0$.

Věta 5.6. Dynamický systém $(S(t), X)$ indukovaný řešícím operátorem úlohy (4.1) s podmínkami (4.5) - (4.9) je disipativní.

Důkaz. Označme $\tilde{E}[u](t) := \|u\|^2_{H^n} + \|u_t\|^2_{H^0} + 2\int_\Omega F(u)dx$, potom za předpokladu (4.9) je $E[u](t)$ srovnatelná s $\tilde{E}[u](t)$ tj. $\exists C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$;
$C_1 E[u](t) - C_2 \leq \tilde{E}[u](t) \leq C_3 E[u](t) + C_4$

$$\tilde{E}[u](t) \geq \|u\|^2_{H^n} + \|u_t\|^2_{H^0} - (1 - \varepsilon\lambda_1^{-n})\|u\|^2_{H^n} - C_2 \geq C_1 E[u](t) - C_2 \quad (5.2)$$

, kde $C_1 := \min\{1, \varepsilon\lambda_1^{-n}\}$ a $C_2 = C_5|\Omega|$ z důsledku 4.13.

Z lipschitzovskovosti f dostáváme: $F(u) \leq \gamma|u|^2 + C$. Tento odhad použijeme v důkazu nerovnosti:

$$\tilde{E}[u](t) \leq \|u\|^2_{H^n} + \|u_t\|^2_{H^0} + 2\gamma \int_\Omega |u|^2 + C|\Omega| \leq C_3 E[u](t) + C_4, \quad (5.3)$$

kde $C_3 := 1 + 2\lambda_1^n \gamma$ a $C_4 := C|\Omega|$.

Otestujme (4.1) "u_t":

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E[u](t) + \int_\Omega g(u_t)u_t + \frac{d}{dt}\int F(u)dx = 0, \quad (5.4)$$

použitím $\tilde{E}[u](t)$ dostáváme:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\tilde{E}[u](t) + \alpha\|u_t\|^2_{H^0} \leq 0. \quad (5.5)$$

Otestujme (4.1) pomocí "u":

$$\frac{d}{dt}(u_t, u)_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^n} + \int_\Omega g(u_t)u + \int_\Omega f(u)u = -\|u_t\|^2_{H^0}. \quad (5.6)$$

Pomocné odhady: Z předpokladu (4.9) dostáváme:

$$\|u\|^2_{H^n} + \int_\Omega f(u)u \geq \theta\|u\|^2_{H^n} - C|\Omega|. \quad (5.7)$$

$$|\int_\Omega g(u_t)u| \leq c\alpha\lambda_1^{-\frac{n}{2}}\|u\|_{H^n}\|u\|_{H^0} \leq \frac{\theta}{2}\|u\|^2_{H^0} + \frac{\lambda_1^{-n}c^2\alpha^2}{2\theta}\|u_t\|^2_{H^0}. \quad (5.8)$$

Nyní použijeme pomocné odhady do rovnice (5.6):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_t,u)_{L^2(\Omega)} + \frac{\theta}{2}\|u\|^2_{H^n} \leq C_1 + (1 + \frac{\lambda_1^{-n}c^2\alpha^2}{2\theta})\|u_t\|^2_{H^0}. \tag{5.9}$$

Označme $\tilde{E}_\eta[u](t) := \tilde{E}[u](t) + \eta(u_t,u)_{L^2(\Omega)}$, kde $\eta := \frac{1}{2}\min\{\lambda_1^{\frac{n}{2}}; \frac{\alpha}{1+\frac{c^2\alpha^2}{2\theta}}\}$.

Díky podmínce $\eta \leq \frac{\lambda_1^{\frac{n}{2}}}{2}$ a s přihlednutím k Lemmatu 4.8 dostáváme, že $\exists \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4 > 0$, tak že $\tilde{C}_1\tilde{E}[u](t) - \tilde{C}_2 \leq \tilde{E}_\eta[u](t) \leq \tilde{C}_3\tilde{E}[u](t) + \tilde{C}_4$. Přenásobme (5.9) η a přičtěme k (5.5):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\tilde{E}[u](t) &+ \eta(u_t,u)) + \frac{\eta\theta}{2}\|u\|^2_{H^n} + \alpha\|u_t\|^2_{H^0} \leq \eta C_1 + \eta(1+\frac{c^2\alpha^2}{2\theta})\|u_t\|^2_{H^0} \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\tilde{E}_\eta[u](t) &+ \frac{\eta\theta}{2}\|u\|^2_{H^n} + (\alpha - \eta(1+\frac{c^2\alpha^2}{2\theta}))\|u_t\|^2_{H^0} \leq \eta C_1 \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\tilde{E}_\eta[u](t) &+ a\tilde{E}_\eta[u](t) \leq B. \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

Z poslední nerovnosti nám plyne existence omezené přitahující množiny - disipace.

□

Kapitola 6

Exponenciální atraktor

6.1 Exponenciální atraktor

V této kapitole dokážeme, že dynamický systém vytvořený řešící semigrupou rovnice (4.1) má exponenciální atraktor, odhadneme jeho fraktální dimenzi a rychlost přitahování.

Definice 6.1. Nechť X je normovaný lineární prostor, množina $M \subset X$ se nazývá exponenciální atraktor pro dynamický systém $(S(t), X)$, jestliže je splněno:

1 $\mathscr{M} \subset X$ je kompakt,

2 $S(t)\mathscr{M} \subset \mathscr{M} \quad \forall t \geq 0$, tj. M je positivně invariantní,

3 pro libovolnou $B \subset X$ omezenou, existuje konstanta C, t_0 tak, že $\operatorname{dist}_X[S(t)B, \mathscr{M}] \leq C\,\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}$, kde $\beta > 0$ je konstanta nezávislá na volbě množiny B,

4 $\dim_f^X(\mathscr{M}) < \infty$.

Definice 6.2. Množina $\mathscr{M}_*$ se nazve exponenciální atraktor pro diskrétní dynamický systém (S^k, W), jestliže je splněno:

1 $\mathscr{M}_* \subset X$ je kompakt

2 $S\mathscr{M}_* \subset \mathscr{M}_*$, tj. $\mathscr{M}_*$ je positivně invariantní,

3 existují konstanty $\beta, C > 0$ tak, že $[\operatorname{dist}_X S^k W, \mathscr{M}_*] \leq C\,\mathrm{e}^{-\beta k}$,

4 $\dim_f^X(\mathscr{M}) < \infty$.

Věta 6.3. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

I dynamický systém (S^k, W) má exponenciální atraktor, II existují konstanty $a, b > 0$,$\theta \in (0, 1)$, $K \geq 1$ tak, že

$$N_X(S^k W, a\theta^k) \leq bK^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{6.1}$$

Navíc z existence $\mathscr{M}_*$ vyplývá, že $\theta = \mathrm{e}^{-\beta}$ a $K = \mathrm{e}^{d\beta}$, kde β je konstanta přitahování a $d > 0$ libovolné číslo takové, že $d > \dim_f^X(\mathscr{M}_*)$. Za předpokladu, že (6.1) je splněna se dá zkonstruovat exponenciální atraktor, tak, že

$$\dim_f^X(\mathscr{M}_*) \leq \frac{\log K}{-\log \theta} \tag{6.2}$$

a $\beta = -\log \theta$ z definice exponenciálního atraktoru.

důkaz lze nalézt Feireisl, Pražák [2, Theorem 2.35, str.31].

6.1.1 Konstrukce exponenciálního atraktoru a explicitní odhad fraktální dimenze

Nyní přejdeme k důkazu existence exponenciálního atraktoru a explicitního odhadu jeho fraktální dimenze. Jádro této konstrukce leží v ověření II. části Věty 6.3 a k tomuto účelu použijeme metodu z článku [3]. V celém důkazu budeme používat a odkazovat se na nerovnosti, jež jsme získali v důkazu existence řešení (4.1).

Z nerovnosti (4.20) dostáváme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_\delta[w](t) \leq K\lambda_1^{s-n}\|w\|_{H^n}^2 \leq 2K\lambda_1^{s-n}E_\delta[w](t). \tag{6.3}$$

Použijeme-li Gronwallovo lemma na předchozí nerovnost na $[0, t^*]$, obdržíme tento odhad:

$$E_\delta[w](t^*) \leq e^{4K\lambda_1^{s-n}t^*}E_\delta[w](0). \tag{6.4}$$

Nyní volme t^* tak, aby $4K\lambda_1^{s-n}t^* \leq 1$ v nerovnosti (6.4). Potom nerovnost (6.4) říká:

$$E_\delta[w](t) \leq \mathrm{e}\, E_\delta[w](0), \quad t \in (0, t^*). \tag{6.5}$$

Z integrujeme-li nerovnost (4.20) přes $(0, t^*)$

$$E_\delta[w](t^*) - E_\delta[w](0) + \delta t^* \frac{2}{3\,\mathrm{e}} E_\delta[w](t^*) \leq K \int_0^{t^*} \|w\|^2_{H^s},$$

$$(1 + \delta t^* \frac{2}{3\,\mathrm{e}}) E[w]_\delta(t^*) \leq E_\delta[w](0) + K \int_0^{t^*} \|w\|^2_{H^s},$$

$$E[w]_\delta(t^*) \leq (1-\theta) E_\delta[w](0) + \tilde{K} \int_0^{t*} \|w\|^2_{H^s}, \tag{6.6}$$

kde $1-\theta = (1+\delta t^* \frac{2}{3\,\mathrm{e}})^{-1}$, $\tilde{K} = K(1+\delta t^* \frac{2}{3\,\mathrm{e}})^{-1}$. Důležité je si uvědomit, že veškera informace o w a w_t je nesena $E[w](t)$ a energii kontrolujeme pomocí w v prostoru $L^2(0, t^*; H^s)$.

Označme $W \subset X_\delta$ omezenou přitahující množinu, kterou jsme získali v důkazu disipace. Vezměmě $B \subset W$ libovolnou kouli, $\operatorname{diam} B = R$ Nyní ukážeme, že dokážeme $S(t^*)B$ pokrýt pomocí N množin o průměru $(1-\frac{\theta}{2})^{\frac{1}{2}} R$ v prostoru H^s, kde pokrývací číslo N nezávisí na B a R. Definujme:
$B_{t^*} := \{u : [u(0), u_t(0)] \in B, u$ řeší (4.1) na $[0, t^*]\}$.

Potom $\operatorname{diam} B_{t^*} \leq C\sqrt{t^*} R$ v normě prostoru $L^2(0, t^*, X_\delta)$. Z nerovnosti (6.5) dostáváme:

$$\sup_{u,v \in B_{t*}} \int_0^{t^*} E_\delta[u-v](t) dt \leq C \sup_{u,v \in B} \int_0^{t^*} E_\delta[u-v](0) dt = C t^* R^2. \tag{6.7}$$

B_{t*} je omezená, tedy existuje u_0 a $\tilde{U}$ tak, že $B_{t^*} \subset u + \tilde{U}$. Kde
$\tilde{U} = \{v : \|v\|_{L^2(0,t^*;H^n)} \leq C(t^*)^{\frac{1}{2}} R; \|v_t\|_{L^2(0,t^*;H^0)} \leq C(t^*)^{\frac{1}{2}} R\}$. Problém pokrytí se redukuje na problém pokrýt $\tilde{U}$ pomocí množin $F^j_{t^*} \subset L^2(0, t^*; H^s)$ $j = 1, \cdots N$ a $\operatorname{diam} F^j_{t*} \leq \eta R$, kde η je dáno rovností $\tilde{K}\eta^2 = \frac{\theta}{2}$. Konečný počet množin je z kompaktního vnoření z Aubin-Lionsova lemmatu:

$$\{u \in L^2(0, t^*; H^n), u_t \in L^2(0, t^*; H^0)\} \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(0, t^*; H^s), s \in [0, n).$$

Pro splnění předpokladů v druhé části věty musíme pokrýt $S(t^*)B$. K tomuto účelu si zadefinujeme množiny:
$G^j \subset X_\delta$, $G^j := \{[v(t^*), v_t(t^*); v \in F^j_{t^*}]$. Množiny G^j pokrývají $S(t^*)B$ z definice těchto množin. Z (6.6) dostáváme

$$(\operatorname{diam} G^j)^2 \leq (1-\theta) R^2 + \tilde{K}\eta^2 R^2 = \Big(1 - \frac{\theta}{2}\Big) R^2. \tag{6.8}$$

Tedy množiny G^j mají požadované průměry. Nyní vše přeškálujeme tak,

abychom pokrývali 1-koulemi v prostoru $L^2(0,t^*;H^s)$:
$A = B = C(t^*)^{\frac{1}{2}}\frac{R}{\eta R} = C\sqrt{\frac{t^*\tilde{K}}{\theta}}$ a
$U := \{v : \|v\|_{L^2(0,t^*;H^n)} \leq A; \|v_t\|_{L^2(0,t^*;H^0)} \leq B\}$. Je vidět, že problém pokrytí nyní nezávisí na R. Dále z Věty 3.8 víme, že $\lambda_j \sim \lambda_1 j^{\frac{2n}{d}}$. Nyní jsou splněny všechny předpoklady pro použítí pokrývacího Lemmatu [4], Lemma 4.2, které říká, že se U dá pokrýt N koulemi a platí odhad pro N:

$$\ln N \leq Ct^*\lambda_1^{-\frac{d}{2n}} A^{\left(\frac{d}{n}+s\right)\frac{1}{n-s}} B\ln(\lambda_1 A + 1). \tag{6.9}$$

Kde C závisí na Ω a d Nyní jsme vyřešili problém pokrytí $S(t^*)B$ pomocí množin o průměru $(1-\frac{\theta}{2})^{\frac{1}{2}}R$. Nyní budeme předchozí metodu iterovat a budeme pokrývat $S(kt^*)B$ pomocí množin a průměru menším jak $(1-\frac{\theta}{2})^{\frac{k}{2}}R$. Předchozí proces nám dá toto:

$$N_{H^s}(S(kt^*)B, (1-\frac{\theta}{2})^{\frac{k}{2}}R) \leq N^k. \tag{6.10}$$

Dle Věty (6.3) dostáváme existenci exponenciálního atraktoru, jehož fraktální dimenze je odhadnuta:

$$\dim_f^{H^s}(\mathscr{M}_*) \leq \frac{\log N}{-\log((1-\frac{\theta}{2})^{\frac{1}{2}})}. \tag{6.11}$$

Pomocí jednoduchých odhadů dostáváme:
$\frac{1}{-\log(1-\frac{\theta}{2})} \leq 2\theta^{-1}$, a z konvexity funkce $y = x - \log(1+x)$ dostáváme: $\log(1+x) \leq x, x \geq 0$; dostáváme lépe vypadající odhad:

$$\dim_f^{H^s}(\mathscr{M}_*) \leq Ct^*\lambda_1^{-\frac{d}{2n}} A^{\left(\frac{d}{n}+s\right)\frac{1}{n-s}} B\lambda_1 A\theta^{-1}. \tag{6.12}$$

Když dosadíme za θ,A,B,$\tilde{K}$ a použijeme jednoduché odhady a vzorce odvozené z Taylorova polynomu dostaneme mnohem utříděnější vzorec:

$$\dim_f^{H^s}(\mathscr{M}_*) \leq C\lambda_1^{-\frac{d}{2n}+1}\left(\frac{2\delta\,\mathrm{e}}{3}\right)^{-\frac{d+4n^2-3ns}{2n(n-s)}} K^{\frac{d+2n^2-ns}{2n(n-s)}}. \tag{6.13}$$

Kde $\delta := \frac{1}{2}\min\{\frac{\alpha}{c\alpha^2+1}, \lambda_1^{\frac{n}{2}}\}$ a $K := \frac{\gamma^2}{\alpha} + \delta(c\lambda_1^{-s} + \gamma\lambda_1^{\frac{-s}{2}})$. Pro porovnání s výsledky z jiných metod budeme uvažovat, že $\alpha << 1$, $\gamma > 1$ a pro jednoduchost $\lambda_1 = 1$. Potom $\delta = \frac{\alpha}{2}$, $K = \frac{\gamma^2}{\alpha}$. Potom obdržíme tento odhad:

$$\dim_f^{H^s}(\mathscr{M}_*) \leq C\left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^{-\frac{d+4n^2-3ns}{2n(n-s)}} \gamma^{\frac{d+2n^2-ns}{n(n-s)}} \alpha^{-\frac{d+3n^2-2ns}{n(n-s)}}. \tag{6.14}$$

Tímto jsme zkonstruovali exponenciální atraktor pro diskrétní dynamický systém. Globální atraktor je z definice podmnožinou diskrétního exponenciálního atraktoru. Z vlastností fraktální dimenze dostáváme explicitní odhad fraktální dimenze globálního atraktoru $\mathscr{A}$:

$$\dim_f^{H^s}(\mathscr{A}) \leq C\Big(\frac{\mathrm{e}}{3}\Big)^{-\frac{d+4n^2-3ns}{2n(n-s)}} \gamma^{\frac{d+2n^2-ns}{n(n-s)}} \alpha^{-\frac{d+3n^2-2ns}{n(n-s)}}. \tag{6.15}$$

6.2 Aplikace výsledků na rovnici kmitání tyče se slabým třením

V této kapitolce aplikujeme předchozí obecné výsledky na rovnici:

$$\begin{aligned} u_{tt} &+ u_{xxxx} + g(u_t) + f(u) = 0 \quad na(0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(.,0) &= u_0 \quad u_t(.,0) = u_1, \\ u(0,.) &= u(\pi.0) = u_{xx}(0,.) = u_{xx}(\pi,.) = 0, \end{aligned}$$

kde $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou diferencovatelné funkce a splňují růstové podmínky:

$$\begin{aligned} (g(u) - g(v), u - v) &\geq \alpha \|u - v\|_{H^0}{}^2, \\ \|g(u) - g(v)\|_{H^0} &\leq \alpha c \|u - v\|_{H^0}, \\ \|f(u) - f(v)\|_{H^0} &\leq \gamma \|u - v\|_{H^s}, \quad s \in [0, n), \\ g(0) &= 0, \\ \liminf_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} &> -\lambda_1^n. \end{aligned}$$

Vlastní funkce -Δ na intervalu $(0,\pi)$ jsou $\omega_k = \sin kx$ a $\lambda_k = k^2$. Prostory $H^\alpha := \{f \in L^2(\Omega); \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha}(f, \sin kx)^2_{L^2(0,\pi)} < \infty\}$. Dle Věty 4.9 existuje jednoznačné slabé řešení rovnice (6.16) s podmínkami na nelinearity. Dle Věty 5.6 je dynamický systém indukovaný řešící semigrupou disipativní a dle kapitoly o konstrukci exponenciálního atraktoru dostáváme existenci exponenciálního atraktoru pro diskrétní dynamický systém a explicitní odhad pro fraktální dimenzi:

$$\dim_f^{H^s}(\mathscr{M}) \leq C\Big(\frac{2\delta\,\mathrm{e}}{3}\Big)^{-\frac{17-6s}{8-2s}} K^{\frac{9-2s}{8-4s}}, \tag{6.16}$$

kde $\delta := \frac{1}{2}\min\{\frac{\alpha}{c\alpha^2+1}, 1\}$ a $K := \frac{\gamma^2}{\alpha} + \delta(c+\gamma)$.

Kapitola 7

Závěr

V práci jsme dokázali existenci a jednoznačnost slabého řešení rovnice (4.1) za velmi speciálních podmínek a výsledky aplikovali na rovnici (6.16). Ale zde práce na tomto tématu nekončí, práce se dá dále rozšířit uvažováním "horší" hranice množiny Ω v případě, že Ω není krychle. Předpoklad $\partial\Omega \in C^\infty$ by se dal oslabit na $\partial\Omega \in C^n$, dále by se daly oslabit předpoklady na nelinearity g, f: uvažovat tyto funkce jako globálně lipschitzovské. V práci se ukazovalo, že předpoklad koercivity a monotonie funkce g jsou nezbytné pro použití použitých metod při důkazu existence a jednoznačnosti slabého řešení, důkazu disipace a při konstrukci exponenciálního atraktoru. Otázka zní: Dá se předpoklad koercivity vypustit a nalézt explicitní odhad fraktální dimenze globálního atraktoru pomocí dat z rovnice?

Předpoklad globální lipschitzovskovosti či globálně omezených derivací je velmi silný a v rovnicích matematické fyziky se často vyskytují polynomiální růsty nelinearit. Otázka by potom zněla: Za jakých předpokladů na Ω, d existuje jednoznačné řešení rovnice (4.1), kde g je monotonní a $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou lokálně lipschitzovské funkce, a existuje globální atraktor a zda se dá explicitně odhadnout jeho fraktální dimenze pomocí dat rovnice. Částečnou odpověď na tuto otázku, v případě 1-dimenze a g globálně lipschitzovská, dává diplomová práce Mgr. Evy Fašangově [11] - globální atraktor existuje.

Otázek je mnoho a ty nyní čekají na své řešitele.

Po mnoha zrodech splývá moudrý člověk nakonec se Mnou, neboť ví, že Já jsem příčinou všech příčin. Zřídka se však lidská duše pozvedne k takové vznešenosti.

Kršna, Bragavadgíta - zpěv vznešeného

Literatura

[1] Evans C.L.: *Partial differential equations (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19)*, American Mathematics Society, 1998

[2] Feireisl E., Pražák D.: *Asymptotic behavior of dynamical systems in fluid mechanics, Vol. 4*, American Institute of Mathematical, 2010

[3] Pražák D., Bulíček M.: *A note on the dimension of the global attractor for an abstract semilinear hyperbolic problem*, Applied Mathematics Letters 22,(2009) 1025-1028

[4] Pražák D.: *On the dimension of the attractor for the wave equation with nonlinear damping*,Commun. Pure Appl. Anal. 4(1)(2005) 165-174

[5] Reed M., Simon B.: *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*, Academic Press,(1978)

[6] Robinson J.C.: *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2001

[7] Simon J.,*Compact sets in the space* $L^p(0, T; B)$,Ann. . Mat. Pura Appl. (4), 146:65-96, 1987

[8] Gajewski H., Gröger K., and Zacharias K., *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, volume 38 of Mathematische Lehrbücher und Monographien. Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

[9] Chicone C.: *Ordinary differential equations with applications, volume 34 of Texts in Appplied Mathematics.* Springer, New York, second edition, 2006

[10] Adams A, Fournier J.F.: *Sobolev spaces*, 2nd edition, Pure and Applied Mathematics, Academic press, Amsterdam, 2003

[11] Fašangová E.: *Attractor for a beam equation with weak damping*, Appl. Anal. 59 (1995), no. 1-4, 1–13

[12] Davies E.B.: Spectral theory and differential operators, 1st edition, University press, Cambridge

[13] Fašangová E.: *Attractor for a beam equation with weak damping*, Diploma thesis, Department of Mathematical analysis of Charles University, Prague, 1994