Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Radek Moravec

Oceňování opcí

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2011

Poděkování za vedení práce patří doc. RNDr. Janu Hurtovi, CSc.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č.121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 15.4. 2011 Radek Moravec

Název práce: Oceňování opcí
Autor: Radek Moravec
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V předložené práce se zabýváme oceňováním evropských call opcí pomocí stromových struktur. Představujeme diskrétní model trhu a předkládáme návod na arbitrážní ocenění instrumentů na úplném trhu pomocí diskontovaných očekávaných budoucích peněžních toků. Zobecněním binomického modelu konstruujeme multinomický model. Teoreticky odvozenou oceňovací formuli testujeme na reálných datech z amerických burz NYSE a NASDAQ. Navrhujeme metodu odhadu parametrů, která vychází z časové řady historických pozorování denních uzavíracích cen podkladových akcií. Porovnáváme vypočtené ceny opcí s jejich skutečnou tržní cenou a hledáme příčiny jejich diferencí.

Klíčová slova: oceňování opcí, binomický model, multinomický model, odhad parametrů

Title: Option Pricing
Author: Radek Moravec
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In the present thesis we deal with European call option pricing using lattice approaches. We introduce a discrete market model and show a way how to find an arbitrage price of financial instruments on complete markets. It's equal to the discounted value of future expected cash flow. We present the binomial option pricing model and generalize it into multinomial model. We test the resulting formula on real market data obtained from NYSE and NASDAQ. We suggest a parameter estimate method which is based on time series of historical observations of daily close price. We compare calculated option prices with their real market value and try to explain the reasons of the differences.

Keywords: option pricing, binomial model, multinomial model, parameters estimate

Obsah

Seznam použitých zkratek

BM	binomický model
GBM	zobecněný binomický model
MM	multinomický model
MMM	modifikovaný multinomický model
MNČ	metoda nejmenších čtverců
RGBM	náhodný zobecněný binomický model

Úvod

Opční kontrakty se od jiných typů derivátů odlišují nerovnocenným postavením subjektů. Kupující straně vzniká právo, nikoliv však povinnost, uskutečnit smluvenou transakci. Naproti tomu prodávající strana pouze pasivně přijímá rozhodnutí protistrany a podstupuje tak riziko značné ztráty (v případě nepříznivého cenového vývoje), za což požaduje kompenzaci v podobě opční prémie. Opční prémie představuje cenu opce, kterou platí kupující prodávajícímu v okamžiku uzavření obchodu.

Problematice oceňování opcí se v posledních desítkách let věnuje celá řada článků. Jejich autoři usilují o formulování ekonomicky validního modelu, který by byl dostatečně matematicky podchycený a zároveň prakticky aplikovatelný. Za nedílnou součást konstrukce oceňovacího modelu považujeme jeho empirické testování.

Cílem předloženého textu je zobecněním binomického modelu odvodit multinomický oceňovací model, navrhnout odhad jeho parametrů a porovnat kalkulované ceny opcí s jejich skutečnými tržními cenami.

V první kapitole se seznámíme se základními pojmy z oblasti opčních obchodů. Odvodíme put-call paritu, jež dává do souvislosti cenu call opce a put opce stejných charakteristik (bazický instrument, realizační cena, doba splatnosti), a učiníme jednoduché odhady limitující velikost opční prémie. Popíšeme konstrukci modelu trhu a postupnými kroky dospějeme k návodu, jak najít arbitrážní cenu instrumentů na úplném trhu. V poslední části první kapitoly pojednáme o binomickém modelu. Závěry z něj plynoucí jakož i dílčí tvrzení a jejich důkazy budou sloužit jako vzor v dalším pokračování textu.

Ve druhé a třetí kapitole se zabýváme zobecněním binomického modelu pro evropskou call opci na akcii nevyplácející dividendu na základě myšlenek, které v roce 2005 publikovala N. Kan [13]. Přijímáme základní tezi autorky a používáme shodné označení, avšak postupujeme odlišným způsobem (využíváme poznatky z první kapitoly). Závěr, k němuž N. Kan dospěla, rozpracováváme v oceňovací formuli, kterou nakonec ještě drobně modifikujeme.

Odvozená oceňovací formule závisí na několika parametrech. Různé možnosti jejich odhadu diskutujeme v první části čtvrté kapitoly. Vycházíme přitom z reálných dat amerických burz NYSE a NASDAQ. Z každé jsme vybrali čtveřici významných akciových titulů (Citigroup, General Electric, IBM a Pfizer resp. Apple, eBAY, Microsoft a Yahoo) a soubor evropských call opcí (lišících se dobou do splatnosti a realizační cenou) na jednotlivé akcie.

Ve druhé části čtvrté kapitoly dosazujeme odhady parametrů do oceňovací formule, srovnáváme výsledné hodnoty se skutečnými tržními cenami opcí a hledáme příčiny diferencí.

V dodatku připomínáme vybrané pojmy a tvrzení, jež v textu používáme.

K práci je přiloženo CD obsahující text v elektronické podobě, kód programu pro odhad parametrů a pro výpočet ceny opce v softwaru Wolfram Mathematica a výsledky výpočtů.

Kapitola 1

Teoretická východiska

V první části této kapitoly se seznámíme se základními pojmy z oblasti opčních obchodů. Pohovoříme o faktorech ovlivňujících hodnotu opce. Druhá část kapitoly je věnována konstrukci modelu trhu jakožto výchozímu bodu při oceňování derivátů. Ve třetí části pojednáme o binomickém modelu.

1.1 Opce

Opcí rozumíme kontrakt uzavřený mezi dvěma subjekty – kupujícím (držitelem) a prodávajícím (upisovatelem) opce, v němž se strany dohodnou na

- předmětu obchodu – nebude-li řečeno jinak, budeme za podkladový (bazický) instrument považovat akcii;
- realizační ceně – cena, za níž dojde k vypořádání obchodu v případě uplatnění opce;
- době splatnosti (expirace) – evropskou opci lze realizovat v pevně stanovený časový okamžik v budoucnosti, americkou opci i kdykoliv předtím.

Držiteli opce vzniká právo, nikoliv však povinnost, na nákup (call opce) resp. prodej (put opce) bazického instrumentu. Vypořádání opce je tedy podmíněno[1] rozhodnutím držitele opci uplatnit. Na základě porovnání realizační ceny s aktuální spotovou cenou podkladového instrumentu rozdělujeme opce na opce

- na penězích – realizační cena je rovna spotové ceně podkladového instrumentu;
- v penězích – je-li pro call opci realizační cena nižší než spotová cena podkladového instrumentu a pro put opci naopak vyšší;
- mimo peníze – realizační cena je pro držitele méně výhodná než spotová cena podkladového instrumentu.

[1] Tímto se opce odlišují od jiných typů derivátů (futures, swapy) a označujeme je proto jako podmíněné kontrakty (futures či swapy jako pevné kontrakty).

V opčním obchodě je kupující ve výhodnějším postavení. Upisovatel opce proto inkasuje kompenzaci v podobě opční prémie, jež představuje cenu (resp. hodnotu) opce,[2] kterou platí kupující prodávajícímu v okamžiku uzavření obchodu.

1.1.1 Put-call parita

Put-call parita dává do souvislosti cenu call opce a put opce stejných charakteristik (bazický instrument, realizační cena, doba splatnosti). Níže ji formulujeme za předpokladu, že držba bazického instrumentu nepřináší žádný výnos (např. akciovou dividendu).[3]

Předpokládejme, že peněžní prostředky lze uložit za bezrizikovou úrokovou míru r_f. Označme cenu podkladového instrumentu v čase $t < T$ jako S_t, cenu evropské call opce jako c_t, cenu evropské put opce jako p_t a společnou dobu expirace jako T. Put-call parita říká, že

$$p_t + S_t = c_t + K(1 + r_f)^{-(T-t)}. \tag{1.1}$$

Pro odvození vztahu (1.1) uvažujme v čase $t < T$ dvě portfolia:

1. bazický instrument a put opce na tento instrument: hodnota portfolia v čase T je
$$P_{1,T} = S_T + (K - S_T)^+;$$ [4]
2. call opce na daný instrument a peněžní prostředky ve výši $K(1 + r_f)^{-(T-t)}$: hodnota portfolia v čase T je
$$P_{2,T} = K + (S_T - K)^+.$$

Porovnáme $P_{1,T}$ a $P_{2,T}$:

1. Nechť $S_T \geq K$. Pak
$$P_{1,T} = S_T + 0 = S_T \quad \text{a} \quad P_{2,T} = K + S_T - K = S_T.$$
2. Nechť $S_T < K$. Pak
$$P_{1,T} = S_T + K - S_T = K \quad \text{a} \quad P_{2,T} = K + 0 = K.$$

Obě portfolia mají v čase T stejnou hodnotu. Je-li na trhu vyloučena arbitráž, pak vzhledem k nemožnosti uplatnit evropskou opci dříve než v T musí mít portfolia stejnou hodnotu i v čase t.

Pro americké opce platí slabší tvrzení, neboť je lze uplatnit i před datem expirace. V případě uplatnění opce v čase τ, $t \leq \tau < T$, se peněžní prostředky obsažené ve druhém portfoliu nezhodnotí na K, ale na $K(1 + r_f)^{-(T-t)} \cdot (1 + r_f)^{\tau - t} < K$ a hodnota druhého portfolia v čase τ je tak nižší než hodnota prvního portfolia. Označíme-li cenu americké call resp. americké put opce v čase $t < T$ jako C_t resp. P_t, pak

$$P_t + S_t \geq C_t + K(1 + r_f)^{-(T-t)}.$$

[2] V textu budeme pro označení opční prémie resp. pro proces jejího určení volně zaměňovat pojmy cena a hodnota resp. oceňování a ohodnocování opce. Podrobněji se k rozdílům mezi hodnotou a cenou derivátů vyjadřuje např. Dvořák [8].

[3] Cipra [3, str. 212] zohledňuje i dividendy.

[4] $(K - S_T)^+ = \max(0, K - S_T)$.

1.1.2 Meze opčních prémií

Stejně jako v předchozím odstavci předpokládejme, že z držby podkladového instrumentu neplyne žádný výnos a že existuje možnost bezrizikové úložky (a navíc i výpůjčky) za r_f. Jestliže vyžadujeme takové ocenění opce, které nedává prostor ke vzniku arbitrážních příležitostí, a investor preferuje větší bohatství před menším, pak

1. cena libovolné opce je nezáporná;
2. $C_t \geq c_t$ a $P_t \geq p_t$ – americká opce držiteli přináší stejné výhody jako evropská opce a navíc možnost dřívějšího uplatnění;
3. $c_t \leq S_t$ – v opačném případě by byl výhodnější přímý nákup podkladového instrumentu. Pro spor nechť $c_t > S_t$:
   (a) jestliže $S_T \geq K$, pak $(S_T - K)^+ - c_t = S_T - K - c_t < S_T - K - S_t \leq S_T - S_t$;
   (b) jestliže $S_T < K$, pak $(S_T - K)^+ - c_t = 0 - c_t \leq S_T - c_t < S_T - S_t$.

   Opční obchod tedy při vyšších počátečních nákladech přináší nejvýše stejný zisk jako okamžitá investice do podkladového instrumentu;
4. $P_t \leq K$ – v opačném případě by náklady opčního obchodu nutně převýšily výnosy, neboť výplata z put opce je maximálně K;
5. $P_t \geq K - S_t$ – kdyby tato nerovnost neplatila, generovala by okamžitá realizace opce bezrizikový kladný zisk a na trhu by existovaly arbitrážní příležitosti;
6. $c_t \geq S_t - K(1 + r_f)^{-(T-t)}$ – plyne z $p_t \geq 0$ a put-call parity;
7. $p_t \geq K(1 + r_f)^{-(T-t)} - S_t$ – plyne z $c_t \geq 0$ a put-call parity;
8. $p_t \leq K(1 + r_f)^{-(T-t)}$ – plyne z put-call parity a třetího bodu;
9. $C_t \leq c_t$ – z šestého bodu vyplývá, že v čase $\tau < T$ je $c_\tau \geq S_\tau - K$. Pokud by navíc $C_t > c_t$, pak $C_\tau > S_\tau - K$ a opci by bylo výhodnější prodat než realizovat. Možnost předčasného uplatnění americké call opce na podkladový instrument, z jehož držby neplyne výnos, nepřináší držiteli opce žádnou výhodu;
10. spojením předchozích dvou bodů docházíme k závěru, že neplyne-li z držby podkladového instrumentu žádný výnos, pak $C_t = c_t$.[5] Pro opční prémii americké call opce tak platí tytéž odhady jako pro opční prémii evropské call opce, tj. $C_t \leq S_t$ a $C_t \geq S_t - K(1 + r_f)^{-(T-t)}$.

[5]Obdobný závěr neplatí pro put opce, protože uplatnění americké put opce v čase $\tau < T$ vede k možnosti uložení získaných peněžních prostředků po dobu $T - \tau$ a tím k dalším ziskům.

1.2 Modelování finančního trhu

V textu budeme vesměs pracovat s obdobím začínajícím v čase 0 (současnost) a končícím časem T, $T > 0$. Časový interval 0 až T rozdělíme na n ($n \in \mathbb{N}$) stejně dlouhých subobdobí a jejich počátkům (resp. koncům) přiřadíme časy $t = 0, 1, 2, \ldots, n$.[6]

Na trhu jsou obchodovány tři typy instrumentů:

- soubor identických akcií, jejichž jeden exemplář označíme jako S a jednotkovou cenu v čase t jako S_t;
- opce na akcii S s realizační cenou $K > 0$ a dobou splatnosti T;
- finanční instrument přinášející investorovi bezrizikové zhodnocení, reprezentovaný bankovní operací (depozitem resp. výpůjčkou).[7]

Obdobně jako v jiných textech zabývajících se opčními modely přijímáme následující ekonomické předpoklady:

- obchodování probíhá v časech $t = 0, 1, \ldots, n = T$, tj. v diskrétních časových okamžicích; v intervalech $(t, t+1)$ se ceny instrumentů nemění;
- subjekty na thu jsou v pozici příjemců cen, tj. svými nákupy a prodeji neovlivní tržní ceny;
- na trhu nedochází k frikcím, tj. transakční náklady, marže a daně jsou nulové;
- bankovní úložka a výpůjčka jsou úročeny složeně shodnou[8] konstantní bezrizikovou úrokovou sazbou $r_f > 0$; úrokové období odpovídá jednomu subobdobí;
- prodeje nakrátko jsou povoleny;
- investiční instrumenty jsou nekonečně dělitelné.

Vzhledem k bezrizikovosti bankovní operace umíme s jistotou určit její budoucí hodnotu, a to zúročením počátečního vkladu k příslušnému budoucímu času při sazbě r_f. Proces hodnoty bankovní operace jednotkové velikosti zavádíme předpisem

$$\beta_t = (1 + r_f)^t, \quad t = 0, 1, ...n. \tag{1.2}$$

Kladná hodnota procesu ($\beta_t > 0$) je spjata s bankovní operací v dlouhé pozici, tedy s úložkou. Se zápornou hodnotou pak koresponduje krátká pozice v bankovní operaci (výpůjčka).

Zatímco hodnota bankovní operace nepodléhá náhodným vlivům, na akcii působí různé makroekonomické, odvětvové i individuální faktory.[9] Držba akcie je pro ekonomický subjekt spjata s rizikem, neboť její budoucí cena není předem známa.

[6] Času $t = n$ tak odpovídá okamžik T.

[7] V literatuře často nalezneme alternativu v podobě bezrizikového bezkupónového dluhopisu.

[8] Předpokládají se nulové marže, viz výše.

[9] Podrobněji např. v Musílek [16].

Nejistotu na finančních trzích modelujeme pomocí pravděpodobnostního prostorou $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Podoba jednotlivých prvků závisí na konkrétním modelu.

Cenu akcie považujeme za náhodnou veličinu[10] definovanou na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. O systému náhodných veličin

$$\mathcal{S} = (S_0, \ldots, S_n) \tag{1.3}$$

budeme hovořit jako o (náhodném) procesu ceny akcie.

Na přirozenou filtraci[11] $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t = 0, \ldots, n)$ procesu $\mathcal{S}$ nahlížíme jako na tok v čase se zpřesňujících informací. V čase t disponujeme informací obsaženou v $\mathcal{F}_t$, což odpovídá tomu, že známe (z trhu vyčteme) aktuální cenu akcie, tedy realizaci náhodné veličiny S_t, a rovněž všechny historické ceny (realizace S_τ, $\tau < t$). S postupujícím časem zřejmě máme více informací. Pro každé $t = 0, \ldots, n$ platí, že S_t je $\mathcal{F}_t$-měřitelná, a proces $\mathcal{S}$ je tak $\mathcal{F}$-adaptovaný.

Označení. Uvažovaný trh označíme jako $\mathcal{M}$. Trh $\mathcal{M}$ je tedy modelován pravděpodobnostním prostorem $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, procesem hodnoty bankovní operace (1.2), procesem ceny akcie (1.3) a přirozenou filtrací $\mathcal{F}$ procesu $\mathcal{S}$.

Definice 1.2.1 (investiční strategie). Investiční strategií na trhu $\mathcal{M}$ nazveme dvojici $\phi = (\Delta, B)$, v níž $\Delta = (\Delta_0, \ldots, \Delta_{n-1})$ a $B = (B_0, \ldots, B_{n-1})$ jsou n-tice náhodných veličin takových, že Δ_t a B_t jsou $\mathcal{F}_t$-měřitelné, $t = 0, 1, \ldots, n-1$.

V investiční strategii ϕ reprezentuje Δ_t počet akcií držených mezi časy t a $t+1$, tj. v $(t+1)$-ním subobdobí, a B_t velikost bankovního depozita (výpůjčky) v tomtéž období. $\mathcal{F}_t$-měřitelnost Δ_t a B_t vyjadřuje skutečnost, že se v čase t investor rozhodne, kolik prostředků vloží do bankovní operace a kolik drží akcií v $(t+1)$-ním subobdobí.

Definice 1.2.2 (hodnota investičního portfolia). Nechť $\phi = (\Delta, B)$ je investiční strategie na trhu $\mathcal{M}$. Hodnotou investičního portfolia $X(\phi)$ nazveme hodnotu portfolia sestaveného na základě investiční strategie ϕ. Hodnota investičního portfolia je dána vztahy

$$\begin{aligned} X_t(\phi) &= \Delta_t S_t + B_t, \quad t = 0, 1, ...n-1 \\ X_n(\phi) &= \Delta_{n-1} S_n + B_{n-1}(1 + r_f). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Definice 1.2.3 (samosefinancující investiční strategie). Investiční strategie ϕ na trhu $\mathcal{M}$ se nazývá samosefinancující, jestliže pro hodnotu investičního portfolia $X(\phi)$ platí

$$X_{t+1}(\phi) = \Delta_t S_{t+1} + B_t(1 + r_f), \quad t = 0, 1, ...n-1. \tag{1.5}$$

Hodnotu investičního portfolia samosefinancující investiční strategie budeme stručněji nazývat hodnotou samosefinancujícího portfolia.

[10] Vzhledem k ekonomické interpretaci veličin pracujeme v celém textu s nezápornými reálnými náhodnými veličinami s konečnou střední hodnotou.

[11] Systém σ-algeber generovaných veličinami procesu $\mathcal{S}$, podrobněji viz dodatek, věta A.8.

Rovnost (1.5) říká, že samosefinancující investiční strategie ϕ se vyznačuje tím, že sestavíme-li na jejím základě v čase t portfolio, bude jeho hodnota v čase $t+1$ shodná s hodnotou investičního portfolia $X_{t+1}(\phi)$ v čase $t+1$, neboli že v čase $t+1$ garantuje hodnota drženého portfolia možnost přizpůsobit se investiční strategii ϕ, tj. dvojici (Δ_{t+1}, B_{t+1}), aniž by byly zapotřebí dodatečné finanční zdroje nebo aniž by zbyly volné peněžní prostředky.

Definice 1.2.4 (arbitráž). Investiční strategii ϕ na trhu $\mathcal{M}$ nazveme arbitráží, jestliže

$$X_0(\phi) = 0, \quad \mathbb{P}(X_n(\phi) \geq 0) = 1 \quad \text{a} \quad \mathbb{P}(X_n(\phi) > 0) > 0.$$

Arbitráž je investiční strategie, která při nulovém počátečním kapitálu prodělá s nulovou pravděpodobností a vydělá s kladnou pravděpodobností. Přítomnost arbitrážních příležitostí na trhu nabízí investorovi možnost bezrizikových výdělků. Oceňovací modely konstruujeme tak, aby byly instrumenty oceněny „správně“ v tom smyslu, že je vyloučena arbitráž. Hledáme takzvanou arbitrážní cenu.

Označení. Náhodnou výplatou na trhu $\mathcal{M}$ v čase t rozumíme libovolnou nezápornou $\mathcal{F}_t$-měřitelnou náhodnou veličinu. Označíme ji Y_t.

Definice 1.2.5 (replikační investiční strategie). Nechť je dán trh $\mathcal{M}$ a investiční instrument s náhodnou výplatou Y_n. Samosefinancující investiční strategii $\phi = (\Delta, B)$, pro níž je hodnota investičního portfolia v čase n rovna výplatě Y_n, tj. $X_n(\phi) = Y_n$, nazveme replikační investiční strategií daného investičního instrumentu.

Dodržením replikační investiční strategie lze pomocí akcií a bankovních operací syntetizovat investiční instrument (opci) s výplatou v čase n. Pokud existuje replikační investiční strategie, pak se arbitrážní cena instrumentu rovná hodnotě replikačního portfolia.[12]

Definice 1.2.6 (úplný trh). Trh $\mathcal{M}$ je úplný, pokud pro instrument s libovolnou náhodnou výplatou Y_n existuje alespoň jedna replikační investiční strategie.

Obecnější přístup k oceňování derivátů vychází z pojmu ekvivalentní martingalové míry.

Definice 1.2.7 (ekvivalentní martingalová míra). Nechť je dán trh $\mathcal{M}$. Ekvivalentní martingalovou míru $\mathbb{P}^*$ definujeme jako pravděpodobnostní míru na $\mathcal{A}$, která je ekvivalentní $\mathbb{P}$ a při níž je proces diskontované ceny akcie, tj. proces

$$\Big(\frac{S_t}{(1+r_f)^t},\, t = 0, 1, \ldots, n\Big),$$

$\mathcal{F}$-martingal.[13]

[12] Jelikož požadujeme vyloučení arbitráže, neexistují replikační investiční strategie s různou hodnotou replikačního portfolia, a tedy replikační investiční strategie existuje jednoznačně.

[13] Připomeňme, že v celém textu předpokládáme, že náhodné veličiny mají konečnou střední hodnotu.

Tvrzení 1.2.8. *Při ekvivalentní martingalové míře* $\mathbb{P}^*$ *je proces diskontované hodnoty samosefinancujícího portfolia martingal.*

Důkaz. Nechť ϕ je samosefinancující investiční strategie a $t \in \{0, \dots, n-1\}$. Podle definice 1.2.3 rozepíšeme hodnotu samosefinancujícího portfolia v čase $t+1$:

$$X_{t+1} = \Delta_t S_{t+1} + B_t(1+r_f) = \Delta_t S_{t+1} + (X_t - \Delta_t S_t)(1+r_f).$$

Podle tvrzení A.9 stačí ověřit, že

$$\mathrm{E}_{\mathbb{P}^*}\Big[\frac{1}{(1+r_f)^{t+1}}\, X_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t\Big] = \frac{1}{(1+r_f)^t}\, X_t.$$

Vystačíme si s $\mathcal{F}_t$-měřitelností S_t, Δ_t (a tím i X_t), se základními vlastnostmi podmíněné střední hodnoty a martingalovou vlastností $\mathbb{P}^*$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_{\mathbb{P}^*}\Big[\frac{1}{(1+r_f)^{t+1}}\, X_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t\Big] = \\
&= \mathrm{E}_{\mathbb{P}^*}\Big[\frac{1}{(1+r_f)^{t+1}}\, \Delta_t S_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t\Big] + \mathrm{E}_{\mathbb{P}^*}\Big[\frac{1}{(1+r_f)^{t}}\, X_t \,|\, \mathcal{F}_t\Big] - \mathrm{E}_{\mathbb{P}^*}\Big[\frac{1}{(1+r_f)^{t}}\, \Delta_t S_t \,|\, \mathcal{F}_t\Big] \\
&= \Delta_t \mathrm{E}_{\mathbb{P}^*}\Big[\frac{1}{(1+r_f)^{t+1}}\, S_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t\Big] + \frac{1}{(1+r_f)^t}\, X_t - \frac{1}{(1+r_f)^t}\, \Delta_t S_t = \frac{1}{(1+r_f)^t}\, X_t.
\end{aligned}$$

□

Věta 1.2.9. *Nechť je na trhu* $\mathcal{M}$ *dán investiční instrument s náhodnou výplatou* Y_n *v čase* n*, pro nějž existuje replikační investiční strategie. Pak pro jeho arbitrážní cenu platí*

$$AC_t = \frac{1}{(1+r_f)^{n-t}}\, \mathrm{E}_{\mathbb{P}^*}[Y_n \,|\, \mathcal{F}_t], \quad t = 0, 1, \dots, n.$$

Důkaz. Dle předpokladu existuje samosefinancující portfolio s hodnotou $X_t(\phi)$ v čase $t = 0, 1, \dots, n$ takové, že $X_n(\phi) = Y_n$. Volme libovolné $t \in \{0, 1, \dots, n\}$. Arbitrážní cena instrumentu se rovná hodnotě jeho replikačního portfolia. Podle předchozího tvrzení víme, že proces diskontované hodnoty samosefinancujícího portfolia je $\mathbb{P}^*$-martingal. Proto

$$\frac{1}{(1+r_f)^t}\, X_t = \mathrm{E}_{\mathbb{P}^*}\Big[\frac{1}{(1+r_f)^n} X_n \,|\, \mathcal{F}_t\Big] \quad \text{a}$$

$$AC_t = X_t = \frac{1}{(1+r_f)^{n-t}}\, \mathrm{E}_{\mathbb{P}^*}[Y_n \,|\, \mathcal{F}_t].$$

□

Cont a Tankov [4, str. 303, Proposition 9.2 a str. 305, Proposition 9.3] formulují základní věty oceňování aktiv, dávající do souvislosti arbitráž, ekvivalentní martingalové míry a úplnost trhu. Tvrzení v poněkud jiném znění, ale se stejným obsahem a včetně důkazů, nalezneme v Harrison a Kreps [10, str. 392, Corollary (a) a (c)].

Věta 1.2.10 (základní věta oceňování aktiv). *Na trhu* $\mathcal{M}$ *je vyloučena arbitráž, právě když existuje martingalová míra* $\mathbb{P}^*$ *ekvivalentní pravděpodobnostní míře* $\mathbb{P}$*.*

Věta 1.2.11 (druhá základní věta oceňování aktiv). *Trh $\mathcal{M}$ je úplný, právě když existuje jediná martingalová míra $\mathbb{P}^*$ ekvivalentní $\mathbb{P}$.*

Uvedené věty poskytují návod pro arbitrážní ocenění instrumentů na úplném trhu. Na úplném trhu existuje ekvivalentní martingalová míra, čímž je vyloučena arbitráž. Investiční instrument lze syntetizovat replikační investiční strategií. Stačí nám tedy najít (jedinou) ekvivalentní martingalovou míru $\mathbb{P}^*$ a arbitrážní cenu instrumentu pak určit jako při $\mathbb{P}^*$ očekávanou budoucí hodnotu (výplatu) instrumentu diskontovanou k okamžiku oceňování.

Na neúplném trhu není možné použít koncept arbitrážního oceňování. Obecně nelze nalézt replikační investiční strategii. Existuje více ekvivalentních martingalových měr a jsme postaveni před problém, kterou z nich pro oceňování vybrat.

1.3 Binomický model

Binomický model (BM) oceňování opcí publikovali v roce 1979 Cox, Ross a Rubinstein [5] a Rendleman a Bartter [17]. Vedle označení se autoři liší volbou parametrů. V našem textu představíme základní teze modelu, jež budeme v dalších kapitolách rozpracovávat. Podrobněji se binomickým modelem zabývají Dupačová, Hurt a Štěpán [7], Hull [11] či Shreve [19].

Uvažujme trh $\mathcal{M}$ zavedený v předchozí části, tj. pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, kde prostor elementárních jevů Ω je množina všech n-prvkových variací s opakováním ze dvou prvků a $\mathcal{A}$ systém všech podmnožin Ω, proces hodnoty bankovní operace (1.2), proces ceny akcie (1.3) a přirozenou filtraci $\mathcal{F}$ procesu $\mathcal{S}$. BM předpokládá, že se cena akcie S na trhu $\mathcal{M}$ během jednoho subobdobí změní na právě jednu ze dvou možných hodnot:

$$S_{t+1} = \nu_{t+1} S_t, \quad t = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1.6}$$

kde

(i) S_0 je daná výchozí (současná) cena akcie;

(ii) $\{\nu_t, t = 1, \ldots, n\}$ je n-tice nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením

$$\mathbb{P}(\nu_1 = u) = p \quad \text{a} \quad \mathbb{P}(\nu_1 = d) = 1 - p, \quad 0 < d < u,\ 0 < p < 1.$$

Tvrzení 1.3.1. *Jestliže je na trhu $\mathcal{M}$ vyloučena arbitráž, pak*

$$d < 1 + r_f < u. \tag{1.7}$$

Důkaz. Pro spor s první nerovností předpokládejme, že $d \geq 1 + r_f$. Při libovolném $K_{n-1} > 0$ uvažujme investiční strategii $\phi = (\Delta, B)$, kde $\Delta = (0, \ldots, 0, K_{n-1}/S_{n-1})$ a $B = (0, \ldots, 0, -K_{n-1})$, tj. v čase $n-1$ si vypůjčíme K_{n-1}, získanou částku okamžitě investujeme do nákupu K_{n-1}/S_{n-1} akcií.

Hodnota investičního portfolia v čase 0 jakož i v čase $n-1$ je zřejmě nulová a nepotřebujeme tedy žádný počáteční kapitál. Pro hodnotu portfolia v čase n platí

$$X_n(\phi) = \frac{K_{n-1}}{S_{n-1}} S_n - K_{n-1}(1+r_f) = \frac{K_{n-1}}{S_{n-1}} \nu_n S_{n-1} - K_{n-1}(1+r_f) = K_{n-1}[\nu_n - (1+r_f)].$$

Jelikož $u > d$ a $d \geq 1 + r_f$, a tím pádem $u > 1 + r_f$, dostáváme vzhledem k

$$\mathbb{P}(X_n(\phi) \geq 0) = \mathbb{P}(\nu_n \geq 1 + r_f) \geq \mathbb{P}(d \geq 1 + r_f) = 1 \quad \text{a}$$

$$\mathbb{P}(X_n(\phi) > 0) = \mathbb{P}(\nu_n > 1 + r_f) \geq \mathbb{P}(\nu_n = u) = p > 0$$

spor s předpokladem vyloučení arbitráže, neboť investiční strategií ϕ realizujeme s nulovou pravděpodobností ztrátu a s nenulovou pravděpodobností zisk.

Pro spor s druhou nerovností předpokládejme $u \leq 1 + r_f$. Ukážeme, že strategie získaná záměnou pozic ve ϕ (tj. pozici v akciích změníme z dlouhé na krátkou a pozici v bankovní operaci z krátké na dlouhou), poskytuje prostor k arbitrážnímu zisku. Nechť $\psi = (\Delta, B)$, kde $\Delta = (0, \ldots, 0, -K_{n-1}/S_{n-1})$ a $B = (0, \ldots, 0, K_{n-1})$. Vzhledem k tomu, že $u > d$ a $1 + r_f \geq u$, a tím i $1 + r_f > d$, platí

$$X_0(\psi) = X_{n-1}(\psi) = 0, \quad X_n(\psi) = K_{n-1}[1 + r_f - \nu_n],$$

$$\mathbb{P}(X_n(\psi) \geq 0) = \mathbb{P}(1 + r_f \geq \nu_n) \geq \mathbb{P}(1 + r_f \geq u) = 1 \quad \text{a}$$
$$\mathbb{P}(X_n(\psi) > 0) = \mathbb{P}(1 + r_f > \nu_n) \geq \mathbb{P}(\nu_n = d) = 1 - p > 0.$$

□

Poznámka. Za platnosti (1.7) budeme výskyt stavu dS_t na konci $(t+1)$-ního subobdobí nazývat poklesem ceny akcie vůči jeho počátku[14] a výskyt stavu uS_t růstem ceny akcie.

Naším cílem je nalézt na trhu $\mathcal{M}$ oceňovací formuli pro opci na akcii S s realizační cenou K a se splatností v čase T, tedy na konci n-tého období. Situaci si zjednodušíme tím, že se budeme zabývat pouze evropskou call opcí na akcii nevyplácející dividendu.[15] Její výplatní funkce má v době splatnosti tvar

$$V_n = (S_n - K)^+. \tag{1.8}$$

Nechť nejprve $n = 1$ (jednoperiodický binomický model). Elementární jevy $\omega \in \Omega$ označme H a O. Podle (1.6) dojde na konci období s pravděpodobností p k realizaci

[14]Nemusí se ovšem jednat o skutečný pokles ceny akcie v $(t+1)$-ním subobdobí, poněvadž při $d > 1$ je $dS_t > S_t$. O poklesu hovoříme proto, že depozitum by přineslo větší výnos a investorovo bohatství je tak nižší než v případě realizace bezrizikové bankovní operace.

[15]Cenu evropské put opce na akcii nevyplácející dividendu dokážeme určit z put-call parity. Ze subkapitoly o mezích opčních prémii dále víme, že cena americké call opce na akcii nevyplácející dividendu se shoduje s cenou evropské call opce.

$S_1(H) = uS_0$ a s pravděpodobností $1-p$ k realizaci $S_1(O) = dS_0$. Pravděpodobnostní míru $\mathbb{P}$ na $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{H\}, \{O\}, \{H,O\}\}$ tak definujeme rovnostmi[16]

$$\mathbb{P}(H) = p \quad \text{a} \quad \mathbb{P}(O) = 1-p.^{17}$$

Informace v čase 0 jsou známy, tj. je dána σ-algebra $\mathcal{F}_0$ a cena akcie S_0. Pro opci nalezneme replikační investiční strategii $\phi = (\Delta, B)$, kde $\Delta = (\Delta_0), B = (B_0)$. Podle definice 1.2.5 požadujeme, aby se hodnota replikačního portfolia v čase 1 rovnala výplatě z opce, tj. dle (1.4) a (1.8), aby

$$\Delta_0 S_1(\omega) + B_0(1+r_f) = (S_1(\omega) - K)^+, \quad \omega \in \Omega = \{H, O\}. \tag{1.9}$$

Vyřešením soustavy (1.9) pro neznámé Δ_0 a B_0 dostaneme

$$\Delta_0 = \frac{(uS_0 - K)^+ - (dS_0 - K)^+}{(u-d)\,S_0} \quad \text{a} \quad B_0 = \frac{1}{1+r_f} \cdot \frac{u\,(dS_0-K)^+ - d\,(uS_0-K)^+}{u-d}\,.$$

Hodnota replikačního portfolia ϕ ve výchozím čase 0 je dle definice 1.2.2 dána vztahem

$$X_0(\phi) = \frac{(uS_0 - K)^+ - (dS_0 - K)^+}{(u-d)\,S_0} \cdot S_0 + \frac{1}{1+r_f} \cdot \frac{u\,(dS_0-K)^+ - d\,(uS_0-K)^+}{u-d}.$$

Arbitrážní cena evropské call opce c_0 se rovná hodnotě replikačního portfolia:

$$c_0 = \frac{1}{1+r_f}\left[\frac{(1+r_f)-d}{u-d} \cdot (uS_0-K)^+ + \frac{u-(1+r_f)}{u-d} \cdot (dS_0-K)^+\right]. \tag{1.10}$$

Pro zjednodušení zavádíme substituci

$$q = \frac{1+r_f-d}{u-d} \quad \text{a} \quad 1-q = \frac{u-1-r_f}{u-d}.$$

Ukažme, že jsme tím zároveň zkonstruovali martingalovou míru $\mathbb{Q}$ ekvivalentní $\mathbb{P}$. Nechť $\mathbb{Q}(H) = q$ a $\mathbb{Q}(O) = 1-q$:[18]

- q i $1-q$ leží dle tvrzení 1.3.1 v intervalu $(0,1)$;
- $q + 1 - q = 1$;
- $\mathbb{P}$ a $\mathbb{Q}$ jsou ekvivalentní;

[16]Pro zkrácení zápisu vypouštíme množinové závorky, tj. píšeme $\mathbb{P}(H)$ namísto formálně správného $\mathbb{P}(\{H\})$.

[17]Můžeme si představit náhodný pokus házení mincí, při němž s pravděpodobností p padne hlava a s pravděpodobností $1-p$ orel. Podle výsledku hodu mincí pak dojde buď k růstu, nebo k poklesu ceny akcie.

[18]A samozřejmě jako u každé pravděpodobnostní míry $\mathbb{Q}(\emptyset) = 0$ a $\mathbb{Q}(H,O) = 1$.

- proces diskontované ceny akcie je $\mathbb{Q}$-martingal, neboť vzhledem k $\mathcal{F}_0$-měřitelnosti S_0 a základním vlastnostem podmíněné střední hodnoty platí

$$\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\frac{1}{1+r_f}\, S_1 \,|\, \mathcal{F}_0\Big] = \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\frac{1}{1+r_f}\, \nu_1 S_0 \,|\, \mathcal{F}_0\Big] = \frac{S_0}{1+r_f}\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[\nu_1] =$$

$$= \frac{S_0}{1+r_f}\Big[\frac{(1+r_f)-d}{u-d}\, u + \frac{u-(1+r_f)}{u-d}\, d\Big] = \frac{S_0}{1+r_f}\cdot\frac{(u-d)(1+r_f)}{u-d} = S_0.$$

Tvrzení 1.3.2. *Jednoperiodický binomický model*[19] *je úplný.*

Důkaz. Nechť je v BM dána náhodná výplata Y_1 v čase 1, tj. nezáporná $\mathcal{F}_1$-měřitelná náhodná veličina. Definujme

$$Z_t = (1+r_f)^t\, \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[(1+r_f)^{-1}\, Y_1 \,|\, \mathcal{F}_t], \quad t = 0, 1.$$

Zřejmě $Z_1 = Y_1$. Volme

$$\Delta_0 = \frac{Z_1(H) - Z_1(O)}{(u-d)S_0} \quad \text{a} \quad B_0 = Z_0 - \Delta_0 S_0.$$

Hodnota investičního portfolia strategie $\phi = (\Delta, B)$, kde $\Delta = (\Delta_0)$, $B = (B_0)$, je v čase 0 zřejmě rovna Z_0. V čase 1 pro ni pak platí, že

$$X_1(\phi) = \Delta_0 S_1 + (Z_0 - \Delta_0 S_0)(1+r_f) = \Delta_0[\nu_1 S_0 - (1+r_f)S_0)] + \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[Y_1 \,|\, \mathcal{F}_0] =$$

$$= \frac{Z_1(H) - Z_1(O)}{u-d}\,(\nu_1 - 1 - r_f) + [qZ_1(H) + (1-q)Z_1(O)].$$

(i) Pro $\omega = H$ dostáváme

$$X_1(\phi)(H) = \frac{Z_1(H) - Z_1(O)}{u-d}\,(u - 1 - r_f) + \frac{1 + r_f - d}{u-d}\, Z_1(H) +$$

$$+ \frac{u - 1 - r_f}{u-d}\, Z_1(O) = Z_1(H).$$

(ii) Pro $\omega = O$ obdobným způsobem získáme $X_1(\phi)(O) = Z_1(O)$.

V jednoperiodickém modelu je ϕ jistě samosefinancující strategii. Konečně jelikož

$$X_1 = Z_1 = (1+r_f)^1\, \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[(1+r_f)^{-1}\, Y_1 \,|\, \mathcal{F}_1] = Y_1,$$

je ϕ replikační investiční strategie instrumentu s výplatou Y_1.

□

[19] Přesněji trh modelovaný jednoperiodickým BM je úplný.

Ekvivalentní martingalovou míru $\mathbb{Q}$, která je dle předchozího tvrzení a druhé základní věty oceňování aktiv jednoznačná, nazýváme rizikově neutrální pravděpodobnostní mírou.[20]

S přihlédnutím ke tvaru výplatní funkce (1.8) oceníme opci na úplném trhu podle věty 1.2.9 diskontovanou hodnotou očekávaných budoucích peněžních při rizikově neutrální pravděpodobnostní míře:

$$c_0 = \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\frac{1}{(1+r_f)} V_1 \,|\, \mathcal{F}_0\Big] = \frac{1}{1+r_f} \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[(S_1 - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_0] =$$

$$= \frac{1}{1+r_f}[q\,(uS_0 - K)^+ + (1-q)(dS_0 - K)^+]. \tag{1.11}$$

Pro úplnost dodejme, že cena opce stanovená na základě ekvivalentní martingalové míry odpovídá hodnotě replikačního portfolia, viz vztahy (1.11) a (1.10).

Uvažujme dále obecné $n > 1$ (n-periodický binomický model). Prostor elementárních jevů Ω pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ zavedeme jako množinu

$$\Omega = \Big\{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n);\, \omega_t \in \{H, O\},\, t = 1, \dots, n\Big\}. \tag{1.12}$$

Jelikož podle (1.6) dojde na konci t-tého subobdobí s pravděpodobností p k realizaci uS_{t-1} a s pravděpodobností $1-p$ k realizaci dS_{t-1} a růsty a poklesy ceny akcie v jednotlivých subobdobích jsou vzájemně nezávislé, definujeme pravděpodobnostní míru $\mathbb{P}$ na $\mathcal{A} = \{A,\, A \subset \Omega\}$ na elementárních jevech rovnostmi

$$\mathbb{P}(\omega) = \prod_{t=1}^{n} \mathbb{P}(\omega_t), \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega,$$

kde

$$\mathbb{P}(\omega_t = H) = p \quad \text{a} \quad \mathbb{P}(\omega_t = O) = 1 - p, \quad t = 1, \dots, n.$$[21]

Na základě konstrukce ekvivalentní martingalové míry v jednoperiodickém modelu a souvislosti pravděpodobnostních měr $\mathbb{P}$ v jednoperiodickém a n-periodickém modelu zaveďme pravděpodobnostní míru $\mathbb{Q}$ na $\mathcal{A}$ na elementárních jevech rovnostmi

$$\mathbb{Q}(\omega) = \prod_{t=1}^{n} \mathbb{Q}(\omega_t), \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega,$$

kde

$$\mathbb{Q}(\omega_t = H) = q = \frac{1 + r_f - d}{u - d} \quad \text{a} \quad \mathbb{Q}(\omega_t = O) = 1 - q = \frac{u - 1 - r_f}{u - d}, \quad t = 1, \dots, n.$$

[20] O rizikové neutralitě hovoříme z toho důvodu, že se v ceně opce neodráží subjektivní rizikové preference investora (skutečné pravděpodobnosti růstu či poklesu ceny akcie p a $1-p$ se promítají přímo do ceny akcie). Bez újmy na obecnosti tak lze vycházet z libovolných preferencí, tedy i z neutrality vůči riziku. V rizikově neutrálním světě investoři nepožadují rizikovou prémii a při vyloučení arbitráže tak aktiva realizují výnosy na úrovni bezrizikové úrokové sazby r_f.

[21] Můžeme si představit n na sobě nezávislých hodů mincí, při nichž s pravděpodobností p padne hlava a s pravděpodobností $1-p$ orel. Podle výsledku jednotlivých hodů pak dojde buď k růstu, nebo k poklesu ceny akcie v daném subobdobí.

Poznámka 1.3.3. Je-li $j \in \{0, \dots, n\}$ počet indexů, při nichž $\omega_t = H$ (neboli počet subobdobí, v nichž dojde k růstu ceny akcie), pak

$$\mathbb{Q}(\omega) = q^j (1-q)^{n-j}.$$

Nezáleží tedy na pořadí růstů a poklesů ceny akcie v jednotlivých subobdobích, nýbrž na jejich počtu.

Ukažme, že $\mathbb{Q}$ je martingalová míra ekvivalentní s $\mathbb{P}$:

- jelikož q i $1-q$ leží dle tvrzení 1.3.1 v intervalu $(0,1)$, leží v intervalu $(0,1)$ rovněž $q^j(1-q)^{n-j}$, $j = 0, \dots, n$;
- $\sum\limits_{j=0}^{n} q^j (1-q)^{n-j} = (q + 1 - q)^n = 1$ podle binomické věty;
- $\mathbb{P}$ a $\mathbb{Q}$ jsou ekvivalentní (nulová míra je přiřazena u obou výhradně prázdné množině);
- martingalovou vlastnost dokazuje následující tvrzení.

Tvrzení 1.3.4. *Proces diskontované ceny akcie je $\mathbb{Q}$-martingal.*

Důkaz. Podle tvrzení A.9 stačí ověřit, že

$$\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\frac{1}{(1+r_f)^{t+1}}\, S_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t\Big] = \frac{1}{(1+r_f)^t}\, S_t, \quad t = 0, \dots, n-1.$$

Volme libovolné $t \in \{0, \dots, n-1\}$. Vystačíme si se základními vlastnostmi podmíněné střední hodnoty a $\mathcal{F}_t$-měřitelností S_t:

$$\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\frac{1}{(1+r_f)^{t+1}}\, S_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t\Big] = \frac{1}{(1+r_f)^{t+1}}\, \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\nu_{t+1} S_t \,|\, \mathcal{F}_t\Big] = \frac{S_t}{(1+r_f)^{t+1}}\, \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[\nu_{t+1}] =$$
$$= \frac{S_t}{(1+r_f)^{t+1}} \cdot \Big(\frac{1+r_f-d}{u-d}\, u + \frac{u-1-r_f}{u-d}\, d\Big) = \frac{S_t}{(1+r_f)^{t+1}} \cdot (1+r_f) = \frac{S_t}{(1+r_f)^t}\ .$$

□

Tvrzení 1.3.5. *Binomický model je úplný.*

Důkaz. Nechť je v binomickém modelu dána náhodná výplata Y_n v čase n, tj. nezáporná $\mathcal{F}_n$-měřitelná náhodná veličina. Definujme

$$Z_t = (1+r_f)^t\, \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[(1+r_f)^{-n}\, Y_n \,|\, \mathcal{F}_t], \quad t = 0, 1, \dots, n.$$

Pro $t = 0, 1, \dots, n-1$ položme

$$\Delta_t = \frac{Z_{t+1}(\omega_1, \dots, \omega_t, H) - Z_{t+1}(\omega_1, \dots, \omega_t, O)}{(u-d) S_t} \quad \text{a} \quad B_t = Z_t - \Delta_t S_t.$$

Hodnota investičního portfolia $X_t(\phi)$ strategie $\phi = (\Delta, B)$, kde $\Delta = (\Delta_0, \dots, \Delta_{n-1})$ a $B = (B_0, \dots, B_{n-1})$, je v čase $t < n$ zřejmě rovna Z_t. Hodnota investičního portfolia v čase n je dána vztahem

$$X_n(\phi) = \Delta_{n-1} S_n + B_{n-1}\,(1 + r_f).$$

Dále ukážeme, že ϕ je samosefinancující. Nechť $t \in \{0, \dots, n-1\}$. Pro zkrácení zápisu označme $W \equiv \omega_1, \dots, \omega_t$. Nejprve podle základních vlastností podmíněné střední hodnoty postupně upravujme

$$(1 + r_f)^{t+1}\,\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[(1 + r_f)^{-n}\,Y_n \,|\, \mathcal{F}_t] = (1 + r_f)^{t+1}\,\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[(1 + r_f)^{-n}\,Y_n \,|\, \mathcal{F}_t] \,|\, \mathcal{F}_{t+1}\Big] =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}\Big[(1 + r_f)^{t+1}\,\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[(1 + r_f)^{-n}\,Y_n \,|\, \mathcal{F}_{t+1}] \,|\, \mathcal{F}_t\Big] = \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[Z_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = \\
&= \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{\{\omega;\,\omega_{t+1}=H\}}(\omega)\,Z_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] + \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{\omega;\,\{\omega_{t+1}=O\}}(\omega)\,Z_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = \\
&= Z_{t+1}(W, H)\,\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{\{\omega;\,\omega_{t+1}=H\}} \,|\, \mathcal{F}_t] + Z_{t+1}(W, O)\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}\,[\mathbb{I}_{\{\omega;\,\omega_{t+1}=O\}} \,|\, \mathcal{F}_t] = \\
&= \mathbb{Q}(\omega_{t+1} = H) \cdot Z_{t+1}(W, H) + \mathbb{Q}(\omega_{t+1} = O) \cdot Z_{t+1}(W, O) = \\
&= q Z_{t+1}(W, H) + (1 - q) Z_{t+1}(W, O).
\end{aligned}$$

Ověříme podmínku (1.5) z definice samosefinancující strategie:

$$\begin{aligned}
&\Delta_t S_{t+1} + B_t(1 + r_f) = \Delta_t S_{t+1} + (Z_t - \Delta_t S_t)(1 + r_f) = \\
&= \Delta_t[\nu_{t+1} S_t - (1 + r_f) S_t)] + (1 + r_f)^{t+1}\,\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[(1 + r_f)^{-n}\,Y_n \,|\, \mathcal{F}_t] = \\
&= \frac{Z_{t+1}(W, H) - Z_{t+1}(W, O)}{(u - d) S_t}\,[\nu_{t+1} S_t - (1 + r_f) S_t)] + \\
&+ q Z_{t+1}(W, H) + (1 - q) Z_{t+1}(W, O) = (*).
\end{aligned}$$

(i) Pro $\omega_{t+1} = H$ dostáváme

$$\begin{aligned}
(*) \;&=\; \frac{Z_{t+1}(W, H) - Z_{t+1}(W, O)}{u - d}\,(u - 1 - r_f) + \frac{1 + r_f - d}{u - d}\,Z_{t+1}(W, H) + \\
&+\; \frac{u - 1 - r_f}{u - d}\,Z_{t+1}(W, O) = Z_{t+1}(W, H).
\end{aligned}$$

(ii) Pro $\omega_{t+1} = O$ obdobným způsobem získáme $(*) = Z_{t+1}(W, O)$.

Pro $t \in \{0, \dots, n-1\}$ tudíž platí, že $\Delta_t S_{t+1} + B_t(1 + r_f) = Z_{t+1}$. Poněvadž $X_\tau = Z_\tau$ pro $\tau < n$ (viz výše) a $X_n = \Delta_{n-1} S_n + B_{n-1}\,(1 + r_f)$ přímo podle definice hodnoty investičního portfolia, je ϕ samosefinancující strategie. Navíc jelikož

$$X_n = \Delta_{n-1} S_n + B_{n-1}\,(1 + r_f) = Z_n = (1 + r_f)^n\,\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[(1 + r_f)^{-n}\,Y_n \,|\, \mathcal{F}_n] = Y_n,$$

je ϕ replikační investiční strategie instrumentu s výplatou Y_n a binomický model je úplný. $\square$

Závěry binomického modelu shrnuje následující věta.

Věta 1.3.6. *Nechť je dán trh $\mathcal{M}$ a $n \in \mathbb{N}$. V n-periodickém binomickém modelu je arbitrážní cena evvropské call opce na akcii S (nevyplácející dividendu) s realizační cenou K, dobou splatnosti T (ekvivalentně na konci n-tého subobdobí) a výplatní funkcí V_n dána vztahem*

$$c_t = \frac{1}{(1+r_f)^{n-t}} \, \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[V_n \mid \mathcal{F}_t], \quad t = 0, \ldots, n. \tag{1.13}$$

Podrobněji

$$c_t = \frac{1}{(1+r_f)^{n-t}} \cdot \sum_{j=0}^{n-t} \binom{n-t}{j} q^j (1-q)^{n-t-j} \cdot (u^j d^{n-t-j} S_t - K)^+. \tag{1.14}$$

Nechť navíc l je nejmenší přirozené číslo, pro které $u^j d^{n-t-l} S_t > K$. Pak platí tzv. binomická Black-Scholesova formule

$$c_t = S_t \sum_{j=l}^{n-t} \binom{n-t}{j} \widetilde{q}^j (1-\widetilde{q})^{n-t-j} - \frac{K}{(1+r_f)^{n-t}} \sum_{j=l}^{n-t} \binom{n-t}{j} q^j (1-q)^{n-t-j}, \tag{1.15}$$

kde

$$\widetilde{q} = \frac{u}{1+r_f} \, q \quad \text{a} \quad 1 - \widetilde{q} = \frac{d}{1+r_f} \, (1-q).$$

Důkaz. S přihlédnutím k tomu, že $\mathcal{M}$ je úplný a $\mathbb{Q}$ je (jediná) ekvivalentní martingalová míra, je vztah (1.13) přímou aplikací věty 1.2.9.

Pro odvození (1.14) pro $t \in \{0, 1, \ldots, n\}$ pišme

$$c_t = \frac{1}{(1+r_f)^{n-t}} \, \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[V_n \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{(1+r_f)^{n-t}} \, \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\sum_{j=0}^{n-t} \mathbb{I}_{\{\omega;\, \#\{\omega_i = H;\, i=t+1,\ldots,n\} = j\}}(\omega) \cdot V_n \mid \mathcal{F}_t \Big]$$

$$= \frac{1}{(1+r_f)^{n-t}} \sum_{j=0}^{n-t} (u^j d^{n-t-j} S_t - K)^+ \cdot \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{\{\omega;\, \#\{\omega_i = H;\, i=t+1,\ldots,n\} = j\}}(\omega) \mid \mathcal{F}_t] =$$

$$= \frac{1}{(1+r_f)^{n-t}} \sum_{j=0}^{n-t} (u^j d^{n-t-j} S_t - K)^+ \cdot \mathbb{Q}\Big(\Big\{\omega;\, \#\{\omega_i = H;\, i = t+1, \ldots, n\} = j\Big\}\Big)\Big].$$

K získání vztahu (1.14) si pak stačí uvědomit, že

$$\mathbb{Q}\Big(\Big\{\omega;\, \#\{\omega_i = H;\, i = t+1, \ldots, n\} = j\Big\}\Big) = \binom{n-t}{j} q^j (1-q)^{n-t-j}.$$

Pro dokončení důkazu nechť l je nejmenší přirozené číslo, pro které $u^j d^{n-t-l} S_t > K$, neboli l je nejmenší počet růstů ceny akcie v jednotlivých subobdobích, pro nějž je opce v okamžiku své splatnosti v penězích. V (1.14) jsou sčítance pro $j \leq l$ nulové a vztah (1.14) vyjádříme ve tvaru

$$\sum_{j=l}^{n-t} \Big[\binom{n-t}{j} \Big(\frac{uq}{1+r_f}\Big)^j \Big(\frac{d(1-q)}{1+r_f}\Big)^{n-t-j} S_t \Big] - \frac{K}{(1+r_f)^{n-t}} \sum_{j=l}^{n-t} \binom{n-t}{j} q^j (1-q)^{n-t-j} \; .$$

$\square$

Poznámka. Při vhodné volbě parametrů[22] konverguje s rostoucím n binomická oceňovací formule k Black-Scholesovu vzorci (F. Black a M. Scholes [1]). Vzhledem ke stejnému charakteru vyjádření bývá vztah (1.15) označován jako binomická Black-Scholesova formule.

[22] Podrobněji viz Cox, Ross a Rubinstein [5].

Kapitola 2

Zobecnění binomického modelu

Následující kapitola se zabývá zobecněním binomického modelu na základě myšlenek, které publikovala N. Kan v roce 2005 [13]. Přejímáme originální označení, ale při konstrukci modelu aplikujeme poznatky, s nimiž jsme se seznámili v předchozí kapitole. Opět předpokládáme, že oceňujeme evropskou call opci na akcii nevyplácející dividendu.

2.1 Zobecněný binomický model

Nechť je dán trh $\mathcal{M}$, tj. pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, proces hodnoty bankovní operace (1.2), proces ceny akcie (1.3) a přirozená filtrace $\mathcal{F}$ procesu $\mathcal{S}$. Zobecněný binomický model (GBM) předpokládá, že se cena akcie S na trhu $\mathcal{M}$ během jednoho subobdobí změní na právě jednu ze dvou možných hodnot:

$$S_{t+1} = \xi_{t+1} S_t, \quad t = 0, 1, \ldots, n-1,$$

kde

(i) S_0 je daná výchozí (současná) cena akcie;

(ii) $\xi_t = \nu_t A_t,\ t = 1, \ldots, n$;

(iii) $\{A_t,\, t = 1, \ldots, n\}$ je n-tice daných kladných konstant;

(iv) $\{\nu_t,\, t = 1, \ldots, n\}$ je n-tice nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením

$$\mathbb{P}(\nu_1 = u) = p \quad \text{a} \quad \mathbb{P}(\nu_1 = d) = 1 - p, \quad 0 < d < u,\ 0 < p < 1.$$

Zatímco v BM je cena akcie určena realizacemi ν_t, v GBM navíc závisí na konstantách A_t.[1]

[1] Problematickým bodem se jeví býti skutečnost, že míru změny ceny akcie za jedno subobdobí přenásobujeme bez ohledu na směr jejího pohybu (tj. pokles či růst) touž hodnotou A_t.

Označení. Dále budeme používat označení

$$\xi_t^u = uA_t \quad \text{a} \quad \xi_t^d = dA_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

Nutnou podmínku pro vyloučení arbitráže formulujeme následujícím způsobem.

Tvrzení 2.1.1. *Jestliže je na trhu $\mathcal{M}$ vyloučena arbitráž, pak*

$$\xi_t^d < 1 + r_f < \xi_t^u, \quad t = 1, \dots, n. \tag{2.1}$$

Důkaz. Viz tvrzení 1.3.1 s přihlédnutím k tomu, že místo ν_n resp. u resp. d píšeme ξ_n resp. ξ_n^u resp. ξ_n^d a že bez újmy na obecnosti předpokládáme, že podmínka (2.1) je porušena v n-tém subobdobí – pokud by byla porušena v t-tém subobdobí, $t < n$, realizovali bychom v důkazu tvrzení 1.3.1 popsanou strategii nákupu (prodeje) akcií na počátku t-tého subobdobí a jejich prodeje (nákupu) na jeho konci a případný zisk bychom posléze bezrizikově vložili (a tím jistě neztratili) do bankovní operace. □

Opční oceňovací formuli odvodíme totožným způsobem jako v binomickém modelu. V t-tém subobdobí místo ν_t resp. u resp. d píšeme ξ_t resp. ξ_t^u resp. ξ_t^d.

Pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ zavádíme nezměněným způsobem pomocí (1.12) a (1.3). Definici pravděpodobnostní míry $\mathbb{Q}$ na $\mathcal{A}$ poupravíme do podoby

$$\mathbb{Q}(\omega) = \prod_{t=1}^{n} \mathbb{Q}(\omega_t), \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega,$$

kde

$$\mathbb{Q}(\omega_t = H) = q_t = \frac{1 + r_f - \xi_t^d}{\xi_t^u - \xi_t^d} \quad \text{a} \quad \mathbb{Q}(\omega_t = O) = 1 - q_t = \frac{\xi_t^u - 1 - r_f}{\xi_t^u - \xi_t^d}, \quad t = 1, \dots, n.$$

Označení. Pro $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ a $m \leq n$ označme

$$\Gamma_m^n = \{m, m+1, \dots, n\}.$$

Dále nechť $J \subset \Gamma_m^n$. Skutečnost, že $t \in \Gamma_m^n \setminus J$, budeme zapisovat jako $t \notin J$.

Lemma 2.1.2. *Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\sum_{J \subset \Gamma_1^n} \Big(\prod_{t \in J} q_t \prod_{t \notin J} (1 - q_t) \Big) = 1. \tag{2.2}$$

Poznámka. Součin přes prázdnou množinu definujeme rovný 1.

Důkaz. Vztah (2.2) dokážeme indukcí přes n. Součet na levé straně v závislosti na n označme LS_n. Nechť $n = 1$. Pak

$$LS_1 = q_1 \cdot 1 + 1 \cdot (1 - q_1) = 1.$$

Předpokládejme, že (2.2) platí pro $n \geq 1$ a ukažme, že (2.2) platí i pro $n+1$:

$$LS_{n+1} = \sum_{\substack{J \subset \Gamma_1^{n+1}, \\ n+1 \in J}} \Big(\prod_{t \in J} q_t \prod_{t \notin J} (1-q_t) \Big) + \sum_{\substack{J \subset \Gamma_1^{n+1}, \\ n+1 \notin J}} \Big(\prod_{t \in J} q_t \prod_{t \notin J} (1-q_t) \Big) =$$

$$= \sum_{\substack{J \subset \Gamma_1^{n+1}, \\ n+1 \in J}} \Big(q_{n+1} \prod_{\substack{t \in J, \\ t \neq n+1}} q_t \prod_{t \notin J} (1-q_t) \Big) + \sum_{\substack{J \subset \Gamma_1^{n+1}, \\ n+1 \notin J}} \Big((1-q_{n+1}) \prod_{t \in J} q_t \prod_{\substack{t \notin J, \\ t \neq n+1}} (1-q_t) \Big) =$$

$$= q_{n+1} \sum_{J \subset \Gamma_1^n} \Big(\prod_{t \in J} q_t \prod_{t \notin J} (1-q_t) \Big) + (1-q_{n+1}) \sum_{J \subset \Gamma_1^n} \Big(\prod_{t \in J} q_t \prod_{t \notin J} (1-q_t) \Big) =$$

$$= q_{n+1} \cdot LS_n + (1-q_{n+1}) \cdot LS_n = 1.$$

□

V dalším kroku ověříme, že $\mathbb{Q}$ je martingalová míra ekvivalentní s $\mathbb{P}$:

- nechť J je libovolná podmnožina Γ_1^n; jelikož dle tvrzení 2.1.1 leží q_t i $1-q_t$, $t = 1, \ldots, n$, v intervalu $(0,1)$, leží v intervalu $(0,1)$ rovněž $\prod_{t \in J} q_t \prod_{t \notin J} (1-q_t)$;
- $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{Q}(\omega) = \sum_{J \subset \Gamma_1^n} \Big(\prod_{t \in J} q_t \prod_{t \notin J} (1-q_t) \Big) = 1$ dle předchozího lemmatu;
- $\mathbb{P}$ a $\mathbb{Q}$ jsou ekvivalentní;
- proces diskontované ceny akcie je $\mathbb{Q}$-martingal, neboť vzhledem k $\mathcal{F}_t$-měřitelnosti S_t, $t = 0, 1, \ldots, n-1$, a vlastnostem podmíněné střední hodnoty platí

$$\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\frac{1}{(1+r_f)^{t+1}} S_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t \Big] = \frac{S_t}{(1+r_f)^{t+1}} \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[\xi_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] =$$

$$= \frac{S_t}{(1+r_f)^{t+1}} \cdot \Big(\frac{1+r_f-\xi_t^d}{\xi_t^u - \xi_t^d} \cdot \xi_t^u + \frac{\xi_t^u - 1 - r_f}{\xi_t^u - \xi_t^d} \cdot \xi_t^d \Big) = \frac{S_t}{(1+r_f)^{t+1}} \cdot (1+r_f).$$

Tvrzení 2.1.3. *Zobecněný binomický model je úplný.*

Důkaz. Viz tvrzení 1.3.5 o úplnosti binomického modelu s přihlédnutím k tomu, že místo ν_{t+1} resp. u resp. d resp. q píšeme ξ_{t+1} resp. ξ_{t+1}^u resp. ξ_{t+1}^d resp. q_{t+1}. □

Označení. Připomeňme, že

$$q_t = \frac{1+r_f-\xi_t^d}{\xi_t^u - \xi_t^d}, \quad t = 1, \ldots, n.$$

Označme

$$\widetilde{q}_t = \frac{\xi_t^u}{1+r_f} q_t, \quad t = 1, \ldots, n.$$

Pro $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ a $J \subset \Gamma_m^n$ dále

$$P(J,n) = \prod_{t \in J} q_t \prod_{t \notin J} (1 - q_t),$$

$$\widetilde{P}(J,n) = \prod_{t \in J} \widetilde{q}_t \prod_{t \notin J} (1 - \widetilde{q}_t).$$

Konečně pro $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, $j \in \Gamma_0^{n-m+1}$ a $x \in \mathbb{R}^+$

$$I_{j,m}^n(x) = \Big\{ J \subset \Gamma_m^n, |J| = j;\ x \prod_{t \in J} \xi_t^u \prod_{t \notin J} \xi_t^d > K \Big\}.$$

Věta 2.1.4 (GBM-oceňovací formule). *Nechť je dán trh $\mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$. V n-periodickém zobecněném binomickém modelu je arbitrážní cena evropské call opce na akcii S (nevyplácející dividendu) s realizační cenou K, dobou splatnosti T (ekvivalentně na konci n-tého subobdobí) a výplatní funkcí V_n dána vztahem*

$$c_t = \frac{1}{(1 + r_f)^{n-t}} \operatorname{E}_{\mathbb{Q}}[V_n \,|\, \mathcal{F}_t], \quad t = 0, \ldots, n-1. \tag{2.3}$$

Podrobněji

$$c_t = \frac{1}{(1 + r_f)^{n-t}} \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{\substack{J \subset \Gamma_{t+1}^n, \\ |J| = j}} P(J,n) \cdot \Big(S_t \prod_{i \in J} \xi_i^u \prod_{i \notin J} \xi_i^d - K \Big)^+, \tag{2.4}$$

kde

$$\Gamma_{t+1}^n = \{t+1, \ldots, n\} \quad a \quad P(J,n) = \prod_{i \in J} q_i \prod_{i \notin J} (1 - q_i) \quad pro\ J \subset \Gamma_{t+1}^n.$$

Analogie binomické Black-Scholesova formule má vyjádření

$$c_t = S_t \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{J \in I_{j,t+1}^n(S_t)} \widetilde{P}(J,n) - \frac{K}{(1 + r_f)^{n-t}} \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{J \in I_{j,t+1}^n(S_t)} P(J,n), \tag{2.5}$$

kde

$$\widetilde{q}_i = \frac{\xi_i^u}{1 + r_f} q_i, \quad 1 - \widetilde{q}_i = \frac{\xi_i^d}{1 + r_f} (1 - q_i), \quad \widetilde{P}(J,n) = \prod_{i \in J} \widetilde{q}_i \prod_{i \notin J} (1 - \widetilde{q}_i) \quad a$$

$$I_{j,t+1}^n(S_t) = \Big\{ J \subset \Gamma_{t+1}^n, |J| = j;\ S_t \prod_{i \in J} \xi_i^u \prod_{i \notin J} \xi_i^d > K \Big\}.$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme obdobným způsobem jako v binomickém modelu (věta 1.3.6). S přihlédnutím k tomu, že $\mathcal{M}$ je úplný a $\mathbb{Q}$ je (jediná) ekvivalentní martingalová míra, je vztah (2.3) přímou aplikací věty 1.2.9.

Pro odvození (2.4) pro $t \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ postupně upravujme

$$\mathrm{E}_{\mathbb{Q}}[V_n \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\sum_{j=0}^{n-t} \sum_{\substack{J \subset \Gamma_{t+1}^n, \\ |J|=j}} \mathbb{I}_{\{\omega;\, \omega_i = H \text{ pro } i \in J, \omega_i \neq H \text{ pro } i \notin J\}}(\omega) \cdot V_n \,|\, \mathcal{F}_t\Big] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{\substack{J \subset \Gamma_{t+1}^n, \\ |J|=j}} \Big(S_t \prod_{i \in J} \xi_i^u \prod_{i \notin J} \xi_i^d - K\Big)^+ \mathrm{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\mathbb{I}_{\{\omega;\, \omega_i = H \text{ pro } i \in J, \omega_i \neq H \text{ pro } i \notin J\}}(\omega)\Big] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{\substack{J \subset \Gamma_{t+1}^n, \\ |J|=j}} \Big(S_t \prod_{i \in J} \xi_i^u \prod_{i \notin J} \xi_i^d - K\Big)^+ \mathbb{Q}\Big(\mathbb{I}_{\{\omega;\, \omega_i = H \text{ pro } i \in J, \omega_i \neq H \text{ pro } i \notin J\}}(\omega)\Big).$$

K získání vztahu (2.4) si nakonec uvědomíme, že

$$\mathbb{Q}\Big(\Big\{\omega;\, \{\omega_i = H \text{ pro } i \in J,\, \omega_i \neq H \text{ pro } i \notin J\}\Big) = P(J, n),$$

a dosadíme do (2.3).

Pro dokončení důkazu stačí vzít v úvahu, že pro $J \in I_{j,t+1}^{\,n}(S_t)$ je $(S_n - K)^+ = S_n - K$ a pro $J \in \Gamma_{t+1}^n \backslash I_{j,t+1}^{\,n}(S_t)$, $|J| = j$ je $(S_n - K)^+ = 0$. Pak totiž přepsáním (2.4) dostáváme

$$c_t = \frac{1}{(1+r_f)^{n-t}} \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{J \in I_{j,t+1}^{\,n}(S_t)} P(J, n) \cdot \Big(S_t \prod_{i \in J} \xi_i^u \prod_{i \notin J} \xi_i^d - K\Big) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{J \in I_{j,t+1}^{\,n}(S_t)} \Big[S_t \Big(\prod_{i \in J} \frac{\xi_i^u \, q_i}{1 + r_f} \prod_{i \notin J} \frac{\xi_i^d \, (1 - q_i)}{1 + r_f}\Big) - \frac{K}{(1+r_f)^{n-t}} P(J, n)\Big] =$$

$$= S_t \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{J \in I_{j,t+1}^{\,n}(S_t)} \widetilde{P}(J, n) - \frac{K}{(1+r_f)^{n-t}} \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{J \in I_{j,t+1}^{\,n}(S_t)} P(J, n).$$

□

Poznámka. Pokud $A_{t+1} = \ldots = A_n = 1$, GBM se redukuje na BM a vztahy (2.4) resp. (2.5) přecházejí do vztahů (1.14) resp. (1.15).

2.2 Náhodný zobecněný binomický model

V dalším kroku budeme považovat $A_1, \ldots, A_n$ za náhodné veličiny. Nechť je opět dán trh $\mathcal{M}$, tj. pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, proces hodnoty bankovní operace (1.2), proces ceny akcie (1.3) a přirozená filtrace $\mathcal{F}$ procesu $\mathcal{S}$. Náhodný zobecněný binomický model (RGBM) vychází ze vztahu

$$S_{t+1} = \xi_{t+1} S_t, \quad t = 0, 1, \ldots, n-1,$$

kde

(i) S_0 je daná výchozí (současná) cena akcie;

(ii) $\xi_t = \nu_t A_t,\ t = 1, \ldots, n$;

(iii) $\{A_t,\, t = 1, \ldots, n\}$ je n-tice s.j. kladných nezávislých náhodných veličin s diskrétním rozdělením;

(iv) $\{\nu_t,\, t = 1, \ldots, n\}$ je n-tice nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením

$$\mathbb{P}(\nu_1 = u) = p \quad \text{a} \quad \mathbb{P}(\nu_1 = d) = 1 - p, \quad 0 < d < u,\ 0 < p < 1;$$

(v) náhodné veličiny ν_t, $t = 1, \ldots, n$, a A_t, $t = 1, \ldots, n$, jsou vzájemně nezávislé.

V RGBM tedy vedle nejistoty ohledně poklesu či růstu ceny akcie za jedno subobdobí existuje druhý zdroj nahodilosti v podobě náhodné amplitudy skoku. Této skutečnosti přizpůsobíme podobu pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Předpokládejme, že každá A_t, $t = 1, \ldots, n$, má k_t různých realizací; označíme je $a_{t,1}, \ldots, a_{t,k_t}$. Pro n-periodický RGBM definujeme prostor elementárních jevů jako

$$\Omega = \Big\{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n);\, \omega_t \in \{H_1, \ldots, H_{k_t}, O_1, \ldots, O_{k_t}\},\, t = 1, \ldots, n\Big\}.$$

Pokud tedy např. $\omega_1 = H_2$, došlo v prvním subobdobí k růstu ceny akcie a k realizaci $a_{1,2}$.

Tvrzení 2.2.1. *Jestliže je na trhu $\mathcal{M}$ vyloučena arbitráž, pak*

$$\mathbb{P}(\xi_t^d < 1 + r_f < \xi_t^u) > 0, \quad t = 1, \ldots, n. \tag{2.6}$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme obdobně jako v GBM (tvrzení 2.1.1) nalezením investiční strategie s možností arbitrážního zisku. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že podmínka (2.1) je porušena v n-tém subobdobí.

Nechť $\mathbb{P}(\xi_n^d \geq 1 + r_f) = 1$, $K_{n-1} > 0$ je libovolné a $\phi = (\Delta, B)$ je investiční strategie na trhu $\mathcal{M}$, v níž $\Delta = (0, \ldots, 0, K_{n-1}/S_{n-1})$ a $B = (0, \ldots, 0, -K_{n-1})$, tj. v posledním subobdobí si půjčíme K_{n-1} a investujeme jej do nákupu akcií. Jelikož $u > d$ a $\mathbb{P}(dA_n \geq 1 + r_f) = 1$, a tím pádem $\mathbb{P}(uA_n > 1 + r_f) = 1$, dostáváme vzhledem k

$$X_0(\phi) = 0,\ X_{n-1}(\phi) = 0, \quad X_n(\phi) = \frac{K_{n-1}}{S_{n-1}} \cdot \xi_n S_{n-1} - K_{n-1}(1 + r_f) = K_{n-1}[\xi_n - (1 + r_f)],$$

$$\mathbb{P}(X_n(\phi) \geq 0) = \mathbb{P}(\xi_n \geq 1 + r_f) \geq \mathbb{P}(dA_n \geq 1 + r_f) = 1 \quad \text{a}$$

$$\mathbb{P}(X_n(\phi) > 0) = \mathbb{P}(\xi_n > 1 + r_f) \geq \mathbb{P}(\xi_n = uA_n) > 0$$

spor s předpokladem neexistence arbitráže.

Pro spor s druhou nerovností předpokládáme, že $\mathbb{P}(\xi_n^u \leq 1 + r_f) = 1$. Investiční strategie $\psi = (\Delta, B)$, kde $\Delta = (0, \ldots, 0, -K_{n-1}/S_{n-1})$ a $B = (0, \ldots, 0, K_{n-1})$ vede vzhledem k $u > d$ a $\mathbb{P}(uA_n \leq 1+r_f) = 1$, a tím i $\mathbb{P}(dA_n < 1+r_f) = 1$, k potenciálnímu arbitrážnímu zisku, neboť

$$
\begin{gathered}
X_0(\psi) = 0,\ X_{n-1}(\psi) = 0, \quad X_n(\psi) = K_{n-1}[(1+r_f) - \xi_n], \\
\mathbb{P}(X_n(\psi) \geq 0) = \mathbb{P}(1+r_f \geq \xi_n) \geq \mathbb{P}(1+r_f \geq uA_n) = 1 \quad \text{a} \\
\mathbb{P}(X_n(\psi) > 0) = \mathbb{P}(1+r_f > \xi_n) \geq \mathbb{P}(\xi_n = dA_n) > 0.
\end{gathered}
$$

□

Poznámka. Ve výchozím textu [13, str. 22] je podmínka (2.6) bez důkazu formulována silněji, a sice v podobě

$$
\mathbb{P}(\xi_t^d < 1+r_f < \xi_t^u) = 1,\ t = 1, \ldots, n. \tag{2.7}
$$

Ukažme, že toto nezbytně neplatí. Nechť $n = 1$,

$$
\mathbb{P}\Big(X_1 = \frac{1+r_f}{d}\Big) = a, \quad \mathbb{P}\Big(X_1 = \frac{r_f}{d}\Big) = 1-a, \quad 0 < a < 1.
$$

Pak $\mathbb{P}(\xi_1^d < 1+r_f < \xi_1^u) < 1$. Hledejme arbitrážní strategii. Samotná bankovní operace při nulovém počátečním kapitálu zisk jistě nepřinese. Při nulovém počátečním kapitálu tedy přichází do úvahy výhradně investiční strategie, pro něž

$$
\Delta_0 = K_0/S_0, \quad B_0 = -K_0, \quad K_0 \neq 0.
$$

Potom $X_1(\phi) = K_0[\xi_1 - (1+r_f)]$.

Je-li $K_0 > 0$, pak při $X_1 = r_f/d$ a $\nu_1 = d$ je $\xi_1 = r_f < 1+r_f$, tudíž $X_1(\phi) < 0$, a proto $\mathbb{P}(X_1(\phi) \geq 0) < 1$ a strategie přináší s nenulovou pravděpodobností ztrátu.

Pokud $K_0 < 0$, $X_1 = (1+r_f)/d$ a $\nu_1 = u$, pak $\xi_1 = (1+r_f)u/d > 1+r_f$, neboť $u > d$, tím pádem $X_1(\phi) < 0$, a proto $\mathbb{P}(X_1(\phi) \geq 0) < 1$. Na trhu je vyloučena arbitráž, ale $\mathbb{P}(\xi_1^d < 1+r_f < \xi_1^u) < 1$.

Podmínka (2.7) je ovšem nezbytná pro to, aby model vyústil v použitelnou oceňovací formuli. V RGBM proto předpokládáme, že (2.7) platí.

Uvažujme evropskou call opci na akcii S (nevyplácející dividendu) s realizační cenou K, dobou splatnosti na konci n-tého subobdobí a výplatní funkcí (1.8). Cena opce v čase t zřejmě závisí na náhodných veličinách $A_{t+1}, \ldots, A_n$, což vyjádříme jako

$$
c_t = f(A_{t+1}, \ldots, A_n).
$$

Konstrukce modelu se nezabývá tím, jak se vypořádat s působením náhodných amplitud skoků. RGBM-opční oceňovací formule přiřazuje ceně opce střední hodnotu c_t, tj.

$$
\bar{c}_t = \mathrm{E}_{\mathbb{P}} c_t = \mathrm{E}_{\mathbb{P}} f(A_{t+1}, \ldots, A_n). \tag{2.8}
$$

Vztah (2.8) upravíme na základě standardní techniky podmiňování – c_t podmíníme znalostí realizací náhodných amplitud skoků a následně vyintegrujeme přes všechny možné realizace.

Označení. Pro $0 \leq t \leq n-1$ označme $(n-t)$-rozměrný náhodný vektor $(A_{t+1}, \ldots, A_n)$ jako $\mathbf{A}_{t+1}^n$.
Dále analogicky jako v GBM (s přihlédnutím ke „znáhodnění“ amplitud skoků)

$$q_t(x_t) = \frac{1 + r_f - dx_t}{ux_t - dx_t}, \quad x_t \in \mathbb{R},\, t = 1, \ldots, n,$$

$$\widetilde{q}_t(x_t) = \frac{ux_t}{1 + r_f}\, q_t(x_t), \quad x_t \in \mathbb{R},\, t = 1, \ldots, n.$$

Pro $0 \leq t \leq n-1$, $J \subset \Gamma_{t+1}^n$, $\mathbf{x} = (x_{t+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-t}$, $j \in \Gamma_0^{n-t}$ a $y \in \mathbb{R}^+$ položme

$$P(J, n, \mathbf{x}) = \prod_{i \in J} q_i(x_i) \prod_{i \notin J} [1 - q_i(x_i)],$$

$$\widetilde{P}(J, n, \mathbf{x}) = \prod_{i \in J} \widetilde{q}_i(x_i) \prod_{i \notin J} [1 - \widetilde{q}_i(x_i)],$$

$$I_{j,t+1}^n(y, \mathbf{x}) = \Big\{ J \subset \Gamma_{t+1}^n, |J| = j;\ y \prod_{i \in J} u\, x_i \prod_{i \notin J} d\, x_i > K \Big\}.$$

Věta 2.2.2 (RGBM-oceňovací formule). *Nechť je dán trh $\mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$. V n-periodickém náhodném zobecněném binomickém modelu je cena evropské call opce na akcii S (nevyplácející dividendu) s realizační cenou K a dobou splatnosti T (ekvivalentně na konci n-tého subobdobí) dána vztahem*

$$\bar{c}_t = S_t \sum_{j=0}^{n-t} \bar{c}_t^{\,(1)} - \frac{K}{(1 + r_f)^{n-t}} \sum_{j=0}^{n-t} \bar{c}_t^{\,(2)}, \quad t = 0, \ldots, n-1, \tag{2.9}$$

kde

$$\bar{c}_t^{\,(1)} = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n-t}} \sum_{J \in I_{j,t+1}^n(S_t, \mathbf{a})} \Big[\widetilde{P}(J, n, \mathbf{a}) \prod_{i=t+1}^{n} \mathbb{P}(A_i = a_i) \Big],$$

$$\bar{c}_t^{\,(2)} = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n-t}} \sum_{J \in I_{j,t+1}^n(S_t, \mathbf{a})} \Big[P(J, n, \mathbf{a}) \prod_{i=t+1}^{n} \mathbb{P}(A_i = a_i) \Big],$$

$$\mathbf{a} = (a_{t+1}, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-t} \quad a \quad \mathbb{P}(d\, a_i < 1 + r_f < u\, a_i) = 1,\ i = t+1, \ldots, n.$$

Důkaz. Podle (2.8) máme vzhledem k základním vlastnostem podmíněné střední hodnoty

$$\bar{c}_t = \mathrm{E}_{\mathbb{P}}\,[f(\mathbf{A}_{t+1}^n)] = \mathrm{E}_{\mathbb{P}} \Big[\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\,[f(\mathbf{A}_{t+1}^n \,|\, \sigma(\mathbf{A}_{t+1}^n)] \Big] = \mathrm{E}_{\mathbb{P}}\,[g(\mathbf{A}_{t+1}^n)].$$

Poslední rovnost platí pro vhodnou měřitelnou funkci $g : (\mathbb{R}^{n-t}, \mathcal{B}^{n-t}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, která existuje podle věty A.4 (předpoklady věty jsou splněny, neboť o náhodných veličinách v textu se vyskytujících předpokládáme, že mají konečnou střední hodnotu, a $\mathbf{A}_{t+1}^n$ je náhodný vektor).

Uvědomme si, že považujeme-li znalost realizace náhodného vektoru $\mathbf{A}_{t+1}^n$ za danou, neboli podmiňujeme-li σ-algebrou $\sigma(\mathbf{A}_{t+1}^n)$, redukuje se RGBM na GBM (přihlížíme přitom k předpokladu, že platí (2.7)) a funkce g splývá s arbitrážní cenou opce v GBM (věta 2.1.4), pohlížíme-li na ni jako na funkci $A_{t+1}, \ldots, A_n$.

Uvažujme vyjádření arbitrážní ceny opce v GBM v podobě analogie binomické Black-Scholesovy formule, tj. vztah (2.5), a postupně upravujme:

$$\bar{c}_t = \mathrm{E}\left[g(\mathbf{A}_{t+1}^n)\right] =$$

$$= \mathrm{E}\Bigg[S_t \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{J \in I_{j,t+1}^n(S_t, \mathbf{A}_{t+1}^n)} \Big(\prod_{i \in J} \frac{uA_i}{1+r_f} \cdot \frac{1+r_f-dA_i}{uA_i-dA_i} \prod_{i \notin J}\Big(1 - \frac{uA_i}{1+r_f} \cdot \frac{1+r_f-dA_i}{uA_i-dA_i}\Big)\Big) -$$

$$- \frac{K}{(1+r_f)^{n-t}} \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{J \in I_{j,t+1}^n(S_t, \mathbf{A}_{t+1}^n)} \Big(\prod_{i \in J} \frac{1+r_f-dA_i}{uA_i-dA_i} \prod_{i \notin J}\Big(1 - \frac{1+r_f-dA_i}{uA_i-dA_i}\Big)\Big)\Bigg] =$$

$$= \mathrm{E}\Bigg[S_t \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{J \in I_{j,t+1}^n(S_t, \mathbf{A}_{t+1}^n)} \Big(\prod_{i \in J} \widetilde{q}_i(A_i) \prod_{i \notin J}(1 - \widetilde{q}_i(A_i)\Big) -$$

$$- \frac{K}{(1+r_f)^{n-t}} \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{J \in I_{j,t+1}^n(S_t, \mathbf{A}_{t+1}^n)} \Big(\prod_{i \in J} q_i(A_i) \prod_{i \notin J}(1 - q_i(A_i))\Big)\Bigg] =$$

$$= \mathrm{E}\Bigg[\sum_{j=0}^{n-t} \sum_{J \in I_{j,t+1}^n(S_t, \mathbf{A}_{t+1}^n)} \Big(S_t \cdot \widetilde{P}(J, n, \mathbf{A}_{t+1}^n) - \frac{K}{(1+r_f)^{n-t}} P(J, n, \mathbf{A}_{t+1}^n)\Big)\Bigg] = (*).$$

Protože S_t nezávisí na $\mathbf{A}_{t+1}^n$ a vektor $\mathbf{A}_{t+1}^n$ nabývá nejvýše spočetně mnoha hodnot (neboť každá z jeho konečně mnoha složek má diskrétní rozdělení), pak s přihlédnutím k větě A.1 aplikované na měřitelné funkce $P(\cdot)$ a $\widetilde{P}(\cdot)$ a k nezávislosti složek $\mathbf{A}_{t+1}^n$

$$(*) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n-t}} \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{J \in I_{j,t+1}^n(S_t, \mathbf{a})} S_t \cdot \widetilde{P}(J, n, \mathbf{a}) \cdot \mathbb{P}(\mathbf{A}_{t+1}^n = \mathbf{a}) -$$

$$- \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n-t}} \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{J \in I_{j,t+1}^n(S_t, \mathbf{a})} \frac{K}{(1+r_f)^{n-t}} P(J, n, \mathbf{a}) \cdot \mathbb{P}(\mathbf{A}_{t+1}^n = \mathbf{a}) =$$

$$= S_t \cdot \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n-t}} \sum_{J \in I_{j,t+1}^n(S_t, \mathbf{a})} \Big[\widetilde{P}(J, n, \mathbf{a}) \prod_{i=t+1}^{n} \mathbb{P}(A_i = a_i)\Big] -$$

$$- \frac{K}{(1+r_f)^{n-t}} \cdot \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n-t}} \sum_{J \in I_{j,t+1}^n(S_t, \mathbf{a})} \Big[P(J, n, \mathbf{a}) \prod_{i=t+1}^{n} \mathbb{P}(A_i = a_i)\Big] =$$

$$= S_t \sum_{j=0}^{n-t} \bar{c}_t^{(1)} - \frac{K}{(1+r_f)^{n-t}} \sum_{j=0}^{n-t} \bar{c}_t^{(2)}.$$

□

Poznámka. Upozorněme na to, že ve vztahu (2.9) se spojuje koncept rizikově neutrálního oceňování (použitého v GBM) a pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$ v reálném světě.

Poznámka. Pokud $\mathbb{P}(A_{t+1} = 1) = \ldots = \mathbb{P}(A_n = 1) = 1$, RGBM se redukuje na binomický model.

Kapitola 3

Multinomický model

Oceňovací formule odvozená v náhodném zobecněném binomickém modelu (RGBM) není příliš vhodná k praktickému použití. Přijímáme proto předpoklady o rozdělení amplitud skoků (náhodných veličin $A_1, \ldots, A_n$).

V první části této kapitoly pojednáme o multinomickém modelu (MM), k němuž směřovala autorka výchozího textu [13]. Ve druhé části MM drobně modifikujeme.

3.1 Multinomický model

V multinomické modelu vycházíme z RGBM. Navíc zavádíme množinu k, $k \in \mathbb{N}$, kladných reálných čísel

$$\mathbb{C}_k = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k;\, \mathcal{C}_l > 0,\, l = 1, \ldots, k\}$$

a přijímáme dodatečné předpoklady o $A_1, \ldots, A_n$:

- náhodné veličiny $A_1, \ldots, A_n$ jsou stejně rozdělené;
- $\mathbb{P}(A_1 \in \mathbb{C}_k) = 1$, tj. všechny realizace A_1 leží v množině $\mathbb{C}_k$, kterou nazýváme množinou multinomických realizací;
- $\mathbb{P}(A_1 = \mathcal{C}_l) = \frac{1}{k}$, $l = 1, \ldots, k$, tj. každá realizace je stejně pravděpodobná.[1]

Označení. V čase $0 \leq t \leq n-1$ uvažujme elementární jev $\omega \in \Omega$ a příslušnou realizaci náhodného vektoru $\mathbf{A}_{t+1}^n = (A_{t+1}, \ldots, A_n)$.
Nechť $\eta_{\mathcal{C}_1}, \ldots, \eta_{\mathcal{C}_k}$ je posloupnost náhodných veličin definovaných předpisem

$$\eta_{\mathcal{C}_l}(\omega) = \#\Big\{i \in \{t+1, \ldots, n\};\, A_i = \mathcal{C}_l\Big\}, \quad l = 1, \ldots, k.$$

$\eta_{\mathcal{C}_l}$ tedy vyjadřuje počet složek $\mathbf{A}_{t+1}^n$, které nabývají hodnoty $\mathcal{C}_l$.[2]

[1] Tento předpoklad považujeme za problematický a v následující subkapitole jej odstraníme.
[2] Zřejmě $\eta_{\mathcal{C}_l}(\omega) \in \Gamma_0^{n-t} = \{0, 1, \ldots, n-t\}$.

Pro $N_{\mathcal{C}_l} \in \Gamma_0^{n-t}$, $l = 1, \ldots, k$, označíme

$$\begin{aligned} I(n,t,j,N_{\mathcal{C}_1},\ldots,N_{\mathcal{C}_k}) &= \Big\{(m_1,\ldots,m_{2k});\ m_l \in \Gamma_0^{n-t},\ l=1,\ldots,2k,\ \sum_{l=1}^{2k} m_l = n-t, \\ &\qquad \sum_{l=1}^{k} m_l = j,\ N_{\mathcal{C}_1} = m_1 + m_{k+1},\ldots,N_{\mathcal{C}_k} = m_k + m_{2k}\Big\}. \end{aligned}$$

Jak záhy uvidíme, m_l bude reprezentovat počet růstů ceny akcie za jedno subobdobí $u\mathcal{C}_l$-krát, m_{k+l} počet poklesů $d\mathcal{C}_l$-krát a I množinu všech $2k$-tic splňujících uvedené podmínky.

Konečně pro $j \in \Gamma_0^{n-t}$, $y \in \mathbb{R}^+$ a $N_{\mathcal{C}_l} \in \Gamma_0^{n-t}$, $l = 1, \ldots, k$, položme

$$\bar{I}_{j,t+1}^{\,n}(y, N_{\mathcal{C}_1},\ldots,N_{\mathcal{C}_k}) = \Big\{J \subset \Gamma_{t+1}^n;\ |J| = j,\ y\,\mathcal{C}_1^{N_{\mathcal{C}_1}} \ldots \mathcal{C}_k^{N_{\mathcal{C}_k}}\, u^j d^{\,n-t-j} > K\Big\}$$

a

$$\alpha(y, N_{\mathcal{C}_1},\ldots,N_{\mathcal{C}_k}) = \min\{j;\ \bar{I}_{j,t+1}^{\,n}(y, N_{\mathcal{C}_1},\ldots,N_{\mathcal{C}_k}) \neq \emptyset\}.$$

Věta 3.1.1 (MM-oceňovací formule). *Nechť je dán trh $\mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$. V n-periodickém multinomickém modelu je cena evropské call opce na akcii S (nevyplácející dividendu) s realizační cenou K a dobou splatnosti T (ekvivalentně na konci n-tého subobdobí) v čase $0 \le t \le n-1$ dána vztahem*

$$\bar{c}_t = \sum_{\theta \in \Theta} \sum_{j=\alpha(S_t,\theta)}^{n-t} \sum_{I(n,t,j,\theta)} \Big(S_t \cdot M_{2k}(n,t,\widetilde{p}) - \frac{K}{(1+r_f)^{n-t}}\, M_{2k}(n,t,p)\Big),$$

kde

$$\Theta = \Big\{(N_{\mathcal{C}_1},\ldots,N_{\mathcal{C}_k});\ 0 \le N_{\mathcal{C}_l} \le n-t,\ l=1,\ldots,k,\ \sum_{l=1}^{k} N_{\mathcal{C}_l} = n-t\Big\},$$

$$M_{2k}(n,t,p) = \frac{(m_1 + \ldots + m_{2k})!}{m_1! \ldots m_{2k}!}\ p_1^{m_1} \ldots p_{2k}^{m_{2k}},$$

$$M_{2k}(n,t,\widetilde{p}) = \frac{(m_1 + \ldots + m_{2k})!}{m_1! \ldots m_{2k}!}\ \widetilde{p}_1^{\,m_1} \ldots \widetilde{p}_{2k}^{\,m_{2k}},$$

$$p_1 = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 + r_f - d\mathcal{C}_1}{\mathcal{C}_1(u-d)}, \ldots, p_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 + r_f - d\mathcal{C}_k}{\mathcal{C}_k(u-d)},$$

$$p_{k+1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{u\mathcal{C}_1 - (1+r_f)}{\mathcal{C}_1(u-d)}, \ldots, p_{2k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{u\mathcal{C}_k - (1+r_f)}{\mathcal{C}_k(u-d)},$$

$$\widetilde{p}_1 = \frac{u\mathcal{C}_1}{1+r_f}\, p_1, \ldots, \widetilde{p}_k = \frac{u\mathcal{C}_k}{1+r_f}\, p_k,\ \widetilde{p}_{k+1} = \frac{d\mathcal{C}_1}{1+r_f}\, p_{k+1}, \ldots, \widetilde{p}_{2k} = \frac{d\mathcal{C}_k}{1+r_f}\, p_{2k}.$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme pomocí RGBM-oceňovací formule (věta 2.2.2), jejíž tvar upravíme s ohledem na dodatečné předpoklady multinomického modelu.

Volme libovolné $t \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Zaměřme se na sumu ve druhém členu výrazu (2.9) a označme ji Λ:

$$\Lambda = \sum_{j=0}^{n-t} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n-t}} \sum_{J \in I_{j,t+1}^{\,n}(S_t, \mathbf{a})} \Big[P(J, n, \mathbf{a}) \prod_{i=t+1}^{n} \mathbb{P}(A_i = a_i) \Big], \quad \text{kde}$$

$$\mathbf{a} = (a_{t+1}, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-t} \text{ a } I_{j,t+1}^{\,n}(S_t, \mathbf{a}) = \Big\{ J \subset \Gamma_{t+1}^{n}, |J| = j;\, S_t \prod_{i \in J} u\, a_i \prod_{i \notin J} d\, a_i > K \Big\}.$$

S ohledem na komutativnost součtu zaměňme pořadí prvních dvou sum a symbolicky pišme $\Lambda = \sum_{\mathbf{a}} \Lambda_{\mathbf{a}}$. Jelikož $\mathbb{P}(A_i \in \mathbb{C}_k) = 1$, $i = t+1, \ldots, n$, stačí sčítat přes ty vektory $\mathbf{a}$, jejichž všechny složky leží v $\mathbb{C}_k$ (ostatní sčítance jsou nulové). Takové vektory pak sdružíme do disjunktních skupin, jejichž prvky mají až na pořadí shodné složky, tj. obsahují stejný počet hodnot $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$. Pro daný $\mathbf{a}$ označíme počet složek $\mathbf{a}$, které nabývají hodnoty $\mathcal{C}_l$, jako $N_{\mathcal{C}_l}$ (neboli $N_{\mathcal{C}_l}$ je příslušnou realizací $\eta_{\mathcal{C}_l}$):

$$N_{\mathcal{C}_l} = \#\Big\{ i \in \{t+1, \ldots, n\};\, a_i = \mathcal{C}_l \Big\}, \quad l = 1, \ldots, k.$$

Zřejmě $0 \leq N_{\mathcal{C}_l} \leq n-t$ a $N_{\mathcal{C}_1} + \ldots + N_{\mathcal{C}_k} = n-t$. Dále nechť

$$\Theta = \Big\{ (N_{\mathcal{C}_1}, \ldots, N_{\mathcal{C}_k});\, 0 \leq N_{\mathcal{C}_l} \leq n-t,\, l = 1, \ldots, k,\, \sum_{l=1}^{k} N_{\mathcal{C}_l} = n-t \Big\}.$$

Potom

$$\Lambda = \sum_{\mathbf{a}} \Lambda_{\mathbf{a}} = \sum_{\theta \in \Theta} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{C}_k^{n-t}} \mathbb{I}_{\{(N_{\mathcal{C}_1}, \ldots, N_{\mathcal{C}_k}) = \theta\}} \Lambda_{\mathbf{a}},$$

kde identifikátor zajistí, že načítáme $\Lambda_{\mathbf{a}}$ právě pro ta $\mathbf{a}$, pro něž $(N_{\mathcal{C}_1}, \ldots, N_{\mathcal{C}_k}) = \theta$, čímž rozdělíme vektory $\mathbf{a}$ do disjunktních skupin podle hodnot θ.

Volme pevné $\mathbf{a} \in \mathbb{C}_k^{n-t}$ (tím i pevné $N_{\mathcal{C}_1}, \ldots, N_{\mathcal{C}_k}$). Pak

$$S_t \prod_{i \in J} u\, a_i \prod_{i \notin J} d\, a_i = S_t\, u^j d^{n-t-j} \prod_{i=t+1}^{n} a_i = S_t\, \mathcal{C}_1^{N_{\mathcal{C}_1}} \ldots \mathcal{C}_k^{N_{\mathcal{C}_k}}\, u^j d^{n-t-j}.$$

Množiny $I_{j,t+1}^{\,n}(S_t, \mathbf{a})$ a $\bar{I}_{j,t+1}^{\,n}(S_t, N_{\mathcal{C}_1}, \ldots, N_{\mathcal{C}_k})$ jsou proto shodné.

Součin na pravé straně nezávisí na konkrétní podobě $\mathbf{a}$, nýbrž jen na $N_{\mathcal{C}_1}, \ldots, N_{\mathcal{C}_k}$, a tudíž můžeme v Λ opět zaměnit pořadí sčítání. Navíc stačí sčítat jen přes $j \geq \alpha(S_t, \theta)$, v opačném případě je totiž $\bar{I}_{j,t+1}^{\,n}(S_t, \theta) = \emptyset$:

$$\Lambda = \sum_{\theta \in \Theta} \sum_{j=\alpha(S_t,\theta)}^{n-t} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{C}_k^{n-t}} \mathbb{I}_{\{(N_{\mathcal{C}_1}, \ldots, N_{\mathcal{C}_k}) = \theta\}} \sum_{J \in \bar{I}_{j,t+1}^{\,n}(S_t, \theta)} \Big[P(J, n, \mathbf{a}) \prod_{i=t+1}^{n} \mathbb{P}(A_i = a_i) \Big].$$

Ze zavedení MM víme, že $\mathbb{P}(A_i = a_i) = \frac{1}{k}$, $i = t+1, \ldots, n$, pročež

$$\Lambda = \sum_{\theta \in \Theta} \sum_{j=\alpha(S_t,\theta)}^{n-t} \frac{1}{k^{n-t}} \Lambda_{\theta,j},$$

kde

$$\Lambda_{\theta,j} = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{C}_k^{n-t}} \mathbb{I}_{\{(N_{\mathcal{C}_1},\ldots,N_{\mathcal{C}_k})=\theta\}} \sum_{J \in \bar{I}^{\,n}_{j,t+1}(S_t,\theta)} P(J,n,\mathbf{a}). \tag{3.1}$$

V dalším kroku zafixujeme libovolný prvek $\theta \in \Theta$ resp. k-tici $N_{\mathcal{C}_1}, \ldots, N_{\mathcal{C}_k}$ a počet budoucích období, v nichž dojde k růstu ceny akcie $j \in \{\alpha(S_t,\theta), \ldots, n-t\}$, a vrátíme se k interpretaci náhodných veličin A_i, $i = t+1, \ldots, n$.

Skutečnost, že $A_i = a_i$, znamená, že v i-tém období došlo k růstu ceny akcie ua_i-krát nebo k poklesu ceny akcie da_i-krát. S přihlédnutím k tomu, že $a_i \in \mathbb{C}_k$, označíme jako m_l počet období, v nichž dojde k růstu ceny akcie $u\mathcal{C}_l$-krát, a jako m_{k+l} počet období, v nichž dojde k poklesu ceny akcie $d\mathcal{C}_l$-krát:

$$m_l = \{i \in \Gamma^n_{t+1};\, \nu_i A_i = u\mathcal{C}_l\}, \quad m_{k+l} = \{i \in \Gamma^n_{t+1};\, \nu_i A_i = d\mathcal{C}_l\}, \quad l = 1, \ldots, k.$$

Zřejmě $0 \le m_l \le n-t$ pro každé l a $\sum_{l=1}^{2k} = n-t$.

Množinu všech $\mathbf{a} \in \mathbb{C}_k^{n-t}$ rozdělíme do po dvou disjunktních podmnožin podle toho, s kolika jejich složkami je spjat růst resp. pokles ceny akcie. Prvky každé takové podmnožiny jsou (jednoznačně) charakterizovány $2k$-ticí $m = (m_1, \ldots, m_{2k})$. Vzhledem k pevnému $\theta = (N_{\mathcal{C}_1}, \ldots, N_{\mathcal{C}_k})$, omezujícímu množinu $\mathbf{a} \in \mathbb{C}_k^{n-t}$, uvažujeme jen ta m, pro něž $m_l + m_{k+l} = N_{\mathcal{C}_l}$, $l = 1, \ldots, k$. Protože j je také pevné, požadujeme rovněž, aby $m_1 + \ldots + m_k = j$. Množinu všech $2k$-tic splňujících uvedené podmínky jsme výše označili jako $I(n,t,j,N_{\mathcal{C}_1}, \ldots, N_{\mathcal{C}_k})$, stručněji $I(n,t,j,\theta)$. Jelikož navíc pro $j \ge \alpha(S_t,\theta)$ je množina $\bar{I}^{\,n}_{j,t+1}(S_t,\theta)$ shodná s množinou $\{J \subset \Gamma^n_{t+1};\, |J| = j\}$, upravíme (3.1) na

$$\Lambda_{\theta,j} = \sum_{m \in I(n,t,j,\theta)} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{C}_k^{n-t}} \mathbb{I}_{\{(N_{c_{\mathcal{C}}},\ldots,N_{\mathcal{C}_k})=\theta\}} \cdot \mathbb{I}_{\{(m_1,\ldots,m_{2k}=m\}} \sum_{J \subset \Gamma^n_{t+1}, |J|=j} P(J,n,\mathbf{a}). \tag{3.2}$$

Uvědomme si, že pro $\mathbf{a} \in \mathbb{C}_k^{n-t}$ a množinu $J \subset \Gamma^n_{t+1}, |J| = j$, platí

$$P(J,n,\mathbf{a}) = \prod_{i \in J} \frac{1 + r_f - da_i}{(u-d)\, a_i} \prod_{i \notin J} \Big(1 - \frac{1 + r_f - da_i}{(u-d)\, a_i}\Big) =$$

$$= k^{n-t} \cdot p_1^{\#\{i \in J;\, a_i = \mathcal{C}_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\#\{i \in J;\, a_i = \mathcal{C}_k\}} \cdot \ldots \cdot p_{k+1}^{\#\{i \notin J;\, a_i = \mathcal{C}_1\}} \cdot \ldots \cdot p_{2k}^{\#\{i \notin J;\, a_i = \mathcal{C}_k\}},$$

kde

$$p_1 = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 + r_f - d\mathcal{C}_1}{\mathcal{C}_1(u-d)}, \ldots, p_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 + r_f - d\mathcal{C}_k}{\mathcal{C}_k(u-d)},$$

$$p_{k+1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{u\mathcal{C}_1 - (1 + r_f)}{\mathcal{C}_1(u-d)}, \ldots, p_{2k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{u\mathcal{C}_k - (1 + r_f)}{\mathcal{C}_k(u-d)}.$$

Dosazením do (3.2) dostáváme

$$\Lambda_{\theta,j} = \sum_{m \in I(n,t,j,\theta)} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{C}_k^{n-t}} \mathbb{I}_{\{(N_{\mathcal{C}_1},\ldots,N_{\mathcal{C}_k})=\theta\}} \sum_{J \subset \Gamma^n_{t+1}, |J|=j} \mathbb{I}_{\{(m_1,\ldots,m_{2k})=m\}}\, P(J,n,\mathbf{a}) =$$

$$= \sum_{m \in I(n,t,j,\theta)} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{C}_k^{n-t}} \mathbb{I}_{\{(N_{\mathcal{C}_1},\dots,N_{\mathcal{C}_k})=\theta\}} \sum_{J \subset \Gamma_{t+1}^n, |J|=j} \mathbb{I}_{\{(m_1,\dots,m_{2k})=m\}} \cdot k^{n-t} \cdot p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_{2k}^{m_{2k}} =$$

$$= k^{n-t} \sum_{m \in I(n,t,j,\theta)} \Big[\Big(\prod_{l=1}^{2k} p_l^{m_l} \Big) \Big(\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{C}_k^{n-t}} \mathbb{I}_{\{(N_{\mathcal{C}_1},\dots,N_{\mathcal{C}_k})=\theta\}} \sum_{J \subset \Gamma_{t+1}^n, |J|=j} \mathbb{I}_{\{(m_1,\dots,m_{2k})=m\}} \Big) \Big].$$

Při daném $\mathbf{a} \in \mathbb{C}_k^{n-t}$ je identifikátor v argumentu vnitřní sumy nenulový (resp. roven jedné) pro ty množiny J, pro něž $\#\{i \in J;\, a_i = \mathcal{C}_l\} = m_l$, $l = 1, \dots, k$. Je-li navíc fixovaný počet výskytů $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ v $\mathbf{a}$, tj. k-tice $N_{\mathcal{C}_1}, \dots, N_{\mathcal{C}_k}$ (viz druhý identifikátor), existuje $\binom{N_{\mathcal{C}_1}}{m_1}$ možností, jak vybrat $\mathcal{C}_1$ do množiny J, obdobně $\binom{N_{\mathcal{C}_2}}{m_2}$ možností, jak vybrat $\mathcal{C}_2$ do množiny J atd. Podle kombinatorického pravidla součinu[3] je tedy počet J, pro něž $\mathbb{I}_{\{(m_1,\dots,m_k)=m\}} = 1$, roven $\binom{N_{\mathcal{C}_1}}{m_1} \cdot \ldots \cdot \binom{N_{\mathcal{C}_k}}{m_k}$.[4] Proto

$$\Lambda_{\theta,j} = k^{n-t} \sum_{m \in I(n,t,j,\theta)} \Big[\Big(\prod_{l=1}^{2k} p_l^{m_l} \Big) \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{C}_k^{n-t}} \Big(\mathbb{I}_{\{(N_{\mathcal{C}_1},\dots,N_{\mathcal{C}_k})=\theta\}} \cdot \binom{N_{\mathcal{C}_1}}{m_1} \cdot \ldots \cdot \binom{N_{\mathcal{C}_k}}{m_k} \Big) \Big] =$$

$$= k^{n-t} \sum_{m \in I(n,t,j,\theta)} \Big[\binom{N_{\mathcal{C}_1}}{m_1} \cdot \ldots \cdot \binom{N_{\mathcal{C}_k}}{m_k} \Big(\prod_{l=1}^{2k} p_l^{m_l} \Big) \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{C}_k^{n-t}} \mathbb{I}_{\{(N_{\mathcal{C}_1},\dots,N_{\mathcal{C}_k})=\theta\}} \Big].$$

Počet $\mathbf{a} \in \mathbb{C}_k^{n-t}$, pro které $\mathbb{I}_{\{(N_{\mathcal{C}_1},\dots,N_{\mathcal{C}_k})=\theta\}} = 1$ při daném θ, odpovídá přesně počtu možností, jak seřadit $N_{\mathcal{C}_1}$ prvků $\mathcal{C}_1, \dots, N_{\mathcal{C}_k}$ prvků $\mathcal{C}_k$:[5]

$$\Lambda_{\theta,j} = k^{n-t} \sum_{m \in I(n,t,j,\theta)} \Big[\binom{N_{\mathcal{C}_1}}{m_1} \cdot \ldots \cdot \binom{N_{\mathcal{C}_k}}{m_k} \Big(\prod_{l=1}^{2k} p_l^{m_l} \Big) \cdot \frac{(N_{\mathcal{C}_1} + \ldots + N_{\mathcal{C}_k})!}{N_{\mathcal{C}_1}! \cdot \ldots \cdot N_{\mathcal{C}_k}!} \Big] =$$

$$= k^{n-t} \sum_{m \in I(n,t,j,\theta)} \Big[\frac{N_{\mathcal{C}_1}!}{m_1!\, m_{k+1}!} \cdot \ldots \cdot \frac{N_{\mathcal{C}_k}!}{m_k!\, m_{2k}!} \cdot \frac{(m_1 + \ldots + m_{2k})!}{N_{\mathcal{C}_1}! \cdot \ldots \cdot N_{\mathcal{C}_k}!} \cdot \prod_{l=1}^{2k} p_l^{m_l} \Big] =$$

$$= k^{n-t} \sum_{I(n,t,j,\theta)} M_{2k}(n,t,p),$$

kde

$$M_{2k}(n,t,p) = \frac{(m_1 + \ldots + m_{2k})!}{m_1! \ldots m_{2k}!}\, p_1^{m_1} \ldots p_{2k}^{m_{2k}}.$$

Dospěli jsme tedy k závěru, že

$$\Lambda = \sum_{\theta \in \Theta} \sum_{j=\alpha(S_t,\theta)}^{n-t} \frac{1}{k^{n-t}} \Lambda_{\theta,j} = \sum_{\theta \in \Theta} \sum_{j=\alpha(S_t,\theta)}^{n-t} \sum_{I(n,t,j,\theta)} M_{2k}(n,t,p).$$

Zcela analogicky postupujeme se sumací v prvním členu RGBM-oceňovací formule (2.9). Zbytek je zřejmý. □

[3] Kombinatorické pravidlo součinu (Polák [18, str. 288]): „Jestliže z prvků dané množiny vytváříme uspořádané k-tice $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ tak, že první člen x_1 lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen x_2 lze vybrat po výběru prvního členu n_2 způsoby atd., až k-tý člen lze vybrat po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, pak počet všech možných uspořádaných k-tic $(x_1, \dots, x_k)$ je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$."

[4] Identifikátor automaticky zajistí, že uvažované podmnožiny jsou j-prvkové.

[5] O permutacích s opakováním viz např. Polák [18, str. 292].

3.2 Modifikovaný multinomický model

Modifikovaný multinomický model (MMM) zkonstruujeme z MM pozměněním předpokládaného pravděpodobnostního rozdělení amplitud skoků. Stejně jako v MM v MMM předpokládáme, že $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé a stejně rozdělené a nabývají hodnot z množiny multinomických realizací $\mathbb{C}_k$, avšak jednotlivé realizace nejsou stejně pravděpodobné, nýbrž

$$\mathbb{P}(A_1 = \mathcal{C}_l) = k_l, \quad l = 1, \ldots, k.$$

Věta 3.2.1 (MMM-oceňovací formule). *Nechť je dán trh $\mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$. V n-periodickém modifikovaném multinomickém modelu je cena evropské call opce na akcii S (nevyplácející dividendu) s realizační cenou K a dobou splatnosti T (ekvivalentně na konci n-tého subobdobí) v čase $0 \le t \le n-1$ dána vztahem*

$$\bar{c}_t = \sum_{\theta \in \Theta} \sum_{j=\alpha(S_t,\theta)}^{n-t} \sum_{I(n,t,j,\theta)} \Big(S_t \cdot M_{2k}(n,t,\widetilde{p}) - \frac{K}{(1+r_f)^{n-t}} M_{2k}(n,t,p) \Big),$$

kde

$$\Theta = \Big\{ (N_{\mathcal{C}_1}, \ldots, N_{\mathcal{C}_k});\ 0 \le N_{\mathcal{C}_l} \le n-t,\ l = 1, \ldots, k,\ \sum_{l=1}^{k} N_{\mathcal{C}_l} = n-t \Big\},$$

$$M_{2k}(n,t,p) = \frac{(m_1 + \ldots + m_{2k})!}{m_1! \ldots m_{2k}!}\, p_1^{m_1} \ldots p_{2k}^{m_{2k}},$$

$$M_{2k}(n,t,\widetilde{p}) = \frac{(m_1 + \ldots + m_{2k})!}{m_1! \ldots m_{2k}!}\, \widetilde{p}_1^{\,m_1} \ldots \widetilde{p}_{2k}^{\,m_{2k}},$$

$$p_1 = k_1 \cdot \frac{1 + r_f - d\mathcal{C}_1}{\mathcal{C}_1(u-d)}, \ldots, p_k = k_k \cdot \frac{1 + r_f - d\mathcal{C}_k}{\mathcal{C}_k(u-d)},$$

$$p_{k+1} = k_1 \cdot \frac{u\mathcal{C}_1 - (1+r_f)}{\mathcal{C}_1(u-d)}, \ldots, p_{2k} = k_k \cdot \frac{u\mathcal{C}_k - (1+r_f)}{\mathcal{C}_k(u-d)},$$

$$\widetilde{p}_1 = \frac{u\mathcal{C}_1}{1+r_f}\, p_1, \ldots, \widetilde{p}_k = \frac{u\mathcal{C}_k}{1+r_f}\, p_k,\ \ \widetilde{p}_{k+1} = \frac{d\mathcal{C}_1}{1+r_f}\, p_{k+1}, \ldots, \widetilde{p}_{2k} = \frac{d\mathcal{C}_k}{1+r_f}\, p_{2k}.$$

Poznámka. MMM-oceňovací formule se od MM-oceňovací formule liší zavedením $p_1, \ldots, p_{2k}$ a $\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_{2k}$.

Důkaz. Tvrzení se dokáže zcela analogicky jako MM-oceňovací formule s přihlédnutím k tomu, že

- při daných $N_{\mathcal{C}_1}, \ldots, N_{\mathcal{C}_1}$ je

$$\prod_{i=t+1}^{n} \mathbb{P}(A_i = a_i) = k_1^{N_{\mathcal{C}_1}} \cdot \ldots \cdot k_k^{N_{\mathcal{C}_k}};$$

- v jednotlivých vztazích figuruje místo $\frac{1}{k^{n-t}}$ součin z předchozího řádku.

□

Kapitola 4

Odhad parametrů a empirická verifikace modifikovaného multinomického modelu

Po teoretickém odvození oceňovací formule v modifikovaném multinomickém modelu (MMM) přistoupíme k jejímu praktickému použití pro výpočet arbitrážních cen evropských call opcí na akcie. Vycházet budeme z reálných dat a kalkulované arbitrážní ceny budeme srovnávat se skutečnými cenami, za něž byly opce na trhu obchodovány.

V první části této kapitoly uvedeme datové zdroje, ve druhé části pojednáme o odhadu parametrů MMM, ve třetí části je dosadíme do oceňovací formule a ve čtvrté části interpretujeme výsledky.

4.1 Tržní data

Pro výpočty byly vybrány tituly z amerických burz NYSE[1] a NASDAQ.[2] Tyto burzy se staly předmětem zájmu jakožto dvě největší akciové burzy na světě z hlediska tržní kapitalizace.[3] Z každé z nich byla zvolena čtveřice významných akciových titulů

– z NYSE Citigroup, General Electric, IBM a Pfizer;

– z NASDAQ Apple, eBAY, Microsoft a Yahoo

a škála evropských call opcí na příslušné akcie.

Soustředili jsme se na uzavírací ceny opcí k 15. 3. 2011 a časovou řadu denních uzavíracích cen podkladových akcií. Jako zdroj tržních dat sloužil server finance.yahoo.com, pro získání časové řady cen akcií byly navíc využity zabudované funkce výpočetního softwaru Wolfram Mathematica.

[1] New York Stock Exchange.

[2] National Associaton of Securities Dealers Automated Quotations.

[3] Viz statistika World Federation of Exchanges [22].

4.2 Odhad parametrů

V MMM-oceňovací formuli (věta 3.2.1) vystupují 3 skupiny parametrů:

1. charakteristiky opčního kontraktu – realizační cena K, doba splatnosti T (prostřednictvím počtu subobdobí);

2. charakteristiky aktuální tržní situace – čas t, spotová cena podkladové akcie S_t, bezriziková úroková míra r_f;

3. charakteristiky modelu – počet subobdobí n, realizace u a d, počet multinomických realizací k, množina multinomických realizací $\mathbb{C}_k$, pravděpodobnosti $k_1, \ldots, k_k$.

Hodnoty parametrů z první skupiny vyčteme přímo z opčního kontraktu. Jako ilustrační příklad (dále o něm budeme hovořit jako o Příkladu) uvažujme opci na akcii Apple s realizační cenou $K = 350$ USD a datem splatnosti $T = 15.\,4.\,2011$.

Úmluva. Ve výpočtech používáme kalendářní konvenci 30E/360.

Hodnoty prvních dvou parametrů ze druhé skupiny závisí na okamžiku oceňování. V Příkladu oceňujeme opci na konci dne $t = 15.\,3.\,2011$,[4] kdy uzavírací cena podkladové akcie $S_t = 345.43$ USD.

Problematice stanovení bezrizikové úrokové míry jakož i počtu subobdobí a odhadům zbývajících parametrů ze třetí skupiny se věnují následující odstavce.

4.2.1 Odhad bezrizikové úrokové míry z put-call parity

V první kapitole jsme připomněli znění put-call parity.[5] Předpokládejme, že známe cenu call opce i put opce a jejich (společné) charakteristiky. Tento předpoklad je velmi reálný, neboť pokud jsou oba typy opce upsány, informace o cenách i o opčních kontraktech získáme na trhu (na burze). Proto dle put-call parity (1.1)

$$r_f = \left(\frac{K}{p_t + S_t - c_t}\right)^{\frac{1}{T-t}} - 1. \tag{4.1}$$

V našem Příkladu je uzavírací cena (k 15. 3. 2011) call opce 10.10 USD a put opce 14.45 USD. Dosazením do (4.1) dostáváme

$$r_f = \left(\frac{350}{14.45 + 345.43 - 10,10}\right)^{1/30} - 1 = 0.0020959\%.$$

Na základě (4.1) tudíž dokážeme odvodit „implikovanou“ denní bezrizikovou úrokovou míru. Ukážeme ovšem, že tuto metodu nelze použít pro odhad parametru r_f modifikovaného multinomického modelu.

[4] Doba do splatnosti tedy je $T - t = 30$ dní.

[5] Za předpokladu, že podkladová akcie nevyplácí dividendu.

Akcie	$\mathbf{S_t}$	**K**	$\mathbf{c_t}$	$\mathbf{p_t}$	$\mathbf{r_f}$ (%)
Apple	345.43	250	97.05	0.21	0.0189
	345.43	300	48.00	1.78	0.0088
	345.43	330	22.35	6.70	0.0022
	345.43	350	10.10	14.45	0.0021
	345.43	400	0.30	54.00	0.0073
IBM	159.02	155	6.65	2.50	0.0028
	159.02	165	1.72	7.46	0.0049
Microsoft	25.39	20	5.65	0.05	0.0352
	25.39	25	1.01	0.54	0.0107
	25.39	26	0.48	1.03	0.0077
	25.39	28	0.08	2.70	-0.0012
	25.39	33	0.01	6.70	0.0943

Pozn.: Doba do splatnosti opcí $T - t = 30$ dní.

Zdroj: finance.yahoo.com, vlastní výpočty.

Tabulka 4.1: Implikovaná denní bezriziková úroková míra

Z ekonomické podstaty bezrizikové úrokové míry[6] očekáváme jednak nezápornou hodnotu blízkou nule, jednak nezávislost na individuálních faktorech opcí (bezriziková úroková míra v dané ekonomice jistě nezávisí např. na realizační ceně opce).

Tabulka 4.1 obsahuje denní bezrizikovou úrokovou míru odpovídající třicetidennímu období počítanou k 15. 3. 2011 pro trojici podkladových akcií při různých realizačních cenách.

Zápornou hodnotu v předposledním řádku by bylo možné vysvětlit tím, že tržní subjekty očekávají výplatu dividendy do doby splatnosti opce. Výplata dividendy se současnou hodnotou D_t v čase t vede dle Cipra [3, str. 212] k formulaci put-call parity v podobě

$$p_t + S_t = c_t + D_t + K(1 + r_f)^{-(T-t)}.$$

Tím pádem se může stát, že je r_f ve vztahu (4.1) podhodnocena.

Očekáváním výplaty dividendy by se rovněž dala obhajovat pozorovaná závislost r_f, počítané ze vztahu (4.1), na akcii i závislost na realizační ceně opce – do opce s realizační cenou K_1 může investovat subjekt s jinými očekáváními ohledně výplaty dividendy, než má subjekt investující do opce s realizační cenou K_2.

MMM ovšem nepočítá s výplatou dividendy z podkladové akcie ani s individuálními očekáváními. Za pravděpodobnější příčinu nesrovnalostí v pozorovaných hodnotách r_f navíc považujeme existenci transakčních nákladů a přítomnost psychologických faktorů na trhu, které zkreslují tržní ceny a jež put-call parita nezohledňuje.

Vztah (4.1) se proto pro odhad bezrizikové úrokové míry vstupující do MMM použít nedá.

[6]Podotkněme, že v textu pracujeme s nominálními úrokovými mírami.

4.2.2 Odhad bezrizikové úrokové míry na základě výnosnosti státních cenných papírů

V souladu s finanční praxí budeme za bezrizikovou výnosovou křivku považovat křivku úrokových měr amerických[7] státních dluhopisů.[8] Tabulka 4.2 uvádí hodnoty bezrizikové výnosové křivky, z nichž vycházíme.

Datum	**1M**	**3M**	**6M**	**1Y**	**2Y**
15.3.2011	0.07	0.10	0.14	0.23	0.63

Zdroj: Ministerstvo financí USA [21].

Tabulka 4.2: Výnosnost amerických státních dluhopisů v % p.a.

Pro doby do splatnosti t, které v tabulce 4.2 nefigurují, budeme hodnoty bezrizikové výnosové křivky y_t odhadovat lineární interpolací.[9] Tím se zjevně dopouštíme určitých nepřesností, jež ovšem pro naše účely nejsou významné, neboť MMM-oceňovací formule není citlivá na malé změny r_f.

Jestliže y_{min} a y_{maj} jsou výnosnosti známé z tabulky 4.2, pak pro $min \leq t < maj$

$$y_t = y_{min} + \frac{y_{maj} - y_{min}}{maj - min} \cdot (t - min).$$

Tabulka 4.3 shrnuje vypočtené hodnoty bezrizikové výnosové křivky pro vybrané doby do splatnosti.

Datum	**3D**	**30D**	**65D**	**92D**	**120D**	**216D**	**305D**	**663D**
15.3.2011	0.0070	0.0700	0.0875	0.1009	0.1133	0.1580	0.2025	0.5667

Zdroj: Vlastní výpočty.

Tabulka 4.3: Bezriziková výnosová křivka v % p.a.

4.2.3 Počet období

Při volbě počtu subobdobí (parametru n) v MMM přihlížíme k

- době do splatnosti;
- výpočetní složitosti.

[7] Oceňujeme v dolarech denominované instrumenty na amerických burzách NYSE a NASDAQ.

[8] Někdy bývá za bezrizikovou výnosovou křivku pokládána křivka sazeb úrokových swapů. Dolarová swapová křivka se k datu oceňování (polovina března 2011) podle statistik FED [9] nacházela nad křivkou úrokových měr amerických státních dluhopisů

[9] Předpokládáme, že nulové době do splatnosti odpovídá nulová bezriziková výnosnost, tj. $y_0 = 0$.

Dobu do splatnosti vyjadřujeme ve dnech. Vzhledem k interpretaci subobdobí a metodologii odhadu parametrů ze 3. skupiny[10] požadujeme, aby byl počet dní v subobdobí celočíselný.

S rostoucím n exponenciálně se zvyšující výpočetní složitost MMM vede k praktickému omezení $n \leq 10$.[11]

4.2.4 Odhad u a d

V literatuře zabývající se oceňováním opcí se často setkáme s tím, že autoři vysloví předpoklad o pravděpodobnostním rozdělení výnosnosti akcie resp. o procesu ceny akcie[12] a parametry pak odvodí na základě momentové metody aplikované na historická data.[13]

Kan [13, str. 65-67] postupuje tak, že z historických cen výběrovými charakteristikami odhadne „průměrnou procentní změnu ceny akcie“ μ a volatilitu ceny akcie σ:

$$\mu\Delta t \approx \bar{U} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\Big(\frac{S_t}{S_{t-1}} - 1\Big),$$

$$\sigma\Delta t \approx s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\Big(\sum_{t=1}^{n}\Big(\frac{S_t}{S_{t-1}} - 1\Big)^2 - n\bar{U}^2\Big)}.$$

Dosazením odhadů do soustavy (odvozené za předpokladu, že $p = 0.5$)

$$\begin{aligned} \frac{u+d}{2} &= 1 + \mu\Delta t \\ u - d &= 2\sigma\sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

potom dostáváme

$$\begin{aligned} u &= 1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}, \\ d &= 1 + \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}. \end{aligned}$$

K jednotlivým prvkům množiny multinomických realizací dospějeme následujícím algoritmem:[14]

1. $\mathcal{C}_1$ získáme ze vztahu
$$\frac{(u+d)(1+\mathcal{C}_1)}{4} = 1 + \mu\Delta t;$$

[10] Jak záhy uvidíme, vychází z denních uzavíracích cen podkladových akcií.

[11] Za určitých okolností připustíme i vyšší n.

[12] Typicky normální rozdělení resp. geometrický Brownův pohyb, v novějších článcích pak vybraný druh Lévyho procesu.

[13] Z textů konstruujících opční oceňovací model pomocí stromových struktur jmenujme např. Cox, Ross a Rubinstein [5], Boyle [2], Tian [20] či Jabbour, Kramin a Young [12].

[14] Pojmenovaným Hull-White-Kan algorithm.

2. $\mathcal{C}_2 = 2 - \mathcal{C}_1$;

3. $\mathcal{C}_3$ získáme ze vztahu

$$\frac{(u+d)(1+\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2+\mathcal{C}_3)}{8} = 1 + \mu\Delta t;$$

4. $\mathcal{C}_4 = 2 - \mathcal{C}_3$;

... až do doby, kdy model dobře vystihuje reálná data.

V našem textu budeme vycházet čistě z historických tržních dat. Nevyslovíme žádný dodatečný předpoklad o rozdělení výnosnosti akcie[15] ani se nebudeme opírat o odhad jejích charakteristik. Budeme hledat nejlepší aproximaci napozorovaných hodnot v duchu metody nejmenších čtverců.

Nechť $\{S_t,\, t \in \Xi\}$ je časová řada denních uzavíracích cen akcie S. Označme počet dní v jednom subobdobí jako δ. Položme

$$Y_i = 1000 * \frac{S_i}{S_{i-\delta}}, \quad i = \delta + 1 \ldots, M_\Xi,$$

kde M_Ξ je počet prvků množiny Ξ.

Y_i označuje míru změny ceny akcie S za období od $i-\delta$ do i přenásobenou koeficientem 1000.[16] Časová řada $\mathbb{Y} = \{Y_{\delta+1}, \ldots, Y_{M_\Xi}\}$ představuje soubor aproximovaných hodnot.

Pro ilustraci pokračujme v Příkladu. Třicetidenní dobu do splatnosti rozdělíme do deseti subobdobí ($n = 10$), každé subobdobí má tři dny ($\delta = 3$). Za Ξ volme množinu pracovních dnů v období od 1. 12. 2010 do 15. 3. 2011. $S_{15.3.2011} = 345.43$ a $S_{10.3.2011} = 346.67$,[17] takže $Y_{15.3.2011} = 996.423$. Ξ obsahuje 72 prvků ($M_\Xi = 72$) a $\mathbb{Y}$ obsahuje 69 prvků.

Při odhadu množiny multinomických realizací, u a d (příslušejících jednomu subobdobí) v MMM metodou nejmenších čtverců (MNČ) řešíme úlohu

$$\operatorname{argmin} \sum_{i=\delta+1}^{M_\Xi} (Y_i - \widetilde{\vartheta}_i \cdot \widetilde{\mathcal{C}}_i)^2 \tag{4.2}$$

za podmínek

$$\widetilde{\vartheta}_i \in \{\vartheta_1, \vartheta_2\},\, \widetilde{\mathcal{C}}_i \in \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k\}, \quad i = \delta + 1, \ldots, M_\Xi,$$

$$\vartheta_1,\, \vartheta_2,\, \mathcal{C}_1,\, \ldots,\, \mathcal{C}_k > 0,$$

$$\vartheta_2\mathcal{C}_l < 1 + r_f < \vartheta_2\mathcal{C}_l, \quad l = 1, \ldots, k,$$

[15] Věrohodnost takového předpokladu považujeme za problematickou.

[16] K vynásobení vhodným koeficientem přistupujeme z toho důvodu, že s většími čísly se snáze a přehledněji pracuje.

[17] Na 12. a 13. březen 2011 připadl víkend. Na úkor názornosti tolerujeme formální nedostatky v indexování – indexovat by se mělo pořadím jednotlivých dnů v množině Ξ.

kde r_f je bezriziková úroková míra příslušející jednomu subobdobí.

Úlohu v této podobě ovšem řešit nebudeme, a to jednak kvůli její nesnadné implementaci do výpočetního softwaru a značné výpočetní složitosti, jednak kvůli tomu, že použitím odlišného přístupu se do určité míry dokážeme vypořádat s problematickým bodem zobecněného binomického modelu (GBM), jenž byl popsán v kapitole o GBM v poznámce 1.[18]

Soubor pozorovaní $\mathbb{Y}$ rozdělíme do dvou skupin podle toho, zda hodnoty reprezentují růst či pokles ceny akcie za dané období. Do množiny $\mathbb{Z}_u$ zařadíme ta Y_i, která vyjadřují růst ($Y_i \geq 1000$), do množiny $\mathbb{Z}_d$ zařadíme ta Y_i, která vyjadřují pokles ($Y_i < 1000$). Parametr u (resp. d) budeme odhadovat na základě $\mathbb{Z}_u$ (resp. $\mathbb{Z}_d$).[19]

Přirozeně působí odhad u (resp. d) jako trendu průměrem či mediánem (nebo jinou od nich odvozenou charakteristikou) $\mathbb{Z}_u$ (resp. $\mathbb{Z}_d$). Prvky množiny multinomických realizací potom interpretujeme jako náhodné odchylky od trendu, vyvolané nejrůznějšími faktory.[20] Jako hlavní nedostatky tohoto postupu uveďme skutečnost, že neřeší výše zmiňovaný problematický bod GBM a že při následné aplikaci odhadů z MMM vystupují neuspokojivé výsledky, což v konečném důsledku vede k hledání alternativ.

Parametr u budeme odhadovat 95 % výběrovým kvantilem $\mathbb{Z}_u$ a parametr d 5 % výběrovým kvantilem $\mathbb{Z}_d$.[21] Prvky $\mathcal{C}_1, \dots \mathcal{C}_k$ (multinomické realizace) množiny multinomických realizací $\mathbb{C}_k$ hledáme tak, aby se součiny $u\mathcal{C}_l$ resp. $d\mathcal{C}_l$ co nejvíce přiblížily k pozorováním ze $\mathbb{Z}_u$ resp. $\mathbb{Z}_d$. V $\mathbb{C}_k$ očekáváme jednak multinomické realizace menší než jedna, jejichž přítomnost zapříčiní zejména vůči průměru nadhodnocený odhad u, jednak multinomické realizace větší než jedna, jejichž přítomnost zapříčiní zejména vůči průměru podhodnocený odhad d. Zároveň je nezbytné zdůraznit, že tímto netvrdíme, že multinomické realizace $\mathcal{C}_l < 1$ jsou spjaty s růstem ceny akcie v daném subobdobí (čímž by byla porušena nezávislost ν_t a A_t), nýbrž pouze to, že v odhadu $\mathbb{C}_k$ očekáváme hodnoty významně menší než jedna i významně větší než jedna.

V ilustračním Příkladu dostáváme po seřazení $\mathbb{Z}_u = \{1052.43, 1035.47, 1034.24, 1033.65, \dots\}$, $\mathbb{Z}_d = \{932.476, 954.66, 956.238, \dots\}$. 95 % kvantil $\mathbb{Z}_u$ je 1034.24 a 5 % kvantil $\mathbb{Z}_d$ je 954.66. Jako extrémní hodnoty tudíž vylučujeme 1052.43 a 1035.47 resp. 932.476. Po zpětném vydělení koeficientem 1000 dospíváme k odhadům $u = 1.03424$ a $d = 9.5466$.

[18]Připomeňme, že v poznámce jsme konstatovali, že míra změny ceny akcie v t-tém subobdobí závisí jak při růstu (tj. v případě, že $\nu_t = u$), tak při poklesu (tj. v případě, že $\nu_t = d$) na téže hodnotě A_t. V MMM nelze uvažovat tak, že v případě růstu je pravděpodobnější jiná realizace A_t než v případě poklesu (a tím případ růstu a poklesu rozlišit), poněvadž A_t a ν_t nezávislé náhodné veličiny.

[19]V poznámce 14 v první kapitole jsme uvedli, že realizace d v daném subobdobí nemusí být nutně spjata s poklesem ceny akcie v tomto subobdobí. Opodstatněnější hranicí pro rozdělení $\mathbb{Y}$ do $\mathbb{Z}_u$ a $\mathbb{Z}_d$ by se tak jevila býti hodnota $1000(1 + r_f)$. Vzhledem k nízké úrovni bezrizikových úrokových měr v krátkém období jsme se ovšem interpretací realizace d jako skutečného poklesu ceny akcie v daném subobdobí (ekvivalentně hranicí pro rozdělení 1000) dopustili prakticky zanedbatelného pochybení.

[20]Např. rozkolísání trhu, změna rizika spojeného s akcií, výplata dividend, jiné nové cenotvorné informace.

[21]O výši kvantilů by se dalo diskutovat. Motivace je taková, že chceme odhadnout u nejvyšší hodnotou $\mathbb{Z}_u$ s případným vyloučením extrémů a d nejnižší hodnotou $\mathbb{Z}_d$ s případným vyloučením extrémů.

4.2.5 Odhad $\mathbb{C}_k$

Při určení počtu prvků množiny multinomických realizací $\mathbb{C}_k$ (parametru k) v MMM přihlížíme k

- počtu aproximovaných pozorování;
- kvalitě aproximace;
- výpočetní složitosti.

Výpočetní složitost MMM při povolených až deseti subobdobích ($n \leq 10$) prakticky neumožňuje klást k větší než pět.[22] Kvalita aproximace s k zřejmě roste. S přihlédnutím k tomu, že rozsah pozorovaných dat bude vždy dostatečný,[23] volíme $k = 5$.

Při odhadu prvků množiny multinomických realizací $\mathbb{C}_k$ uplatníme MNČ aplikovanou na data modifikovaná na základě již učiněných odhadů u a d. Prvky množiny $\mathbb{Z}_u$ resp. $\mathbb{Z}_d$ vydělíme odhadem u resp. d[24] a spojíme je do množiny $\mathbb{Z} = \{Z_{\delta+1}, \ldots, Z_\Xi\}$. Tímto jsme z hlediska úlohy (4.2) očistili Y_i o $\widetilde{\vartheta}_i$ a získali soubor hodnot, k nimž se chceme množinou multinomických realizací co nejvíce přiblížit. Skutečnost, že multinomické realizace odhadujeme ze všech dat nehledě na to, zda je jejich původním zdrojem růst či pokles ceny akcie v daném subobdobí, koresponduje s podmínkou nezávislosti náhodných veličin ν_t a A_t, $t = 1, \ldots, n$.

Řešíme úlohu

$$\operatorname{argmin} \sum_{i=\delta+1}^{M_\Xi} (Z_i - \widetilde{\mathcal{C}}_i)^2 \tag{4.3}$$

za podmínek

$$\widetilde{\mathcal{C}}_i \in \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k\}, \quad i = \delta + 1, \ldots, M_\Xi,$$
$$\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k > 0,$$
$$d\mathcal{C}_l < 1 + r_f < u\mathcal{C}_l, \quad l = 1, \ldots, k,$$

kde r_f je bezriziková úroková míra příslušející jednomu subobdobí.

Výslednou k-ticí $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ vydělenou koeficientem 1000 odhadujeme množinu $\mathbb{C}_k$.

Jako kritérium kvality aproximace pozorovaných dat odhadnutými parametry a nástroj porovnání jednotlivých výpočtů použijeme průměrnou čtvercovou odchylku:

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{M_\Xi}\Big(\sum_{\{i;\, Y_i \in \mathbb{Z}_u\}} \min_{\mathcal{C} \in \mathbb{C}_k} (Z_i - 1000u\mathcal{C})^2 + \sum_{\{i;\, Y_i \in \mathbb{Z}_d\}} \min_{\mathcal{C} \in \mathbb{C}_k} (Z_i - 1000d\mathcal{C})^2 \Big).$$

Pravděpodobnosti $k_1, \ldots, k_k$ odhadneme relativními četnostmi výskytu $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ v množině $\{\widetilde{\mathcal{C}}_{\delta+1}, \ldots, \widetilde{\mathcal{C}}_{M_\Xi}\}$ řešící úlohu (4.3)

V Příkladu vyjde $\mathbb{C}_k = \{0.97038, 0.98009, 0.99543, 1.02399, 1.04133\}$, MSE 15.1317 a $k_1, \ldots, k_k$ po řadě $\frac{16}{69}, \frac{18}{69}, \frac{16}{69}, \frac{7}{69}, \frac{12}{69}$. V souladu s očekáváním se v $\mathbb{C}_k$ nachází jak hodnoty významně menší než jedna, tak hodnoty významně větší než jedna.

[22] Pro vzájemnou srovnatelnost výpočtů zamítáme myšlenku přizpůsobovat k počtu subobdobí n.

[23] Nenarazíme např. na situaci, kdy pěti parametry aproximujeme čtyři pozorování.

[24] V jejich „skutečné výši“, tj. nevynásobené koeficientem 1000.

Uvědomujeme si relevanci námitky vůči popsané metodě odhadu parametrů, která říká, že zatímco teoretický model předpokládá, že změna ceny akcie za 1 subobdobí např. $1.04133u$-krát je stejně pravděpodobná jako $1.04133d$-krát, v tržních datech pozorujeme výskyt první situace ve významně menším počtu než výskyt druhé situace.

Dopad tohoto nedostatku však MMM automaticky minimalizuje. Jelikož

$$p_5 = k_5 \cdot \frac{1 + r_f - d\mathcal{C}_5}{\mathcal{C}_5(u-d)} = k_5 \cdot \frac{1+r_f}{\mathcal{C}_5(u-d)} - k_5 \cdot \frac{d}{u-d},$$

jde nadhodnocení $\mathcal{C}_5$ ruku v ruce se snížením hodnoty p_5, a tím i k malé váze tržně nekonformní situace ve výpočtu.

Analogicky ze vztahu

$$p_6 = k_1 \cdot \frac{u\mathcal{C}_1 - (1+r_f)}{\mathcal{C}_1(u-d)} = k_1 \cdot \frac{u}{u-d} - k_1 \cdot \frac{1+r_f}{\mathcal{C}_1(u-d)}$$

vyplývá, že podhodnocení $\mathcal{C}_1$ jde ruku v ruce se snížením hodnoty p_6, a tím i k malé váze tržně nekonformní situace ve výpočtu.

Poznámka. Při praktických odhadech množiny multinomických realizací z výpočetních důvodů neřešíme přímo úlohu (4.3). Uvažujeme následujícím způsobem:

Nechť v řešení úlohy (4.3) $\mathbb{W} = (W_{\delta+1}, \ldots, W_{\Xi})$ figuruje hodnota $\mathcal{C}_l$ pro indexy z množiny J_l, $l = 1, \ldots, 5$, tj.

$$J_l = \{j \in \delta + 1, \ldots, M_\Xi;\, W_i = \mathcal{C}_l\}, \quad l = 1, \ldots, 5.$$

Počet prvků J_l označme jako N_l, $l = 1, \ldots, 5$. Pak platí, že

$$\mathcal{C}_l = \frac{1}{N_l} \sum_{j \in J_l} Z_j, \quad l = 1, \ldots, 5, \tag{4.4}$$

neboť funkce $f(x) = \sum_{j=1}^{N} (Z_j - x)^2$ nabývá minima v bodě $x = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} Z_j$, o čemž se lze přesvědčit zderivováním (hladké) funkce f a vyřešením rovnice

$$2Nx - 2\sum_{j=1}^{N} Z_j \stackrel{!}{=} 0.$$

Jelikož

$$\sum_{l=1}^{5} \sum_{j \in J_l} (Z_j - \mathcal{C}_l)^2 = \sum_{l=1}^{5} \Big(\sum_{j \in J_l} Z_j^2 - 2\mathcal{C}_l \sum_{j \in J_l} Z_j + N_l \mathcal{C}_l^2 \Big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{5} \Big[\sum_{j \in J_l} Z_j^2 - \frac{2}{N_l} \Big(\sum_{j \in J_l} Z_j \Big)^2 + \frac{1}{N_l} \Big(\sum_{j \in J_l} Z_j \Big)^2 \Big] = \sum_{j=\delta+1}^{M_\Xi} Z_j^2 - \sum_{l=1}^{5} \frac{1}{N_l} \Big(\sum_{j \in J_l} Z_j \Big)^2$$

a první člen posledního výrazu je pevně daný, je minimalizace výrazu

$$\sum_{i=\delta+1}^{M_\Xi} (Z_i - \widetilde{\mathcal{C}}_i)^2$$

ekvivalentní maximalizaci

$$\kappa_N = \sum_{l=1}^{5} \frac{1}{N_l}\Big(\sum_{j\in J_l} Z_j\Big)^2.$$

Nechť $l_1, l_2 \in \{1,2,3,4,5\}$, $\frac{1}{N_{l_1}}\sum_{j\in J_{l_1}} Z_j < \frac{1}{N_{l_2}}\sum_{j\in J_{l_2}} Z_j$, $Z_y \in J_{l_1}$, $Z_x \in J_{l_2}$ a $Z_x < Z_y$. Ukážeme, že za takovýchto okolností není κ_N maximální:

Označme rozdíl Z_y a Z_x jako $\Delta > 0$ a zaměňme umístění Z_x a Z_y v indexových množinách, tj. nechť $Z_x \in J^*_{l_1} = (J_{l_1} \setminus y) \cup x$ a $Z_y \in J^*_{l_2} = (J_{l_2} \setminus x) \cup y$, potom

$$\sum_{j\in J^*_{l_1}} Z_i = \sum_{j\in J_{l_1}} Z_i - \Delta, \qquad \sum_{j\in J^*_{l_2}} Z_i = \sum_{j\in J_{l_2}} Z_i + \Delta,$$

$$\frac{1}{N_{l_1}}\Big(\sum_{j\in J^*_{l_1}} Z_j\Big)^2 + \frac{1}{N_{l_2}}\Big(\sum_{j\in J^*_{l_2}} Z_j\Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{N_{l_1}}\Big[\Big(\sum_{j\in J_{l_1}} Z_j\Big)^2 - 2\Delta\Big(\sum_{j\in J_{l_1}} Z_j\Big) + \Delta^2\Big] + \frac{1}{N_{l_2}}\Big[\Big(\sum_{j\in J_{l_2}} Z_j\Big)^2 + 2\Delta\Big(\sum_{j\in J_{l_2}} Z_j\Big) + \Delta^2\Big] =$$

$$= \frac{1}{N_{l_1}}\Big(\sum_{j\in J_{l_1}} Z_j\Big)^2 + \frac{1}{N_{l_2}}\Big(\sum_{j\in J_{l_2}} Z_j\Big)^2 + 2\Delta\Big[\frac{1}{N_{l_2}}\sum_{j\in J_{l_2}} Z_j - \frac{1}{N_{l_1}}\sum_{j\in J_{l_1}} Z_j\Big] + \Delta^2\Big(\frac{1}{N_{l_1}} + \frac{1}{N_{l_2}}\Big) >$$

$$> \frac{1}{N_{l_1}}\Big[\Big(\sum_{j\in J_{l_1}} Z_j\Big)^2 + \frac{1}{N_{l_2}}\Big[\Big(\sum_{j\in J_{l_2}} Z_j\Big)^2.$$

Bez újmy na obecnosti dále předpokládejme, že je množina aproximovaných hodnot $\mathbb{Z}$ vzestupně seřazená. Podle předcházející úvahy pak pro indexové množiny platí, že $J_1 = \{\delta+1, \dots, \delta+N_1\}$, $J_2 = \{\delta+N_1+1, \dots, \delta+N_1+N_2\}, \dots, J_5 = \{\delta+N_1+N_2+N_3+ +N_4+1, \dots, M_\Xi\}$. V množině $\{\delta+1, \dots, M_\Xi\}$ tedy hledáme zarážky $x_1 = N_1$, $x_2 = N_1+ +N_2$, $x_3 = N_1 + N_2 + N_3$ a $x_4 = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$, při nichž je κ_N maximální. Multinomické realizace nakonec odhadneme pomocí vztahu (4.4) a vydělením koeficientem 1000.

Takto formulovaná úloha ovšem neověřuje, zda $d\mathcal{C}_l < 1 + r_f < u\mathcal{C}_l$, $l = 1, \dots, k$. V uskutečněných výpočtech však tyto podmínky byly při maximu κ_N vždy splněny.

Pokud by $d\mathcal{C}_{l_1} > 1 + r_f$, nahrazením $\mathcal{C}_{l_1}$ v odhadu $\mathbb{C}_k$ hodnotou $\frac{1+r_f}{d} - 0.00001$ bychom se až na extrémní případy dopustili zanedbatelné nepřesnosti. Obdobně při $u\mathcal{C}_{l_2} < 1 + r_f$ a nahrazení $\mathcal{C}_{l_2}$ v odhadu $\mathbb{C}_k$ hodnotou $\frac{1+r_f}{u} + 0.00001$.

4.3 Parametry ve výpočtech

Výčet dob do splatnosti[25] oceňovaných opcí nalezneme v prvním řádku tabulky 4.3. Pro doby do splatnosti 305 a 663 dnů odhadujeme parametry na základě časové řady uzavíracích cen akcií v období od 1. 10. 2010 do 15. 3. 2011, pro zbylé doby do splatnosti pracujeme s obdobím začínajícím 1. 12. 2010.

[25] Dále je uvádíme ve dnech.

Diskutujme dále volbu počtu subobdobí n v MMM s přihlédnutím k požadavku na celočíselný počet dní δ v subobdobí a k omezení $n \leq 10$.

Aby se vlastnosti MMM projevily v pozorovatelné míře, preferujeme hodnoty větší než 4. Výjimku učiníme u třídenní doby do splatnosti, kde přirozeným způsobem klademe $n = 3$ a $\delta = 1$, a u dvaadevadesátidenní doby do splatnosti, kde z výpočetních důvodů neexistuje jiná alternativa než $n = 4$ a $\delta = 23$. U 65 a 663 denní doby do splatnosti povolujeme i „nadlimitní" hodnotu $n = 13$.

Při uvažované metodě kalibrace parametrů MMM nenacházíme důvod k tomu, aby kalkulovaná cena opce s rostoucím n konvergovala. Není proto jasné, jak zvolit n v případě, že existuje více vyhovujících způsobů rozložení doby do splatnosti na součin dvou celočíselných činitelů. V této situaci použijeme kritérium kvality aproximace MSE. Vybereme to n, pro nějž je MSE nejnižší.

Intuice nás vede k domněnce, že při dané době do splatnosti bude MSE s klesajícím počtem subobdobí (ekvivalentně s rostoucí délkou jednoho subobdobí) růst, neboť s délkou časového období roste volatilita cen akcie a dá se předpokládat, že cenové změny (poměry $S_i/S_{i-\delta}$) za delší období budou větší než změny cen v krátkém období. Skutečnost však tento předpoklad nepotvrzuje a ukazuje se, že minima MSE není vždy dosaženo při maximálním n.

Ve sledovaném Příkladu ($T - t = 30$) se nabízí možnosti $n = 5$, $n = 6$ a $n = 10$. MSE vychází po řadě 27.78, 21.06, 15.13. Volíme $n = 10$ a $\delta = 3$.

Délce jednoho subobdobí je zapotřebí přizpůsobit bezrizikovou úrokovou míru vstupující do výpočtu. Její výši v % p.a. vyčteme pro danou dobu do splatnosti $T - t$ z tabulky 4.3. Vzhledem ke konstrukci MMM ji musíme transformovat na úrokovou míru per jedno subobdobí. Jestliže y_{T-t} je bezriziková výnosnost odpovídající době do splatnosti $T - t$ vyjádřená desetinným číslem p.a., pak

$$r_f = (1 + y_{T-t})^{\frac{\delta}{360}} - 1.$$

V Příkladu je $y_{30} = 0.000\,7$, $\delta = 3$, a proto $r_f = 5.83 \cdot 10^{-6}$.

4.4 Aplikace MMM-oceňovací formule

Pro potřeby této subkapitoly označme jako MV skutečnou uzavírací cenu opce v USD k 15. 3. 2011 a jako AC arbitrážní cenu dané opce vypočtenou MMM-oceňovací formulí.

Následují tabulky porovnávající AC a MV pro opce na nákup jednotlivých akcií. Pro pole vyplněná pomlčkou není příslušná opce obchodována. Pro pole vyplněná křížkem je příslušná opce obchodována, ale při uvažovaném odhadu parametrů nelze MMM-oceňovací formuli použít.[26] Pro nevyplněná pole není cena příslušné opce z výpočetních důvodů kalkulována.

Nadhodnocení MV vůči AC může být zapříčiněno

[26] Podkladová akcie totiž ve sledovaném období za časové úseky délky δ zaznamenala pouze růst, pročež jsou všechny poměry $Y_i = 1000 \cdot S_i/S_{i-\delta}$ větší než 1000, což vyvolává selhání navržené metody odhadu parametru d na základě hodnot $Y_i < 1000$.

K	29		31		34	
T-t	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**
3	1.58	1.66	0.37	0.22	0.00	0.02
30	2.42	2.21	1.39	0.98	0.51	0.23
120	4.42	3.80	3.50	2.31	2.43	1.13
216	–		3.29	3.10	2.23	1.92

Zdroj: finance.yahoo.com, vlastní výpočty.

Tabulka 4.4: Opce na nákup akcie eBAY, spotová cena akcie 30.44

- psychologickými faktory,[27] které působí na investory a které teoretický model nedokáže přímo zachytit;
- dodatečnou bezpečnostní přirážkou, o kterou prodávající subjekt navyšuje teoreticky rovnovážnou cenu; dá se předpokládat, že s rostoucí dobou do splatnosti přirážka roste;
- transakčními náklady a jinými tržními frikcemi (např. marže), od nichž oceňovací modely abstrahují.

Vzhledem k vysoké míře organizace a standardizace burz NYSE a NASDAQ neočekáváme, že by transakční náklady hrály významnou roli.

Psychologické faktory mohou působit i opačně, tj. vyvolat podhodnocení MV vůči AC. Považujeme je za hlavní zdroj diference mezi AC a MV. Odhad parametrů MMM vychází z relativně dlouhé časové řady uzavíracích cen podkladových akcií. Investoři však mohou vcelku oprávněně přikládat větší váhu aktuálnímu trendům, které nemusí korespondovat s trendem dlouhodobým. V modelu předpokládaná cenová dynamika (dále o ní hovoříme jako o očekávání modelu) se pak neshoduje s očekáváními investorů na trhu.

Popsaný jev pozorujme u akcie eBAY. Prudkou změnu trendu v jejím kurzu dokumentuje pokles o 12 % za posledních 17 obchodních dní sledovaného období[28] a 25 % růst za předchozích 28 dní. V odhadu parametrů se projevuje jak růstová fáze, tak fáze poklesu, zatímco v investorech spíše převládá skepse ohledně dalšího vývoje ceny akcie, čímž zdůvodňujeme, že u opcí mimo peníze na akcii eBAY (tabulka 4.4) je MV podhodnocena (třebaže absolutní odchylky nejsou vysoké, v relativním vyjádření se jedná o desítky procent[29]).

U opcí v penězích (tzn. pro realizační cenu 29) je diference menší (u třídenní doby do splatnosti dokonce $MV > AC$), což vysvětlujeme tím, že se rozdíl v očekáváních stihl projevit jen v omezené míře a že protisměrně působí dodatečná bezpečnostní přirážka, uvedená mezi příčinami nadhodnocení MV vůči AC.[30]

[27] Zejména očekávání ohledně budoucího cenového vývoje.

[28] Období od 1. 12. 2010 do 15. 3. 2011

[29] Při porovnávání AC a MV sledujeme jak absolutní odchylku $AC - MV$, tak relativní odchylku $(AC - MV)/MV$.

[30] U opcí mimo peníze je při očekávaném poklesu ceny podkladové akcie tržní cena call opce ovlivněna bezpečnostní přirážkou jen minimálně.

K	19		20		21	
T-t	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**
3	0.69	0.74	0.12	0.13	0.01	0.02
30	1.29	1.13	0.78	0.53	0.43	0.23
65	1.63	1.45	1.14	0.85	0.77	0.48
92	1.84	1.55	1.37	0.97	1.00	0.58
305	–		×		–	
663	–		×		–	

Zdroj: finance.yahoo.com, vlastní výpočty.

Tabulka 4.5: Opce na nákup akcie General Electric, spotová cena akcie 19.61

Akcie General Electric vykazuje v posledních týdnech před datem oceňování opcí (15. 3. 2011) sestupný trend (avšak pozvolnější než eBAY), který vystřídal předchozí dlouhodobý růst. Očekáváme podobné dopady změny trendu do ocenění opcí, ovšem v menší intenzitě (vzhledem k pozvolnější změně trendu nižší odchylky MV od AC). Ceny opcí na nákup akcie General Electric (tabulka 4.5) našim očekáváním odpovídají.

U opcí na akcii IBM (tabulka 4.6) lze uvažovat stejně. Progresivní posilování kurzu akcie IBM z přelomu února a března 2011 vystřídala oscilace kolem mírně sestupného trendu, proto jsou očekávání investorů pesimističtější než očekávání oceňovacího modelu, tržní cena opce je nižší než vypočtená arbitrážní cena, a to tím víc, čím delší je doba do splatnosti.[31]

U opcí v penězích se při očekávaném poklesu akciového kurzu stane relativně významnějším faktorem dodatečná bezpečnostní přirážka prodávajícího subjektu, která působí ve směru nadhodnocování MV nad AC. V úhrnu se pro kratší doby do splatnosti MV a AC příliš neliší.

K	155		165	
T-t	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**
3	4.28	4.28	0.15	0.15
30	6.58	6.65	1.97	1.72
120	10.25	10.70	5.64	5.23
216	14.47	12.30	9.99	7.95
305	×			
663	×			

Zdroj: finance.yahoo.com, vl. výpočty.

Tabulka 4.6: Opce na nákup akcie IBM, spotová cena akcie 159.02

V podobném duchu pokračujme akcií Apple, pro níž ovšem nastává opačný případ, a sice že investoři jsou optimističtější (třebaže také očekávají znehodnocení kurzu) než model, čehož důsledkem je nadhodnocení MV vůči AC. Dodatečná bezpečnostní

[31] V kratším období se odlišnosti v očekávání projevují v menší míře.

K	250		300		330		350		400	
T-t	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**
3	95.43	97.45	45.43	45.60	15.73	16.10	1.93	1.88	0.00	0.01
30	95.46	97.05	46.44	48.00	21.82	22.35	10.57	10.10	0.63	0.30
65	95.64	98.15	49.07	51.70	27.07	29.50	16.40	17.85	3.05	2.64
92	95.49	99.20	46.72	54.65	23.00	32.80	12.16	21.85	1.05	4.80
120	95.57	100.20	48.13	57.70	25.63	35.80	14.92	24.54	2.26	7.40
216	95.74	103.00	49.02	65.70	27.40	45.45	17.06	34.89	3.84	16.00
305	×									
663	×									

Zdroj: finance.yahoo.com, vlastní výpočty.

Tabulka 4.7: Opce na nákup akcie Apple, spotová cena akcie 345.43

přirážka tentokrát působí stejným směrem jako nuance v očekávání. S prodlužující se dobou do splatnosti se rozdíly zvětšují.

Dlouhodobý růst ceny akcie Pfizer doprovází jen drobné výkyvy. Dosud primární příčina diference MV a AC (různé očekávání) by se u opcí na nákup akcie Pfizer neměla projevovat. Další faktory uvedené na počátku této subkapitoly by pak měly působit ve směru nadhodnocení MV vzhledem k AC.

Z dat v tabulce 4.8 vidíme, že při konzistentních očekáváních se tržní ceny opcí blíží cenám vypočteným MMM. V dlouhém období způsobí rozdíl dodatečná bezpečnostní přirážka.

K	18		19		20	
T-t	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**
3	1.76	1.78	0.77	0.83	0.08	0.10
30	1.85	1.83	1.05	0.98	0.49	0.40
65	1.96	1.92	1.23	1.24	0.69	0.67
92	×					
663	–		–		1.71	2.07

Zdroj: finance.yahoo.com, vlastní výpočty.

Tabulka 4.8: Opce na nákup akcie Pfizer, spotová cena akcie 19.76

Při porovnání tržních a arbitrážních cen opce na nákup akcie Citibank (tabulka 4.9) se kombinují jevy, s nimiž jsme se dosud setkali. V kurzu akcie Citibank nejsou patrné žádné trendy, při konzistentních očekáváních se obdobně jako u opcí na akcii Pfizer AC a MV liší jen minimálně s tím, že přehlížíme extrémy[32] a že v dlouhém období a obecně u opcí hluboko v penězích zesiluje vliv dodatečné bezpečnostní přirážky.

[32] Opce s realizační cenou 2 a maturitou 15. 4. 2011 a opce hluboko mimo peníze, kde je interpretace rozdílu AC a MV z tabulky 4.9 zřejmá.

K	2		4		5		7	
T-t	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**
3	2.44	2.42	0.44	0.45	0.00	0.01	0.00	0.01
30	2.44	2.56	0.49	0.49	0.04	0.03	0.00	0.01
65		2.44	0.55	0.55	0.10	0.07	0.00	0.01
92	2.44	2.43	0.53	0.57	0.09	0.10	0.00	0.01
305	2.44	2.50	0.68	0.81	0.25	0.33	–	
663	2.47	2.63	0.97	1.16	0.56	0.67	–	

Zdroj: finance.yahoo.com, vlastní výpočty.

Tabulka 4.9: Opce na nákup akcie Citibank, spotová cena akcie 4.44

K analogickým závěrům docházíme u opcí na akcii Microsoft (tabulka 4.10). Východiskem je očekávání poklesu jak tržními subjekty, tak modelem.

K	20		25		26		28		33	
T-t	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**	**AC**	**MV**
3	5.39	5.60	0.52	0.55	0.09	0.05	0.00	0.01	0.00	0.01
30	5.39	5.65	0.97	1.01	0.50	0.48	0.09	0.08	0.00	0.01
65		5.25	1.26	1.35	0.80	0.89	0.27	0.27		0.06
92	5.43	5.60	1.51	1.54	1.05	0.98	0.45	0.38	–	
120	5.45	5.30	1.63	1.66	1.17	1.16	0.55	0.49	0.05	0.05
216	5.60	5.75	2.10	2.07	1.65	1.64	0.98	0.92	–	
305	5.83	5.90	2.54	2.55	–		–		–	
663	6.92	6.60	4.14	3.65	–		–		–	

Zdroj: finance.yahoo.com, vlastní výpočty.

Tabulka 4.10: Opce na nákup akcie Microsoft, spotová cena akcie 25.39

K	16		17	
T-t	AC	MV	AC	MV
3	0.51	0.54	0.10	0.10
30	1.10	0.97	0.65	0.51
120	0.86	1.59	0.42	1.20
216	1.03	2.77	0.58	1.69
305	×		×	
663	×		×	

Zdroj: finance.yahoo.com, vl. výpočty.

Tabulka 4.11: Opce na nákup akcie Yahoo, spotová cena akcie 16.33

Kurz akcie Yahoo v pozorovaném období kolísá kolem konstanty. Po vzoru opcí na akcii Pfizer, Citibank a Microsoft bychom předpokládali, že ceny kalkulovaných opcí na akcie Yahoo budou přibližně stejné jako tržní hodnoty. Data v tabulce 4.11 však tento předpoklad nepotvrzují. Modifikovaný multinomický model s v textu uvažovaným odhadem parametrů nedokáže tržní ceny opcí na nákup akcie Yahoo vysvětlit. Nesystematičnost diferencí vzbuzuje dojem, že tyto opce jsou na trhu oceněny nesprávně.[33]

[33]Nesprávně ve smyslu arbitrážního oceňování.

Závěr

Opce se od jiných typů derivátů odlišují nerovnocenným postavením subjektů. Prodávající strana, která pasivně přijímá rozhodnutí kupujícího, požaduje za podstupované riziko kompenzaci v podobě opční prémie. Jedna z mnoha možných cest pro stanovení její výše se stala předmětem zájmu předloženého textu.

Arbitrážní cenu investičního instrumentu na úplném trhu určíme diskontováním očekávaného budoucího cash flow při ekvivalentní martingalové míře. Tuto techniku jsme ukázali na binomickém modelu (BM) oceňování opcí.

Základní a zásadní problém binomického modelu spočívá v omezení kladeném na vývoj ceny akcie (bazického instrumentu). Postupnými modifikacemi modelu jsme usilovali o odstranění tohoto nedostatku.

Ve zobecněném binomickém modelu (GBM) opouštíme předpoklad, že míra změny ceny akcie za jedno období nezávisí na čase. Jediným zdrojem nahodilosti zůstává nejistota, zda v daném období dojde k růstu či poklesu ceny akcie. GBM jsme odvodili zcela analogicky jako BM.

V náhodném zobecněném binomickém modelu (RGBM) existuje druhý zdroj nahodilosti v podobě náhodné amplitudy skoku. K RGBM jsme dospěli standardní technikou vyintegrování podmíněné střední hodnoty přes všechny realizace podmínky, přičemž jsme využili znalost GBM-oceňovací formule.

RGBM-oceňovací formule je však stěží prakticky použitelná. Přijali jsme proto dodatečné předpoklady a došli k multinomickému modelu.

V závěrečném kroku jsme jeden z dodatečných předpokladů upravili a dospěli k modifikovanému multinomickému modelu (MMM).

Po teoretickém odvození MMM-oceňovací formule jsme přistoupili k její aplikaci na reálná tržní data. Z burz NYSE a NASDAQ jsme vybrali čtveřici akciových titulů (Citigroup, General Electric, IBM a Pfizer resp. Apple, eBAY, Microsoft a Yahoo) a soubor evropských call opcí (lišících se dobou do splatnosti a realizační cenou) na jednotlivé akcie.

V první fázi jsme se věnovali odhadu parametrů modifikovaného multinomického modelu. Bezrizikovou úrokovou míru jsme se pokusili odhadnout pomocí put-call parity. Ukázalo se ovšem, že v tržní praxi tento vztah neplatí. Za bezrizikovou výnosnost jsme nakonec v souladu s finanční praxí považovali křivku úrokových měr amerických státních dluhopisů.

Při volbě počtu období jsme přihlíželi především k době do splatnosti a výpočetní složitosti. Počet období jsme shora omezili deseti (pro dvě doby do splatnosti jsme pracovali se třinácti obdobími) a řídili jsme se podmínkou na celočíselný počet dní v jednom období. Další parametry jsme odhadovali na základě časové řady historických pozorování výběrovými kvantily a metodou nejmenších čtverců.

Ve druhé fázi jsme odhady dosadili do MMM-oceňovací formule a porovnali kalkulované arbitrážní ceny opcí (AC) s jejich skutečnými tržními cenami (MV). Za příčiny nadhodnocení MV vůči AC považujeme psychologické faktory, které působí na investory a jež teoretický model nedokáže přímo zachytit (především očekávání budoucího vývoje akciového kurzu), dodatečnou bezpečnostní přirážku, o níž prodávající subjekt navyšuje teoreticky rovnovážnou cenu, a transakční náklady a další tržní frikce (např. marže), od nichž oceňovací modely abstrahují.

Pokud je v modelu předpokládaná cenová dynamika podkladové akcie konzistentní s očekáváním investorů (krátkodobý trend se neliší od dlouhodobého), pohybují se AC a MV v těsné blízkosti. S prodlužující se dobou do splatnosti se začíná projevovat dodatečná bezpečnostní přirážka, která vede k nadhodnocení MV vzhledem k AC a AC tak slouží jako dolní odhad MV. Stejný efekt nastává, pokud je opce v době oceňování hluboko v penězích.

V případě, že investoři jsou v očekávání budoucího vývoje ceny akcie skeptičtější než model, je MV vůči AC podhodnocena a AC tak může sloužit jako horní odhad tržní ceny opce. U krátkých dob do splatnosti se diference projeví v menší míře a protisměrně působící dodatečná bezpečnostní přirážka pak může zapříčinit vyrovnání nebo i nadhodnocení MV nad AC.

V případě většího optimismu investorů dochází k nadhodnocení MV vůči AC.

U opcí na nákup akcie Yahoo se vztah mezi AC a MV nepodařilo modifikovaným multinomickým modelem uspokojivě vysvětlit.

Literatura

[1] Black F., Scholes M. (1973): *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 81, 637-659.

[2] Boyle P.P. (1986): *Option Valuation Using a Three-Jump Process*, International Options Journal 3, 7-12.

[3] Cipra T. (2000): *Matematika cenných papírů*, HZ, Praha.

[4] Cont P., Tankov P. (2004): *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall, Boca Raton.

[5] Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M. (1979): *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics 7, 229-263.

[6] Dupač V., Hušková M. (2005): *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Karolinum, Praha.

[7] Dupačová J., Hurt J., Štěpán J. (2002): *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[8] Dvořák P. (2008): *Deriváty*, Oeconomica, Praha.

[9] Federal Reserve Statistical Release (2011): *Selected Interest Rates.* Dostupný na WWW: <http://www.federalreserve.gov/releases/h15/20110321/>

[10] Harrison J.M., Kreps D.M. (1979): *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*, Journal of Economic Theory 20, 381-408.

[11] Hull J.C. (2009): *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, New Jersey.

[12] Jabbour G.M., Kramin M.V., Young S.D. (2001): *Two-state Option Pricing: Binomial Models Revisited*, The Journal of Futures Markets, Vol. 21, No. 11, 987-1001.

[13] Kan N. (2005): *Generalized Multinomial CRR Option Pricing Model and Its Black-Scholes Type Limit*, Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten der Georg-August-Universität zu Götingen, Götingen.

[14] Lachout P. (2004): *Teorie pravděpodobnosti*, Karolinum, Praha.

[15] Lachout P. (2007): *Diskrétní martingaly*, skripta MFF UK. Dostupný na WWW: <http:www.karlin.mff.cuni.cz/~lachout/Vyuka/tp2/071023-Diskretni_Martingaly.pdf>

[16] Musílek P. (2002): *Trhy cenných papírů*, Ekopress, Praha.

[17] Rendleman R.J., Bartter B.J. (1979): *Two-State Option Pricing*, Journal of Finance, Volume 34, Issue 5, 1093-1110.

[18] Polák J. (1991): *Přehled středoškolské matematiky*, Prometheus, Praha.

[19] Shreve S.E. (2004): *Stochastic Calculus for Finance*, Springer-Verlag, New York.

[20] Tian Y.S. (2002): *A Trinomial Option Pricing Model Dependent on Skewness and Kurtosis*, International Review of Economics and Finance 7(3), 315-330.

[21] U.S. Department of the Treasury (2011): *Daily Treasury Yield Curve Rates*. Dostupný na WWW: <http://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield>

[22] World Federation of Exchanges (2011): *2010 WFE Market Highlights*. Dostupný na WWW: <http://www.world-exchanges.org/files/file/stats%20and%20charts/2010%20WFE%20Market%20Highlights.pdf>

Seznam tabulek

Dodatek A

Matematický aparát

Věta A.1. *Nechť n-rozměrný náhodný vektor* $\boldsymbol{X}$ *na pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *nabývá nejvýše spočetně mnoha hodnot* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots$ *s pravděpodobnostmi po řadě* $p_1, p_2, \ldots$ *Nechť* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je měřitelná funkce taková, že* $\mathrm{E}\,|\phi(X)| < \infty$*. Potom*

$$\mathrm{E}\,\phi(\boldsymbol{X}) = \sum \phi(x_k) p_k.$$

Důkaz. Viz Dupač a Hušková [6, str. 46, věta 3.5]. $\square$

Označení. Množinu všech náhodných veličin definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, které mají konečnou střední hodnotu, označíme $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Definice A.2 (podmíněná střední hodnota). Nechť $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ je σ-algebra. Náhodnou veličinu Y nazveme podmíněnou střední hodnotou náhodné veličiny X vzhledem k σ-algebře $\mathcal{B}$ a označíme $\mathrm{E}\,[X \,|\, \mathcal{B}]$, jestliže současně platí

(i) $Y \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P_{|\mathcal{B}})$;

(ii) $\int_B Y \,\mathrm{d}P = \int_B X \,\mathrm{d}P, \quad B \in \mathcal{B}.$

Věta A.3 (základní vlastnosti podmíněné střední hodnoty). *Nechť* $X, Y \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *a* $B \subset \mathcal{A}$ *je* σ*-algebra. Potom*

(i) pro lib. $a, b, c \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\mathrm{E}\,[aX + bY + c \,|\, \mathcal{B}] = a\mathrm{E}\,[X \,|\, \mathcal{B}] + b\mathrm{E}\,[Y \,|\, \mathcal{B}] + c \quad \textit{s.j.;}$$

(ii) $\mathrm{E}\,[\mathrm{E}\,[X \,|\, \mathcal{B}]] = \mathrm{E}\,X$*;*

(iii) jestliže X *je* $\mathcal{B}$*-měřitelná, pak* $\mathrm{E}\,[X \,|\, \mathcal{B}] = X$ *s.j.;*

(iv) jestliže $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *jsou* σ*-algebry, pak*

$$\mathrm{E}\,[\mathrm{E}\,[X \,|\, \mathcal{B}] \,|\, \mathcal{C}] = \mathrm{E}\,[\mathrm{E}\,[X \,|\, \mathcal{C}] \,|\, \mathcal{B}] = \mathrm{E}\,[X \,|\, \mathcal{C}] \quad \textit{s.j.;}$$

(v) jestliže jsou sigma-algebry $\sigma(X)$ *a* $\mathcal{B}$ *nezávislé, pak* $\mathrm{E}\,[X \,|\, \mathcal{B}] = \mathrm{E}\,X$ *s.j.;*

(vi) jestliže $XY \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *a* Y *je* $\mathcal{B}$*-měřitelná, pak* $\mathrm{E}\,[XY \,|\, \mathcal{B}] = Y \cdot \mathrm{E}\,[X \,|\, \mathcal{B}]$ *s.j.*

Důkaz. Viz Lachout [14, str. 41, věta 7.5 a str. 46, věta 7.13] a Shreve [19, str. 56]. □

Věta A.4. *Nechť* $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *a* $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k)$ *je měřitelná funkce. Pak existuje měřitelná funkce* $f : (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *taková, že*

$$\mathrm{E}\,[X \,|\, \sigma(Y)] = f(Y).$$

Důkaz. Viz Lachout [14, str. 48, věta 7.19]. □

Poznámka. Pro náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ platí $\sigma(\mathbf{X}) = \sigma(\sigma(X_1) \cup \ldots \cup \sigma(X_k))$. Viz Lachout [14, str. 11, poznámka 3.2].

Definice A.5 (ekvivalentní míry). Buď $(\Omega, \mathcal{A})$ měřitelný prostor, μ a ν míry na $\mathcal{A}$. Řekneme, že μ a ν jsou ekvivalentní míry, jestliže

$$\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \nu(A) = 0, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Definice A.6 (filtrace). Buď $T \subset \mathbb{R}$ neprázdná indexová množina, Ω neprázdná množina a $\mathcal{A}$ σ-algebra na Ω. Nechť pro každé $t \in T$ je $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ σ-algebra a nechť $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pro $s < t$, $s, t \in T$. Pak systém $(\mathcal{F}_t,\, t \in T)$ nazýváme filtrace.

Definice A.7 (adaptovaný proces). Buď $T \subset \mathbb{R}$ neprázdná indexová množina a $(\mathcal{F}_t,\, t \in T)$ filtrace. Stochastický proces $(X_t,\, t \in T)$ se nazývá $(\mathcal{F}_t,\, t \in T)$-adaptovaný (resp. adaptovaný na filtraci $(\mathcal{F}_t,\, t \in T)$), jestliže X_t je $\mathcal{F}_t$-měřitelná pro každé $t \in T$.

Definice A.8 (martingal). Nechť $(X_t,\, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t,\, t \in T)$-adaptovaný proces, v němž X_t má konečnou střední hodnotu pro každé $t \in T$.
Řekneme, že proces $(X_t,\, t \in T)$ je $(\mathcal{F}_t,\, t \in T)$-martingal (resp. martingal pro filtraci $(\mathcal{F}_t,\, t \in T)$), jestliže $\mathrm{E}\,[X_t \,|\, \mathcal{F}_s] = X_s$ *s.j.* pro každé $s < t$, $s, t \in T$.
Řekneme, že proces $(X_t,\, t \in T)$ je martingal, jestliže $(X_t,\, t \in T)$ je martingal pro přirozenou filtraci, tj. pro filtraci $(\sigma(X_s, s \le t),\, t \in T)$.

Podle následujícího tvrzení stačí pro spočetné indexové množiny ověřit platnost podmínky definice martingalu pouze pro všechny dvojice „sousedních“ prvků stochastického procesu.

Tvrzení A.9. *Uvažujme takovou indexovou množinu* T*, která lze očíslovat přirozenými čísly, a stochastický proces* $(X_t,\, t \in T)$*, jehož veličiny mají konečnou střední hodnotu a jenž je* $(\mathcal{F}_t,\, t \in T)$*-adaptovaný. Jestliže* $\mathrm{E}\,[X_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t] = X_t$ *s.j. pro všechna možná* $t \in T$*, pak* $(X_t,\, t \in T)$ *je* $(\mathcal{F}_t,\, t \in T)$*-martingal.*

Důkaz. Viz Lachout [15, str. 2, Lemma 1.6.]. □