Posudek disertační práce

„Numerická analýza parciálnich diferenciálních rovnic s aplikacemi v matematickém modelování“ Mgr. O. Havle.

Předložená disertační práce se skládá ze tří kapitol. První se zabývá analýzou vlastností prostorů $W^{1,p}(\Omega,T_h)$ (tzv. *broken Sobolev spaces*), které jsou využívány jako prostory pro bázové a testovací funkce u nespojité Galerkinovy metody. Jsou zde dokázány odhady normy stop funkcí z $W^{1,p}(\Omega,T_h)$, dále je dokázáno rozšíření výsledků známých pro interpolaci Sobolevových prostorů na případ prostorů $W^{1,p}(\Omega,T_h)$ a nakonec je dokázána lemma o vnoření $W^{1,p}(\Omega,T_h)$ do Besovova prostoru.

Ve druhé kapitole je analyzována nespojitá Galerkinova metoda pro řešení Poissonovy rovnice s Dirichletovou či Neumannovou okrajovou podmínkou. Pozornost se přitom zaměřuje na tzv. IIPG metodu (*incomplete interior penalty Galerkin method)*. Jsou zde odvozeny odhady chyb a dále je zde ukázáno, jak volit penalizační parametr h_Γ tak, aby byl dosažen optimální řád přesnosti metody.

Třetí kapitola ze zabývá řešením rovnic popisujících proudění mělké vody. Je zde ukázána modifikace Vijayasundaramova numerického toku pro tento typ úlohy. Navržená modifikace přitom splňuje některé přirozené požadavky na vhodnou metodu pro tento typ úloh (např. tzv. klid v jezeře).

Dále jsou k práci přidány dva dodatky obsahující numerické výsledky týkající se témat z kapitol 2 a 3. Numerické výsledky v dodatku A jasně dokumentují vlastnosti IIPG metody ukázané analyticky v kapitole 2. V dodatku B jsou uvedeny testy numerického řešení tzv. Riemannova problému a jeden test jednorozměrné úlohy s nerovným dnem. Tento poslední výsledek však není nijak komentován ani porovnán s analytickým řešením či s vyslekdy jiných autorů.

Všechny tři kapitoly obsahují velmi aktuální výsledky, které lze bezesporu považovat za vysoce přínosné jak pro další teoretický rozvoj nespojité Galerkinovy metody (kapitola 1 a 2), tak pro praktické problémy spojené s řešením rovnic mělké vody.

Po formální stránce je práce zpracovaná na dobré úrovni. Bohužel se v práci objevuje několik chyb ve vzorcích (pravděpodobně překlepů viz níže), což spolu s chybějícím seznamem značení do jisté míry komplikuje čtení tohoto velmi náročného textu. Dále bych práci vytknul jistou roztříštěnost témat. Autor ze zde zabývá třemi dosti odlišnými problémy, kdy jedinou přímou vazbou mezi kapitolami je využití věty 1.6 ve druhé kapitole. Celá práce tak navozuje dojem, že se jedná spíše o tři spojené články, než souvislý text k jednomu vybranému tématu.

I přes tyto uvedené výhrady považuji práci za velmi dobrou. Autor jednoznačně prokázal předpoklady pro samostatnou tvořivou práci a z tohoto důvodu tuto práci po zodpovězení níže uvedených dotazů **doporučuji k obhajobě**.

Poznámky k práci:

1. Ve vzorci (1.7) pravděpodobně chybí exponent p u prvního výrazu na pravé straně. Jedná se přitom o významný vzorec definující normu ve $W^{1,p}(\Omega,T_h)$!
2. Ve vzorci (1.7) chybí definice $|.|_{W^{1,p}(K)}$. Pravděpodobně se jedná o seminormu v Sobolevově prostoru, zde to však není uvedeno.
3. Symboly $v|_\Gamma{}^L$ a $v|_\Gamma{}^L$ jsou definovánu na str. 12 nahoře pouze pro prostor $W^{1,1}(\Omega,T_h)$, v kapitole 2 je však toto značení použito i pro $W^{1,p}(\Omega,T_h)$. Pravděpodobně měl tento symbol být definován pro $W^{1,p}(\Omega,T_h)$.

Jiří Felcman

4. Ve větě 1.6 (strana 14), je pravděpodobně chybně uvedena norma $L^p(\partial\Omega)$ místo $L^p(\partial K)$. Jedná se přitom o jednu z nejdůležitejších vět!
5. V důkazu věty 1.7 by bylo vhodné popsat, jakým způsobem bylo naloženo s výrazem $\varphi.n$ v posledním výrazu na straně 15.
6. Pravá strana vzorce (1.45) nezávisí na s! Znamená to, že $f'(s)$ je konstantní funkce?
7. V práci není uvedeno odvození diskrétní formulace Poissonovy úlohy (2.6-2.8). Ačkoliv se autorovi může zdát, že DG je standardní metoda, bylo by asi s ohledem na přidané penalizační členy vhodné provést kompletní odvození. Například v kapitole 3 je takové odvození provedeno pro metodu konečných objemů.
8. Na str. 57 je chybně uveden definiční obor funkce B (řádek pod vzorcem 3.16).
9. Vzorce 3.17 a 3.18 definující okrajové podmínky postrádají smysl. Na pravých stranách pravděpodobně nemají být funkce B.

Dotazy k obhajobě:

1. Odvozený vztah pro optimální volbu penalizačního parametru h_Γ vychází mimo jiné též ze tvaru formy $B(u,v)$ a je tedy zavislý na řešené rovnici. Bylo by možné nalézt podobný vztah pro obecnější úlohu (např. $-[p(x)u']' + q(x)u = f(x)$)? Dává tato jednorozměrná analýza též návod pro volbu tohoto parametru pro vícerozměrné úlohy?
2. Jak vysvětlíte „vlnku" v průběhu h na obrázku B.1 na pozici x=-0.3 a na obrázku B.2 na pozici x=-0.1?

V Praze, dne 26. července 2010

Doc. Ing. Jiří Fürst, PhD.