

## Posudek oponenta doktorské disertační práce

### Mgr. Blažena Frcalová: Spatio-temporal point processes

Předložená disertační práce je věnována časoprostorovým Coxovým bodovým procesům na křivce. Je studována třída Coxových procesů, jejichž řídicí intenzita je tvaru integrálu vzhledem k Lévyho bázi. Úloha nelineární filtrace (odhadu řídicí intenzity) je řešena pomocí metod Markov Chain Monte Carlo (MCMC). Hlavním přínosem práce je aplikace metod na analýzu neurofyziologických dat. Časoprostorový bodový proces na křivce je představován časy a místy, ve kterých dochází k nervovému impulsu při pohybu krysy v kruhové oblasti.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol, kterým předchází úvod. V první kapitole jsou shrnuty potřebné základy z teorie bodových procesů, časoprostorových procesů, náhodných měř, náhodných uzavřených množin a metod MCMC. Druhá kapitola obsahuje zavedení Coxova procesu na křivce a odvození souvisejících teoretických výsledků. Ve třetí kapitole jsou uvedeny výsledky použití popsaných metod na simulovaná a reálná data. Poslední kapitola pak přináší další možné přístupy k dané problematice.

První kapitola je složena ze známých výsledků. Ne vždy je ovšem zmíněno, z jakých zdrojů jsou převzaty. Zcela chybí informace o tom, kde lze nalézt důkazy vět 1.2, 1.3, 1.5 a 1.6. Vlastní teoretické výsledky autorky jsou obsaženy v druhé kapitole, která je převážně založena na článku publikovaném v Kybernetice. Jedná se o odvození základních charakteristik (vytvorující funkcionál, momentové míry prvního a druhého řádu) studovaného Coxova procesu. Věta 2.3 dává vyjádření vytvářejícího funkcionálu pro Coxův proces zkonstruovaný pomocí Lévyho báze. Pro speciální případ časoprostorového Coxova bodového procesu řízeného procesem Ornsteinova-Uhlenbeckova typu (OUCP) je uveden tvar vytvářejícího funkcionálu (důsledek 2.2) a faktoriální momentové míry druhého řádu (důsledek 2.3). Pro zavedený Coxův proces na křivce je odvozena míra intenzity a faktoriální momentová míra druhého řádu (věta 2.4), přičemž konkrétní tvar ve speciálních případech procesů s řídicí intenzitou OU typu je dán v důsledcích 2.4, 2.5 a 2.6. Pro posouzení správnosti volby modelu se používá reziduální analýza, ve které hraje důležitou roli inovační proces. Věta 2.5 obsahuje vzorec pro rozptyl škálované inovace v případě Coxova procesu na křivce. Důkazy všech uvedených výsledků jsou standardní a nijak zvlášť náročné.

Třetí kapitola vychází hlavně ze dvou publikací, ve kterých Blažena Frcalová vystupuje jako spoluautorka. V první části je provedena jednak simulace OUCP s Poissonovou bází na diskrétní mříži a také simulace Coxova procesu na spirále s řídicí intenzitou OU typu s Poissonovou bází. V obou případech je odhadnuta řídicí intenzita a posouzena vhodnost modelu. V druhé části kapitoly se autorka zabývá reálnými daty. Pro modelování je zvolen Coxův časoprostorový bodový proces takový, že intenzita pomocného Poissonova kótovaného bodového procesu generujícího Poissonovu bázi je dána Zernickeho polynomy. Výsledky jsou prezentovány graficky, slovní komentář je velmi stručný. V poslední kapitole je představen výpočetně rychlejší způsob řešení úlohy filtrace a také je naznačena možnost testování nezávislosti řídicí intenzity a křivky.

V závěru práce je seznam literatury, ve kterém lze nalézt několik nesrovnalostí. Položky [17] a [46] nejsou zařazeny abecedně. Používání pomlček u čísel stránek není jednotné, navíc u článků [13], [14] a [25] je odlišný zápis stránek. Názvy některých článků jsou velkými písmeny. Správný tvar jednoho z často citovaných autorů je Møller.

Po obsahové stránce je práce na dobré úrovni. Na několika místech by se hodil matematicky přesnější zápis. Některé pasáže mohly být důkladněji rozepsány. Jedná se například o důkazy tvrzení, které jsou často dost stručné. Obzvláště poslední dvě kapitoly, které tvoří důležitý přínos práce, by si pak zasloužily podrobnější vysvětlení, okomentování a rozvinutí. Výsledky numerické studie by měly být lépe popsány. Chápu, že čtvrtá kapitola pouze diskutuje další možné přístupy, ale přímo se nabízí provést simulační studii pro posouzení vlastností navrženého testu na platnost modelu založeného na náhodném poli. Některé v textu zavedené pojmy by bylo vhodnější uvést jako definice (např. SOIRS proces vláken, Lévyho báze). Je škoda, že se autorka nevyvarovala tiskových chyb a nepřesností ve vzorcích, např.  $\mathcal{A}$  místo  $\mathcal{F}$  na str. 9, chybějící nulté členy v důkazu věty 1.4, přebytečné závorky ve vzorci pro  $g_{X_i}(x)$  na str. 17 a v (1.18) na str. 19, chyba v prostředním zlomku ve vzorcích (1.27) a (1.28), záměna čitatele a jmenovatele v druhých zlomcích ve vzorcích (1.29) a (1.30),  $\subset$  místo  $\in$  ve (2.10),  $\in$  místo  $\subset$  ve (2.17), špatně umístěná závorka v rozkladu rozptylu na str. 35, přebytečná závorka ve vzorci (2.30), chybějící integrování podle  $y$  ve znění důsledku 2.6,  $x_2$  místo  $x_1$  ve vzorci pro  $B_s(x_1, x_2)$  na str. 39, chybějící stříška nad  $\Lambda$  ve vzorci pro  $\mathcal{V}(B)$  na str. 42,  $\Lambda_p$  místo  $\Lambda(p)$  na str. 43,  $W = \mathcal{A} \times [0, T]$  místo  $W = [0, T] \times \mathcal{A}$  na str. 47 a str. 49,  $0.38a$  místo  $0.34a$  na str. 49,  $r$  místo  $\pi$  ve vzorci pro  $L_m(r)$  na str. 57.

Rovněž by práci slušelo pečlivější zpracování. Na několika místech chybí vysvětlení použitých symbolů, např.  $B(\mathcal{W})$  v definici 1.12,  $(t_{(n)}, \xi_{(n)})$  v důkazu věty 1.4, Hastingsův poměr  $H$  na str. 41, kótou vážená  $K$ -funkce  $K_m$  na str. 57. Ne vždy je značení jednotné, např. pro atomy bodového procesu se na různých místech používají označení  $X_i$ ,  $x_i$ ,  $\xi_i$ ; pro realizaci bodového procesu symboly  $x$  a  $\varphi$ ; pro řídicí míru intenzity  $\Lambda_m$  a  $\Lambda$ ; pro řídicí intenzitu  $Z$ ,  $\Lambda$  i  $\lambda$ ; pro počátek  $O$  a  $0$ ; pro Lebesgueovu míru  $|\cdot|$  a  $\text{Leb}$ ; na str. 51 jsou tři různé symboly pro označení sekundy; pro prostor uzavřených množin a shora polospojitéch funkcí na nich je použito  $\phi_{usc}$  i  $\Phi_{usc}$ ; funkce délkové intenzity vláknového procesu je značena  $\lambda$  i  $L_A$ . Značení v podkapitole 1.3 o náhodných mírách nekoresponduje se značením pro bodové procesy (momentová míra  $n$ -tého řádu  $M^{(n)}$  vs.  $M_n$ , Markovovo jádro vs. pravděpodobnostní jádro). V důkazu věty 2.5 jsou odkazy na [12], Theorem 4.6.1 a [25], Theorem 1, přitom ani jeden z těchto článků takovéto věty neobsahuje.

K obsahu práce mám následující konkrétní dotazy a připomínky:

1. Věta 1.4 neplatí pro libovolné  $x$ . Mělo by se uvést, že  $x$  je tvaru

$$x = \{(t_1, \xi_1), \dots, (t_n, \xi_n)\}, \quad t_1 < \dots < t_n.$$

2. Aby byl Coxův proces dobře definovaný, musí být řídicí intenzita nezáporná a lokálně integrovatelná. Jaké jsou podmínky na  $k$  a  $\Phi$  v (1.17), aby toto platilo?
3. V podkapitole 2.1 je definován aditivní proces s časovým parametrem  $t \geq 0$ . Později se však pracuje s aditivním procesem  $Z'(\eta)$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^d$ . Jak je definován?
4. Odhad  $\gamma$  na obr. 3.5 je dost odlišný od skutečné hodnoty  $\gamma = 1$ . Dá se to nějak vysvětlit?
5. Na začátku kapitoly 4 se uvažuje podmíněná intenzita  $\lambda^*$  časového bodového procesu. Dole na str. 54 pak ovšem je  $\lambda^*(x, z)$ , kde  $(x, z)$  jsou souřadnice bodu v rovině. Jak spolu tyto podmíněné intenzity souvisí?
6. K čemu je nutné náhodné pole  $\tilde{Z}$  v definici 4.2?

7. Proč je odhad (4.6) nestranný? Neporuší diskretizace nestrannost?
8. Obálky uvažované v (4.8) jsou patrně míněny bodové. V tom případě vlastně jde o vícenásobné testování a zasažení horizontální osou některou z obálek není důvod k zamítnutí hypotézy.

Grafická a formální úprava textu je kvalitní. Bohužel některá typografická pravidla nejsou dodržována. Z typografických prohrěšků bych upozornil na chybné používání pomlček a rozdělovníků, tečku na začátku řádku na str. 9, drobné přetečení řádku na str. 22, špatně vysázené uvozovky nebo nepoužívání stojatého písma pro  $\supp$ ,  $\text{diam}$ ,  $\text{lim}$  a další matematické značky. Většina důkazů končí čtverečkem, ale u vět 2.1 a 2.2 tomu tak není. Znění důsledků není vysázeno skloněným písmem, což způsobuje, že není jasné, kde končí znění důsledku 2.1. Jednotlivé části obrázku 3.2 jsou označeny písmeny, u ostatních obrázků už toto označení chybí, i když se v textu na ně odkazuje. Na obrázek 1.1 není v textu vůbec žádný odkaz. Po jazykové stránce je práce na obstojné úrovni, i když na některých místech autorka s angličtinou zápasí. Vytknout by se daly některé neobratné formulace, nevyužívání čárek nebo chyby ve členech.

Uvedené nedostatky jsou většinou méně závažné, sice kazí dobrý dojem, ale nemění nic na tom, že práci hodnotím jako úspěšnou. Práce se zabývá aktuálními problémy z oblasti časoprostorových bodových procesů. Její hlavní přínos spočívá v řešení úlohy filtrování pomocí metod MCMC a aplikaci složitých metod na reálná data. Předložená disertační práce prokazuje předpoklady Mgr. Blaženy Frcalové k samostatné tvořivé práci.

V Praze, 31. července 2010



RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.  
KPMS MFF UK  
pawlas@karlin.mff.cuni.cz

