UNIVERZITA KARLOVA v PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

# ROZVOJ POROZUMĚNÍ ROVNICÍM NA 1. STUPNI ZŠ

# DEVELOPMENT OF EQUATION UNDERSTANDING AT PRIMARY SCHOOL

Diplomová práce

**Vedoucí diplomové práce:** RNDr. Darina Jirotková, Ph.D.

**Autor diplomové práce:** Věra Koudelková

**Studijní obor:** Učitelství pro 1. stupeň ZŠ

**Forma studia:** prezenční

**Diplomová práce dokončena:** březen 2011

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Dariny Jirotkové, Ph.D. s použitím uvedené literatury a informačních zdrojů. Práce nebyla využita k získání stejného nebo jiného titulu.

V Praze dne 10. 3. 2011

Podpis: ………………………………………

**Poděkování**

Děkuji vedoucí mé diplomové práce RNDr. Darině Jirotkové, Ph.D. za podporu, cenné rady a podnětné připomínky. Děkuji všem učitelkám a rodičům dětí, kteří mi vyšli vstříc při realizaci experimentů. Především však děkuji všem dětem, které byly ochotny se experimentů účastnit, protože bez nich by tato práce nemohla vzniknout.

## Anotace

Diplomová práce se zabývá rozvojem porozumění rovnicím na 1. stupni základní školy. V práci jsou popsány typové úlohy a matematická prostředí, v rámci kterých se vyskytují rovnice a soustavy rovnic. Je zde zmapován výskyt těchto úloh v učebnicích matematiky pro 1. stupeň základní školy.

Hlavní část práce je zaměřena na porozumění myšlenkovým procesům žáků při řešení rovnic. Obsahuje popis žákovských řešení úloh získaných realizací několika experimentů. Výsledkem jevové analýzy řešitelských postupů žáků je přehled jevů, které se při řešení úloh vyskytly.

## Klíčová slova

- rovnice
- propedeutika rovnic
- mechanismus poznávacího procesu
- matematická prostředí
- krokování
- zvířátka dědy Lesoně
- řešitelské postupy žáků
- jevová analýza

## Annotation

This master thesis concerns progress of junior school pupils in understanding of equations. It describes benchmark problems and mathematical environments in which equations and equation systems occur. Occurrences of such exercises in text books for primary schools are also mapped here.

The main part of this thesis is focused on comprehension of pupils' intellectual actions during solving the equations. Thanks to several experiments, it includes description of pupils' solutions of exercises. The result of the phenomenal analysis of pupils' solving processes is an overview of phenomena, which appeared during solving exercises.

## Keywords

- equation
- propaedeutic of equations
- mathematical learning environment
- mechanism of learning process
- walking
- Father Woodland
- pupils' solving processes
- phenomenological analysis

**Obsah**

# 1 Úvod

Matematika patřila mezi mé oblíbené předměty již od počátku mého vzdělávání, můj postoj k matematice se však lišil od postojů většiny mých spolužáků. Nepamatuji si již, co jsme se tenkrát učili, co mi však v paměti zůstalo, jsou okamžiky radosti, které přišly vždy, když se mi podařilo vyřešit některou složitější úlohu, jež vyžadovala větší mentální úsilí. Zájem o matematiku mi zůstal po celou dobu mého vzdělávání, avšak během studia na pedagogické fakultě ještě vzrostl. Bylo to způsobeno úlohami, se kterými jsme se v rámci výuky setkávali. Byly pro mě nové, velmi zajímavé, měla jsem (a stále mám) velkou motivaci je řešit. Nejvíce ze všech úloh mě zaujaly úlohy z prostředí zvířátek dědy Lesoně. Po určité době seznamování se s tímto prostředím se mi začal odkrývat smysl těchto úloh. Jsou propedeutikou rovnic, umožňují lépe uchopit význam neznámé a porozumět ekvivalentním úpravám rovnic.

Na základě těchto nových poznatků z didaktiky matematiky a jejich konfrontací se vzpomínkami na problémy mých spolužáků při řešení rovnic, jsem si začala klást různé otázky. Ptala jsem se především, čím jsou tyto problémy způsobeny, zda je možné jim určitým způsobem předcházet a jaké existují možnosti ve výuce matematice na 1. stupni ZŠ. Z těchto otázek se zrodilo téma mé diplomové práce.

V přípravné části práce jsou definovány základní pojmy a popsán proces budování matematických poznatků, který je východiskem dalších kapitol. Také zde nalezneme odpovědi na výše položené otázky. Je zde popsáno, v jakých matematických prostředích se setkáváme s úlohami, které usnadňují porozumění rovnicím, jak je zpracováno téma rovnic v učebnicích pro 2. stupeň ZŠ a v neposlední řadě, jak je propedeutika rovnic zpracována v učebnicích pro 1. stupeň ZŠ.

Při dalším zamýšlení se nad tématem této práce vyvstaly další otázky, na které jsem chtěla najít odpověď: Jakými způsoby žáci řeší úlohy, jež jsou propedeutikou rovnic? S jakými problémy se při tom setkávají? Jakých chyb se dopouštějí? Hledání odpovědí na tyto otázky se stalo předním cílem celé práce. Za tímto účelem bylo uskutečněno několik experimentů s dětmi různého věku. Popis jejich postupů při řešení rovnic zasazených do různých prostředí a analýzy těchto řešení je uveden v experimentální části této práce.

Cíle této diplomové práce jsou tedy tyto:

- Na základě učebnic matematiky zpracovat přehled oblastí, v nichž se na 1. stupni ZŠ vyskytuje myšlenka rovnic.
- Seznámit se s přístupem učebnic 2. stupně ke zpracování tématu rovnic.

- Zkoumat, jak žáci řeší rovnice v různých prostředích, odhalovat jejich strategie, porovnat jejich volbu na základě prostředí.
- Připravit scénář, zvolit vhodnou sadu úloh a realizovat experimenty.
- Experimenty zaprotokolovat a provést analýzu jevů, které s procesem řešení rovnic souvisí.

# 2 Přípravná část

Tato část je nazvána přípravná, protože zde popisuji svou přípravu na část následující, experimentální. V jednotlivých kapitolách se zabývám skutečnostmi, do kterých jsem před realizací samotných experimentů potřebovala více proniknout, hlouběji jim porozumět, nebo se s nimi seznámit.

## 2.1 Definice

**Rovnice**

V literatuře se můžeme setkat s několika definicemi rovnic. Například autoři Přehledu elementární matematiky (Hruša; Zelinka, 1957, s. 114) definují rovnice jako rovnost dvou funkcí téže proměnné $x$: $f(x) = g(x)$. Rovnice je vlastně úloha zjistit, pro která $x$ daná rovnost platí.

Další definici nalezneme v (Malinová, 1986, s. 47). Zde je rovnice definována jako výroková forma $V(x)$: $l(x) = p(x)$, která vyjadřuje rovnost polynomů $l(x)$ a $p(x)$. Těmito polynomy jsou výrazy s číselnou proměnnou $x$.

V učebnicích pro 8. třídy, kde se žáci s rovnicemi seznamují, jsou rovnice nejčastěji definovány jako rovnosti dvou výrazů, z nichž alespoň jeden obsahuje proměnnou (srov. např. Půlpán; Čihák; Trejbal, 2009, s. 89 nebo Binterová; Fuchs; Tlustý, 2009, s. 72). Stejně definuje rovnice i J. Polák (2008, s. 201):

*Jsou dány dva výrazy $L(x)$, $P(x)$ s proměnnou $x$. Mají se určit hodnoty této proměnné z daného číselného oboru M, pro něž jsou si rovny hodnoty obou výrazů. Zápis této úlohy ve tvaru*

$$L(x) = P(x)$$

*se nazývá rovnice. Výrazu $L(x)$ se říká levá strana rovnice, výrazu $P(x)$ pravá strana rovnice. Speciálně může být jedna strana konstanta; je-li jí nula, mluvíme o anulovaném tvaru rovnice. Proměnná $x$ se v rovnici nazývá neznámá. (K jejímu označení se užívají i jiná písmena, zpravidla z konce latinské abecedy.) Hodnoty neznámé (určitá čísla) $x_k$, pro něž je rovnice splněna, tj. platí rovnost $L(x_k) = P(x_k)$, se nazývají kořeny (řešení) rovnice. Číselný obor $\mathcal{M}$, ve kterém hledáme kořeny (řešení) rovnice, nazýváme oborem řešení rovnice.*

*Podmnožinou množiny $\mathcal{M}$, v níž jsou definovány oba výrazy $L(x)$ a $P(x)$, neboli průnik definičních oborů těchto výrazů, se nazývá definiční obor rovnice a značí se $\mathcal{D}$.*

Rovnice můžeme řešit pomocí ekvivalentních úprav. Podle (Janurová; Janura, 2004, s. 79) mezi ekvivalentní úpravy rovnice patří:

- *Přičtení stejného čísla nebo výrazu, který je definován v oboru proměnné dané rovnice, k oběma stranám rovnice*
- *Odečtení stejného čísla nebo výrazu, který je definován v oboru proměnné dané rovnice, od obou stran rovnice*
- *Násobení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem nebo výrazem, který je definován v oboru proměnné dané rovnice*
- *Dělení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem nebo výrazem, který je definován v oboru proměnné dané rovnice*
- *Nahrazení strany rovnice výrazem, který se jí rovná*
- *Záměna stran rovnice*

Při řešení rovnic se zpravidla převedou výrazy s neznámou na jednu (většinou levou) stranu rovnice a výrazy bez proměnné na stranu druhou.

## Lineární rovnice

Existuje několik typů rovnic.[1] Na základní škole se žáci zabývají lineárními rovnicemi a jejich soustavami.

*Lineární rovnicí s neznámou $x$ nazýváme každou rovnici tvaru*

$$ax + b = 0,$$

*kde $a$, $b$ jsou libovolná reálná nebo komplexní čísla.*

*Pro řešení lineární rovnice $ax + b = 0$ v oboru $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$ mohou nastat právě tyto tři případy:*

a) *Je-li $a \neq 0$, je ekvivalentní s rovnicí $ax = -b$, takže má právě jeden kořen $x = -a/b$.*

b) *Je-li $a = b = 0$, má nekonečně mnoho řešení: jejím kořenem je každé reálné, resp. komplexní číslo.*

c) *Je-li $a = 0$, $b \neq 0$, nemá žádné řešení.*

[1] Algebraická rovnice - rovnice 1. stupně zvané lineární rovnice a rovnice 2. stupně zvané kvadratické rovnice. Nealgebraická rovnice - rovnice iracionální, exponenciální, logaritmické a goniometrické. Lze ovšem uvažovat též rovnice kombinovaných typů. (více viz Polák, 2008, s. 204)

Pod výše uvedenou citací se v knize (Polák, 2008, s. 205) objevuje poznámka, že podle definice algebraických rovnic v předešlé kapitole je lineární rovnice algebraickou rovnicí 1. stupně, právě když platí $a \neq 0$. Z toho tedy vyplývá, že lineární rovnice má pouze jedno řešení a tím je $x = -a/b$.

Jako lineární rovnici běžně označujeme i takovou rovnici, kterou ekvivalentními úpravami převedeme na uvedený obecný tvar. Lineárními rovnicemi rozumíme rovnice, ve kterých neznámá $x$ vystupuje pouze v první mocnině.

### Soustavy lineárních rovnic

Určitá situace může být popsána několika rovnicemi, které platí současně. V tomto případě se jedná o soustavu rovnic. Hodnoty řešení rovnic musí vyhovovat všem rovnicím soustavy (Delventhal; Kissner; Kulick, 2004, s. 228). V knize (Janurová; Janura, 2004, s. 83) je soustava dvou lineárních rovnic definována takto:

*Rovnice*

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

*vytvářejí soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých $x$, $y$.*

*Řešením soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými je množina uspořádaných dvojic, jejichž souřadnice vyhovují oběma rovnicím.*

*Při řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých nastává právě jeden ze tří případů:*

*a) Soustava má právě jedno řešení – přímky (grafické vyjádření řešení jednotlivých rovnic soustavy) se protínají v jednom bodě.*

*b) Soustava má nekonečně mnoho řešení – přímky splývají, $a_1 = k \cdot a_2$, $b_1 = k \cdot b_2$, $c_1 = k \cdot c_2$, $k \neq 0$.*

*c) Množina řešení je prázdná – přímky jsou rovnoběžné různé, $a_1 = k \cdot a_2$, $b_1 = k \cdot b_2$, $c_1 \neq k \cdot c_2$, $k \neq 0$.*

Soustavy rovnic se řeší různými metodami. Kterou z nich použijeme, záleží na tvaru jednotlivých rovnic. Některé jsou často používané, jiné méně (metoda determinantu nebo také nazývána Cramerova metoda), proto zde zmiňuji pouze nejčastější metody (Janurová; Janura, 2004, s. 83-85):

***Metoda dosazovací:***[2] *Při použití této metody vyjádříme z libovolné rovnice jednu neznámou a tuto závislost dosadíme do druhé rovnice.*

***Metoda sčítací****: Při sčítací metodě vytvoříme takové násobky obou rovnic, že po sečtení jejich levých a pravých stran získáme novou rovnici, která obsahuje pouze jednu neznámou*

***Metoda porovnání stran:***[3] *Z obou stran rovnice vyjádříme tutéž neznámou v závislosti na druhé a porovnáme strany obou rovnic.*

Žáci, kteří řeší soustavy rovnic zasazené do určitého kontextu či prostředí, často využívají metodu, kterou citovaná literatura neuvádí. Jde o metodu pokus – omyl, s níž se často setkáváme v praktické části této diplomové práce.

Dočetli jsme se, jak jsou rovnice a soustavy rovnic definovány v odborné literatuře. V této práci budeme považovat za rovnice takové úlohy, v jejichž zadání se (v případě jedné neznámé) nevyskytuje neznámá na jedné straně rovnice samostatně. V případě více neznámých tato podmínka platit nemusí. Z definice tedy plyne, že úlohu $3 + 5 = \_$ za rovnici nepovažujeme na rozdíl od úloh $\_ + 5 = 8$ nebo $5 + \_ = 8$.

## 2.2 Proč (se) učit rovnice

Kdo z nás si v průběhu svého vzdělávání nepoložil otázku: „A k čemu mi tohle vlastně bude? Proč se to musím učit?“ Také žáci pokládají tuto otázku učiteli. Chtějí znát smysl svého snažení. Je velice důležité, aby jim učitel na tuto jejich otázku dokázal odpovědět. Avšak i učitel by měl znát smysl svého počínání, proč vlastně toto děti učí? Proto se snažíme i zde popsat důvod, proč bychom měli ve škole děti rovnice učit.

Jedním z důvodů může být získání všeobecného přehledu nebo také nástroje k řešení různých problémů běžného života. Jednou takovou situací může být například nákup. Během praxe v rámci mého studia jsem měla možnost jet s dětmi na výcvik plavání. Když skončil, všechny děti se nahrnuly ke stánku se sladkostmi. Ze všeho nejradši kupovaly pendreky. V nabídce byly malé za 10 Kč a velké za 15 Kč. Děti měly určitý obnos peněz. Většinou chtěly utratit všechno. Musely se tedy rozhodnout, jak peníze použijí. „Kolik si můžu koupit malých pendreků, když si koupím tři velké?“

S rovnicemi se setkám i při jiných příležitostech. Například máme určité množství kachliček na opravu koupelny a chceme spočítat, do jaké výšky by měly kachličky sahat, abychom

[2] Také označovaná jako substituční (Polák, 2008, s. 269)
[3] V jiné literatuře označena jako metoda srovnávací (Polák, 2008, s. 269).

využili optimální množství kachliček a aby zároveň koupelna vypadala co nejlépe. K tomu lze použít vzorce pro obsah, který je též rovnicí.

Mnoho rovnic nalezneme ve vědních oborech, jako jsou fyzika či chemie. Například holandský fyzik van der Waals získal za svou rovnici[4] v roce 1910 Nobelovu cenu (Svoboda, 1998, s. 149). V chemii se setkáme například se směšovací rovnicí, která se používá při mísení roztoků ke zjištění koncentrace některého z nich, nebo roztoku výsledného (Vacík, 1996, s. 52).

Zajímala jsem se také o využití rovnic v praxi, v různých oborech a povoláních, hledala jsem konkrétní příklady jejich využití. Proto zde uvádím rovnice[5] z různých oborů, většinou technických, ale překvapivě mohou být rovnice využívány například také v archeologii. Nejedná se však ve všech případech o lineární rovnice.

Například stavební inženýři používají rovnice velmi často. Jako ukázku uvádím momentovou rovnici k bodu $A$. Tato rovnice je součástí souboru rovnic, které se využívají při výpočtu účinku vnitřních sil v konstrukci. Tou může být například železobetonová stropní deska. Pomocí tohoto souboru rovnic vypočítáme, v kterých místech má být tato deska vyztužena a jaký musí mít daná výztuž průměr (Stejskal; Kuliš, 1996, s. 126).

$$R_B \cdot 3a - F \cdot 2a = 0, R_B = \frac{2F}{3} \text{ a podobně } R_A = \frac{F}{3}.$$

Také kartografové používají při své práci rovnice, například při tvorbě map. Existuje mnoho různých zobrazení Země a tedy i různých rovnic, které se k tomu využívají. Zde uvádím zobrazovací rovnice Ptolemaiova kuželového zobrazení v normální poloze, pomocí něhož bylo vytvořeno přibližně 40 % map ve Školním atlase světa (Čapek, 1992, s. 59).

$$\begin{aligned} \lambda' &= \cos \delta_0 \cdot \lambda \\ \rho &= r \cdot [\operatorname{tg} \delta_0 - \operatorname{arc}(\delta - \delta_0)] \end{aligned}$$

V již zmiňované archeologii se může využívat rovnic při výpočtu vzdálenosti různých nalezišť. Je-li v určité lokalitě několik nalezišť a archeologové chtějí zjistit, v jaké vzdálenosti mají hledat další, mohou použít například tzv. test R, v němž platí tyto rovnice (Kuna, aj., 2004, s. 435):

$$\bar{r}_p = \frac{\sum r}{n};\ \bar{r}_o = \frac{1}{2\sqrt{p}};\ \text{přičemž } p = \frac{n-1}{A};\ R = \frac{\bar{r}_p}{\bar{r}_o}.$$

[4] Van der Waals svou rovnicí zpřesnil stavovou rovnici pro ideální plyn, která popisuje vztah mezi charakteristikami tohoto plynu – termodynamickou teplotou, tlakem a objemem (Svoboda, 1998, s. 148 – 149).

[5] Rovnice blíže nepopisuji a nevysvětluji, není to cílem této práce. Více o nich se čtenář může dozvědět v uvedené literatuře.

Rovnice jsou využívány také v železniční dopravě. Cestující a přepravci mají přání a požadavky, kterým se snaží železniční doprava vyhovět. Kapacita železničních tratí však není neomezená. Proto je potřeba určit počet vlaků, které mohou za určitou dobu projet určitým úsekem trati (například mezi dvěma stanicemi). K tomu se používá praktická propustná výkonnost. Zde vidíme rovnici, pomocí které lze tuto propustnost vypočítat (D 24, s. 9):

$$n = \frac{T - \left(T_{výl} + T_{stál}\right)}{t_{obs} + t_{dod} + t_{ruš}}.$$

## 2.3 Budování matematických poznatků

Jak vlastně naše poznání vzniká a dále se utváří? Tomuto tématu se věnuje M. Hejný ve svých několika pracích, např. (Hejný, 2004, Hejný, 2007, Hejný; Kuřina, 2009), ze kterých také vycházím v této kapitole. Hejného teorie generického modelu je východiskem této práce, proto zde stručně uvádím její podstatu.

Základem této teorie je předpoklad, že *v poznávacím procesu člověk obvykle nejdříve porozumí několika konkrétním příkladům, všímá si, co mají společného, a dochází tak k obecnějším a abstraktnějším poznatkům* (Hejný; Kuřina, 2009, s. 128). Na základě této skutečnosti je proces nabývání matematických poznatků rozložen do čtyř hladin, resp. etap (motivace, izolované modely, generické modely a krystalizace) a dvou hladinových přechodů, mentálních zdvihů[6] (zobecnění a abstrakční zdvih). Zde jsou popsány blíže:

**Motivace** – Je velmi důležitou součástí, je předpokladem, hybnou silou poznávacího procesu. Jde o potřebu něco se dozvědět, něco objevit, poznat. Vzniká z rozporu mezi *„nevím"* a *„chtěl bych vědět"* (Hejný, 2004, s. 27).

**Izolované modely**[7] – Jedná se o konkrétní zkušenosti, jednotlivé případy budoucího poznání, které jsou ve vědomí člověka uloženy nejdříve odděleně, izolovaně.[8] Izolovaným modelem lineární rovnice mohou být úlohy $\_ + 5 = 8$, $\square + 5 = 8$ nebo „Alois a Bedřich stojí vedle sebe. Alois udělá 8 kroků, Bedřich udělá nejprve několik kroků a poté 5 a opět stojí vedle sebe. Kolik kroků Bedřich nejprve udělal?" *Čím víc takových různorodých modelů dítě pozná, tím pevnější bude jeho výsledné poznání* (Hejný, 2004, s. 28).

---

[6] V (Hejný; Kuřina, 2009) užívá autor pojmů *etapa a mentální zdvihy*, v (Hejný, 2004) volí místo nich nově pojmy *hladina a hladinový přechod*.
[7] V některých statích (Hejný, 2004) se setkáme s ekvivalentním pojmem *separované modely*.
[8] Z toho je patrně také odvozen jejich název.

**Zobecnění** (přechod) – Když na sebe jednotlivé izolované modely budoucích poznatků začnou vzájemně poukazovat, různě se seskupovat a organizovat, když si člověk uvědomí vzájemné vazby izolovaných modelů, může dojít ke konstrukci generického modelu, k zobecnění. Jedná se vlastně o hlubší a operativnější vhled do dosavadního poznání, k němuž dojde často náhle, během krátkého časového úseku. Autor také nazývá tuto fázi jako *„aha-okamžik"* (Hejný; Kuřina, 2009, s. 139).

**Generické modely**[9] – Jsou výsledkem hladinového přechodu zobecnění. Došlo k nalezení společné podstaty skupiny izolovaných modelů. Generický model je tedy prototypem kteréhokoli z těchto izolovaných modelů. Zatímco izolovaný model má podstatu ukázky, konkrétního příkladu, generický model představuje obecný návod, vzorec či algoritmus. Generickým modelem uvedených izolovaných modelů lineární rovnice může být pravidlo: „Vezmi výsledek, odečti to, co znáš, dostaneš neznámou."

Existuje ještě zvláštní hraniční typ modelu mezi modely izolovanými a generickými. Je nazýván **vzor**. Je to pomůcka či pravidlo, které nám někdo sdělil. Můžeme ho použít k řešení úloh, ovšem není plnohodnotným generickým modelem. Nepostihuje podstatu souboru izolovaných modelů, je pouze jejich reprezentantem, proto není použitelný v nestandardních situacích. Je však možno vzor na generický model oživit. K oživení může dojít během řešení nových, dosud nepoznaných situací (Hejný; Kuřina, 2009, s. 133 – 135).

**Abstrakční zdvih** (přechod) – V rámci abstrakčního zdvihu, dalšího „aha-okamžiku", vzniká abstraktní poznání,[10] které je spojeno se změnou jazyka, využívá symboliky. V souboru izolovaných a generických modelů dojde k restrukturalizaci a nový vhled má abstraktnější charakter. Abstraktním poznatkem by tedy mohla být rovnice $x + 5 = 8$.

**Krystalizace** – Během krystalizace dochází k propojování nového poznatku s již existujícími poznatky. Nová znalost je přizpůsobována dřívějším vědomostem a zároveň mění již existující strukturu poznatků. Tento proces je zpravidla dlouhodobý.

Jednotlivé hladiny se vzájemně prolínají, neprobíhají nutně v uvedeném sledu. *Poznávací proces probíhá většinou tak, že se nová zkušenost otiskuje do několika hladin najednou* (Jirotková, 2010, s. 22).

[9] Dříve byl používán pojem *univerzální modely* (Hejný; Kuřina, 2009, s. 132)

[10] Pokud je budování pojmu spojeno s předmětnými představami, dochází zpravidla v abstrakčním zdvihu k oproštění od nich.

## Schéma

Na základě dalších experimentů obohatil Hejný teorii generických modelů o novou myšlenku převzatou z kognitivní psychologie – o koncept schématu, jemuž věnuje poměrně rozsáhlou studii (Hejný, 2007).

Pojem schéma je abstraktní poznatek. Abychom mu mohli blíže porozumět, potřebujeme získat konkrétní představu. Proto autor vysvětluje tento pojem pomocí konkrétních ilustrací. Mezi často citované patří schéma bytu. Vlastní byt dobře známe. Jsme schopni najít některé věci i potmě nebo spočítat, kolik je v bytě koberců, i když tam právě nejsme. Dokážeme to ne proto, že jsme se to cíleně učili, ale protože se v daném prostředí pohybujeme, žijeme tam. Stejně tak můžeme budovat schémata matematických pojmů, a to tím, že se budeme pohybovat v různých matematických prostředích.

*Schéma matematického objektu je tvořeno souborem generických a případně i některých izolovaných modelů tohoto objektu a souborem vazeb mezi těmito modely. … Izolované modely vystupují jako informace shlukující se do klastrů*[11] *a tvoří půdu pro vznik schématu. Schéma ale vzniká až objevením se prvního generického modelu. Všechny dřívější izolované modely i ty, které se objeví dodatečně, náleží do schématu, ale opěrnými sloupy schématu jsou jeho modely generické* (Hejný, 2007, s. 82, 86).

Ve snaze hlouběji pochopit průběh poznávacího procesu jsem hledala další různé ilustrace, které by mi k tomu napomohly. Diskutovala jsem o tomto také se studentkou a začínající učitelkou S. Holákovou. Výsledkem našeho společného přemýšlení je tato nematematická ilustrace: Chceme si vytvořit knihovnu. Na počátku máme pouze několik knih (každá z knih pro nás může znamenat jeden izolovaný model určitého pojmu), postupně však přidáváme knihy další. Zatím nejsou nijak speciálně uspořádány, dáváme je například pouze na menší hromádky (klastry izolovaných modelů). Máme-li knih více, všimneme si, že u některých můžeme najít podobné vlastnosti, začneme je tedy pro lepší orientaci podle tohoto kritéria třídit (generický model). Můžeme začít například podle velikosti, děti by možná volily jako kritérium ilustrace: knihy s obrázky, knihy bez nich. Když však přibývají další různorodé knihy, zjistíme, že některé knihy mají společné další charakteristiky. Proto zvolíme další pravidlo strukturace, např. žánr, v rámci něj pak třídění podle autora apod. Tímto způsobem jsme si utvořili schéma pojmu kniha. Chtěla bych však upozornit na skutečnost, že knihy musí být různorodé, od pohádek až k encyklopediím. Čím různorodější, tím lepší budeme mít představu o tom, co je kniha. Pokud bychom sbírali pouze encyklopedie, nevytvoříme schéma knihy, ale právě schéma pojmu encyklopedie.

[11] Klastry jsou chápány jako soubory informací náležejících k jednomu schématu, které zatím nejsou vzájemně propojeny nebo jsou propojeny nedostatečně.

Schéma tedy není pouze množina jednotlivých prvků, ale také soubor vazeb mezi nimi. Přičemž celá tato organizace je proměnlivá, některá schémata jsou stabilnější, jiná naopak flexibilnější. Některá rozsáhlejší schémata vznikají propojením schémat menších, jsou tedy tvořena *podschématy* (Hejný, 2007, s. 86). Například schéma pojmu encyklopedie je podschématem pojmu kniha.

Kvalitu schématu určuje především bohatost a různorodost jeho generických modelů. Z nich si řešitel při řešení úlohy týkající se tohoto schématu volí generický model, který nejlépe dané situaci vyhovuje. (Chce-li najít knihu Povídání o pejskovi a kočičce, zvolí generický model – např. rozdělení knih podle žánru – a bude hledat mezi pohádkami.) Pokud však takový generický model ve svém schématu nenajde, stává se pro něj tato úloha problémem. *Úlohy, které jsou pro žáky nesnadné, ukazují na nedostatečné vybudování příslušných generických modelů* (Hejný, 2007, s. 87). Není-li dané schéma dostatečně bohaté, je snížena schopnost vidět problém z nadhledu (tzn. schopnost např. ujasnit si zadání dané úlohy, zvážit různé strategie řešení, rozložit problém na dílčí problémy, převést ho do jiného kontextu či přeložit do jiného jazyka nebo využít specifický kontext situace a najít řešení nestandardním postupem.

## 2.4 Typové úlohy a prostředí zaměřené na propedeutiku rovnic

V této kapitole uvádím přehled typových úloh, které je možno považovat za propedeutiku rovnic a s nimiž se můžeme setkat v současných učebnicích matematiky. Některé jsou z aritmetických sémantických prostředí, čísla zde nesou určitý význam, jsou reprezentována jistými reálnými objekty (zvířátka, kroky či závaží na vahách), jiné jsou z nesémantických, strukturálních aritmetických prostředí, kde je číslo již v abstraktní podobě, není vázáno na konkrétní předměty, a některé z prostředí geometrických.[12]

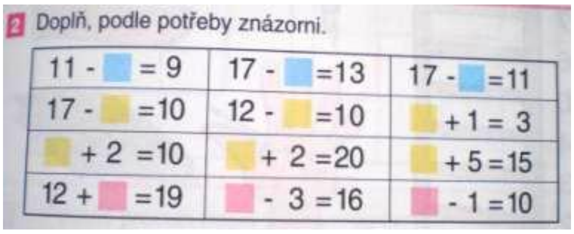
Podle tohoto kritéria jsem také uspořádala dané úlohy či prostředí. Nejprve uvádím aritmetická prostředí strukturální, protože většina z nich se (v různém množství) vyskytuje v různých učebnicích matematiky pro 1. stupeň ZŠ. V další části se zabývám aritmetickými prostředími sémantickými, která se, s výjimkou prostředí rovnoramenných vah, vyskytují pouze v učebnicích vydaných nakladatelstvím Fraus. Z hlediska propedeutiky rovnic považuji tato prostředí za velmi významná, především prostředí zvířátka dědy Lesoně a krokování. Na závěr pak uvádím prostředí geometrické.

[12] Terminologii používám v souladu s přednáškami z Didaktiky matematiky, k 1. 2. 2011 dostupné na webových stránkách Katedry matematiky PedF UK kmdm.cuni.cz.

## 2.4.1 Úlohy ve strukturálních aritmetických prostředích

### 2.4.1.1 Rámečkové úlohy

Takto jsem nazvala úlohy, které můžeme vidět na následujícím obrázku (M1, str. 53). Jedná se o jednoduchou početní úlohu, kde je jedno z čísel nahrazeno rámečkem, nebo jinou značkou, například tečkou či podtržítkem. Tato značka nám říká: „zde něco chybí, doplň to, aby rovnost platila“. Jedná se vlastně o jednoduché lineární rovnice, kde se vyskytuje jedna neznámá. Není však vyjádřena pomocí písmene, ale tímto znakem.



2 Doplň, podle potřeby znázorni.

| | | |
|---|---|---|
| 11 - ■ = 9 | 17 - ■ = 13 | 17 - ■ = 11 |
| 17 - ■ = 10 | 12 - ■ = 10 | ■ + 1 = 3 |
| ■ + 2 = 10 | ■ + 2 = 20 | ■ + 5 = 15 |
| 12 + ■ = 19 | ■ - 3 = 16 | ■ - 1 = 10 |

**Obr. 1**

### 2.4.1.2 Úlohy „Myslím si číslo“

Jedna z těchto úloh může znít: „Myslím si číslo. Když k jeho dvojnásobku přičtu pět, vyjde mi jedenáct. Jaké číslo si myslím?“ Tyto úlohy se vlastně vůbec netváří jako matematika, ale spíše jako hádanka, hra. Děti mají hádanky většinou velice rády. A tak díky nim získávají první zkušenosti s rovnicemi, neboť právě ono myšlené číslo představuje vlastně neznámou rovnice. V uvedené úloze je interpretována rovnice $2x + 5 = 11$.

### 2.4.1.3 Magické čtverce

Tyto úlohy jsou vlastně určitými rébusy. Jedná se o čtverec složený většinou z devíti čtverečků. V některých z nich jsou napsána čísla, jiné jsou prázdné. Úkolem je doplnit čísla do prázdných čtverečků tak, aby se součet čísel v řádcích, sloupcích i úhlopříčkách rovnal zadanému číslu. Na obr. 2 uvádím jednu takovou ukázku.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | |
| | | 3 |
| 6 | | |

**Obr. 2**

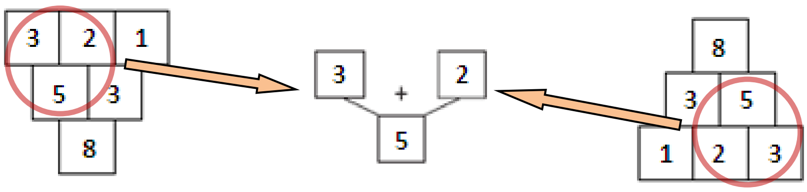
Součet v řádcích, sloupcích i úhlopříčkách je 15.

V magickém čtverci jsou ukryty tyto rovnice (označím-li si prázdná políčka postupně písmeny $a$ až $e$) $2 + 9 + a = 15$, $b + c + 3 = 15$, $6 + d + e = 15$, $2 + b + 6 = 15$, $9 + c + d = 15$, $a + 3 + e = 15$, $2 + c + e = 15$, $a + c + 6 = 15$. Předpokládám však, že pomocí těchto rovnic úlohu nikdo neřeší, ale postupně dopočítává a doplňuje čísla.

### 2.4.1.4 Součtové trojúhelníky, pyramidy

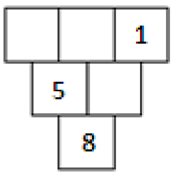
V některých učebnicích najdeme název pyramida, v jiných trojúhelník, který se liší pouze svou orientací, je jakoby otočen „vrcholem dolů“, ovšem jde o stejný typ úlohy. V některých učebnicích najdeme oba dva druhy úloh, v podstatě jsou stejné, pouze se liší tím, že trojúhelníky mají opravdu trojúhelníkový tvar.

Principiálně jsou však tyto trojúhelníky i pyramidy stejné, ať už mají jakýkoli tvar či orientaci. Systém, který skrývají, je zřejmý z obr. 3.




**Obr. 3**

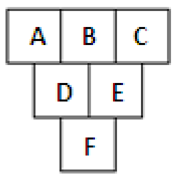
Kde v těchto úlohách najdeme rovnice? Záleží na zadání úlohy, každá nemusí rovnici skrývat, zde si však ukážeme příklad s nimi (obr. 4).




**Obr. 4**

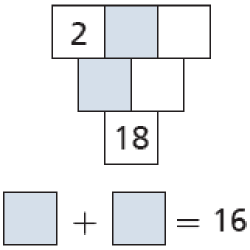
Označím-li si jednotlivá pole písmeny $A - F$, jak můžeme vidět na obr. 5, pak v uvedeném příkladu můžeme najít tyto rovnice:

$$5 + E = 8$$
$$B + 1 = E$$
$$A + B = 5.$$




**Obr. 5**

V dalších typech úloh se vyskytují i soustavy dvou lineárních rovnic. V zadání je uvedena další podmínka, například součet některých dvou políček. Úloha může také vypadat jako na obr. 6 (F2/2, s. 52).




**Obr. 6**

Označíme-li si i zde políčka jako v předcházející ukázce, získáme tyto rovnice:

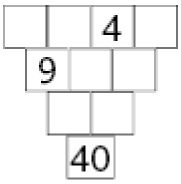
$$2 + B = D$$
$$B + C = E$$
$$D + E = 18.$$

Po přidání podmínky $B + D = 16$ vyřešíme soustavu:

$$2 + B = D$$
$$B + D = 16$$

Získané výsledky dosadíme do zbylých rovnic a dojdeme k řešení úlohy.

V tomto prostředí se setkáme i s dalším typem úloh. Jedná se o trojúhelník, který je doplněn další podmínkou, například je určen součet čísel v celém součtovém trojúhelníku, nebo pouze čísel v prvním řádku. Na obr. 7 uvádím ukázku (F4, s. 47).




**Obr. 7**

Součet čísel v prvním řádku má být 20.

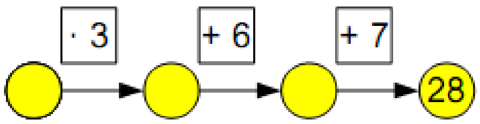
Označíme-li, stejně jako v předešlých úlohách, políčka písmeny $A$ až $J$,[13] získáme tyto rovnice: $A + B = 9$, $B + 4 = F$, $4 + D = G$, $9 + F = H$, $F + G = I$, $H + I = 40$ a $A + B + 4 + D = 20$, kde poslední rovnice je podmínkou součtu čísel prvního řádku.

Dosazením první rovnice do poslední získáme číslo $D$, pomocí něj dopočítáme $G$. Dále zjistíme číslo v políčku $F$, a to tak, když dosadíme čtvrtou a pátou rovnici do šesté: $(9 + F) + (F + G) = 40$. Poté již pouze dosadíme získaná čísla do zbývajících rovnic a úloha je vyřešena.

### 2.4.1.5 Hadi

Proč se tyto úlohy jmenují právě hadi? To nevím. Důležité ovšem je, že děti mají díky těmto úlohám možnost řešit rovnice ukotvené v nové situaci. Na obr. 8 uvádím ukázku jedné takové úlohy.

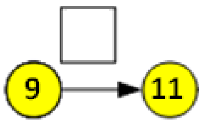
[13] Systém značení je stejný jako u předešlých případů, tedy v 1. řádku písmena $A – D$, v 2. řádku $E – G$, atd.




**Obr. 8**

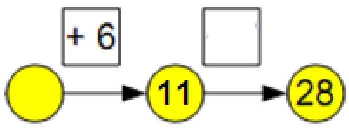
Úloha se skládá z kroužků, do nichž je nutno doplnit čísla, která jsou v roli stavu,[14] v našem případě neznámá čísla. Kruh, z kterého vychází první šipka, je vlastně neznámá dané rovnice. Ve čtverečcích[15] nad šipkami jsou operátory změny, které říkají, jak se daná neznámá mění. A šipky ukazují směr, kterým se „had“ pohybuje, tedy jak máme daný operátor změny aplikovat. V uvedeném příkladu najdeme rovnici $3x + 6 + 7 = 28$.

V některých úlohách se však neznámá vyskytne na místě operátoru (např. úloha na obr. 9, tj. rovnice $9 + x = 11$).




**Obr. 9**

Můžeme najít i úlohy s více neznámými, kde se neznámá objevuje jak v roli stavu, tak v roli operátoru změny (např. obr. 10, hada „rozdělíme“ na dvě části, tedy dvě rovnice, např: $x + 6 = 11$, $11 + y = 28$).

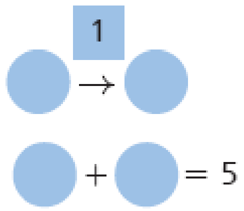



**Obr. 10**

Některé úlohy z prostředí hadů představují i soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Jednu takovou najdeme například v učebnici pro 2. ročník (F2/1, s. 14), viz následující obrázek.

[14] Pojmy stav, operátor změny, operátor porovnání a adresa, které se vyskytují i dále v textu, používám v souladu s přednáškami z Didaktiky matematiky, k 1. 2. 2011 dostupné na webových stránkách Katedry matematiky PedF UK kmdm.cuni.cz. Více najdeme také např. v (Hejný; Kuřina, 2009, s. 98).

[15] Značení může být i jiné, například využití jiných tvarů nebo stejného tvaru pro stav i operátor, ovšem rozdílné barvy, apod.



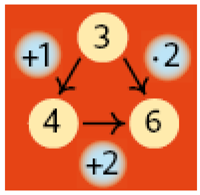

**Obr. 11**

Soustava rovnic zde je následující:

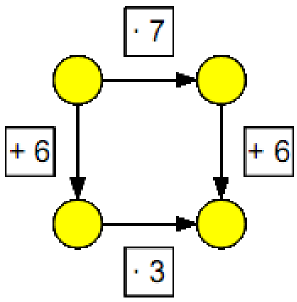
$$x + 1 = y$$
$$x + y = 5$$

### 2.4.1.6 Šipkové grafy

Šipkové grafy jsou velmi podobné hadům. V jedné učebnici (F4, s. 20) jsou označeny jako hadi stočení do klubíčka. V těchto učebnicích se vyskytují dva druhy šipkových grafů – trojúhelníkové a čtyřúhelníkové, jejich názvy jsou odvozeny od jejich tvaru. Na obr. 12 uvádím ukázku trojúhelníkového (F4, s. 22), na obr. 13 je graf čtyřúhelníkový.



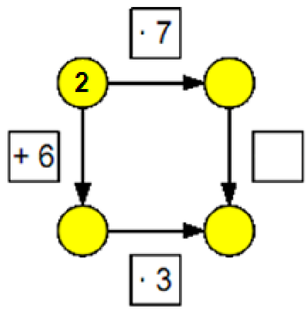

**Obr. 12**




**Obr. 13**

V kroužcích jsou opět čísla v roli stavů, ve čtverečcích v roli operátorů, šipky ukazují směr jejich aplikace. Stejně jako u hadů může být neznámou stav, jako je tomu v tomto případě. Tento šipkový graf můžeme přepsat do rovnice např. takto: $7x + 6 = 3 \cdot (x + 6)$.

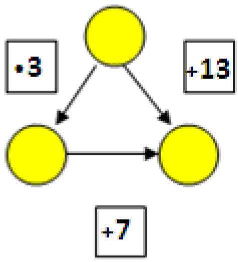
Na rozdíl od předešlé ukázky, je v úloze na obr. 14 neznámá v roli operátoru změny. Tentokrát můžeme graf zapsat pomocí této rovnice: $2 \cdot 7 + x = (2 + 6) \cdot 3$.




**Obr. 14**

V některých úlohách z tohoto prostředí máme zadána čísla, která jsou buď v roli stavů, či v roli operátorů, a z nich máme šipkový graf vytvořit. Úloha může znít např. takto: *„Vytvoř trojúhelníkový šipkový graf, ve kterém znáš všechny operace:* $\cdot 3, +7, +13$*."* (F4, s. 22)

Jednotlivé operátory mohu do grafu umístit na kterékoli místo, získám tak více různých řešení. Já si zvolím např. uspořádání na obr. 15.

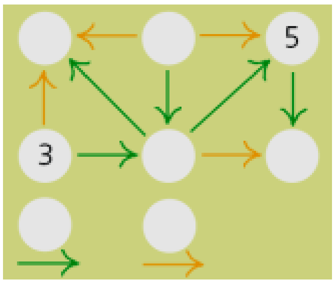



**Obr. 15**

V tomto případě můžeme tento graf řešit pomocí rovnice: $3x + 7 = x + 13$.

### 2.4.1.7 Pavučiny

Další na pohled velmi podobné úlohy jsou pavučiny. Jde opět o určité schéma,[16] kde kruhy představují stavy. Operátory změny jsou zde ovšem reprezentovány barvami šipek mezi nimi. Všechny šipky stejné barvy mají stejnou hodnotu, šipky různých barev mají různou hodnotu. Neznámými jsou hodnoty šipek, tedy operátory změny. Na obr. 16 můžeme vidět konkrétní úlohu z učebnice pro 1. ročník (F1/2, s. 47).



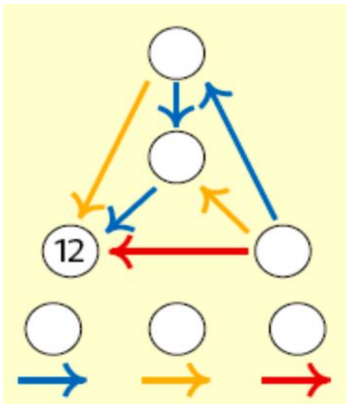

**Obr. 16**

V úloze najdeme dvě neznámé. Označíme-li hodnotu žluté šipky $x$ a zelené $y$, můžeme tuto úlohu zapsat například jako $3 + x - x + x = 5$, $3 + y + y = 5$ a také $y + y = x$.

V tomto prostředí se však setkáme s různými obměnami úloh. V některých máme dánu podmínku, například určený součet čísel v některých stavových polích, jako je tomu u následující úlohy (F3, s. 38).

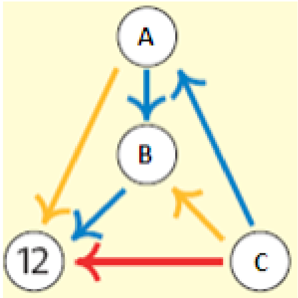
Na obr. 17 máme doplnit pavučinu, jestliže víme, že součet všech čísel je 24.

Chceme-li úlohu řešit pomocí rovnic, můžeme postupovat následovně: čísla si označíme písmeny $A$, $B$, $C$, modrou šipku $m$, žlutou $z$ a červenou $c$ (viz obr. 18).




**Obr. 17**

[16] Uspořádání pavučin odpovídá souvislým orientovaným grafům, kterých se využívá například v operačním výzkumu při plánování projektů. Více viz např. (Jablonský, 2007)



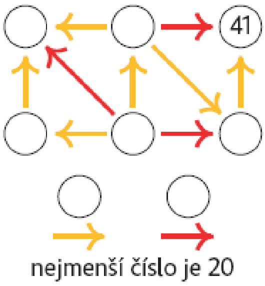

Obr. 18

Poté si napíšeme vazby (rovnice), které můžeme ze zadání vyčíst (uvádím jen některé):

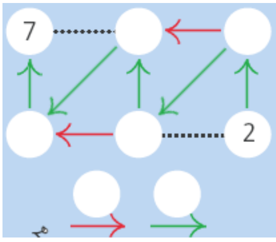
$$z = 2m$$
$$c = 3m$$
$$A = C + m$$
$$B = C + 2m$$
$$A + B + C + 12 = 24, \text{tedy } A + B + C = 12$$

Jak vidíme, získali jsme několik rovnic, jedná se tedy o soustavu lineárních rovnic. Postupnou aplikací dosazovací metody získáme pomocí těchto rovnic výsledek.

V dalším typu úloh z prostředí pavučin je řešení omezeno dalšími podmínkami, můžeme například čísla do stavových polí vybírat pouze z omezeného počtu čísel, tím je vlastně omezen definiční obor rovnic. Zde vidíme ukázku (F3, s. 49) takové úlohy (obr. 19):




Obr. 19



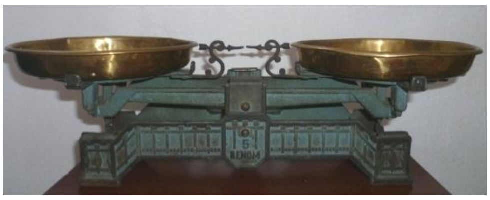

Obr. 20

V jiných úlohách (viz obr. 20 (F1/2, s. 59)) máme za úkol doplnit na určené místo šipku, přičemž musíme nejen určit její barvu, ale i orientaci.

## 2.4.2 Úlohy v sémantických aritmetických prostředích

### 2.4.2.1 Rovnoramenné váhy

Rovnoramenné váhy (obr. 21) se používají k zjišťování hmotnosti, a to již mnohá staletí.[17] Ještě poměrně nedávno je běžně používali například prodavači potravin nebo lékárníci, také v domácnostech patřily k běžnému vybavení. Dnes



Obr. 21

[17] viz například http://cs.wikipedia.org/wiki/Váhy

se s nimi setkáváme již poměrně zřídka. I přes to jsou dobrou didaktickou pomůckou. I pro děti je jednoduché porozumět tomu, jak se s nimi pracuje, co vyjadřují různé polohy misek.

Jsou-li ramena vah ve vodorovné poloze, tedy jsou-li rovnoramenné váhy v rovnováze, znamená to, že vážené objekty na obou stranách jsou stejně těžké. Rovnice jsou v podstatě to samé, obě strany rovnice se musí rovnat, jsou tedy v rovnováze. Proto se také váhy používají v některých učebnicích pro 8. ročník při úvodu do problematiky rovnic (viz kapitola 2.5.2 Rovnice v učebnicích pro 2. stupeň).

Na miskách jsou závaží, jejichž hmotnost známe. Jsou tam však i objekty neznámé hmotnosti. Naším úkolem je tuto jejich hmotnost zjistit. Tato situace je reálná, můžeme si ji představit. Jsou-li rovnoramenné váhy k dispozici,[18] žáci s nimi mohou dokonce pracovat a řešit pomocí nich. Následně uvádím úlohy, v první řešíme rovnici, v druhé soustavu dvou rovnic.

Všechny ananasy na obr. 22 váží stejně, kolik kil váží každý z nich?


**Obr. 22**

Označíme-li si neznámou, tedy váhu ananasu, $x$, můžeme úlohu zapsat rovnicí:

$$2x + 1 = x + 2 + 2$$

Na obr. 23 chceme zvážit ananasy a dýni. Máme však k dispozici pouze jedno kilové závaží. Oba ananasy váží stejně. Kolik kil váží ananas a kolik dýně?


**Obr. 23**

Úlohu zapíšeme pomocí rovnic: $2x = 1 + y$, $x + 1 = y$, kde $x$ představuje váhu ananasu a $y$ váhu dýně.

V učebnicích pro žáky 1. stupně ZŠ se s vahami bohužel příliš často nesetkáme (viz kapitola 2.5.3). Podle mého názoru je to škoda, považuji je za dobrý reálný model abstraktních rovnic.

---

[18] Rovnoramenné váhy s dětmi můžeme také vyrobit např. v rámci pracovních činností. Návodů na výrobu najdeme na internetu několik, např. na webových stránkách www.fyzikahrou.cz

### 2.4.2.2 Autobus

Každý si dovede představit jízdu autobusem. Na zastávce lidé vystoupí, pak jiní nastoupí a autobus pokračuje v jízdě. Úlohy z prostředí autobus popisují tuto situaci. Počty lidí, kteří na jednotlivých zastávkách vystoupili a nastoupili, a těch, kteří mezi jednotlivými zastávkami v autobuse jedou, jsou zaznamenány v tabulce. Předpokládáme, že na první zastávku přijede autobus z garáže, je tedy prázdný a nemůže vystoupit žádný cestující. Poslední zastávka je konečná, zde již nikdo nastoupit nemůže a všichni cestující musí autobus opustit. Řidiče do tabulky nezaznamenáváme.

Někdy při zaznamenávání počtu cestujících mohou nastat komplikace, nevidíme, kolik cestujících nastoupilo či vystoupilo. Proto poté v tabulce nemáme všechny tyto počty zaznamenané. A tak je musíme dopočítat. V úloze se nám tedy objeví rovnice.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| V | | | | 5 | 7 |
| N | | 3 | 4 | | |
| J | 5 | 6 | 10 | | |

**Obr. 24**

Na obr. 24 vidíme tabulku jízdy autobusem. Písmeny $A$ až $E$ jsou označeny jednotlivé zastávky. V řádku označeném $V$ najdeme počty cestujících, kteří na dané zastávce vystoupili, v řádku $N$ počet těch, kteří nastoupili. V posledním řádku $J$ je zapsáno, kolik cestujících jelo mezi zastávkami.

Pro řešení úloh v tomto prostředí je velmi důležitá vazba čtyř čísel (políček), která se týkají jedné zastávky – počet cestujících, kteří na danou zastávku přijeli, počet těch, kteří vystoupili a nastoupili, a také počet cestujících, kteří ze zastávky v autobuse odjeli. Vztah mezi těmito políčky můžeme zapsat následovně,[19] uvažujeme-li zastávku $B$: $J_{AB} - J_{BC} = V_B - N_B$ nebo také $J_{AB} - V_B + N_B = J_{BC}$.

Prázdná políčka tabulky jízdy autobusem, která je uvedena výše, můžeme tedy dopočítat například pomocí těchto rovnic: $5 - V_B + 3 = 6$, $6 - V_C + 4 = 10$, $10 - 5 + N_D = 7$. Políčka $V_A$ a $N_\mathrm{E}$ jsou prázdná, to je dáno již definicí tohoto prostředí. V políčku $N_\mathrm{A}$ musí být tedy stejný počet jako v $J_\mathrm{AB}$ a v políčku $J_\mathrm{DE}$ jako v $V_\mathrm{E}$.

[19] Políčka označuji písmeny $V$- vystoupilo, $N$- nastoupilo, s indexem, který označuje zastávku, o kterou se právě jedná, a $J$ – jelo, tentokrát s dvoupísmenovým indexem, který určuje, mezi kterými dvěma zastávkami autobus jede.

Úlohy z prostředí autobus jsou různorodé, v některých sledujeme nejen počet cestujících, ale rozlišujeme je podle pohlaví. V některých jsou přidány další podmínky, které musí být zároveň splněny a v úlohách se tak mohou vyskytnout i složitější rovnice. Jednu takovou úlohu jsem také zařadila mezi úlohy pro realizaci experimentů (viz příloha č. 4). Uvádím ji také na obr. 25.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| V | | | | 5 | 7 |
| N | | 3 | 4 | | |
| J | 5 | 6 | | | |

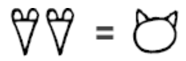
**Obr. 25**

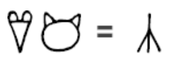
Doplň tabulku jízdy autobusem, když víš, že ze zastávky $C$ do $D$ jelo o 6 více cestujících, než jich na zastávce $C$ vystoupilo.

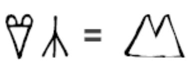
### 2.4.2.3 Zvířátka dědy Lesoně

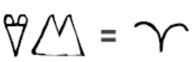
Smyslem prostředí zvířátek je přímo propedeutika rovnic, také proto mu budu věnovat více pozornosti. Prostředí je charakteristické tím, že zde nefigurují čísla jako taková, ale zvířátka, která nesou hodnotu – sílu zvířátka, tedy veličinu. Zvířátka jsou reprezentována většinou ikonami[20].

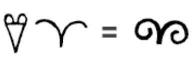
Děda Lesoň má mnoho zvířátek, která si ráda hrají. Tvoří různá družstva a ta se přetahují. Děda Lesoň během hry zjistil, jak jsou která zvířátka silná, jejich síly jsou uvedeny v následující tabulce[21].

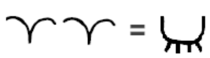

dvě myši jsou stejně silné jako kočka


myš a kočka jsou stejně silné jako husa

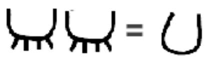

myš a husa jsou stejně silné jako pes


myš a pes jsou stejně silní jako koza


myš a koza jsou stejně silné jako beran

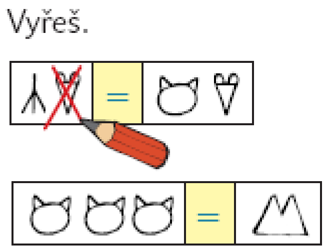

dvě kozy jsou stejně silné jako kráva

[20] Další možnou reprezentací jsou počáteční písmena názvů zvířátek, která také v praktické části užívám.
[21] Ikony zvířátek jsou převzaty z učebnice (F4).

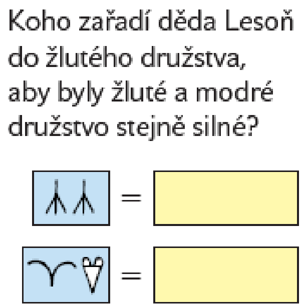


dvě krávy jsou stejně silné jako kůň

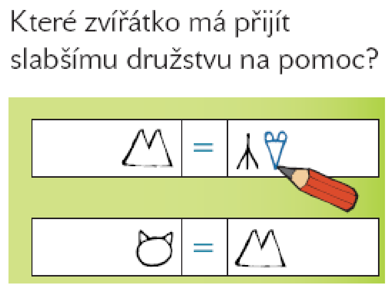
V tomto prostředí se setkáme s několika typy úloh. V prvním typu úloh mají děti rozhodnout, které z družstev je silnější, které vyhraje. Jde v podstatě o porovnávání. Poté následují úlohy, které jsou již principiálně rovnicemi. V nich musí děti určit, které družstvo je silnější a pak (podle typu úlohy) rozhodnout, které zvířátko má přijít slabšímu družstvu na pomoc, resp. které má ze silnějšího družstva odejít, aby byla obě družstva stejně silná. Řešení tak vyžaduje dva kroky, v prvním porovnají sílu družstev a určí stranu, kde budou doplňovat (resp. odebírat) zvířátko, v druhém kroku hledají ono neznámé zvířátko, tedy neznámou $x$, aby tak získaly rovnost obou stran, tedy stejně silná družstva. Ukázkové úlohy tohoto typu jsou uvedeny na obr. 26 (F2/1, s. 39) a na obr. 27 (F2/2, s. 35).




**Obr. 26**




**Obr. 27**

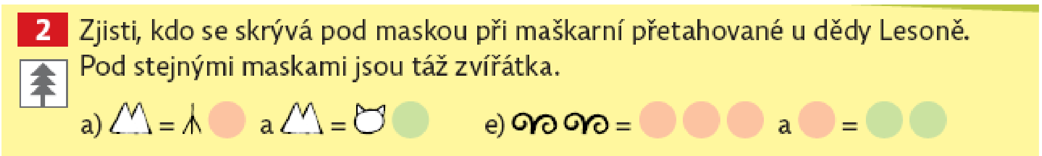



**Obr. 28**

Dalšími typy úloh v tomto prostředí je tvorba stejně silných družstev z určených zvířátek, nebo sestavení stejně silného soupeře již danému družstvu, kterou můžeme vidět na obr. 27 (F2/2, s. 47). Žáci tedy získávají zkušenosti s rovnostmi dvou družstev, dvou stran.

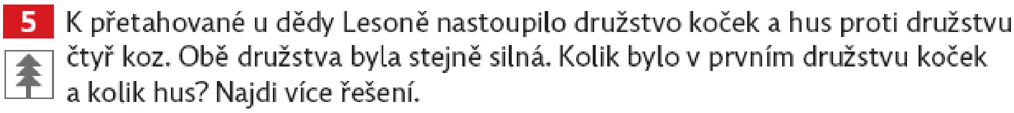
Mezi oblíbené úlohy patří hra na kapitány, kdy jsou vybraná zvířátka určena kapitány, kteří si střídavě vybírají další členy svého družstva. Snaží se je vybrat tak, aby bylo jejich družstvo silnější než družstvo protihráče.

Děda Lesoň chtěl zvířátka potěšit, proto pro ně uspořádal maškarní bál. I při něm se hrála přetahovaná. Některá zvířátka však stále měla masku. Úkolem dětí je určit zvířátka, která jsou za maskou schovaná. V těchto úlohách platí, že pod stejnou maskou jsou ukryta stejná zvířátka. Tyto úlohy jsou již přímo rovnicemi, kde je neznámá vyjádřena maskou. Použití různých masek umožňuje formulovat rovnice o více neznámých, resp. soustavy rovnic. Na obr. 29 uvádím příklad, je z učebnice (F3, s. 98). V první úloze jde o dvě různé rovnice ($4 = 3 + x$, $4 = 2 + y$), v druhé o soustavu dvou rovnic ($6 + 6 = 3x$, $x = 2y$).




**Obr. 29**

V rovnicích v prostředí zvířátek může být neznámou také počet zvířátek. V těchto úlohách známe druhy zvířátek v družstvech, neznáme však počet některých z nich. Ten máme zjistit. Jednu takovou úlohu uvádím v následující ukázce (F3, s. 49). Rovnici z úlohy můžeme zapsat $2x + 3y = 4 \cdot 5$, kde $x$ je počet koček a y počet hus.


5 K přetahované u dědy Lesoně nastoupilo družstvo koček a hus proti družstvu čtyř koz. Obě družstva byla stejně silná. Kolik bylo v prvním družstvu koček a kolik hus? Najdi více řešení.

**Obr. 30**

Počítání se zvířátky je nový zajímavý fenomén. Nejen, že úlohy s nimi jsou u dětí většinou oblíbené, ale hlavně pomáhají dětem získávat zkušenosti s řešením rovnic. Toto dobře shrnula Eva Bomerová, učitelka 1. stupně ZŠ, která s dětmi ve své třídě tyto úlohy řeší. Ve svém pojednání o prostředí zvířátek v (Bomerová, 2010) píše:

*Myšlenkové pochody, které proběhnou, než se dítě rozhodne doplnit, odebrat nebo nahradit určitou ikonu, budují strukturu pro práci s rovnicemi a soustavami rovnic a jsou prevencí formalismu. Matematicky řečeno – dítě naprosto běžně používá základní ekvivalentní úpravy rovnic:*

*Výměna obou stran rovnice: „Je jedno, jestli je první družstvo zelené a druhé žluté nebo naopak.“*

*Přičtení stejného čísla k oběma stranám rovnice: „Do každého družstva můžu přidat stejné zvířátko, pořád budou stejně silná.“*

*Odečtení stejného čísla od obou stran rovnice: „V každém družstvu je jedna myš, tak je můžu klidně dát pryč.“*

*Vynásobení obou stran rovnice stejným číslem různým od 0: „Pes je stejně silný jako dvě kočky. A dva psi jako čtyři kočky. A tři psi jako šest koček. A tak pořád dál.“*

*Úpravy výrazů na jednotlivých stranách rovnice: „Můžu vyměnit psa za dvě kočky a nic se nestane.“*

Co se mi však na tomto prostředí zdá vzhledem k propedeutice rovnic také velmi dobré, je skutečnost, že úlohy s maskou jsou pouze jiným vyjádřením rovnice. Tím se také toto prostředí liší od většiny předchozích, kde jsme rovnice museli „hledat“.

Úlohy s maskami odpovídají rovnicím především svou strukturou, jde vlastně pouze o použití ikon místo čísel. Proto je můžeme jednoduše do jazyka čísel přepisovat (a samozřejmě i naopak). Toho je také v učebnicích (F4) využito, nebo spíše za tímto účelem bylo toto prostředí vlastně vytvořeno, alespoň se tak domnívám.

Toho, že děti dokážou řešit rovnice v prostředí zvířátek, mohou při řešení číselných rovnic využít především tak, že si místo $x$ představí masku. Najednou je zde z neznámé situace něco známého, něco, čeho se děti neleknou a dovedou to vyřešit. Zda to v praxi opravdu funguje a jak děti při řešení takových úloh postupují, je popsáno v praktické části této práce.

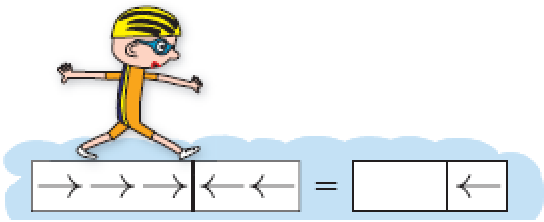
### 2.4.2.4 Krokování

Dalším novým prostředím, kde je propedeutika rovnic velmi dobře propracována, je krokování. Jak můžeme poznat již z názvu, je velmi úzce spojeno s pohybem. Prostřednictvím pohybu se s tímto prostředím žáci seznamují a pak s jeho pomocí také řeší různé úlohy. Tato charakteristika dělá toto prostředí významným. Žáci zde nepočítají s předměty, ale s počtem kroků, které představují pohyb, něco nehmotného, co nemůžeme uchopit do ruky. Kroky jsou pomíjivé, jakmile je provedeme, již je nevidíme, nemůžeme se k nim vrátit, jde zde o proces. Kroky však můžeme určitým způsobem zaznamenat. K tomu se používají šipky, jejichž směr určuje operaci, kterou mají žáci provést. Kroky (šipky) tak představují vlastně operátory, konkrétně operátory změny (Slezáková, 2007).

V prostředí krokování se s rovnicemi můžeme setkat již v počátečních úlohách, ještě než žáci začnou pohyb zapisovat. Učitel dává povely, kolik kroků má žák udělat, ostatní zároveň s jeho pohybem počítají kroky. Povely mohou mít jednu, ale i několik částí. Nejdříve krokuje jeden žák, později však i dva, přičemž začínají krokovat ze stejného místa. Zde nastává příležitost k řešení rovnice. Jednu takovou ilustraci uvádí ve svém příspěvku J. Slezáková, je součástí několika příkladů úloh. Figurují zde dva žáci, Boris, který již udělal pět kroků, a Adam, který dostane povel nyní: *Pak učitel řekne: „Chci dát Adamovi dvoudílný povel tak, aby opět stál vedle Borise. První díl povelu musíte dopovědět vy, já vám řeknu druhý díl, který bude: ‚… (gestikulace) … tři kroky dopředu, začni, teď.“ Žáci řeknou celý povel: „Adame, dva kroky dopředu, pak tři kroky dopředu, začni, teď.“ Adam povel realizuje, stojí vedle Borise a tím prověřil správnost řešení úlohy* (Slezáková, 2007, s. 127). Děti řešily rovnici. Tyto rovnice jsou v této publikaci a později i v učebnicích vydaných nakladatelstvím Fraus (F1/1 – F4) nazývány „krokovými rovnicemi“.

Tato rovnice se odehrávala pouze v činech a povelech, je tedy silně procesuální, na rozdíl od prostředí zvířátek dědy Lesoně či rámečkových úloh, kde jsou rovnice silně konceptuální.

Když žáci začnou používat jazyka šipek, setkají se s mnoha šipkovými rovnicemi, které mohou vypadat jako např. na obr. 31 (F2/1, s. 18).



**Obr. 31**

Zde se jedná o rovnici $3 - 2 = x - 1$.

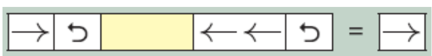
Mezi dalšími úlohami z tohoto prostředí se setkáme také se soustavami rovnic o dvou neznámých, z nichž v jedné figurují neznámé v absolutní hodnotě. Tato situace nastane v případě, že jsou v úloze dvě volná políčka, tedy neznámé x a y a zadání je doplněno podmínkou – počtem šipek, které je možno doplnit. Není určen směr šipek, tedy operace, kterou představují. Počet šipek k doplnění je tedy součtem absolutních hodnot neznámých. Můžeme to vidět v následující úloze na obr. 32, kde smíme použít pouze tři šipky (F3, s. 25).

**Obr. 32**

Úlohu můžeme zapsat takto:

$2 + x = 1 + y$, $|x| + |y| = 3$.

V úlohách v prostředí krokování se setkáme ještě s jedním fenoménem – mínus před závorkou. To je znázorňováno šipkou „čelem vzad“. Děti pak řeší i rovnice, kde je neznámá umístěna v závorce, před níž je ono problémové mínus. Na obr. 33 uvádím jednu z těchto úloh (F3, s. 95).



**Obr. 33**

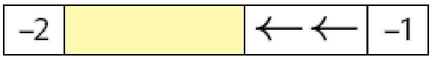
Rovnici zapíšeme $1 - (x - 2) = 1$.

Později, když žáci získají více zkušeností s řešením úloh v tomto prostředí, začnou je zapisovat pomocí čísel. Tak dojde k propojení šipkových a číselných rovnic. Je to velmi podobné jako u výše popsaného prostředí zvířátek dědy Lesoně. I zde jsou rovnice velmi dobře viditelné, žáci mohou dobře vnímat paralelu mezi šipkovým a číselným zápisem a využít toho i při řešení těchto rovnic.

### 2.4.2.5 Schody

Prostředí schodů je velmi podobné prostředí krokování. I zde je využit pohyb. Tentokrát se však, jak je patrno již z názvu, pohybujeme po schodech. Schody jsou označeny čísly – první schod, druhý schod atd. Tato označení mají svůj význam. Číslo zde vystupuje jako adresa. Jednotlivé kroky pak plní, stejně jako tomu bylo u krokování, funkci operátoru změny (Slezáková, 2007, s. 135).

Úlohy z tohoto prostředí jsou velmi obdobné úlohám z krokování. Opět nalezneme rovnice i soustavy dvou rovnic, kde jedna z nich představuje počet šipek k dispozici, tedy součet absolutních hodnot neznámých, nebo úlohy se znaménkem mínus před závorkou. Liší se pouze zápis těchto úloh, a to tím, že je zde zaznamenán schod (tedy jeho adresa), z kterého vycházíme, a schod, kam dojdeme. Můžeme to vidět v následující ukázce na Obr. 33 (F4, s. 40).[22]



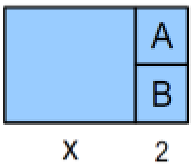

**Obr. 34**

Zde vidíme rovnici $-2 + x - 2 = -1$.

## 2.4.3 Geometrická prostředí

### 2.4.3.1 Neznámé rozměry pravoúhelníků

Zatím jsme si představili aritmetická prostředí, v nichž můžeme nalézt rovnice. Můžeme je však i hledat v oblasti geometrie. Konkrétně v učebnici (F4) najdeme úlohy, kde máme vypočítat neznámé délky stran pravoúhelníků nebo jejich částí, když známe další údaje, jako např. obvod či obsah a délky zbývajících stran. Na obr. 35 uvádím ukázku takové úlohy.




**Obr. 35**

Zadání úlohy zní: Doplň chybějící délku $x$, když víš, že obsah celého obdélníku je 28 □ a čtyřúhelníky $A$ a $B$ jsou čtverce.

Abychom úlohu mohli řešit, musíme znát základní vlastnosti útvaru, v tomto případě obdélníku: tedy, že dvě protější strany jsou stejně dlouhé, a čtverce – všechny strany jsou stejně dlouhé. Musíme také vědět, co je to obsah útvaru a jak ho lze vypočítat.

Z těchto základní vztahů odvodíme, že kratší strana obdélníka měří 4, protože ji tvoří dvě strany čtverců, jejichž každá strana měří 2. Známe-li tento parametr, můžeme řešit dále

[22] Někoho možná překvapí použitá záporná čísla. Žáci s tím ale nemusí mít problém, takto mohou být označeny například schody do sklepa: -1 je první schod do sklepa atd.

pomocí rovnice: $S = (x + 2) \cdot 4 = 28$. Po provedení ekvivalentních úprav dojdeme k výsledku.

Tato úloha je obtížnější, než jaké nalezneme ve výše jmenované učebnici, avšak i někteří žáci z 1. stupně jsou schopni ji vyřešit, což se potvrdilo také experimenty, které jsem realizovala.

## 2.5 Výuka rovnic na základní škole

### 2.5.1 Rovnice a RVP

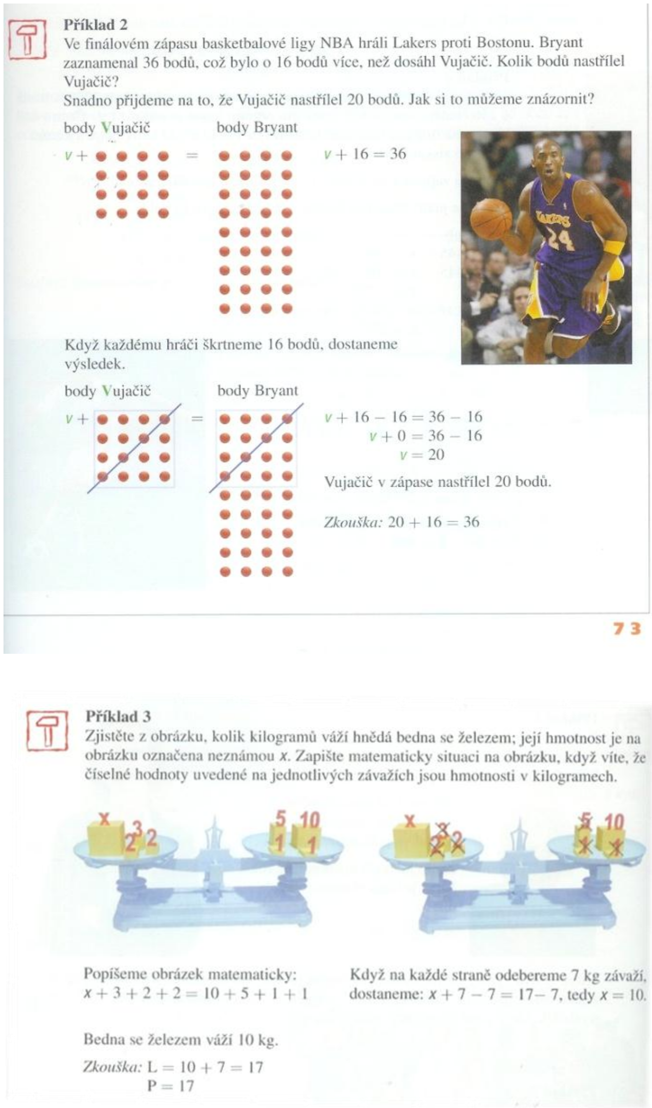
Téma rovnic je zahrnuto do výuky matematiky již na základní škole. V rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání nalezneme rovnice a práci s nimi mezi očekávanými výstupy v rámci tematického okruhu Číslo a proměnná na druhém stupni ZŠ. Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav (RVP, s. 32). Konkrétně by se v učivu měly podle RVP objevit lineární rovnice a soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými.

### 2.5.2 Rovnice v učebnicích pro 2. stupeň

Lineární rovnice jako samostatný celek jsou zařazeny do učebnic pro 8. ročník ZŠ či pro tercie víceletých gymnázií. Zajímala jsem se, jakým způsobem je toto učivo v učebnicích zpracováno, jak jsou zde žáci s pojmem rovnice a s jejich řešením seznamováni. Zde však musím poznamenat, že samotná výuka závisí na učebnicích pouze částečně. Důležitou roli hraje přístup učitele. Ten rozhoduje, do jaké míry se bude učebnicemi řídit. Může využívat i jiné materiály, případně výuku obohacovat například dramatizací či dalšími činnostmi.

V učebnici nakladatelství **Fraus** (Binterová; Fuchs; Tlustý, 2009) začíná kapitola o rovnicích třemi jednoduchými úlohami, které lze řešit i bez použití rovnic. (Například úloha typu

Myslím si číslo, či úloha z kontextu Autobus (2009, s. 72): Na předposlední autobusové zastávce „U kostela“ vystoupilo 6 cestujících a nastoupilo 12 cestujících. Na konečnou stanici přijelo 36 cestujících. Kolik jich přijelo na zastávku „U kostela“?) Autoři předkládají žákům úlohy, které se nemusí řešit pomocí číselného zápisu rovnice, avšak představují izolované modely rovnic. Po těchto úlohách následuje teoretické vysvětlení, co to vlastně rovnice je a co znamená ji řešit, jedná se o abstraktní poznatky. Dále autoři uvádí řešení čtyř jednoduchých úloh pomocí rovnic, kde je ukázáno užití některých ekvivalentních úprav rovnic (přičtení nebo odečtení čísla či výrazu od obou stran rovnice). Žáci se tak setkávají se vzory[23] řešení rovnic. V učebnici (2009, s. 72) čteme poznámku k těmto úlohám: Na nich si předvedeme, jak se s rovnicemi pracuje. A když to zvládneme, nebudou nám dělat problémy ani obtížnější příklady. Napadá mě otázka, zda mají autoři pravdu, zda opravdu stačí několik příkladů řešení, abychom porozuměli a uměli řešit i složitější rovnice. Na obr. 36 uvádím ukázky těchto úloh.



**Příklad 2**
Ve finálovém zápasu basketbalové ligy NBA hráli Lakers proti Bostonu. Bryant zaznamenal 36 bodů, což bylo o 16 bodů více, než dosáhl Vujačič. Kolik bodů nastřílel Vujačič?
Snadno přijdeme na to, že Vujačič nastřílel 20 bodů. Jak si to můžeme znázornit?

body Vujačič — body Bryant

$v + 16 = 36$

Když každému hráči škrtneme 16 bodů, dostaneme výsledek.

body Vujačič — body Bryant

$v + 16 - 16 = 36 - 16$
$v + 0 = 36 - 16$
$v = 20$

Vujačič v zápase nastřílel 20 bodů.

*Zkouška:* $20 + 16 = 36$

73

**Příklad 3**
Zjistěte z obrázku, kolik kilogramů váží hnědá bedna se železem; její hmotnost je na obrázku označena neznámou $x$. Zapište matematicky situaci na obrázku, když víte, že číselné hodnoty uvedené na jednotlivých závažích jsou hmotnosti v kilogramech.



Popíšeme obrázek matematicky:
$x + 3 + 2 + 2 = 10 + 5 + 1 + 1$

Když na každé straně odebereme 7 kg závaží, dostaneme: $x + 7 - 7 = 17 - 7$, tedy $x = 10$.

Bedna se železem váží 10 kg.

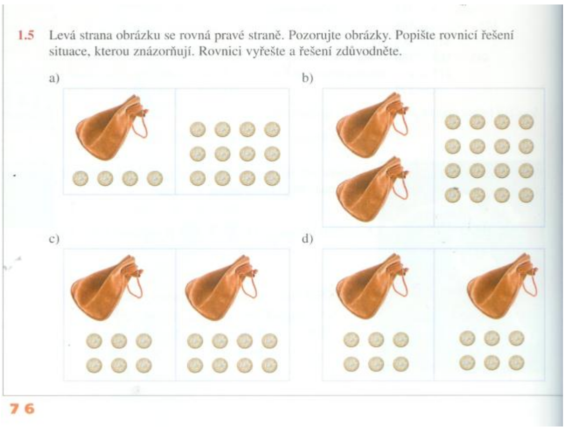
*Zkouška:* $L = 10 + 7 = 17$
$P = 17$

**Obr. 36**

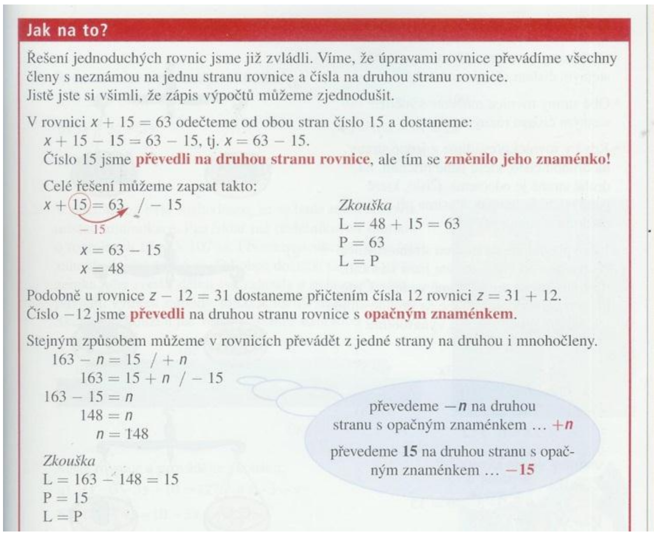
Po těchto úlohách následuje teoretické shrnutí látky a několik neřešených úloh. Na obr. 37 je jedna tato úloha, kterou již mají žáci vyřešit sami (2009, s. 76). Myslím, že vyřešit tuto úlohu pomocí obrázku by byli schopni i žáci 1. stupně ZŠ. Oceňuji však snahu autorů o názornost, žáci si lépe představí, co a jak se pomocí rovnice řeší. Kladně hodnotím především možnost řešit úlohu jak pomocí rovnic, tak využitím obrázku (například vyškrtáváním stejných objektů na obou stranách), jde tedy o propojení dvou jazyků.

[23] Vzor zde používám v souladu s terminologií uvedenou v kapitole 2.3

Na obr. 38 můžeme vidět shrnutí (2009, s. 77), jak lze postupovat při řešení rovnic, které je uvedeno v učebnici hned po poslední uvedené úloze. Uvádím ho zde hlavně kvůli poznámce o převádění čísel či výrazů z jedné strany na druhou s opačným znaménkem, o kterém je na tomto místě řeč poprvé. Žáci se však mohou vrátit zpět k předešlým úlohám a jev tam pozorovat. Mohou tak tento abstraktní poznatek pozorovat znovu u předešlých izolovaných modelů.




Obr. 37



**Jak na to?**

Řešení jednoduchých rovnic jsme již zvládli. Víme, že úpravami rovnice převádíme všechny členy s neznámou na jednu stranu rovnice a čísla na druhou stranu rovnice.
Jistě jste si všimli, že zápis výpočtů můžeme zjednodušit.

V rovnici $x + 15 = 63$ odečteme od obou stran číslo 15 a dostaneme:
$x + 15 - 15 = 63 - 15$, tj. $x = 63 - 15$.
Číslo 15 jsme **převedli na druhou stranu rovnice**, ale tím se **změnilo jeho znaménko!**

Celé řešení můžeme zapsat takto:

$x + 15 = 63 \quad / - 15$

$-15$

$x = 63 - 15$

$x = 48$

*Zkouška*
L = 48 + 15 = 63
P = 63
L = P

Podobně u rovnice $z - 12 = 31$ dostaneme přičtením čísla 12 rovnici $z = 31 + 12$.
Číslo $-12$ jsme **převedli** na druhou stranu rovnice s **opačným znaménkem**.

Stejným způsobem můžeme v rovnicích převádět z jedné strany na druhou i mnohočleny.

$163 - n = 15 \quad / + n$

$163 = 15 + n \quad / - 15$

$163 - 15 = n$

$148 = n$

$n = 148$

*Zkouška*
L = 163 − 148 = 15
P = 15
L = P

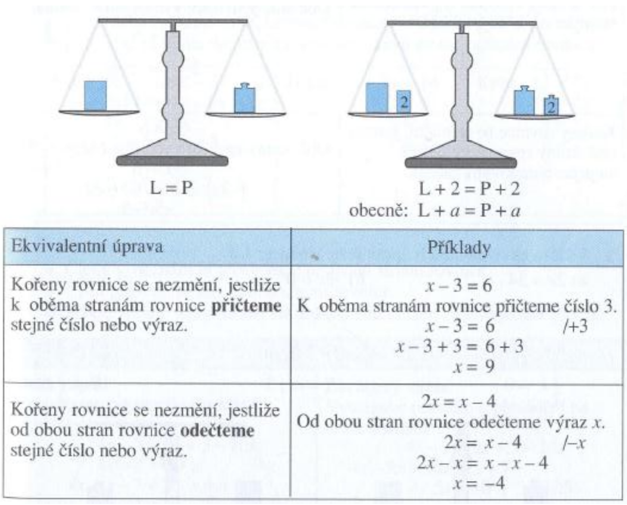
převedeme $-n$ na druhou stranu s opačným znaménkem … $+n$

převedeme **15** na druhou stranu s opačným znaménkem … $-15$

Obr. 38

Po tomto přehledu následuje tabulka „Zapamatujeme si“, kde jsou tato pravidla (abstraktní poznatky) shrnuta. V dalších kapitolách se žáci seznamují se složitějšími rovnicemi, a to buď ve formě číselných rovnic, nebo řešením slovních úloh.

V učebnici nakladatelství **Fortuna** (Coufalová; Pěchoučková; Hejl, aj., 2007) je nejprve vysvětleno, co je rovnost a rovnice. Následuje výklad o ekvivalentních úpravách. Popis jednotlivých ekvivalentních úprav je doplněn obrázkem vážení závaží na rovnoramenných váhách a ukázkou řešení jedné úlohy a následuje po něm několik úloh pro žáky. Ukázku výkladu jedné ekvivalentní úpravy můžeme vidět na obr. 39 (2007, s. 129). Na konci



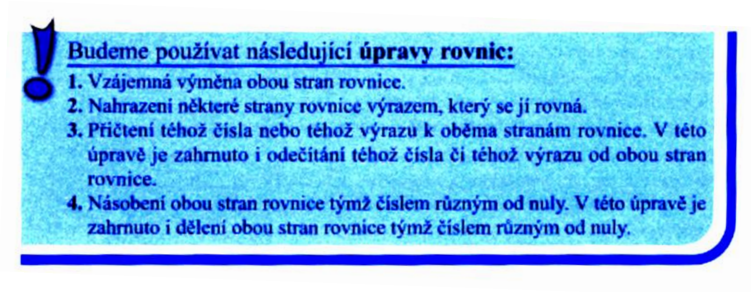

| Ekvivalentní úprava | Příklady |
|---|---|
| Kořeny rovnice se nezmění, jestliže k oběma stranám rovnice **přičteme** stejné číslo nebo výraz. | $x - 3 = 6$<br>K oběma stranám rovnice přičteme číslo 3.<br>$x - 3 = 6 \quad /+3$<br>$x - 3 + 3 = 6 + 3$<br>$x = 9$ |
| Kořeny rovnice se nezmění, jestliže od obou stran rovnice **odečteme** stejné číslo nebo výraz. | $2x = x - 4$<br>Od obou stran rovnice odečteme výraz $x$.<br>$2x = x - 4 \quad /-x$<br>$2x - x = x - x - 4$<br>$x = -4$ |

Obr. 39

výkladu najdeme zmínku o změně znamének při převádění členů z jedné strany rovnice na druhou. Poté již následují úlohy pro žáky.

Tato učebnice je koncipována velmi instruktivně. Žákům jsou předloženy abstraktní poznatky, které poté mají být využity při řešení následujících úloh, čímž teprve získávají izolované modely.

Téma rovnice je podobně jako v předešlé učebnici koncipováno také v učebnici nakladatelství **SPN** (Půlpán; Čihák; Trejbal, 2009). Také se začíná objasněním rozdílu mezi rovností a rovnicemi a poté následuje výklad o ekvivalentních úpravách. Zajímavé je, že autoři uvádí nejprve teoretické vysvětlení pojmu a přehled ekvivalentních úprav, viz následující obrázek (2009, s. 90). Příklady jejich použití při výpočtu úloh poté uvádí zvlášť, jednotlivé kroky řešení přitom pečlivě popisují. V příkladech však používají pouze obecné číselné rovnice typu $2 + x = 8$, nezasazují je do žádného kontextu, nepoužívají obrázky či jiné názorné prostředky. Výklad je velmi strukturální. Učebnice je také velmi instruktivní s velkým důrazem na abstraktní poznatky, viz obr. 40.

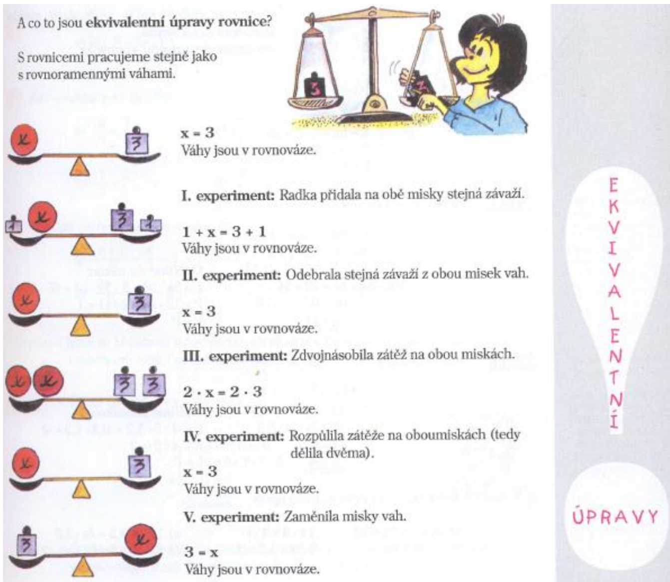


**Budeme používat následující úpravy rovnic:**

1. Vzájemná výměna obou stran rovnice.
2. Nahrazení některé strany rovnice výrazem, který se jí rovná.
3. Přičtení téhož čísla nebo téhož výrazu k oběma stranám rovnice. V této úpravě je zahrnuto i odečítání téhož čísla či téhož výrazu od obou stran rovnice.
4. Násobení obou stran rovnice týmž číslem různým od nuly. V této úpravě je zahrnuto i dělení obou stran rovnice týmž číslem různým od nuly.

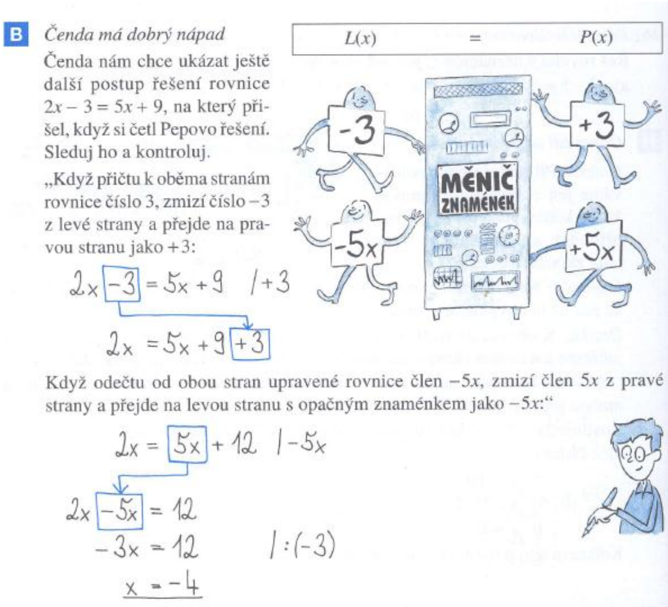
**Obr. 40**

Odlišně postupovali autoři učebnice nakladatelství **Prodos** (Molnár; Emanovský; Lepík, aj., 2000, s. 31), kteří uvedli nejprve názornou ukázku pomocí vážení s rovnoramennými váhami (viz obr. 41) a teprve poté přehled ekvivalentních úprav a tři ukázky řešení rovnic pomocí nich. Přesto ani tato učebnice nenabízí žákům možnost získání dostatečného množství izolovaných modelů.




**Obr. 41**

Zatímco obě dvě naposledy popisované učebnice vůbec neobsahují výklad o změně znaménka při převádění členů rovnice z jedné strany na druhou, učebnice z nakladatelství **Prometheus** od autorů Kadlečka a Odvárka (1999) ho ve své učebnici uvádějí. Způsob, jaký pro to volí, můžeme vidět na obr. 42 (1999, s. 16). Při výkladu ekvivalentních úprav postupují od názorných příkladů (úloh ve formě číselných rovnic či slovních úloh, které řeší tři žáci, hlavní postavy učebnice, v podstatě se jedná o vzory) k obecnému přehledu úprav, abstraktním poznatkům. Poté následuje výklad, jak postupovat při řešení rovnic, který je proložen úlohami pro žáky. Velice podobně je koncipována také učebnice určená pro tercie víceletých gymnázií (Herman, aj., 1996).


B *Čenda má dobrý nápad*

Čenda nám chce ukázat ještě další postup řešení rovnice $2x - 3 = 5x + 9$, na který přišel, když si četl Pepovo řešení. Sleduj ho a kontroluj.

„Když přičtu k oběma stranám rovnice číslo 3, zmizí číslo $-3$ z levé strany a přejde na pravou stranu jako $+3$:

$$2x \boxed{-3} = 5x + 9 \quad | +3$$
$$2x = 5x + 9 \boxed{+3}$$

Když odečtu od obou stran upravené rovnice člen $-5x$, zmizí člen $5x$ z pravé strany a přejde na levou stranu s opačným znaménkem jako $-5x$:“

$$2x = \boxed{5x} + 12 \quad | -5x$$
$$2x \boxed{-5x} = 12$$
$$-3x = 12 \quad | :(-3)$$
$$\underline{x = -4}$$



**Obr. 42**

Většina těchto učebnic nám předkládá téma rovnic velmi obecně, velmi instruktivně. Žákům jsou předkládány abstraktní poznatky a vzory řešení, kterých mají poté používat při řešení úloh, tedy v jednotlivých izolovaných modelech, místo aby měli žáci možnost získat různorodé izolované modely a na základě nich utvářet modely generické a následně abstraktní poznatky. Proto je pro žáky často obtížné do problému řešení rovnic více proniknout a pochopit je, nebo spíše uchopit postupy, které se při řešení rovnic používají. Učebnici (Binterová; Fuchs; Tlustý, 2009) bych označila jako malou výjimku. Zdá se mi ze všech učebnic nejnázornější, autoři se snaží uvádět jednoduché příklady z různých kontextů, které mohou být podle mého názoru žákům při pronikání do problému poměrně nápomocny. Myslím si však, že ani těchto pár příkladů nestačí. Aby žáci nezískávali pouze formální poznatky, je potřeba, aby jim bylo umožněno získat dostatek „malých zkušeností“ s řešením podobných problémů, dostatek izolovaných modelů. Tyto však žáci nezískají během jedné hodiny matematiky. Je potřeba, aby jim to bylo umožňováno v delším časovém úseku, mnohem dříve než samotné téma rovnic jako výuková látka přijde „na řadu“, tedy již i na 1. stupni ZŠ. Do jaké míry jsou na toto téma žáci předem připravováni, tomu bych se chtěla věnovat v další kapitole, kde budu zkoumat učebnice určené právě pro prvních pět ročníků ZŠ.

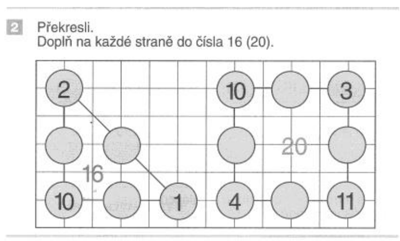
## 2.5.3 Rovnice v učebnicích pro 1. stupeň

Již jsme se seznámili s učebnicemi pro osmé ročníky základní školy (resp. pro tercie víceletých gymnázií), ve kterých je téma rovnic žákům podrobněji představováno. V jedné z nich (Herman, 1997) jsem našla poznámku, že se žáci s rovnicemi mohli setkat již na 1. stupni ZŠ. Abych zjistila, v jaké míře mají děti šanci se na 1. stupni s rovnicemi seznámit a získat dostatečné množství zkušeností s nimi, jejich izolovaných modelů, rozhodla jsem se projít několik učebnic, resp. řad učebnic pro 1. stupeň ZŠ a snažila jsem se v nich najít úlohy, které jsou propedeutikou k řešení rovnic, nebo rovnicemi samotnými. Vybrala jsem řady učebnic, které jsou zpracovány již podle RVP, ale zařadila jsem i učebnice starší, zpracované podle dříve platných vzdělávacích programů, protože mi byly doporučeny jako zajímavé. Prostudovala jsem vždy každou z těchto učebnic a následně výsledky své analýzy seskupila a porovnávala řady učebnic mezi sebou. K jakým výsledkům jsem dospěla, uvádím v následujícím textu.

Ve všech řadách učebnic, které jsem měla k dispozici, se vyskytly úlohy propedeutiky rovnic, nebo přímo již rovnice. Co se však u různých učebnic liší, je jejich počet a různorodost úloh. V následujících podkapitolách uvádím přehled, jaké úlohy jsou v jednotlivých řadách učebnic zařazeny. Jednotlivé podkapitoly jsou nazvány podle nakladatelství, které dané učebnice vydalo. Nejvíce se věnuji učebnicím z nakladatelství Fraus, protože jejich autoři zařadili do učebnic velké množství úloh z různých prostředí, díky nimž mají žáci možnost odhalovat různé zákonitosti rovnic i jevů, které rovnice popisují (Hejný, aj., 2010, s. 39). Proto je také tato podkapitola podle prostředí členěna.

### 2.5.3.1 Matematický ústav AV

V učebnicích vydaných Matematickým ústavem AV (M1 – M5) je několik úloh „rámečkového“ typu. V učebnici pro 1. ročník jsem našla šest cvičení tohoto typu, dále pak dvě úlohy „Myslím si číslo“ a jednu na doplňování schématu, kterou můžeme vidět na obr. 43 (M1, s. 50).




Obr. 43

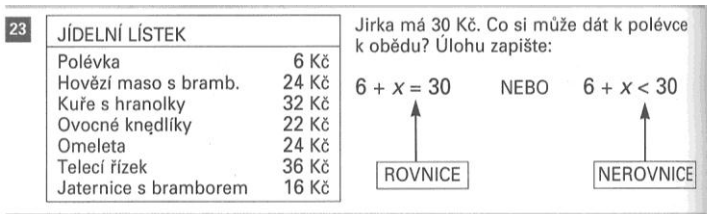
V této učebnici mě zaujala úloha s využitím rovnoramenných vah, kde se váží kočky. Tuto úlohu proto uvádím na obr. 44 (M1, s. 49).


Obr. 44

Učebnice pro 2. ročník žákům také nenabízí mnoho úloh, které jsou propedeutikou rovnic. Vyskytují se zde pouze čtyři „rámečková“ cvičení a jedna úloha s vahami. Pro 3. ročník jsou vedle rámečkových navíc připraveny asi tři úlohy „myslím si číslo“ a dvě z prostředí hadů.

Ve 4. Ročníku se žáci seznamují již s pojmem rovnice, autoři používají číselný zápis s $x$. Jak je toto seznámení se s pojmem koncipováno, můžeme vidět na obr. 45 (M4, s. 56).

Opět se vyskytují úlohy „Myslím si číslo“. Ke konci učebnice najdeme i soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých zasazenou do trojúhelníkového schématu, viz obr. 46 (M4, s. 99). Děti ji mají řešit metodou pokus-omyl.


23

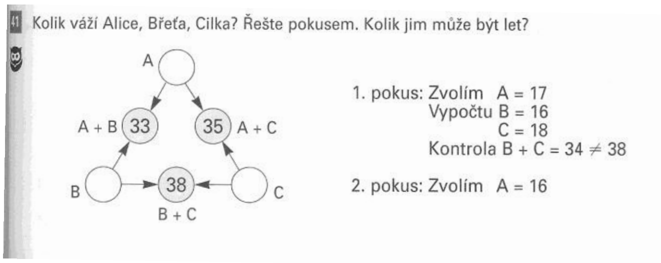
| JÍDELNÍ LÍSTEK | |
|---|---|
| Polévka | 6 Kč |
| Hovězí maso s bramb. | 24 Kč |
| Kuře s hranolky | 32 Kč |
| Ovocné knedlíky | 22 Kč |
| Omeleta | 24 Kč |
| Telecí řízek | 36 Kč |
| Jaternice s bramborem | 16 Kč |

Jirka má 30 Kč. Co si může dát k polévce k obědu? Úlohu zapište:

$6 + x = 30$ NEBO $6 + x < 30$

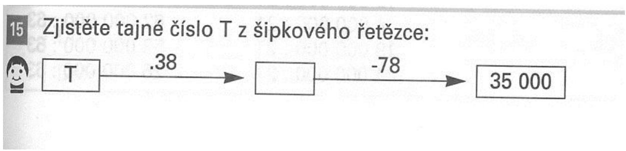
ROVNICE NEROVNICE

Obr. 45




Obr. 46

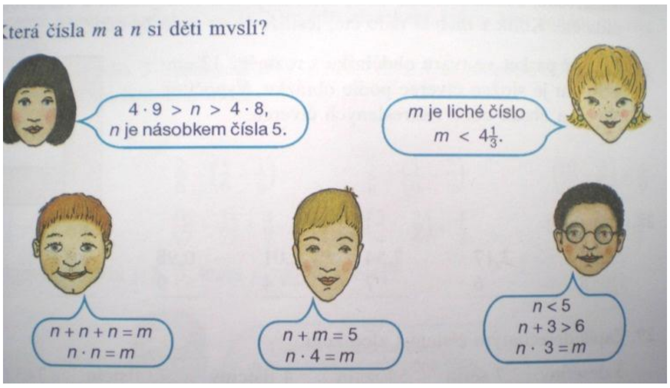
V 5. ročníku opět nenajdeme mnoho úloh, našla jsem pouze dvě, jedna je „Myslím si číslo“ a druhá odpovídá prostředí hadů, viz obr. 47 (M5, s. 73).




Obr. 47

## 2.5.3.2 Prometheus

V učebnicích s názvem Svět čísel a tvarů není propedeutice rovnic v prvních čtyřech ročnících věnováno mnoho pozornosti. V každé z nich jsem našla pouze jedno cvičení s úlohami „rámečkového“ typu, v učebnici pro 4. ročník navíc ještě jednu úlohu „Myslím si číslo“. V učebnici pro 5. ročník je výskyt rovnicových úloh již větší. Poměrně často se objevují úlohy „Myslím si číslo“, vyskytují se i sčítací pyramidy. Zajímavé je, že autoři zařadili i několik číselných rovnic, kde se užívá k označení neznámé písmene $x$. Na konci učebnice (M5, s. 130) je dokonce úloha „Myslím si číslo“ zaznamenána pomocí číselného zápisu soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými (na obr. 48 je můžeme vidět dole vlevo a uprostřed).

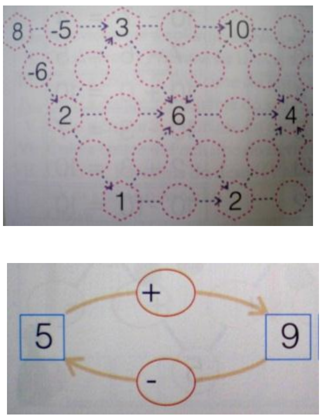



**Obr. 48**

## 2.5.3.3 Prodos

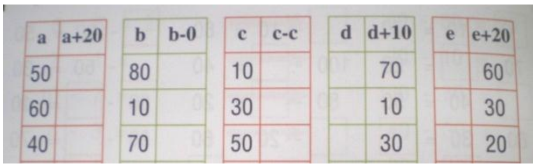
Dále jsem hledala rovnicové úlohy v modré řadě učebnic z nakladatelství Prodos. Je zde zařazeno poměrně dost těchto úloh, avšak většina z nich je rámečkového typu, především v učebnicích určených 1. až 3. ročníkům. Mění se pouze kontext, do kterého jsou tyto úlohy zasazeny, jednou jsou v obrázku domečku, jindy v květině, viz obr. 49 (Pr1/3, s. 16). Našla jsem však i dvě úlohy odpovídající úlohám z prostředí hadů, resp. šipkových grafů, viz obr. 50 (Pr1/2, s. 52 a 61).

**Obr. 49**




**Obr. 50**

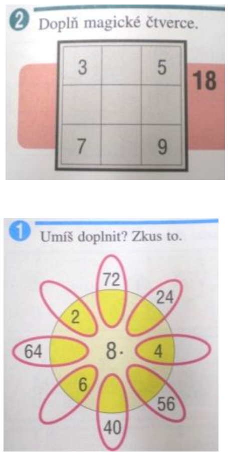
V 2. ročníku se vedle rámečkových úloh objevují úlohy, kde mají žáci doplňovat tabulku. V jejím záhlaví najdeme zadání úlohy, které nám říká, co máme do dané tabulky doplňovat. Překvapilo mě, že jsou v tomto zadání užita písmena. Jedná se tedy již o číselný zápis rovnice uspořádaný do tabulky. Především ve třetím díle najdeme těchto úloh poměrně hodně. Na obr. 51 můžeme ukázku takovéto tabulky vidět (Pr2/2, s. 15). První sloupečky bych však neoznačila za rovnice, spíše v nich vidím pouze výrazy a děti dosazují za proměnné postupně různé hodnoty. Rovnice vidím až v posledních dvou sloupečcích. Děti znají rovnici např. $d + 10 = 70$, ze které mají dopočítat neznámou $d$ (první úloha čtvrtého sloupečku).



| a | a+20 | b | b-0 | c | c-c | d | d+10 | e | e+20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | | 80 | | 10 | | | 70 | | 60 |
| 60 | | 10 | | 30 | | | 10 | | 30 |
| 40 | | 70 | | 50 | | | 30 | | 20 |

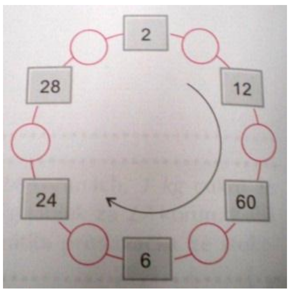
**Obr. 51**

V učebnici pro 3. – 5. ročník se opět vyskytuje mnoho úloh s rámečky či doplňováním tabulky. Od třetí třídy jsou zařazeny dále úlohy „Magické čtverce“ (Pr3/3, s. 21) nebo sčítací trojúhelníky, dále také úlohy, kde se doplňuje schéma „květiny“ (obr. 52). Osobně mi tyto úlohy velmi připomínají úlohy rámečkové, pouze jinak prostorově uspořádané. Mezi jednotlivými „okvětními lístky“ neexistují žádné vzájemné vztahy, je pouze potřeba doplnit prázdné políčko, aby platilo: 8 krát vnitřní políčko je rovno políčku vnějšímu (Pr3/2, s. 36).

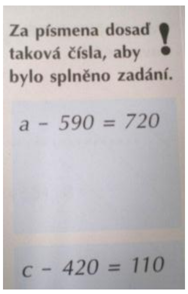



**Obr. 52**

Počet úloh rovnicového typu ve 4. a 5. třídě je oproti předešlým ročníkům znatelně nižší, vyskytují se ovšem stále podobné úlohy. Upozornit bych však chtěla na úlohu v učebnici pro 4. ročník. Jedná se o doplnění kruhového schématu, které mi velmi připomíná hada, který je stočen „dokolečka“. Bylo by možné jej nazvat šipkovým grafem, který je uspořádám do kruhu, viz obr. 53 (Pr4/2, s. 24). V úloze jsou zadána stavová políčka a úkolem je doplnit operátory změny. Dále se zde vyskytuje poprvé cvičení s číselnými rovnicemi, viz obr. 54 (Pr4/3, s. 41).



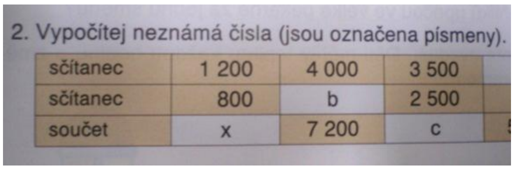

**Obr. 53**




**Obr. 54**

### 2.5.3.4 Alter

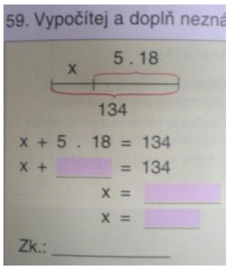
Další řadu učebnic, která byla předmětem mého zkoumání, vydalo nakladatelství Alter. V učebnicích pro první tři ročníky se vyskytují pouze úlohy s rámečky, najdeme jich ale poměrně mnoho. Typově se jedná většinou o triádu, tedy úlohu ve tvaru $a + b = c$, přičemž jedno z čísel $a$, či $b$ je neznámá, je tedy nahrazeno rámečkem. Oproti jiným učebnicím se však v (A3, A5) vyskytují i rámečkové úlohy s odlišnou strukturou: $a \cdot b + \square = c$. Pro 4. třídu je připraven další typ úloh – doplňování tabulky, některé tabulky odpovídají tabulkám v učebnicích nakladatelství Prodos, jiné jsou koncipovány odlišně, jejich ukázku vidíme na obr. 55 (A4, s. 80).


2. Vypočítej neznámá čísla (jsou označena písmeny).

| | | | |
|---|---|---|---|
| sčítanec | 1 200 | 4 000 | 3 500 |
| sčítanec | 800 | b | 2 500 |
| součet | x | 7 200 | c |

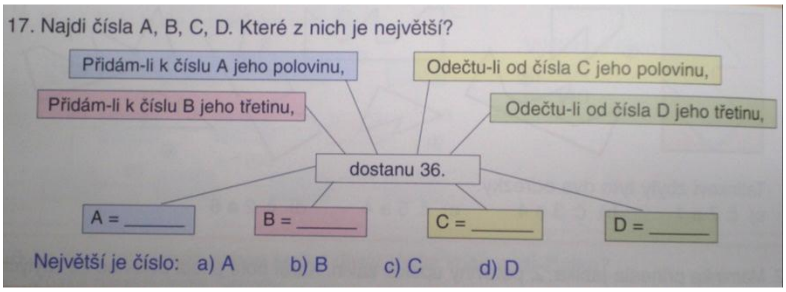
**Obr. 55**

Navíc se však objevuje i šipkový graf či cvičení s úlohami typu „hadi“ a magický čtverec a trojúhelník. Zajímavá je však skutečnost, že autoři v učebnici uvádějí číselné rovnice. Jsou zařazovány již v poslední třetině knihy (A4), a to nejméně v šesti případech. Zaujalo mě to především proto, že těmto číselným rovnicím prakticky nepředchází žádná propedeutika kromě již zmiňovaných rámečkových úloh. Na obr. 56 uvádím ukázku jedné z těchto úloh (A4, s. 43).




**Obr. 56**

V učebnici pro 5. ročník opět nenalézáme žádné nové typy úloh, až na jedinou výjimku, kterou je jedna úloha typu „Myslím si číslo“, viz obr. 57 (A5, s. 158).

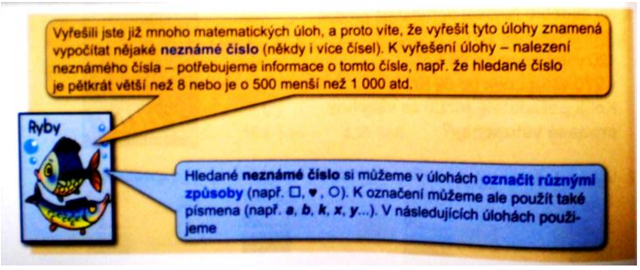



**Obr. 57**

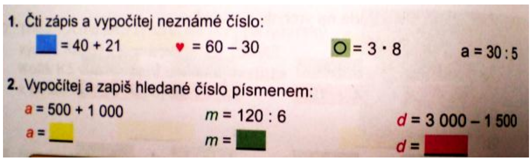
### 2.5.3.5 SPN

Řada učebnic nakladatelství SPN se různorodostí úloh příliš neliší od předcházejících dvou řad. Ve všech nalezneme velké množství rámečkových úloh, s vyšším ročníkem se jejich počet snižuje. Kromě těchto úloh se v učebnicích, kromě 3. ročníku, vyskytují také součtové trojúhelníky či pyramidy, v 5. ročníku najdeme i pyramidy s ostatními početními operacemi.

V učebnici pro 1. ročník se navíc objevuje jedna úloha „Myslím si číslo“, pro 2. ročník jeden součtový čtverec. Ve 4. ročníku jsou žákům předloženy již číselné rovnice, oproti předcházejícím řadám je zde však určité vysvětlení, nebo spíše uvedení dané problematiky, viz obr. 58 (S4, s. 76), což hodnotím kladně. Užití písmen v zápisu rovnice na mě pak nepůsobí tak náhle, násilně. Zvláštní ovšem je, že autoři již dále podobné úlohy nezařazují, ani v této učebnici, ani v učebnici pro 5. ročník. Pravděpodobně to je způsobeno tím, že každou z těchto dvou učebnic zpracovával jiný kolektiv autorů. V 5. ročníku se naopak vyskytují dva magické čtverce, jedna úloha typu „had“ a tabulka, která je téměř shodná s tabulkami zařazenými v učebnicích nakladatelství Alter (viz obr. 55)




**Obr. 58**




## 2.5.3.6 Fraus

V těchto učebnicích se setkáváme s různými prostředími, která byla představena již v kapitole 2.4.

### Rámečkové úlohy

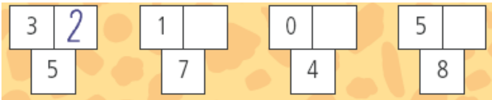
I v těchto učebnicích najdeme rámečkové úlohy, a to již od prvního ročníku, kde se vyskytuje poměrně velké množství těchto úloh. Postupně jejich počet v dalších učebnicích ubývá a v učebnici pro čtvrtou třídu už je prakticky nenajdeme. Typově se jedná většinou o triádu. V několika případech se však vyskytují také úlohy $a + b = c + d$, kde neznámá může být kterékoli z těchto čísel.

### Úlohy „Myslím si číslo“

V učebnicích jsou uvedeny také úlohy „Myslím si číslo“. Jejich počet však není příliš vysoký, dvě najdeme v 2. ročníku a asi tři ve 3. V učebnici pro 4. třídu jich je více, především proto, že začnou být propojovány s číselnými rovnicemi. Děti dostanou úkol vyřešit tuto úlohu a zapsat pomocí čísel jako rovnici (případně i přepsat do jiných prostředí), nebo naopak podle číselných rovnic tvoří úlohy o myšleném čísle, viz obr. 64.

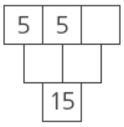
### Součtové trojúhelníky

Prostředí součtových trojúhelníku je dětem předkládáno již od začátku 1. ročníku. Nejprve však nepočítají s čísly, ale s tečkami a různými předměty. Zde se ještě s rovnicemi nesetkáme, žáci nejprve objevují princip vyplňování těchto trojúhelníků. Když se místo jiných znaků začnou využívat čísla, objeví se v trojúhelnících již první jednoduché rovnice, jak můžeme vidět na obr. 59 (F1/1, s. 42).

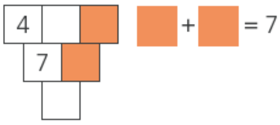



**Obr. 59**

Později, když dvoudimenzionální (v horním řádku jsou dvě políčka) trojúhelníky nahradí vícedimenzionální, vyskytne se i více neznámých, rovnice tvoří jednoduché soustavy (např. v první úloze na obr. 60 (F1/2, s. 16): $D = 5 + 5 = 10$, $10 + E = 15$, $5 + C = E$), které vyřešíme postupným dosazováním. V druhé úloze na obr. 61 (F1/2, s. 31) je složitější soustava rovnic, která již není tak snadno vyřešitelná jako úloha předešlá. Vyžaduje větší intelektuální úsilí.




**Obr. 60**



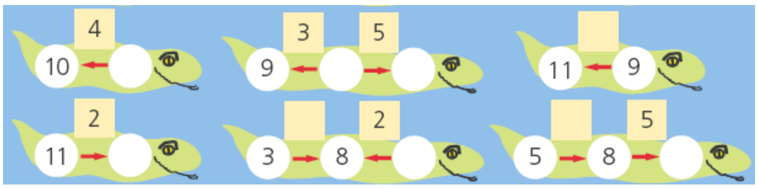

**Obr. 61**

V dalších ročnících se setkáme s mnoha těmito úlohami. Barevně označené neznámé tvořící soustavu rovnic se vyskytují nejprve 1. a v 2. řádku trojúhelníka, později se jedna z nich vyskytne i na místě dolního čísla, nebo obě v 1. řádku.

Nový typ úloh přijde až ve 4. ročníku, kdy je určen součet čísel v prvním řádku součtového trojúhelníka (viz obr. 7), později najdeme i úlohu, kde je zadán součet všech čísel v trojúhelníku.

## Hadi

Hadi se vyskytují již v učebnicích pro 1. ročník. Neznámá je již i prvním cvičení jak v roli stavu, tak operátoru změny. Šipky určující směr pohybu hada, tedy způsob aplikace operátoru změny, ukazují různý směr, jak vlevo, tak i vpravo, přičemž se vyskytují i hadi, kteří jsou tvořeni šipkami obou směrů zároveň (viz obr. 62 (F1/2, s. 10), hadi uprostřed).

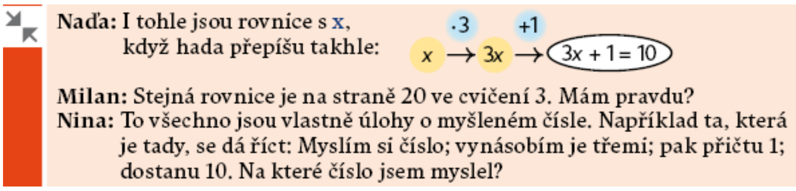



**Obr. 62**

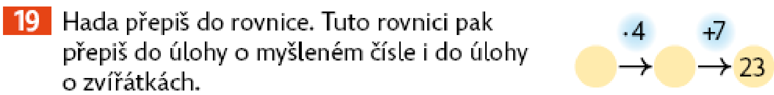
Již v pátém cvičení z prostředí hadů se vyskytne soustava rovnic o dvou neznámých, které jsou buď obě v roli operátorů, nebo jedna v roli operátoru a druhá v roli stavu.

Postupně se vyskytují delší hadi, nebo soustavy s více neznámými. Od 2. dílu učebnice pro 2. ročník se vyskytuje i další operace, nejen sčítání (resp. odčítání), ale i násobení (resp. dělení). Jakmile k tomuto dojde, začnou být operátory zaznamenávány i se znaménky. Až potud se znaménka nepoužívala, neboť se nepředpokládala jiná operace než adice, jejíž směr určovaly šipky, tudíž znaménka nebyla potřebná.

Úloh z tohoto prostředí, kde najdeme rovnice, se v učebnicích vyskytuje poměrně mnoho, v učebnici pro 3. ročník je jich však již méně. V učebnici pro 4. ročník je hadů využito (stejně jako úloh „Myslím si číslo“ ad.) jako prostředku k uchopení konvenčního zápisu rovnic. Žákům, kteří jsou již zvyklí úlohy z prostředí hadů řešit, je ukázána spojitost mezi hady a konvenčním zápisem rovnic, viz obr. 63 (F4, s. 22). Žáci poté mají v úlohách za úkol nejen hada vyřešit, ale také ho přepsat jako číselnou rovnici, případně i jako úlohu v jiném prostředí, jako je tomu v úloze na obr. 64 (F4, s. 22).




**Obr. 63**




**Obr. 64**

## Šipkové grafy

Šipkové grafy se vyskytují poprvé v učebnici pro 4. ročník. Neznámé figurují především v rolích stavů, pouze v jedné úloze na konci učebnice se objeví na místě operátorů. Žáci však nemají za úkol grafy pouze řešit, ale také sami tvořit. V takových úlohách mají zadaná čísla, a to jak v roli stavu, tak i čísla v roli operátorů, která mají pro tvorbu šipkového grafu použít. Díky těmto úlohám mohou žáci lépe poznat vztahy mezi jednotlivými čísly v grafu.

Celkově se v této učebnici vyskytuje poměrně velké množství úloh z tohoto prostředí, většinu z nich mají žáci vyřešit. Úloh, kde mají žáci grafy nejdříve sami sestavit, je o něco méně, asi v sedmi cvičeních.

### Pavučiny

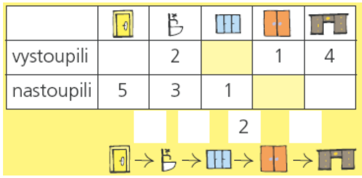
S prvními pavučinami se žáci setkávají již v 2. dílu učebnice pro 1. ročník. První úlohy se od ostatních liší. Žáci znají hodnoty šipek a doplňují čísla do kroužků, nebo znají hodnoty jednotlivých šipek i čísla v kroužcích a doplňují barevné šipky. Po těchto úvodních úlohách následují již klasické úlohy z prostředí pavučin, viz obr. 16.

V prvních úlohách se setkáme pouze s dvěma barvami šipek, tzn. se dvěma neznámými, později se třemi. Na konci 2. ročníku začnou být úlohy doplněny dalšími podmínkami – je určeno nejmenší nebo největší číslo, součet všech, nebo pouze některých čísel, součet nejmenšího a největšího čísla atd. V dalších ročnících se setkáváme stále s podobnými úlohami.

Úloh z prostředí pavučin nalezneme v těchto učebnicích mnoho. V 1. ročníku sice pouze několik, protože se zde s daným prostředím teprve seznamujeme, v 2. ročníku je těchto úloh naopak velmi mnoho, více než 20, v dalších ročnících pak asi po sedmi cvičeních.

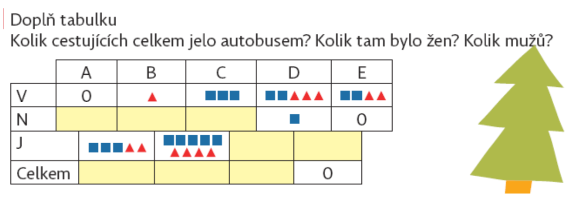
### Autobus

S prostředím autobus se žáci seznamují již od 1. ročníku. Nejprve pouze jednotlivé jízdy hrají. Zápis do tabulky se začne vyskytovat až v 2. dílu, a to pouze v jednoduché podobě. V úlohách na straně 58 se vyskytnou rovnice poprvé, viz obr. 65 (F1/2, s. 58). Podobné úlohy zde najdeme celkem tři.




**Obr. 65**

V 2. ročníku je zápis již více formální, k označení zastávek se nepoužívají obrázky, ale písmena, a také řádky jsou označeny pouze prvními písmeny ($V$, $N$, $J$), jako v ukázce na obr. 24. V 2. dílu začnou být cestující rozlišováni na ženy a muže, místo jedné neznámé v jednom políčku tam máme rovnou dvě – počet žen a počet mužů. Na obr. 66 uvádím tuto úlohu (F3, s. 36). Ženy jsou značeny jako červené trojúhelníky, muži modré čtverečky.




**Obr. 66**

V dalších ročnících se setkáváme se stejnými typy úloh. Nejvíce úloh z prostředí autobus najdeme v prvních dvou ročnících, v učebnici pro 3. ročník je jich již jen několik a ve 4. už pouze tři.

### Zvířátka dědy Lesoně

S tímto prostředím, které je z hlediska propedeutiky rovnic velmi významné, se žáci seznamují od 2. ročníku. Nejprve se vyskytuje velké množství úloh, kde žáci pouze porovnávají jednotlivá družstva, nebo družstva tvoří, mají za úkol určit silnější (resp. slabší) družstvo a zvířátko, které má ze silnějšího družstva odejít (resp. slabšímu přijít na pomoc).

Rovnice, tedy úlohy s maskami, se poprvé objeví ve 3. dílu učebnice pro 2. ročník, kde je těchto úloh pouze několik. V dalších ročnících se vyskytují téměř pouze rovnicové úlohy, nejprve s jednou maskou, poté (od 3. ročníku) i soustavy rovnic se dvěma maskami, resp. neznámými, ale také úlohy, kde jsou neznámými počty daných zvířátek, viz ukázka na obr. 30.

Ve 4. ročníku je toto prostředí využito pro zavedení konvenčního (číselného) zápisu rovnic. Jak konkrétně je tento přechod koncipován, můžeme vidět na obr. 67 (F4, s. 20 – 21). Poté se vyskytují úlohy, kde jsou úlohy z prostředí zvířátek přepisovány do čísel a naopak, stejně jako do jiných prostředí.


**Obr. 67**

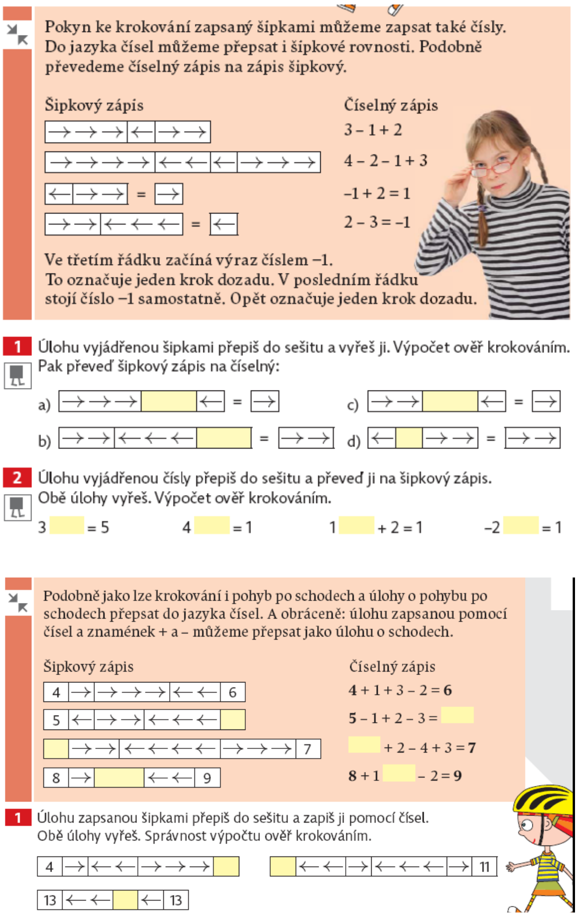
## Krokování a schody

Tato dvě prostředí spolu velmi úzce souvisí, jsou si velmi podobná, v obou se využívá procesu krokování. Rozdíl je však v tom, že zatímco v krokování počítáme pouze s kroky, v prostředí schodů jsou důležité adresy schodů, mezi nimiž krokujeme (viz také kapitola 2.4.2.5). Protože se prostředí prolínají i v učebnicích, kde z počátku ani nejsou rozlišována, popisuji obě tato prostředí dohromady v rámci jednoho oddílu.

Krokovat začínají již žáci v 1. ročníku, nejprve pouze podle povelů paní učitelky či spolužáků. V učebnici je pro toto stádium připraveno několik úloh, rovnice se mezi nimi ovšem nevyskytují. Poté, co se žáci seznámí se zápisem krokování pomocí šipek, setkají se i s prvními rovnicemi, které jsou zasazeny do prostředí schodů. Rovnice v prostředí krokování najdeme až v učebnicích pro 2. ročník. Jednu z nich jsme také mohli vidět na obr. 31. Později v tomto ročníku najdeme i krokové rovnice s více neznámými nebo soustavy rovnic, kde je omezen počet šipek, které můžeme doplňovat.

V učebnici pro 3. ročník začnou být obě prostředí rozlišována, vyskytují se však stále úlohy stejného typu. Později začnou být krokovací rovnice přepisovány do jazyka čísel a naopak, následně i rovnice v prostředí schodů. Jazyk šipek je propojován s jazykem čísel. Konkrétní postup můžeme vidět na obrázcích vpravo (F3, s. 69, 83).

Ve 3. ročníku se poprvé setkáme ještě s dalším typem úloh, s úlohami, kde se vyskytuje mínus před závorkou.

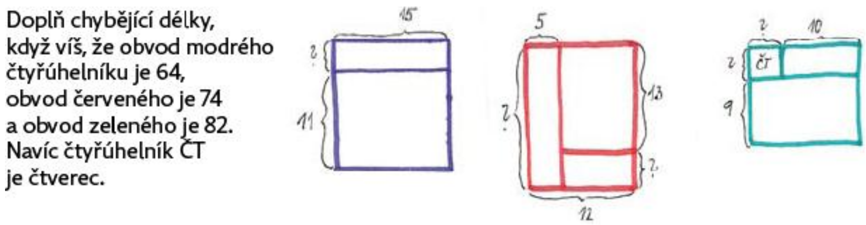



**Obr. 68**

Největší koncentrace úloh z prostředí krokování a schodů je asi v učebnicích pro 2. ročník. V dalších ročnících se, podobně jako u ostatních prostředí, jejich počet snižuje.

## Neznámé rozměry pravoúhelníků

Úlohy tohoto typu najdeme v učebnici pro 4. ročník, není jich však příliš, vyskytují se ve čtyřech cvičeních. V prvním z nich je zadán obvod čtyřúhelníku, viz obr. 69 (F4, s. 29), v dalších je známý obsah. V úlohách se vyskytují jedna až tři neznámé.




**Obr. 69**

### 2.5.3.7 Závěry z analýzy učebnic pro 1. stupeň ZŠ

Jak již bylo uvedeno v úvodu kapitoly, ve všech učebnicích se vyskytují rovnice, liší se však pestrost a množství úloh.

V učebnicích vydaných nakladatelstvím Matematický ústav AV je těchto úloh poměrně malé množství. I přes to však najdeme úlohy z různých prostředí, z nichž většina jsou strukturální, pouze dvě úlohy jsou ze sémantického prostředí rovnoramenných vah. Setkáme se také s koncepčním zápisem rovnice, kde se objeví neznámá $x$ bez dostatečné přípravy.

Autoři učebnic vydaných nakladatelstvím Prometheus zařadili rovnic také málo. Všechny jsou strukturální, nejčastěji jsou uváděny úlohy „Myslím si číslo" a číselné rovnice, jejichž „nástup" také není nijak zvlášť připravován.

V učebnicích nakladatelství Prodos a Alter můžeme najít poměrně mnoho rovnicových úloh. Ani zde však nenajdeme sémantické úlohy. Nejčastěji se setkáme s rámečkovými úlohami, nebo vyplňováním tabulky. Neznámé jsou označovány algebraicky a to bez plynulého přechodu či zavádění jevu.

V tomto se liší učebnice SPN, kde toto zavádění jevu můžeme najít, avšak dále se s ním již nepracuje. Také v těchto učebnicích najdeme větší množství rovnic, jde však pouze o strukturální úlohy.

Nejvíce rovnic nalezneme v učebnicích Fraus, a to z různých prostředí, sémantických i strukturálních. Setkáme se také s koncepčním zápisem rovnic, který je propojován s již známými rovnicovými úlohami ze sémantických i strukturálních prostředí, takže je tento přechod plynulý a žáci jsou schopni díky tomu vyřešit i složitější číselné rovnice.

# 3 Experimentální část

V této části se věnuji popisu a analýze realizovaných experimentů. Nejprve se zabývám metodologickou stránkou a v dalších kapitolách poté již popisuji a analyzuji části některých experimentů.

## 3.1 Metodologie

### 3.1.1 Cíle experimentů

Cílem experimentální části je seznámit se se způsoby, jimiž žáci řeší rovnice zasazené do prostředí, se kterými jsme se seznámili v přípravné části, hlouběji porozumět jejich myšlenkovým procesům a získat tak cenné zkušenosti pro budoucí praxi.

Formulovala jsem proto několik otázek, které se staly východiskem pro přípravu, realizaci i následné zpracování experimentů.

- Jak děti různého věku řeší rovnice zasazené do různých matematických prostředí?
- Jaké postupy a strategie pro řešení úloh volí?
- Používají stejné či podobné strategie u různých typů úloh?
- Jakých chyb se dopouštějí?
- Co může být příčinou těchto chyb?

Stanovila jsem si cíle experimentální části. V další fázi bylo nutno rozhodnout, jak budu odpovědi na ně hledat. Rozhodla jsem se pro kvalitativní formu výzkumu prostřednictvím realizace experimentů,[24] při které jsem se zaměřila na odhalení jevů, které charakterizují myšlení žáka. Následně uvádím přehled těchto experimentů a zároveň je blíže charakterizuji.

### 3.1.2 Přehled a popis realizace experimentů

Experimenty jsou poměrně různorodé, proto jsem je rozdělila do několika skupin. Každou z nich nyní stručně charakterizuji. V přehledu experimentů používám zkratky Ex – Experimentátor, VZ – videozáznam, P - příloha. V této kapitole uvádím pouze ty experimenty, které jsou v dalším textu popsány. Přehled všech experimentů je v příloze 1.

[24] Pojem experiment chápu v širším slova smyslu, jako slovo každodenního jazyka, tedy ve významu pokus, zkoušení (Gavora, 1996, s. 87).

### První experimenty

První experimenty jsem realizovala v září a říjnu 2009 s pěti dětmi různého věku (1 - 5. ročník ZŠ). Se všemi dětmi jsem se osobně znala, proto experimenty probíhaly ve volném čase dětí v jejich domácím prostředí, a to s každým z nich individuálně. V místnosti, kde byl experiment uskutečněn, se však v některých případech pohybovali další členové rodiny, někteří působili rušivě. Experimenty byly natáčeny na videokameru. Všechny děti byly s touto skutečností předem seznámeny a souhlasily s ní. Pro všechny tyto experimenty jsem vybrala kombinaci metody pozorování a nestrukturovaného rozhovoru.

Tyto experimenty byly zaměřené na úlohy z prostředí zvířátek dědy Lesoně. Žádné z dětí se s ním do té doby nesetkalo, proto jsem jim prostředí nejprve představila a uvedla vztahy mezi zvířátky. Následovala kaskáda přípravných úloh a nakonec úlohy s maskami.

| **Experiment** | **4.** |
|---|---|
| **Zúčastnění** | Veronika, Ex |
| **Ročník ZŠ** | 5. |
| **Datum** | 28.10.2009 |
| **Místo** | Hříšice, Dačice |
| **Poznámky** | V domácím prostředí, 15:30-16:10 |
| **Další přítomní** | Veroničina matka, mladší sestra |
| **Nástroj** | Úlohy z prostředí DL |
| **Evidence** | VZ, přepis částí videozáznamu |
| **Umístění v DP** | Kap.3.3.3, s. 66-71 |

Tento proces byl však poměrně časově náročný a hlavně pro některé děti také obtížný. Další postup tímto způsobem by vyžadoval dlouhodobou soustavnou práci s dětmi, což bohužel vzhledem k jistým okolnostem nebylo možné. Proto jsem se rozhodla další výzkum koncipovat jinak. Přesto jsem fragmenty jednoho z těchto experimentů v praktické části použila (E4), protože i zde se vyskytly zajímavé jevy.

### Experimenty v 8. a 9. ročnících

Protože mě také zajímalo, jak řeší rovnice žáci na 2. stupni základní školy, uskutečnila jsem dva experimenty v 8. ročníku základní školy a později dva experimenty v 9. ročníku dvou škol ve Frankfurtu nad Mohanem v Německu. Materiály z těchto experimentů jsem nakonec do dalšího textu nezařadila, proto jejich průběh blíže nepopisuji. Jejich přehled je také zařazen do přílohy 1.

### Experimenty v rámci běžných vyučovacích hodin

Další experimenty proběhly v rámci běžných vyučovacích hodin matematiky. Jako subjekty experimentů jsem vybrala žáky čtvrtých tříd, kde jsou pro výuku využívány učebnice z nakladatelství Fraus (F4). Ve 4. třídě v ZŠ v Neratovicích se podle učebnic z nakladatelství Fraus učí od 1. ročníku, v ZŠ v Praze 6 a v Praze 2 od 3. ročníku. Se žáky ze ZŠ v Praze 6 jsem se poměrně dobře znala díky praxím v rámci mého studia, s ostatními třídami jsem dříve nebyla v kontaktu.

Hodinu vždy připravila a vedla učitelka, účastnila jsem se pouze jako pozorovatel. Když žáci pracovali samostatně, vybrala jsem náhodně některé z nich a provedla s nimi rozhovor o postupu jejich řešení. Použila jsem tedy stejné metody jako v předcházejících experimentech. Průběh hodiny i individuální rozhovory jsem opět natáčela na videokameru. V praktické části jsou uvedeny části těchto záznamů.

Experiment 13 se od ostatních liší. Na konci vyučovací hodiny mi učitelka dala prostor, abych žákům předložila k řešení pracovní list č. 3 s jednoduchými úlohami z různých prostředí. Mým záměrem bylo provést s několika žáky opět rozhovor o jejich řešení, to se však příliš nevydařilo. S několika žáky jsem tedy vedla rozhovor poté, kdy měli pracovní list již vyřešený.

Experiment 15 vznikl ve spolupráci se Sandrou Holákovou.

### Experiment v rámci matematického kroužku

Matematický kroužek probíhá v ZŠ v Praze 6 jedenkrát týdně po vyučování ve volném čase dětí. Navštěvují ho žáci 2. a 3. ročníků, kteří se v běžném vyučování matematiky učí podle učebnic nakladatelství SPN (2. ročníky) a Alter (3. ročníky). V kroužku se děti seznamují s různými matematickými prostředími, která jsou pro ně nová. V 1. pololetí to byla prostředí autobus, zvířátka dědy Lesoně a součtové trojúhelníky.

Pro tuto skupinu dětí jsem připravila pracovní list 3. Pracovní list jsem dětem nejprve představila, vysvětlila všechny úlohy. Žáci řešili úlohy samostatně. S některými z nich jsem po vyřešení pracovního listu provedla rozhovory o jejich způsobu řešení některých úloh. Tyto rozhovory jsem natáčela na videokameru.

Zde uvádím přehled výše popsaných experimentů:

| Experiment | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. |
|---|---|---|---|---|---|
| Zúčastnění | Žáci, učitelka,Ex | Žáci, učitelka,Ex | Žáci, učitelka,Ex | Žáci, učitelka,Ex | Žáci,Ex |
| Ročník ZŠ | 4. | 4. | 4. | 4. | 2. - 3. |
| Datum | 12.5.2010 | 20.1.2011 | 2.2.2011 | 8.2.2011 | 27.1.2011 |
| Místo | ZŠ Neratovice | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 2 | ZŠ Praha 6 |
| Poznámky | Běžná vyučovací hodina, 8:55 - 9:40, 10:00 - 10:45, 26 žáků | Běžné vyučovací hodiny 10:00 - 10:45, 10:55 - 11:40, 22 žáků | Běžná vyučovací hodina, 8:00 - 8:45, 17 žáků | Běžná vyučovací hodina, 8 - 8:45, 14 žáků | Matematický kroužek ve volném čase 13:00 -14:00, 19 ž |
| Další přítomní | Praktikantka | Praktikantka | | | Učitelka |
| Nástroj | Úlohy z prostředí DL, MSČ, šipkových grafů | Číselné rovnice, úlohy z prostředí DL, MSČ | Úlohy z prostředí MSČ, krokování, pracovní list 3 | Úlohy z prostředí krokování, šipkových grafů | Úlohy z pracovního listu 3 |
| Evidence | VZ, přepis fragmentů, fotografie | VZ, fotografie písemných záznamů žáků | VZ, písemné záznamy, jejich fotografie | VZ, písemné záznamy žáků | VZ, písemná řešení |
| Umístění v DP | Kap.3.3.2, s.60-61, 3.3.3.2, s.84-87 | 3.3.2, s. 61-66 | 3.3.1, s. 59-60, 3.3.3 s. 76-79, P6 | 3.3.4, s. 87-93 | 3.3.1 s. 56-59, 3.3.3, s. 72-73, P7 |

### Individuální experimenty

Posledním typem experimentů, které jsem realizovala, byly individuální rozhovory s žáky při řešení úloh z různých prostředí. Experimenty probíhaly v několika dnech. První dva v odpoledních hodinách po vyučování, ostatní během dopoledního vyučování. Všechny proběhly v samostatné místnosti. Každý žák měl k dispozici tolik času, kolik potřeboval. V průběhu experimentů byl pořizován videozáznam.

Respondenty byli náhodně vybraní žáci ze 4. třídy ZŠ v Praze 6. Žáci se mohli rozhodnout, zda se zúčastní, či ne. Většina z nich se chtěla účastnit, proto jsem nakonec realizovala poměrně velké množství těchto experimentů. Úlohy, které tito žáci v rámci experimentů řešili, byly uspořádány do pracovních listů 4 a 5.

V posledních dvou experimentech byli respondenty dva vybraní žáci z 3. ročníku, kteří navštěvují výše popsaný matematický kroužek a kteří se účastnili již experimentu č. 15. Tyto žáky jsem vybrala na základě jejich písemných záznamů z tohoto experimentu. Jejich řešení byla správná, bohužel z nich nebylo možno mnoho vyčíst. Zajímalo mě tedy, jak při řešení postupovali. Proto jsem pro ně připravila pracovní list 6, jež je zkrácenou verzí pracovního listu 3, který již řešili.

| **Experiment** | **18.** | **19.** | **20.** | **22.** |
|---|---|---|---|---|
| **Zúčastnění** | Kristýna, Ex | Míša, Ex | Pavel, Ex | Nela, Ex |
| **Ročník ZŠ** | 4. | 4. | 4. | 4. |
| **Datum** | 28.1.2011 | 28.1.2011 | 28.1.2011 | 28.1.2011 |
| **Místo** | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 |
| **Poznámky** | Během vyučování | Během vyučování | Během vyučování | Během vyučování |
| **Nástroj** | Úlohy z pracovního listu 4 | Úlohy z pracovního listu 4 | Úlohy z pracovního listu 4 | Úlohy z pracovního listu 4 |
| **Evidence** | VZ, přepis částí záznamu, žákovské řešení | VZ, přepis částí záznamu, žákovské řešení | VZ, přepis částí záznamu, žákovské řešení | VZ, přepis částí záznamu, žákovské řešení |
| **Umístění v DP** | 3.3.5, s. 95-6 | 3.3.3.2 s. 79-81, 3.3.5 s.96-97, P8 | 3.3.3.2 s. 81-82, 3.3.4 s. 93-95, 3.3.5 s. 97-100, P9 | 3.3.5, s. 100-101 |

| **Experiment** | **23.** | **29.** | **30.** | **31.** |
|---|---|---|---|---|
| **Zúčastnění** | Lukáš, Ex | Anežka, Ex | Jirka, Ex | Vojta, Ex |
| **Ročník ZŠ** | 4. | 4. | 3. | 3. |
| **Datum** | 28.1.2011 | 2.2.2011 | 2.2.2011 | 2.2.2011 |
| **Místo** | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 |
| **Poznámky** | Během vyučování | Během vyučování | Během vyučování | Během vyučování |
| **Nástroj** | Úlohy z pracovního listu 4 | Úlohy z pracovního listu 4 | Úlohy z pracovního listu 6 | Úlohy z pracovního listu 6 |
| **Evidence** | VZ, přepis částí záznamu, žákovské řešení, | VZ, žákovské řešení | VZ, přepis částí záznamu, žákovské řešení | VZ, přepis částí záznamu, žákovské řešení |
| **Umístění v DP** | 3.3.5, s. 102-103, P10 | 3.3.3.2, s. 82-84 | 3.3.3, s. 73-74 | 3.3.3, s. 75-76 |

## 3.2 Zpracování získaných materiálů

Realizací experimentů jsem získala poměrně velké množství materiálů. Ne všechny jsem však mohla použít. Vybrala jsem proto jen části z některých experimentů, které mě něčím zaujaly, kde se vyskytly zajímavé fenomény. Přitom jsem se zaměřila především na řešení těch typů úloh, které považuji z hlediska propedeutiky rovnic za nejvýznamnější: rámečkové, „Myslím si číslo“, z prostředí zvířátek dědy Lesoně, krokování a nakonec řešení samotných číselných rovnic. Protože v rámci některých experimentů řešili žáci úlohy z různých prostředí, mohou se fragmenty jednoho experimentu vyskytnout v různých kapitolách.

Části experimentů zaznamenávám do tabulky, kde uvádím čas, doslovný přepis videozáznamu a mé poznámky a komentáře k průběhu experimentu.

Čas umožňuje sledovat, jak dlouho daný žák úlohu řeší. Je uveden v minutách a sekundách, shoduje se se stopáží daných videonahrávek, resp. jejich částí, které jsou uvedeny v přílohách.[25] Pro označení vstupů jednotlivých účastníků experimentů v přepisu záznamu jsem zvolila následující symboliku: Ex1 určuje můj první vstup, Uč2 první vstup učitelky, Xy3 pak třetí vstup konkrétního dítěte (Xy je zkratka jeho jména, nejčastěji první dvě písmena). V některých případech používám identická jména dětí, jindy jsem je změnila. Přepis záznamu je místy doplněn poznámkami, které upřesňují průběh experimentu. Jsou označeny kurzívou.

Ve sloupci poznámky a komentáře nalezneme také moje analýzy žákovských řešení, nebo spíše pokusy o analýzu, protože mé zkušenosti nejsou ještě zdaleka dostatečné. Je také obtížné interpretovat všechny jevy. Mnohé jsem mohla vidět zkresleně na základě svých vlastních postojů a myšlenkových procesů, proto mé analýzy nemohou být chápány jako absolutní pravdy.

## 3.3 Analýzy experimentů

V následujících kapitolách uvádím žákovská řešení úloh z některých prostředí, jejich průběh a popis jevů, které se při nich vyskytly. V kapitole 3.4 pak jsou tyto jevy shrnuty a doplněny komentáři.

[25] V příloze nalezneme pouze ty experimenty, z nichž nejsou žáci identifikovatelní.

### 3.3.1 Rámečkové úlohy

V rámci dvou experimentů (E13 a E15) měli žáci 2. – 4. ročníku řešit dvě rámečkové úlohy. První z nich je součtová triáda, přičemž neznámá se objevuje na pravé straně. V učebnicích je většinou na straně levé. Rozdílem je, že u úloh typu $3 + \square = 6$ je rovnost pojímána procesuálně, oproti tomu u druhého typu konceptuálně. Stejně je tomu i v druhé úloze, kde ale vystupuje více členů, na každé straně rovnice čtyři. Úlohy jsem zařadila především z důvodu, že se jedná o úlohy obvyklé. Vyskytují se běžně v učebnicích pro 1. stupeň ZŠ, a proto jsem předpokládala, že nebudou dětem dělat problémy.

Úloha R1: $6 = 3 + \square$

Úloha R2: $4 + 1 + 2 + 1 = 2 + 2 + 1 + \square$

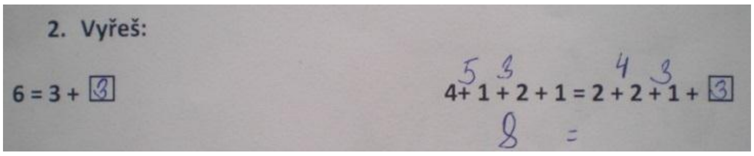
| | |
|---|---|
| **Experiment:** | **15** |
| **Třída:** | **2. – 3.** |
| **Datum:** | **27. 1. 2011** |
| **Místo:** | **ZŠ Praha 6** |

První úloha opravdu dětem problémy většinou nedělala. Až na tři žáky z experimentu E15 ji všichni vyřešili správně. Tito tři zapsali všichni stejný výsledek: 9. Příčinou mohla být pouhá nepozornost, nevšímali si pořádně znamének. Dalším možným vysvětlením, které však s předchozím velmi souvisí, by mohlo být, že žáci jsou zvyklí počítat pouze typ úloh, kde jsou zadány dva (případně více) sčítance na levé straně a na pravou se do prázdného políčka vždy zapíše jejich součet. Žáci proto nemají potřebu se znaménky zabývat, a proto jim ani nevěnují svou pozornost. Možná mají vytvořený generický model: „když je v úloze znaménko plus, sečti čísla na levé straně a výsledek zapiš do prázdného políčka vpravo".

S druhou úlohou mělo problém více žáků. Dané uspořádání čísel a znamének je pro žáky nestandardní úlohou, důkazem může být následující přepis fragmentu videonahrávky. Žákyně 2. ročníku Natálka si s druhou úlohou nevěděla rady, a proto přišla za mnou, abych jí pomohla.

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha R2:** $4+1+2+1=2+2+1+\square$ | | |
| 00:00<br><br><br>00:15 | **Na1:** Ale tady tohle nechápu, když, když tam jsou ty příklady a je tam to rovná se.<br>**Ex1:** No, tak zkus přemýšlet. | Překvapuje ji, že je rovnítko „uprostřed úlohy“ a ne na konci, tedy před výsledným součtem všech čísel. Není na to zvyklá.<br>**JEV:** silně procesuální vnímání rovnosti |

Bohužel videozáznam je příliš krátký, není zachycen její další postup. Uvádím zde však její výsledné řešení. S problémovou situací si nakonec poradila a vyřešila ji správně.




Obr. 70

Ve druhé úloze se chybných řešení vyskytlo více než v první. V pěti případech žáci napsali do prázdného rámečku číslo 13, což je součet všech známých čísel. Příčina by mohla být stejná jako v úloze předešlé.

Zde uvádím ukázku řešení jednoho z žáků 3. ročníku, Davida. Druhou úlohu vyřešil také špatně, jeho výsledek byl 13. Po rozhovoru se mnou, jehož přepis uvádím následně, si však chybu opravil a výsledek přepsal.

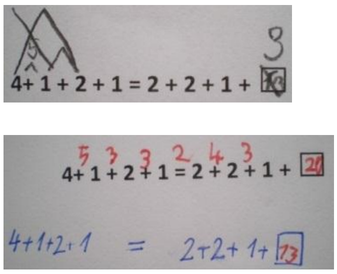

Obr. 71

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
| --- | --- | --- |
| **Úloha R2:** $4 + 1 + 2 + 1 = 2 + 2 + 1 + \square$ | | |
| 00:00 | **Ex1:** A řekni mi, jak jsi to počítal. | |
| | **Da1:** Čtyři plus jedna je pět, plus dva je sedm, plus jedna je osm, plus dva je deset, plus dva je… dvanáct, plus jedna je třináct. | Před slovem „dvanáct“ (Da1) udělá kratičkou pauzu, jako by ho něco napadlo, patrně uviděl svou chybu. Také ji vidím, ale neupozorňuji na ni. |
| | **Ex2:** Aha, dobře, tak jo, děkuju. | |
| 00:22 | **Da2:** Já jsem si nevšim toho rovná se asi. Jsem si ho všiml až teď. | |
| | **Ex3:** A máš to teda teďka dobře, nebo ne? | Myslím, že otázky, které jsem Davidovi pokládala, (Ex3 – 5) nebyly nejlépe zvolené. |
| | **Da3:** Nevim. | |
| 00:30 | **Ex4:** Že sis teďka všiml rovná se. | Nyní bych volila raději místo Ex3 otázku: „A co to znamená?“ Předpokládám, že by žák sám odpověděl, že to má špatně a možná by i sám navrhl, že si chybu opraví. |
| | **Da4:** No, já jsem ho tam neviděl. | |
| | **Ex5:** Tak chceš to zkusit ještě znova vyřešit? | |
| | **Da5:** Tak jo. | |
| 00:38 | **Ex6:** Dobře. | |

V tomto případě se podle mého názoru jednalo především o nepozornost.

**JEV:** chyba z nepozornosti

Je také možné, že žáci nejsou zvyklí na rámečkové úlohy, kde se vyskytuje více členů než tři. Je to pro ně určitá nestandardní situace, pro niž hledají ve svém vědomí generický model (nebo vzor). K tomu možná došlo také u těchto dvou žáků, jejichž písemný zápis zde uvádím.




Obr. 72

Žáci si možná vybavili situaci, kdy v dlouhém řetězci čísel postupně sečetli dvě vedle sebe a následně sčítali tyto výsledky. Pokusili se tento vzorový postup aplikovat i zde, ovšem „vnitřní“ čísla zahrnuli dvakrát, protože sčítali každá dvě sousední čísla[26] (důvodu zapsání čísla 2 nad znaménkem rovná v druhé ukázce nedovedu zcela odůvodnit). Tato aplikace vzoru, který je uložen v paměti žáků, je typickou ukázkou formalismu. Žáci se naučí jisté algoritmy, které poté bez porozumění aplikují na vizuálně podobné případy.

[26] Náznak stejného jevu můžeme vidět i v řešení Natálky, viz obr. 70.

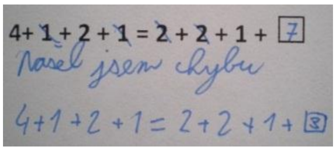
**JEV:** strategie sčítání více sčítanců

Domnívám se, že v případě první ukázky si žák tuto nepřesnost brzy uvědomil, a proto následně sečetl pouze čísla v zadání. Poté si ale uvědomil i chybnost tohoto řešení, buď si všiml rozložení znamének sám, nebo chybu zjistil při porovnání řešení se spolužákem. V případě druhém žák chybnost postupu odhalil, až když s vyřešeným pracovním listem přišel za mnou. Přepsala jsem mu tedy úlohu pod původní zadání a snažila se při tom zdůraznit pozici znaménka rovná se (odděleno větším prostorem). Žák však i přesto počítal stejným způsobem jako poprvé, avšak nyní každé z čísel zahrnul pouze jednou. Právě proto se domnívám, že v tomto případě nešlo o pouhou chybu z nepozornosti, ale její příčina je závažnější.

**Experiment:** **13**
**Třída:** **4.**
**Datum:** **2. 2. 2011**
**Místo:** **ZŠ Praha 6**

Čtvrťáci s touto úlohou neměli problémy, všichni vyřešili úlohu správně, až na jeden případ, kde došlo k chybě patrně proto, že žák zaměřil svou pozornost především na hledání stejných čísel, ne na samotné vyškrtávání. Tuto chybu si uvědomil, když mi vysvětloval svůj postup, a opravil si ji (viz obr. 73). Poznámku „Našel jsem chybu." žák zapsal, protože jsem ho o to požádala. Z této ukázky je zřejmé, jak důležité je s žáky o řešení komunikovat.

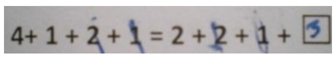
Jak můžeme na tomto obrázku vidět, žák pro vyřešení úlohy volil strategii vyškrtávání stejných čísel na obou stranách, jde vlastně o ekvivalentní úpravu: Odečtení stejného čísla od obou stran rovnice.




**Obr. 73**

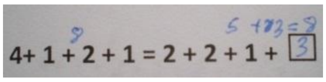
**JEV:** použití strategie vyškrtávání

Tento postup můžeme vidět také u další žákyně 4. ročníku, Adély.

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha R2:** $4+1+2+1=2+2+1+\square$ | | |
| 00:00<br><br><br>00:18 | **Ad1:** Já jsem si vyškrtávala dvojky a jedničky, abych to nemusela počítat, a tady mi zbyla čtyři plus jedna a tady dvě, takže tady mi bylo jasný, že tam musí být trojka. | Zde můžeme vidět její zápis:<br><br>**JEV:** použití strategie vyškrtávání |

Ostatní žáci patrně sečetli nejprve čísla na levé straně, poté na pravé, čímž vlastně získali sčítací triádu a na základě ní pak dopočítali neznámou. U některých to dokonce můžeme vidět poznamenané v pracovním listě (viz obrázek vpravo).

**JEV:** sečtení členů na obou stranách rovnice a dopočítání hodnoty neznámé.



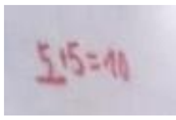

**Obr. 74**

## 3.3.2 „Myslím si číslo“

Úlohy „Myslím si číslo“ řešili žáci v běžných hodinách matematiky (E11-13). Úlohy buď zadávala učitelka, nebo je vymýšleli sami žáci. Vybrala jsem však úlohy, které zadala učitelka, protože úlohy dětí neměly rovnicový charakter.

**Experiment:** **11**
**Třída:** **4.**
**Datum:** **12. 5. 2010**
**Místo:** **ZŠ Neratovice**

První ukázka je z hodiny matematiky ve 4. ročníku ZŠ v Neratovicích. Jednalo se o první úlohu v této hodině. Děti mají stírací tabulky, na které zapisují.

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha MC1: „Myslím si číslo, když k němu přičtu třetinu čísla patnáct, vyjde mi deset. Jaké číslo si myslím?“**<br>*Tuto úlohu můžeme zapsat pomocí rovnice jako:* $x + 15/3 = 10$. *Řešení úlohy vyžaduje dva kroky, nejprve je potřeba zjistit, kolik je třetina z patnácti, a v dalším kroku obvyklým*[27] *způsobem řešení zjistit hodnotu neznámé.* | | |
| 01:41<br><br><br><br>02:10<br><br>02:29 | **Uč1:** Myslím si číslo. Když k němu přidám třetinu čísla patnáct, vyjde mi deset. *(opakuje třikrát)*.<br>Máme nějaké jiné řešení?<br>…<br>**Uč2:** Tak, je to pět. A je to proč pět? Verčo? | Verča si však své řešení zapsala na tabulku:<br>Verča pravděpodobně postupovala následně, usuzuji podle  |

[27] Používám pojmu obvyklým způsobem, tím mám na mysli běžný způsob, kterým daný řešitel úlohu řeší, u různých řešitelů může být rozdílný.

| | | |
|---|---|---|
| 02:35 | **Vr1**: Pět, protože třetina čísla patnáct je pět a pět plus pět je těch deset. | jejího vysvětlení: vypočítala nejprve třetinu z patnácti a poté dopočítala neznámou: „Kolik musím přičíst k pěti, abych dostala deset?“<br>**JEV:** dopočítání neznámé |

Většina počítá v hlavě a zapíše pouze výsledek. Nemůžeme tedy vidět jejich přesný postup.

**JEV:** řešení zpaměti.

| | |
|---|---|
| **Experiment:** | **12** |
| **Třída:** | **4.** |
| **Datum:** | **20. 1. 2011** |
| **Místo:** | **ZŠ Praha 6** |

Úlohy „Myslím si číslo“ řešili také žáci 4. ročníku ZŠ v Praze 6 (E12). Zde opět zadávala úlohy učitelka. V první části experimentu (první vyučovací hodina) žáci řešili bez zapisování úloh. Měli řešit pouze v hlavě. Kdo úlohu vyřešil, zvedl ruku a v určený okamžik všichni ukázali svá řešení pomocí prstů.

Učitelka zadala čtyři úlohy uspořádané podle obtížnosti od nejlehčí. První úlohy byly, zapsáno pomocí rovnice, tyto: (MC2) $\mathbf{2x+1=5}$, (MC3) $\mathbf{x-10=2}$. Další už byly složitější. Protože se u nich vyskytly zajímavé situace, uvádím zde přepis jejich záznamu.

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha MC4: „Myslím si číslo, když k jeho čtyřnásobku přičtu devět, vyjde mi dvacet jedna, jaké číslo si myslím?“**<br>*Tuto úlohu můžeme zapsat pomocí rovnice jako:* $\mathbf{4x+9=21}$. *Úloha je obtížnější, protože je v ní neznámá vyjádřena jako několikanásobek.* | | |
| 06:55 | **Uč1:** Myslím si číslo. Když k jeho čtyřnásobku přičtu devět, vyjde mi dvacet jedna.<br>*(zkráceno)*<br>**Uč2:** Pozor. Teď.<br>**Uč3:** Tři. Když k jeho | Úloha je pro žáky opravdu náročnější. I ti, kteří se u předešlých úloh přihlásili téměř okamžitě po formulaci úlohy, potřebují nyní déle přemýšlet. Ve třídě je však i několik žáků, kteří úlohu nevyřešili vůbec. (Někteří z nich měli problém i s jednoduchými úlohami.) Asi dva vypadají nezaujatě, avšak většině ostatních lze vyčíst z obličeje, že se opravdu snaží. Myslím, že jim |

| | | |
|---|---|---|
| 07:35<br>07:43 | čtyřnásobku, tři krát čtyři je dvanáct, přičtu devět, vyjde mi dvacet jedna. | dělá problém vyřešit úlohu bez písemného zápisu, patrně selhává jejich krátkodobá paměť.<br>**JEV:** potřeba zápisu |
| 07:52 | **Ad1**: Anebo dvacet jedna mínus devět. | Učitelka (Uč3) říká správné řešení. Bylo by možná vhodnější, kdyby svůj postup představilo některé z dětí. |
| 07:54 | **Uč4:** Poslední nejtěžší, ano? | Adéla hned reaguje, chce popsat svůj postup. Učitelka však pokračuje další úlohou, aniž by jí dala prostor. Z Adélina vstupu však můžeme vyčíst její postup řešení – používá strategii „odzadu“, aplikuje inverzní operace: $21 - 9 = 12$, $12 : 4 = 3$.<br>**JEV:** řešení pomocí strategie „odzadu“ |

| **Úloha MC5: „Myslím si číslo, když k němu přičtu dvě a pak to vynásobím třemi, vyjde mi dvacet čtyři, jaké číslo si myslím?“**<br>*Tuto úlohu můžeme zapsat pomocí rovnice jako* $(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})\cdot\mathbf{3}=\mathbf{24}$*. Úloha je obtížnější. Zatímco dříve byl zadán několikanásobek neznámé, k němuž se pak dále přičítalo (resp. odečítalo), nyní se nejprve k neznámé přičte dvě a poté je potřeba celý součet vynásobit.* | | |
|---|---|---|
| 08:01 | **Uč5:** Myslím si číslo, přičtu k němu dvě, *(delší pauza)* vynásobím to třema a vyjde mi dvacet čtyři *(opakuje dvakrát)*. | Učitelka dělá mezi jednotlivými částmi zadání pauzy, patrně aby si mohli lépe uvědomit, která operace je zadána, a uložit si danou informaci do krátkodobé paměti. |
| | **Ž1**[28]**:** Dvacet …? | Opět se jedná o složitější úlohu a všichni potřebují pro řešení více času. |
| 08:29 | **Uč6:** Dvacet čtyři. | |
| | **Lu1:** Kolika, třema to vynásobím? | |
| | **Uč7:** Hm.<br>*(zvonění)* Ještě chviličku. No, já už poznám, kdo to má dobře. | Je konec hodiny, zazvoní. Všichni ale dál sedí v klidu a pokračují, jako by se nic nedělo. |
| 08:51 | **Uč8:** Pozor. Teď. | Učitelka upozorní na Anežčino správné řešení. Domnívám se, že to bylo záměrné. Anežka je |

[28] Užívám označení Ž (žák), protože z nahrávky nerozeznám, kdo toto řekl.

| | | |
|---|---|---|
| 09:08<br><br>09:16<br><br>10:15<br><br>10:25 | Výborně, šest, ani sedm, ani osm, Anežka to měla správně.<br>**Ad2:** A my taky. Šest.<br>**Uč9:** A ostatní, já jsem teď koukala jenom na ně tři. Podívejte se na stranu čtyři…<br>**Lk1:** No, šest, šest a šest je osmnáct.<br>**Ad3:** Ne, čt…<br>**Uč10:** Přičtu k němu dvě.<br><br>**Lk2:** Je dvacet.<br>**Ad4:** Je osm.<br>**An1:** A děle, a děleno třema…<br>**Uč11:** Šest plus dvě je osm, krát tři je dvacet čtyři.<br>**Ad5:** Aha, aha.<br>**Uč12:** Vy jste zapomněli… No, vy poznáte, na co jste zapomněli. Když se podíváte na tu stranu čtyřicet pět, jestli tam ty dvě poslední úlohy, co jsem říkala, někde najdete.<br>… *(hledání, které to jsou)*<br>**Uč13:** A kluci, vy jste zapomněli u tý poslední na závorku, vy jste nejdřív to číslo vynásobili třema a pak jste nějakým záhadným způsobem vodečetli dvojku a …<br>**Lu2:** Já jsem totiž to ne… *(nesrozumitelné)*<br>**Uč14:** No. | tichá, nesmělá, pečlivá žákyně, která potřebuje povzbudit, aby získala větší sebedůvěru. Myslím, že, alespoň pro tuto chvíli, byla snaha učitelky úspěšná. Usuzuju podle její snahy o argumentaci při diskusi žáků o správném řešení (An1, v 09:16).<br>Učitelka chce činnost ukončit (Uč9), avšak žáci začnou o správnosti svých výsledků bez vyzvání diskutovat. Lukáš chce správný výsledek zpochybnit, protože se od jeho řešení, kterým si je patrně jistý, liší (Lk1). Adéla ihned reaguje.[29] Učitelka do diskuse vstoupí (Uč10), patrně kvůli tomu, že je již delší dobu přestávka. Chce, aby se situace rychle vyřešila.<br>**JEV:** potřeba argumentace<br>Lukáš přičítá dvě k osmnácti, tedy k trojnásobku myšleného čísla: $(3 \cdot 6) + 2 = 20$. Adéla přičítá dvě k myšlenému číslu, tedy podle zadání.<br>Z Anežčina pokusu o vysvětlení můžeme vyčíst, jak při řešení postupovala. I ona volila strategii „odzadu“.<br>**JEV:** řešení pomocí strategie „odzadu“<br>Celou diskusi ukončí učitelka, když prozradí správné řešení (Uč11). Lukáš a jeho soused jsou z toho celí překvapení. Učitelka chce objasnit, kde udělali chybu. Pak si ale vzpomene, že ji mohou odhalit sami, když najdou poslední dvě úlohy v učebnici. Jsou tam dvě číselné rovnice, můžeme je vidět na následujícím obrázku (F4, s. 45).<br>$4x + 9 = 21 \qquad 3 \cdot (x + 2) = 24$<br>Učitelka vysvětluje chybu, kterou udělali. Chce ukončit hodinu.<br>Lukáš už ví, kde udělal chybu. Bohužel ale jeho vysvětlení není rozumět. |

[29] Zde je vidět, jak může chyba některého z žáků vytvořit účinné edukační prostředí.

V popisu poslední úlohy (MC5) jsem psala, že je obtížnější než předešlá. Nyní však musím tento výrok zpochybnit. Zjistila jsem, že tato náročnost je relativní. Pro některého žáka je určitá úloha obtížnější, pro jiného jednodušší. K této úvaze mě přivedlo sledování Anežky a Lukáše při řešení všech čtyř úloh (MC2-5). Zatímco Lukáš první tři úlohy vyřešil bez problému, ale poslední úlohu špatně, Anežka na tom byla zcela opačně. Měla problémy právě s prvními třemi úlohami.

První úlohu Anežka vyřešila a přihlásila se, těsně před zveřejněním výsledků však dala ruce dolů a svůj výsledek neukázala, patrně znejistěla. My však nevíme, zda bylo její řešení opravdu chybné, či nikoli. U dalších úloh se vůbec nehlásila, ale domnívám se, že se snažila je vyřešit. Konečně poslední úlohu vyřešila správně. Zvedala pomalu nejistě ruce, poté se začala usmívat, měla radost, že došla k výsledku. Podle jejího úsměvu usuzuji, že si byla správností svého řešení jistá. Úlohu vyřešila možná právě díky úlohám předcházejícím. Při jejich řešení se musela více zamýšlet, a i když nedospěla k výsledku, nabyla určitého vhledu do řešení těchto úloh.

Tato úloha byla velmi důležitá pro posilování její sebedůvěry. Vyřešila nejtěžší z úloh. Učitelčino upozornění na Anežčino správné řešení podle mého názoru ještě více tento proces podpořilo. Popis této situace jsem zde uvedla především proto, že je dobré si uvědomovat, že řešení různých matematických úloh, a nemusí to být pouze rovnice, může posilovat sebedůvěru žáků.

**JEV:** radost z výsledku intelektuální práce

**JEV:** posilování sebedůvěry žáků

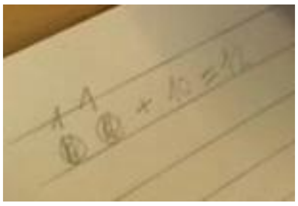
Na začátku následující hodiny žáci s řešením úloh „Myslím si číslo“ dále pokračovali. Úlohy opět zadávala učitelka, tentokrát však děti mohly zapisovat cokoli, co potřebovaly. Většina řešila zpaměti, někteří ale možnost zapisovat uvítali.

Zadány byly tři úlohy, děti měly výsledky zapisovat do kroužků a vytvořit tak sněhuláka (jak můžeme vidět v následujících obrázcích). Poslední úloha byla prémiová, měla být umístěna do sněhulákova hrnce. Zapisování do tvaru sněhuláka bylo pro žáky určitou motivací. Úlohy byly následující:

1) Myslím si číslo, když k jeho dvojnásobku přičtu deset, vyjde mi dvanáct. ($2x + 10 = 12$)
2) Vezmu deset a přidám k němu trojnásobek čísla, které si myslím, a vyjde mi šestnáct. ($10 + 3x = 16$)
3) Když k čtyřnásobku čísla, které si myslím, přidám čtyři, vyjde mi šestnáct. ($4x + 4 = 16$)

4) Prémiová úloha: Myslím si číslo, jeho polovina je o dvě větší než jeho čtvrtina. Jaké číslo si myslím? ($x/2 = 2 + x/4$)

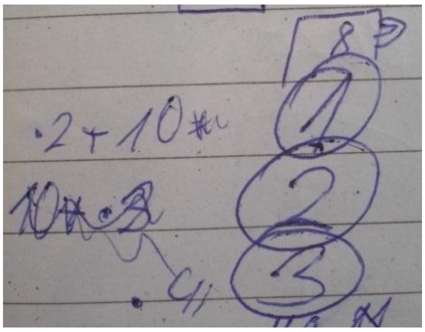
Zde uvádím ukázky některých zápisů:



Obr. 75

Místo myšleného čísla jsou načrtnuty dva kroužky (které nám mohou připomínat masky v prostředí zvířátek dědy Lesoně) a do každého z nich je doplněn výsledek. Vidíme, že číslo jedna není prvním číslem, které bylo doplněno. Proto se domnívám, že úloha mohla být řešena metodou pokus-omyl.

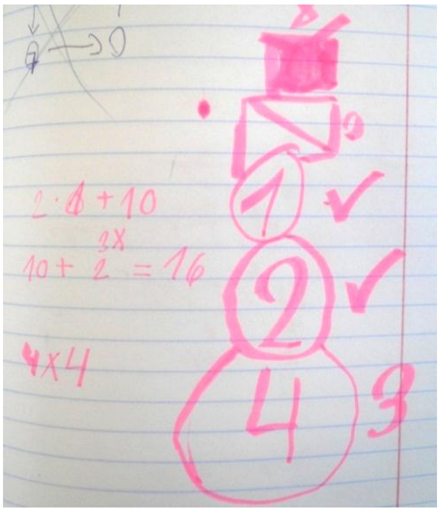
**JEV:** řešení metodou pokus-omyl.



Obr. 76

Na obrázku vpravo vidíme jiný způsob zápisu, tentokrát je neznámá znázorněna pouze vynechaným místem. Zadání úlohy není dopsáno celé, chybí vždy pravá strana rovnice. Domnívám se, že nebylo potřeba ji zapisovat, protože autor tohoto zápisu již vypočítal výsledek zpaměti. Asi právě proto je také přeškrtnuta druhá úloha a ze třetí je zapsán opravdu již jen fragment („když ho vynásobím čtyřmi“).

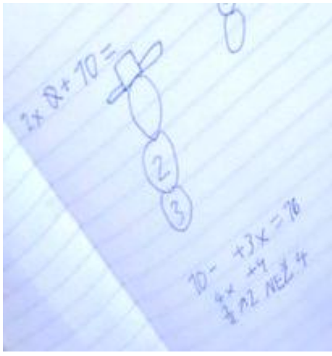
**JEV:** kombinace zápisu a řešení zpaměti.



Obr. 77

Zde vidíme více způsobů zápisu. U první úlohy je neznámá zakreslena jako kruh, který je poté přepsán správným výsledkem. U rovnice také chybí pravá strana, opět bylo pro autora zbytečné ji psát. V druhé úloze je způsob zapsání neznámé odlišný. Nejprve pro ni bylo vynecháno místo a nad něj zapsáno 3x. Nejprve jsem si myslela, že toto x označuje neznámou. Později mě však napadlo, že pravděpodobně vyjadřuje spíše krát. Myšlené číslo je poté napsáno do prázdného místa. Třetí úloha je zapsaná nepřesně, chybí část zadání. Asi právě proto je vypočítána chybně. Tato chyba může být způsobena nepozorností.

**JEV:** chyba z nepozornosti.



Obr. 78

V poslední ukázce vidíme zápis pomocí rovnice s $x$. První úloze chybí pravá strana a následně i výsledek (hlava sněhuláka). Domnívám se tedy, že autor pravou stranu rovnice neslyšel, možná proto, že se věnoval kreslení sněhuláka, a proto úlohu ani vypočítat nemohl. Druhá úloha je zapsána celá i s výsledkem. U třetí úlohy také chybí pravá strana rovnice, výsledek je však doplněn. Zde se asi jednalo o situaci jako u předešlé ukázky, totiž že bylo pro žáka zbytečné si tento výsledek zapisovat, protože neznámou vypočítal zpaměti.

**JEV:** kombinace zápisu a řešení zpaměti.

**JEV:** zápis pomocí $x$.

Viděli jsme různé zápisy řešení těchto úloh. Nejvíce žáků však řešilo „pouze“ zpaměti a zapsali pak jen výsledek. Zápis využili především ti, kterým nevyhovoval způsob řešení zpaměti, protože nedospěli k výsledku i přesto, že se snažili. Když již bylo zapisování povoleno, této možnosti využili a tak úlohu vyřešili.

### 3.3.3 Zvířátka dědy Lesoně

Úlohám z tohoto prostředí jsem věnovala své první experimenty. V rámci nich se děti s tímto prostředím seznamovaly a získávaly první zkušenosti. V každém experimentu se objevily mnohé zajímavé situace, ovšem ne vždy při řešení rovnic. Proto zde uvádím pouze části jednoho z experimentů (E4).

| | |
|---|---|
| **Experiment:** | **4** |
| **Žák:** | **Veronika** |
| **Třída:** | **5.** |
| **Datum:** | **28. 10. 2009** |
| **Místo:** | **Hříšice** |

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha Z1: MMMM=P[30], jsou družstva rozdělena správně? Které zvířátko má přijít slabšímu družstvu na pomoc?** <br> *Tato úloha je přípravou na úlohy rovnicového typu. Nejdříve musíme zjistit, zda jsou družstva stejně silná. V případě, že jsou jejich síly různé, musíme určit, které družstvo je slabší a najít zvířátko (neznámou), jež je potřeba doplnit. V této úloze jsou družstva stejně silná.* | | |
| 01:08<br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br>01:44<br>01:53<br>01:56 | **Ex1:** Tak zkusíme, čtyři myšky soutěžily se psem. *(Veronika se tomu směje.)* Rozdělil je děda Lesoň správně? Jsou stejně silný?<br>**Ve1:** Tohlecto dá jednu kočku, tohlencto dá husu. *(krátké zamyšlení)* Jo.<br>**Ex2:** Jo, byly stejně silný, jo?<br>**Ve2:** Jo.<br>**Ex3:** Hm.<br>**Ve3:** Počkej. *(Řeší znovu.)* Jo.<br>**Ex4:** Hm, skvělý. | Veronika mění slabší zvířátka za silnější, využívá tedy metody substituce.<br>**JEV:** využití substituce<br>Když má na levé straně husu a myš, odpoví, že jsou družstva správně rozdělena. Odpovídám otázkou, zda je tomu tak opravdu. Veronika přisvědčuje. Považuji úlohu za vyřešenou a hledám zadání další úlohy. Veronika ale začne řešit úlohu znovu. Potřebuje se ujistit, zda je její řešení opravdu správné. Kdybych místo otázky (Ex2) potvrdila, že se jedná o správné řešení, patrně by k tomuto jevu nedošlo. Zajímavá je také skutečnost, že při druhém řešení Veronika nekončí ve fázi, kdy je na levé straně husa s myší, ale vymění je za ikonu psa, o správnosti řešení tedy již nemůžeme pochybovat, je zřejmé na první pohled.<br>**JEV:** potřeba kontroly výsledku, opakované řešení úlohy |

[30] K popisu zadání úlohy používám v tomto i v následujících případech počáteční písmena zvířat (M - myš, K - kočka, H - husa, P - pes). Při realizaci experimentu byly zadány pomocí ikon.

<table>
<tr><td colspan="3">Úloha Z2: HK=M, jsou družstva rozdělena správně? Které zvířátko má přijít slabšímu družstvu na pomoc?<br><br>Zde je stejný typ úlohy jako úloha předešlá. Družstvo na pravé straně je však slabší a je potřeba, aby ho posílil pes.</td></tr>
<tr><td>01:58<br><br>02:29</td><td>Ex5: A potom soutěžila husa s kočkou a s myškou. Rozdělil to děda Lesoň správně?<br>Ve4: Ne.<br>Ex6: Ne? A tak který zvířátko by mělo přijít tomu slabšímu na pomoc?<br>Ve5: Pes. Protože tady to, to dá psa a půl (kočky) a tady to taky psa a půl.<br>Ex6: Hm, skvělý.</td><td>Veronika téměř okamžitě odpoví, že je to špatně rozdělené. Vidí to na první pohled – na pravé straně je pouze jedna myš, která je nejslabší ze všech zvířátek. Po velmi krátkém zamyšlení (aniž by manipulovala s ikonami) odpovídá, že chybí pes, přidá jeho ikonu na pravou stranu a začne sama vysvětlovat. Zdá se mi zajímavé, že Veronika označuje myš jako půl kočky („to dá psa a půl“). Proto se domnívám, že jako „základní“ zvířátko považuje kočku, volí si kočku jako jakousi jednotku.<br><u>JEV:</u> volba jednotky</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Úloha Z3: MMKM=MMM□ Které zvířátko je schované za maskou?<br><br>Jedná se o první explicitně vyjádřenou rovnici $(1+1+2+1=1+1+1+x)$ z toho prostředí, kterou Veronika řeší. Na obou stranách rovnice jsou záměrně stejná zvířátka. Zajímá mě, jakou strategii řešení použije.</td></tr>
<tr><td>03:18<br><br>03:43</td><td>Ex9: Tak teď mám tady pro tebe takový zase jiný... Jednou myš... Děda Lesoň uspořádal pro zvířátka, ee, takovou zábavu a některý zvířátka tam přišly v maskách. (Zároveň připravuji zadání další úlohy.)<br>Ve7: Budou tam ještě nějaký jiný zvířátka?<br>Ex10: Budou.</td><td>Veronika (Ve10) začne měnit zvířátka na levé</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| 03:54<br><br><br><br><br><br><br>04:08<br><br><br><br><br><br><br><br><br><br>04:31<br><br><br>04:38 | **Ve8:** A poznat který který je, že jo?<br>**Ex11:** Tak, jedno zvířátko přišlo schovaný, mělo masku a zase se přetahovaly, ale nikdo nevěděl, jaký zvířátko za tou maskou je schovaný.<br>**Ve9:** A já mám zjistit, který tam je, že jo?<br>**Ex12:** Hm, tak zvládla bys to?<br>**Ve10:** No, tak tohleto *(kočka s myší)* dá husu…. Tohleto *(zbylé dvě myši na levé straně)* dá kočku, tohleto *(dvě myši na straně pravé)* dá kočku, takže tam je schovaná… Kočka.<br>**Ex13:** Hm, a proč? Proč je tam kočka?<br>**Ve11:** Protože tohlencto *(kočka a myš)* dá husu a ještě kočka tam potřebuje bejt. | straně rovnice, mění zvířátka s menší silou za silnější. Stále používá substituci jako v předešlé úloze. Je možné, že redukcí na menší počet silnějších zvířátek získává lepší vhled do problému.[31]<br>**JEV:** využití substituce<br>Po prvním kroku řešení se zastaví (asi 5s) a pravděpodobně přemýšlí, jestli je to správně. Zároveň se dívá na papír, kde má vztahy mezi zvířátky popsané. Když se ujistí, že je její řešení správné, pokračuje dál. Na levé straně má nyní tedy kočku a husu. Poté změní dvě myši na pravé straně za kočku. Zbyde jí zde kočka, myš a maska. Hned odpovídá, že pod maskou je kočka. Její vysvětlení, proč tomu tak je, je pro mě zajímavé, protože já bych zdůvodňovala jinak. Veronika ukazuje, že na pravé straně dává kočka s myškou dohromady husu, která odpovídá huse na straně levé. Pod maskou musí být tedy logicky kočka. Má pravdu, přesvědčíme se o tom také odstraněním „masky“. |

Veroničino řešení bylo správné. Existuje však i jiný způsob řešení, který je podle mého názoru rychlejší. Stačí se pouze na zadání podívat a zjistíme, že na obou stranách jsou stejná zvířátka. Případně můžeme zvířátka, která jsou na obou stranách stejná, odebrat, tedy využít ekvivalentní úpravy odečtení stejného čísla či výrazu od obou stran rovnice (v tomto případě tři myši na každé straně) a hned dojdeme k výsledku.

**JEV:** přetrvání strategie

[31] Při řešení rovnic se používá stejné strategie – snaha o co nejmenší počet členů sečtením stejných neznámých, resp. čísel, „sečteme to, co se sečíst dá“.

| **Úloha Z4: PMKM=KKM□ Které zvířátko je schované za maskou?**<br><br>*Další rovnice* $(\mathbf{4+1+2+1=2+2+1+x})$ *je již složitější, protože řešení není zřejmé na první pohled, je potřeba měnit zvířátka, vyskytuje se zde i pes.* | | |
|---|---|---|
| 06:20 | **Ex14:** Potom se přetahoval pejsek s myškou, s kočkou a s myškou, byli na jedný straně a na druhý straně byly dvě kočky, myška a ještě jedno zvířátko… Jedno zvířátko tam bylo schovaný. | |
| | **Ve12:** *(po chvíli zamyšlení)* Vyndáš mi husu? | Na stole je málo ikon zvířátek, Veronika mě požádá, abych je přidala.<br>Přidávám ikony zvířátek na stůl. |
| 06:57 | **Ex15:** Počkej. | |
| 07:04 | **Ve13:** *(Pracuje na levé straně rovnice.)* Tohleto dá dohromady husu, takže... husa a myš daj dohromady psa, což tady budu mít dva psy… *(Nyní přechází k pravé straně rovnice.)* Tady byla… husa…(*Přemýšlí poměrně dost dlouho, asi 18s.*)<br>Takhle to bylo, že jo? | Veronika znejistí, patrně neví, jak dál pokračovat. Proto se vrací k původnímu zadání pravé strany rovnice a řeší ji znovu. |
| 07:42 | **Ex16:** Počkej. Dvě kočky a myška. Hm. | |
| 07:51 | **Ve14:** Tohlencto *(kočka a myš)* dá husu, tohlencto *(zbylou kočku)* si rozdělím na dvě ty *(myši)*, tohlencto *(myš a husa)* dá psa. Takže ještě… | Vstupuji do Veroničina řešení, protože kočku, kterou vyměnila za dvě myši, neodsunula a připletla se jí opět do pravé strany rovnice. Nyní se domnívám, že byl můj zásah zbytečný, ale snad ne příliš rušivý. |
| 08:02 | **Ex17:** Počkej, který zvířátka jsou tam teďka a který už tam nejsou? Se v tom teď nevyznám. | Veronika tedy znovu řeší pravou stranu a zároveň popisuje svůj postup. Myslím, že jí |

| | | |
|---|---|---|
| | Ještě jednou, byly tam teda dvě kočky a myš, jo? A tys to vyměnila… | řešení usnadňuje, když může své myšlenky vyjádřit slovy[32].<br>Odsunuji zvířátka, která Veronika již vyměnila, nejsou již tedy součástí rovnice, leží však příliš blízko a mohly by se opět k rovnici přimíchat. |
| 08:16 | **Ve15:** Tohle to je jedna husa a myš rozdělím na, kočku rozdělím na dvě myši, kočka… myš a husa dají dohromady psa…Myš… A… | Veronika si potřebuje zopakovat řešení levé strany rovnice. Ptá se proto, jaká zvířátka byla na této straně při zadání úlohy. |
| | **Ex18:** Ty už tam nejsou. | Chce se ujistit, zda je její řešení správné (Ve17). Moje reakce asi nebyla příliš správná. Veronika se potřebovala ujistit, ale já jí tuto jistotu neumožnila. |
| 08:43 | **Ve16:** Počkej, takže ještě tohle, tady byly který? | |
| | **Ex19:** Tam byli pejsek, kočka a dvě myšky. | **JEV:** Potvrzení správnosti autoritou |
| 09:04 | **Ve17:** Tohleto dá husu… tohlencto je dobře, jo? | Veronika se tím však již dále nezabývá a znovu začne řešit pravou stranu rovnice, opět znovu od původního zadání úlohy, stále využívá stejného postupu. |
| | **Ex20:** Nevim. | |
| | **Ve18:** Se podívej. | |
| | **Ex21:** No, to musíš vědět ty. *(delší pauza, 22s)* | Najednou však řešení vidí a dokáže ho vysvětlit. |
| | **Ve19:** Tady byl, kolik? | Tato situace se mi zdá zajímavá. Veronika řeší úlohu několikrát od začátku, od původního zadání. Řeší ji stále stejně, ale v určité fázi si najednou neví rady. Až při několikátém řešení, které následuje po delší pauze, výsledek jakoby sám vypluje na povrch, najednou ji napadne. |
| 09:32 | **Ex22:** Tady byly..dvě kočky a myš. | |
| | **Ve20:** Tak tohlencto dá husu… takle, tohlencto dá… tohlencto si rozdělím na dvě myši, tak tohle a tohle dá psa…hm… husa. | |
| | **Ex23:** Tady? Proč? | **JEV:** potřeba opakování postupu řešení k získání vhledu do situace |
| 10:26 | **Ve21:** No, protože myš a husa dá dohromady jednoho psa. | |
| | **Ex24:** Tak se kouknem? | |
| | **Ve22:** Hm. *(s úsměvem)* | |
| 10:36 | **Ex25:** Jo, je tam. | |

[32] Poznání v činnosti je utvrzováno slovy.

Poslední dvě úlohy (Z3 a Z4) jsem chtěla použít v dalším experimentu (E15). Zjistila jsem však, že jsem úlohu Z5 neúmyslně pozměnila, charakter úlohy však zůstal stejný.

Žáci matematického kroužku se s prostředím zvířátek dědy Lesoně setkali (alespoň podle harmonogramu) v rámci tří hodin, kdy již řešili úlohy s maskami. Tyto hodiny proběhly již v listopadu. Protože se experiment konal na konci ledna, zopakovali jsme síly jednotlivých zvířátek a tyto vztahy uvedené na nástěnce byly k dispozici také po celou dobu řešení.

Úlohy, které žáci řešili, jsou následující:

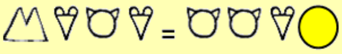
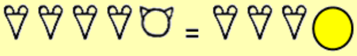
Z4 Z5

**Obr. 79**

Úloha Z5 se od úlohy Z3 liší, na levé straně je o jednu myš více. Úloha se změnila jen nepatrně, ovšem na řešení má tato změna větší vliv. Zatímco v úloze Z3 bylo řešení patrné na první pohled, protože na obou stranách byla zcela shodná zvířátka, v úloze Z5 si navíc musíme uvědomit, které zvířátko je stejně silné jako kočka s myší. Záleží však velmi na strategii, kterou použijeme. Budeme-li zvířátka zapisovat pomocí čísel, má změna úlohy jen malý vliv na obtížnost řešení.

Tyto úlohy jsem zařadila kvůli jejich jednoduchosti a především proto, že jsem předpokládala, že z jejich řešení bude možné odhalit způsob, kterým byly řešeny. Tento můj předpoklad byl ovšem mylný. Z písemných záznamů žáků z experimentu E15 toto bohužel vůbec nevyčteme. Všichni zapisovali pouze výsledky, většinou správné. Při rozhovoru s některými dětmi o řešení daných úloh jsem se bohužel také mnoho nedozvěděla. Příkladem může být rozhovor s Luckou, jehož přepis uvádím následně.

| | |
|---|---|
| **Experiment:** | **15** |
| **Žák:** | **Lucka** |
| **Třída:** | **2.** |
| **Datum:** | **27. 1. 2011** |
| **Místo:** | **ZŠ Praha 6** |

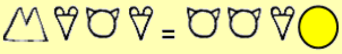
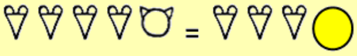
| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha Z4:** <br><br>**Úloha Z5:**  | | |
| 00:00<br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br>00:36 | **Lc1:** Já jsem si tohlencto nechala trochu, tohlencto *(Z4)* jsem si tam zkusila poradit nahoře, a tohlencto *(Z5)* jsem si trošku vypočítala a trošku taky nahoře jsem si.<br>**Ex1:** Jo, dívala ses tam nahoru.<br>**Lc2:** Ale jinak tohlencto trošku sama a tohlencto nahoře.<br>**Ex2:** To nevadí. A pamatuješ si, jak jsi potom to dělala?<br>**Lc3:** No, nevim, asi ne, protože já jsem si tohlencto trošku sama, ale trošku jsem se koukala, a tohlencto nahoře.<br>**Ex3:** Dobře. | Z tohoto vysvětlení vůbec nepoznáme způsob řešení. Dozvěděli jsme se pouze, že Lucka využila na nástěnce uvedených vztahů. Lucka není schopná popsat svůj postup.<br>**JEV:** neschopnost popsat postup řešení<br>Moje otázka (Ex2) nebyla příliš vhodně formulována. Kdybych se zeptala např. „Tuto úlohu jsi počítala sama, jak jsi to tedy dělala?“, dozvěděla bych se možná něco bližšího.<br>Rozhovor jsem ukončila (Ex3), měla jsem pocit, že Lucka by mi již neřekla nic jiného. |

Lucka možná nikdy nevysvětlovala svůj postup, to, jak dospěla k nějakému výsledku, nebo s tím má zatím příliš málo zkušeností. Asi ani nevěděla, co přesně po ní chci, stále jen opakovala, že řešila částečně sama a částečně s pomocí. Mohlo to být způsobeno například tím, že v její třídě děti nejsou vedeny k tomu, aby popisovaly své postupy.

Z důvodu, že jsem prostřednictvím experimentu E15 nezískala v podstatě žádné výsledky, vybrala jsem z této skupiny náhodně dva žáky, kterým jsem po týdnu předložila stejné úlohy. Nyní řešili tyto úlohy individuálně.

**Experiment:** **30**
**Žák:** **Jirka**
**Třída:** **3.**
**Datum:** **2. 2. 2011**
**Místo:** **ZŠ Praha 6**

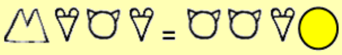
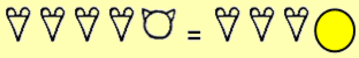
Jirka si dobře pamatoval vztahy mezi zvířátky, nepotřeboval jejich přehled. Začal hned vysvětlovat svůj postup, který je zaznamenán v následujícím přepisu.

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha Z4:** <br><br>**Úloha Z5:**  | | |
| 00:00 | **Ji1:** *(Z4)* Takže vím, že pes je silnej docela dobře, že má, že je až čtvrtej v pořadí, tak, tak tam dám čtyřku. Potom myška vím, že je první, tak přičtu jedna, a to je pět. Kočka je dvojka, ve druhým pořadí, tak k tomu přičtu dva, a je to sedm. Potom plus jedna je osm. A tady už přičtu čtyři, protože jsou to dvě kočky, plus jedna je pět. A když to je sedm, tak k tomu přičtu jednu kočku a je to dva. Plus dva, tak, a je to taky sedm. | Jirka si pamatuje pořadí zvířátek, jak byla zavedena za sebou. Podle toho určuje čísla, která jednotlivá zvířátka reprezentují. Pomocí těchto čísel pak počítá sílu jednotlivých stran, vše pouze zpaměti, nic si nepíše. Patrně právě z toho důvodu se dopustil chyby. Hodnota levé strany byla osm, což také správně určil, avšak poté pro dopočítání neznámé použil hodnotu levé strany sedm. |
| 00:42<br><br><br><br>01:00 | **Ex1:** Hm. A tady tu druhou *(Z5)*? Tu děláš stejně?<br>**Ji2:** Hm, tu dělám úplně stejně. Jedna, plus jedna, plus jedna, plus jedna, to jsou čtyři, plus dva je šest. A tady tři plus tři, husa je třetí. A je to. | U druhé úlohy tuto chybu neudělá, proto se domnívám, že byla způsobena nepozorností, či momentální nefunkčností krátkodobé paměti.<br>**JEV:** hodnocení zvířátek čísly podle jejich pořadí v přehledu |

To, že si Jirka pamatuje sílu zvířátek, i když s tímto prostředím dlouho nepracoval, svědčí podle mého názoru o dobré dlouhodobé paměti a patrně také o skutečnosti, že ho toto prostředí zaujalo. Se způsobem řešení, který použil, se setkávám poprvé. Již několikrát jsem se setkala s přepočítáváním zvířátek na čísla, děti tuto strategii používají poměrně běžně, v následujícím textu se s ní také setkáme. Vazba hodnoty zvířátka na jeho pořadí ve výčtu je pro mě však novým jevem.

Zaujal mě ještě jeden Jirkům výrok (Ji1) „A tady už přičtu čtyři, protože jsou to dvě kočky." Jirka má vytvořený pevný spoj, že dvě kočky mají sílu čtyři, nepočítá je již jako dvě plus dvě.

**Experiment:** **31**
**Žák:** **Vojta**
**Třída:** **3.**
**Datum:** **2. 2. 2011**
**Místo:** **ZŠ Praha 6**

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha Z4:**  | | |
| **Úloha Z5:**  | | |
| 00:09 | **Ex1:** Pamatuješ si, jak jsou který zvířátka silný?<br>**Vj1:** Hm.<br>**Ex2:** Jo? A jak to řešíš? *(delší pauza, asi 11s)*<br>Jestli potřebuješ, tak já ti můžu tady napsat znova, jak jsou který zvířátka silný. Jo? Radši jo? Tak to radši napíšeme. | Vojta přitaká, že si sílu zvířátek pamatuje. Poté však následuje delší přemýšlení. Napadá mě, že si možná vztahy mezi zvířátky nepamatuje zcela přesně, proto se ptám, jestli je opravdu nemám uvést. Píšu je na papír, který poté leží na stole před Vojtou. Nyní si však myslím, že to bylo zbytečné. |
| 00:36 | **Ex3:** Říkej nahlas, jak postupuješ, ano?<br>**Vj2:** Takže… myš a myš je silná jako kočka. A… *(pauza asi 25s)* | Vojta vysvětluje, používá substituci, střídavě ukazuje na zadání a na pomocný papír. Pak však náhle přestane a pouze přemýšlí. Zdá se mi, že by si chtěl něco zapsat, protože se pohybuje tužkou blízko zadání, udělá tam tečku. Ale moje tušení bylo mylné. Vojta si nepotřeboval nic psát, řešil v duchu a již objevil výsledek. |
| 01:22 | **Ex4:** Klidně si tam piš, co chceš. Jo?<br>**Vj3:** Ale já už jakoby rovnou vím tu odpověď.<br>**Ex5:** Jo? A co tam patří?<br>**Vj4:** Sem? *(ukazuje na masku)* E, husa. | |
| 01:39 | **Ex6:** A jak jsi na to přišel? Takhle rychle.<br>**Vj5:** Já ani nevím jak.<br>**Ex7:** Nevíš? No. Tak to tam napiš a nezkusil bys mi to nějak, nezkusil by sis nějak vzpomenout, jak´s to řešil, v hlavě? *(pauza asi 9s)* | Nedokáže své řešení blíže popsat, úlohu vyřešil a vlastně si vůbec neuvědomuje jak.<br>**JEV:** neschopnost popsat postup |

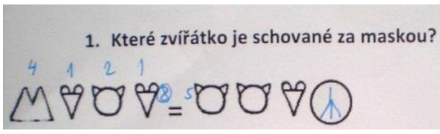
| | | |
|---|---|---|
| 02:02 | **Ex8:** Nevíš? Tak zkusíš ještě tuhle úlohu? Zkus nahlas říkat, co se ti honí v hlavě. | řešení |
| 02:12 | **Vj6:** Takže, myš a myš je jedna kočka a další dvě myši, to je taky kočka, takže tři kočky je… *(pauza asi 19s)* | Další úlohu opět začne řešit substitucí, až dostane na levé straně tři kočky. Najednou se jakoby zastaví. Přestane mluvit, ale dál řeší v duchu. |
| 02:43 | **Ex9:** Nevíš už zase rovnou odpověď? | |
| | **Vj7:** Hm, odpověď? | Slovo odpověď ho překvapí. Patrně neví, co přesně tím myslím. Proto se pokouším pojmenovat blíže, na co se ho ptám. Vojta ale slovo odpověď sám používá u předchozí úlohy (Vj3), proto mě jeho neporozumění udivuje. |
| | **Ex10:** Nebo jako správnou, co tam patří, správný řešení? | |
| 02:54 | **Vj8:** Myslím, husa? | |
| | **Ex11:** A proč? … *(pauza asi 6s)* Proč je tam husa? Dovedl bys mi to vysvětlit? *(pauza asi 9s)* | Vojta odpovídá spíše otázkou (Vj8), vypadá to téměř, jako by řešení tipoval. Měla jsem se možná zeptat, zda je tomu tak opravdu, zda si je jistý správností tohoto řešení. |
| | **Vj9:** Asi ne. | |
| 03:14 | **Ex12:** Tak to nevadí, tak to tam zkus napsat. | |

U Vojty se setkáváme se stejným jevem jako u Lucky, s neschopností popsat svůj postup řešení. Myslím však, že u obou se kvalitativně liší. Zatímco u Lucky to bylo způsobeno nedostatečně rozvinutou dovedností popsat svůj postup, u Vojty vidím důvod jinde. Usuzuji tak, protože začal srozumitelně vysvětlovat. Důvodem, proč přestal, může být jistý vhled do situace. Občas se mi také stane, že mě něco najednou napadne a vůbec nedokážu přijít na to, jak jsem na to vlastně přišla.

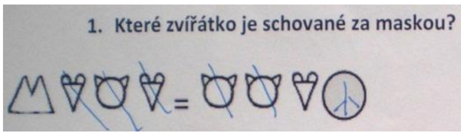
| | |
|---|---|
| **Experiment:** | **13** |
| **Třída:** | **4.** |
| **Datum:** | **2. 2. 2011** |
| **Místo:** | **ZŠ Praha 6** |

Čtvrťáci tyto úlohy řešili většinou, pokud lze ze záznamu vyčíst, přepisem zvířátek na čísla. Ta poté sečetli a dopočítali neznámou. Získané číslo následně zaznamenali příslušnou ikonou.

Další poměrně často využívaná strategie, která je ze záznamů čitelná, je vyškrtávání zvířátek na obou stranách rovnice, a to buď zvířátek shodných, nebo ekvivalentních. Tato strategie odpovídá, jak již bylo uvedeno, ekvivalentní úpravě odečtení stejného čísla od obou stran rovnice.




**Obr. 80**



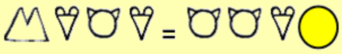

**Obr. 81**

### 3.3.3.1 Srovnání strategií řešení rovnic z prostředí zvířátek dědy Lesoně a rámečkových úloh

V pracovním listě 3 jsou rovnice z prostředí zvířátek dědy Lesoně a rámečkové úlohy uvedeny záměrně hned za sebou. Vyjadřují totiž stejné rovnice, přičemž v prvním případě jsou zapsány ikonicky a v druhém pomocí čísel a rámečků. Úloha Z4 odpovídá úloze R2. Úlohy Z5 a R1 se však liší strukturou, protože v R1 jsou čísla již sečtena, čímž vznikla triáda. Protože tyto úlohy nejsou zcela ekvivalentní, nebudu se jimi dále zabývat. Zaměřím svou pozornost na úlohy Z4 a R2.

Žáci v obou dvou typech používali stejné strategie – sčítání všech čísel, nebo vyškrtávání shodných čísel. Zkoumala jsem tedy, zda používají u obou typů úloh stejné strategie, nebo se u každé úlohy liší.

| | |
|---|---|
| **Experiment:** | **13** |
| **Třída:** | **4.** |
| **Datum:** | **2. 2. 2011** |
| **Místo:** | **ZŠ Praha 6** |

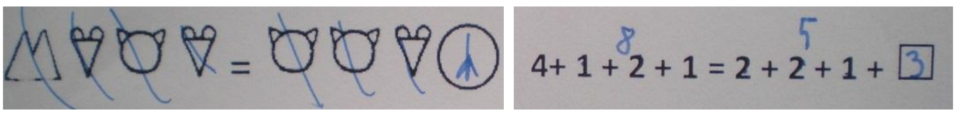
| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha Z4:**  | | |
| 00:07<br><br>00:37 | **Sa1:** No, já jsem to dělal tak, že, prostě, když je na obou stranách kočka, tak jsem si vyškrtl jednu kočku na každý straně, pak jsem si vyškrtl myš a myš a tady mi zbyla kočka a tady pes. A kočka je jakoby dva a pes za pět, tak jsem si sem dal husu, protože ta je jakoby za tři body a dva plus tři je pět, takže mi to vyšlo nastejno. | Sam hodnotí jednotlivá zvířátka body: „ta je jakoby za tři body“. Zdá se mi to zajímavé, ještě jsem se s tím nesetkala.<br>**JEV:** volba jednotky<br>**JEV:** strategie vyškrtávání |

Sam se při vysvětlování dopustil chyby, dává psu hodnotu pět, což je mylné. Myslím, že kdybych mu dala další úlohu, kde by figuroval pes, již by chybu neudělal. Dopustil se jí podle mého názoru pouze nyní při vysvětlování. Za neznámou doplnil husu. Aby jeho řešení bylo správné, musela mít levé strana po vyškrtání hodnotu pět. Protože zapomněl, že na levé straně zbyla ještě jedna myš, musel pak mít pes hodnotu pět. Předpokládám, že by k chybě nedošlo, kdyby měl možnost při řešení manipulovat s ikonami.

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha R2:** $4 + 1 + 2 + 1 = 2 + 2 + 1 + \square$ | | |
| 00:38<br><br>00:59 | **Ex1:** A jak jsi postupoval tady?<br>**Sa2:** Tady jsem si řekl, že čtyři plus jedna je pět, plus dva je sedm, plus jedna osm, a tady když to spočítám, tak dva plus dva je čtyři a jedna plus tři je čtyři a čtyři plus čtyři je osm. Takže, to.<br>**Ex2:** Hm. | Je zajímavé, že sečte obě dvojky a jedničku přičítá k vypočítané neznámé. Zajímalo by mě, jestli to takto opravdu řešil. Domnívám se však, že ne.<br>**JEV:** sečtení čísel na obou stranách rovnice a dopočítání hodnoty neznámé |

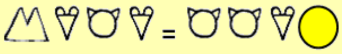
Jak můžeme vyčíst z přepisů videozáznamu, Sam použil u každé úlohy jiné strategie. U rámečkové úlohy ho nenapadlo použít vyškrtávání, přestože ho běžně používá. Jednalo se o obvyklou početní úlohu. V tomto prostředí většinou pouze provádí zaznamenané operace. Tak tomu bylo i nyní. Oproti tomu v prostředí zvířátek je zvyklý řešit různými způsoby. Nejprve vyškrtá a poté zbylá zvířátka ohodnotí čísly (body) a pak dopočítá.

Obdobně řešili tuto dvojici úloh i někteří jeho spolužáci, zde uvádím ukázku zápisu jednoho z nich.




**Obr. 82**

Je zajímavé, že se vyskytlo zcela opačné využití těchto strategií. Příkladem může být Lukáš.

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha Z4:**  | | |
| 00:00<br><br>00:21 | **Lu1:** Tak spočítal jsem si, že pes je čtyři, plus kočka, dvě, je šest, plus dvě myši, myš je jedna, takže plus dva je osm. A tady to je čtyři a pět a husa je tři a pět plus tři je osm, takže tam bude husa. | **JEV:** použití čísel místo ikon |
| **Úloha R2:** $4 + 1 + 2 + 1 = 2 + 2 + 1 + \square$ | | |
| 00:22 | **Ex2:** A jak jsi postupoval tady?<br>**Lu2:** Jsem si vyškrtal ty čísla, který tam byly dvakrát, a pak jsem sečetl ty, který tam už nemají dvojici. | **JEV:** použití strategie vyškrtávání |

Zajímalo mě také, zda někteří žáci využili u obou úloh stejného postupu. Postup sečtení čísel na obou stranách rovnice a dopočítání hodnoty neznámé někteří využili v obou úlohách. Použití strategie vyškrtávání v obou úlohách se v záznamech nevyskytlo.

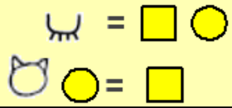
### 3.3.3.2 Soustavy dvou lineárních rovnic a jejich propojení s číselnými rovnicemi

Soustavy rovnic v prostředí zvířátek můžeme najít již v učebnici pro 3. Ročník (F3). Proto jsem je zařadila také do pracovního listu 4. Všichni žáci, kteří tuto úlohu řešili, se s těmito úlohami již několikrát setkali. V době, kdy experiment probíhal, již nějaký čas tyto úlohy přepisovali do čísel, tedy jako konvenční zápis rovnice.

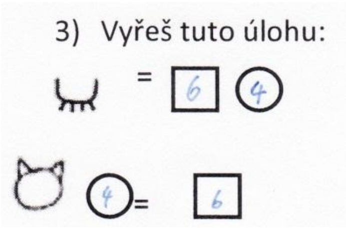
Po prvních experimentech se při řešení této úlohy vyskytl malý problém – někteří si neuvědomili, že obě rovnice tvoří soustavu, tedy „patří k sobě“. Někdo je řešil jako dvě různé rovnice, někdo se pro jistotu zeptal. Poté jsem vždy, když se žák dostal k této úloze, na tuto skutečnost upozornila.

Zde uvádím tři ukázky řešení této úlohy, v nichž se vyskytly zajímavé jevy.

| | |
|---|---|
| **Experiment:** | **19** |
| **Žák:** | **Míša** |
| **Třída:** | **4.** |
| **Datum:** | **28. 1. 2011** |
| **Místo:** | **ZŠ Praha 6** |

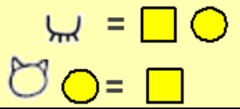
| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha Z6:**  | | |
| 00:00 | **Mí1:** No, zvířátka.<br>**Ex1:** Jenom bych ti chtěla říct, že to patří k sobě, jo?<br>**Mí2:** Jo.<br>**Ex2:** To je jedna úloha dohromady. | Míšin výrok zní radostně. Asi se těší, že bude řešit úlohu v tomto prostředí.<br>Míša bere tuto skutečnost (Ex1) jako samozřejmost (Mí3). |
| 00:11 | **Mí3:** Nás paní učitelka učila, že jsou takle. Takže. Desítka se dá rozdělit *(šeptem)*. Takže desítka se dá rozdělit na pět a pět, jenomže to nesmí bejt stejný zvířátka, takže... Takže ten čtvereček musí bejt o dva větší než to kolečko.<br>**Ex3:** Proč? | Začne řešit první rovnici. Říká dané podmínky (každá maska představuje jiné zvířátko). Upozorní na vztah mezi neznámými, maskami. Čtvereček je o dvě větší než kolečko, odvozuje to z druhé rovnice. Toto také dokáže vysvětlit (Mí4). Při vysvětlování ukazuje na druhou rovnici. Tato její znalost je na úrovni generického modelu.<br>**JEV:** generický model řešení soustavy tohoto typu |
| 00:30 | **Mí4:** Protože tady je ta kočka, takže to musí být o dvě větší, aby se to tady rovnalo. Takže.. Tohle zkusím, ne, to nejde.<br>**Ex4:** Co jsi chtěla zkusit? | Dále používá metodu pokus-omyl. Zkusí doplnit za kulatou masku trojku. Hned ale vidí, že to nevychází. Dál přemýšlí a najednou nastane tzv. „aha" okamžik (Mí5), doplní čtyřku a šestku do první rovnice a poté ve stejném pořadí do druhé. Své řešení potvrdí radostným výrokem „to by šlo" a poté i vysvětlením pro mě. Výsledek zapíše do masek čísly. |
| 00:43 | **Mí5:** Trojku, tady. Ne, to by nešlo *(šeptem)*. Jo, ahá. Čtyřku nejspíš. Zkusím čtyři a šest, čtyři a šest. Hm. To by šlo.<br>**Ex5:** Je to správně? | **JEV:** použití metody pokus-omyl<br>**JEV:** použití čísel místo ikon |
| 01:11 | **Mí6:** Jo, to je deset a to je šest a šest. | Nyní mě napadá, že jsem se měla zeptat, zda nemá úloha ještě jiné řešení. Reakce na to mohla být zajímavá. |

Zde uvádím Míšin zápis této úlohy. S výše popsaným jevem, použití čísel místo ikon, se můžeme setkat při řešení těchto úloh poměrně často, což jsme mohli vidět již v předcházejících ukázkách řešení. Míšin zápis se však liší. Většinou v číslech probíhá řešení, ale výsledek je zapsán pomocí ikon. Zde je zapsán čísly i výsledek. Pro Míšu pravděpodobně nehraje roli způsob zápisu, obě dvě formy, jak ikonický, tak i číselný, jsou reprezentanty odpovídajícího čísla.



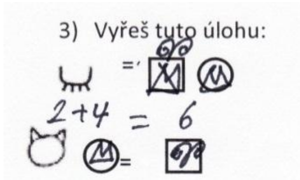

**Obr. 83**

**Experiment:** **20**
**Žák:** **Pavel**
**Třída:** **4.**
**Datum:** **28. 1. 2011**
**Místo:** **ZŠ Praha 6**

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha Z6:** |  | |
| 00:00<br><br><br><br><br>00:25<br><br>00:28<br><br><br><br><br>00:35<br><br><br>00:51 | **Ex1:** Jenom bych chtěla říct, že to patří k sobě, jo? To je jedna úloha.<br>**Pa1:** Jo, to je, to jsou tyhle úlohy. Už chápu. Hm, tadyhlend musí… Kráva se rovná… a to patří k sobě?<br>**Ex2:** Patří to k sobě ty dvě.<br>**Pa3:** Takže voni jsou stejný?<br>**Ex3:** Jo.<br>**Pa4:** Takže když tady za tím musej bejt stejný zvířata a tady za tím musej bejt stejný zvířata.<br>**Ex4:** Jo.<br>**Pa5:** Tohle se rovná třeba… Jo, pes… To jsou čtyři… Ne, obráceně.<br>**Ex5:** Proč?<br>**Pa6:** Protože tadyhle musí bejt pes a tady bude beran. | Zdá se, že Pavel chápe, že obě rovnice tvoří jednu úlohu. Začne řešit, ale patrně znejistí a potřebuje si to lépe ujasnit, proto se ptá znovu (Pa1). Moje odpověď zní spíše jako otázka (Ex2). Patrně proto Pavel reaguje další otázkou (Pa3). Moje potvrzení mu nestačí. Potřebuje konkrétní vysvětlení (Pa4).<br>**JEV:** potřeba přesného popisu podmínek zadání<br>Pak už může začít řešit (Pa5). Nejprve zapíše do čtvercové masky psa, pak chce začít psát do kruhové masky. Udělá však pouze tečku a zastaví se. Sleduje druhou rovnici. |

| | | |
|---|---|---|
| <br>01:02<br><br>01:17<br><br><br>01:21 | **Ex6:** Hm.<br>**Pa7:** A tady bude beran *(šeptem)*. A v tom případě tady hned automaticky je pes. Dva plus čtyři se rovná šest. Takže beran.<br>**Ex7:** Hm. Tak máš to vyřešený?<br>**Pa8:** Jo.<br>**Ex8:** Správně?<br>**Pa9:** Myslím si, že jo. | Patrně do ní zkouší doplnit za masky zvířátka. Uvědomí si svou chybu a psa škrtne. Zdůvodňuje (Pa6) a ukazuje přitom na druhou rovnici.<br>Zapisuje ikony zvířátek do první rovnice. Pokračuje druhou rovnicí (Pa7). Do kruhové masky zde zapíše ikonu psa. Poté si nad rovnici zapíše číselně 2 + 4 = 6, čímž si ověří správnost řešení. Protože mu vyšlo šest, doplní do čtvercové masky berana.<br>Správností řešení si je jistý. |

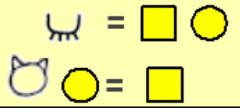
Zdálo se, že Pavel znal řešení druhé rovnice již dříve (Pa6). Poté však následovaly ještě dva kroky (Pa7): uvědomění si shodnosti kruhových masek („v tom případě tady hned automaticky je pes“) a dopočítání hodnoty čtvercové masky („Dva plus čtyři se rovná šest. Takže beran.“). Pavel tak v podstatě řešil druhou rovnici dvakrát. **JEV:** potřeba vícenásobného řešení úlohy. Zde uvádím ukázku Pavlova zápisu.



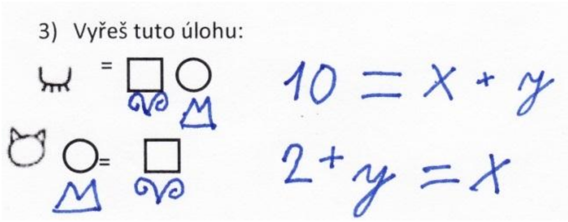

**Obr. 84**

Zatímco v obou výše uvedených řešeních žáci úlohu pouze řešili, ale nepřepisovali jako číselné rovnice (v zadání úlohy toto ani nebylo vyžadováno), v následující ukázce se tento přepis objevuje.

| | |
|---|---|
| **Experiment:** | **29** |
| **Žák:** | **Anežka** |
| **Třída:** | **4.** |
| **Datum:** | **2. 2. 2011** |
| **Místo:** | **ZŠ Praha 6** |

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha Z6:**  | | |
| 00:00 | **Ex1:** Jenom ti řeknu, že to patří k sobě, ty úlohy, jo? Jako když řešíte v učebnici, tak to patří k sobě. To je jako jedna úloha. | Anežka poměrně dlouhou dobu přemýšlí, pak začne pomalu, rozvážně zapisovat úlohu pomocí rovnic. Myslím, že to dělá kvůli mému pokynu na začátku (Ex1), kdy jsem jí řekla, že je to, jako když řeší podobné úlohy v učebnici. Zde je většinou toto přepisování úkolem. |
| 00:14 | **An1:** Hm. *(pauza asi 45s)* | |
| 01:01 | **Ex2:** A co teďka děláš? | |
| | **An2:** Převádím si to *(pauza 7s)* na čísla. | |
| | **Ex3:** Jo. *(pauza téměř 1min)* | Poté přesune svou pozornost k zadání úlohy a řeší ji. K číselným rovnicím se již nevrací. Začne u druhé rovnice, popisuje podmínky, které vyplývají ze zadání (An3). Myslím, že má vytvořen generický model: je-li na jedné straně zvířátko a maska a na druhé straně jiná maska, musí být hodnota masky větší než hodnota známého zvířátka plus jedna. (An4) |
| 02:14 | **An3:** Tady musí být větší číslo než dvojka. | |
| | **Ex4:** Hm, proč? | |
| 02:27 | **An4:** Kočka je za dva a za maskou mus.., nejmíň musím mít jed.., myš, to je za jedna. A to by bylo tři. Tak. *(pauza asi 15s)* | **JEV:** generický model řešení soustavy tohoto typu |
| 03:03 | **An5:** Sem zkusím, sedmičku nemáme ze zvířat, tak zkusím šestku. Sem, sem taky šestku dám. A s... Deset mínus šest je čtyři. To je pes. Šest mínus dva je čtyři. *(pauza)* | Pak se zaměří na první rovnici (An5), zkouší doplnit určitá čísla, začíná od nejvyššího možného – sedm. Kdyby byla čtvercová maska tři, musela by být druhá sedm. To není možné. Proto Anežka dále zkouší číslo šest. Zapíše berana pod čtvercovou masku v obou rovnicích. Pak dopočítává hodnotu druhé masky. |
| 04:03 | **Ex5:** Tak je to všechno? | |
| | **An6:** Jo. | |
| | **Ex6:** A takhle je to správně? | |
| | **An7:** Hm. | |
| 04:10 | **Ex7:** Hm, tak jo, skvěle. Děkuju. | **JEV:** řešení metodou pokus-omyl<br>**JEV:** použití čísel místo ikon |

Na následujícím obrázku vidíme Anežčin zápis. Přepis úlohy pomocí konvenčního zápisu rovnic byl pouze formálním úkonem. Samotné řešení probíhá v jejím ikonickém zápisu.

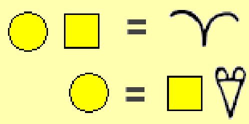



Obr. 85

**Experiment:** 11
**Třída:** 4.
**Datum:** 12. 5. 2010
**Místo:** ZŠ Neratovice

Soustavy dvou rovnic o dvou neznámých v prostředí zvířátek řešili také žáci během vyučovací hodiny matematiky v ZŠ v Neratovicích (E11). Součástí zadání[33] je přepis ikonicky zapsaných rovnic konvenčním způsobem.

Žáci řešili samostatně. Během jejich činnosti jsem s některými z nich hovořila o jejich způsobu řešení. Přepisy dvou těchto rozhovorů uvádím dále. První z nich je zajímavý svou neobvyklostí. Druhý je naopak ukázkou typického postupu řešení, který používala většina žáků.

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha Z7:** |  | |
| <br><br>00:00<br>00:08 | **Ex1:** Můžu se tě na něco zeptat?<br>**Va1:** No.<br>**Ex2:** Jak jsi přišel na to, že $x$ je pět a $y$ dva?<br>**Va2:** Ee, já mám na to takový fígl, že já si sečtu tohle (*ukazuje na ikony zvířátek),* to je za jedna a tady to je za pět a vydělím si to dvěma. Tadydleto je za jedna, tady to je za pět, takže je to šest, děleno dvěma je tři a to je tadydle to.*(Ukazuje na masku x.)* A pak to dopočítám jenom.<br>**Ex3:** Jo, hm. A jak tady jsi na to přišel?<br>**Va3:** Ee, tady úplně stejně. Tady to je za | V mé otázce jsou jiná čísla než ve Vaškově vysvětlení, protože jsem se ptala původně na jinou úlohu, Vašek však začal vysvětlovat úlohu první.<br>Vašek užívá slova „fígl“, který je v jeho třídě často užívaným slovem. Měla jsem pocit, že děti se předhánějí, kdo najde dřív nějaký „fígl“, nějaké pravidlo, které jim usnadní počítání, nějakou |

[33] Úlohy z F4-S2, s. 28.

| | | |
|---|---|---|
| 00:31<br><br>00:50<br><br>00:57<br><br>01:05 | šest, tohle je za jedna, tohle je za tři. Šest plus jedna je sedm, plus tři je deset, děleno dvěma je pět a to je todleto. A pak to zase dopočítám.<br>**Ex4:** A potom…tak si dopočítáš, že.. jaký je to zvířátko, jo?<br>**Va4:** Hm.<br>**Ex5:** A jak potom zjistíš, kolik je $x$?<br>**Va5:** No, ty zvířátka mají nějakou hodnotu, takže podle tý hodnoty pak jeto $x$ a $y$.<br>**Ex6:** Hm, dobře, děkuju. | zákonitost při výpočtu.<br>Fígl, který Vašek uvedl, je zajímavý. Trochu mě to překvapilo a napadlo mě, zda je funkční i u ostatních úloh, požádala jsem ho tedy, aby mi vysvětlil postup u třetí úlohy. Postupoval stejně a jeho pravidlo fungovalo.<br>Vašek nepočítá $x$ a $y$, počítá se zvířátky, které pak přepíše pomocí číselných rovnic. Ví, že hodnoty $x$ a $y$ odpovídají hodnotám zvířátek za maskami. Získává první zkušenosti s číselnými rovnicemi, aniž by je musel bezprostředně řešit. |

Skutečnost, že Vašek hledá pravidlo pro řešení úloh, ukazuje na úroveň jeho matematického myšlení. Ono nalezené pravidlo je vlastně generickým modelem řešení těchto úloh.

**JEV:** generický model řešení soustavy tohoto typu.

Pravidlo pro výpočet, které Vašek používá, mě opravdu zaujalo. Především mě překvapilo, že obě úlohy, které mi vysvětloval, bylo pomocí něj možné řešit. Zjistila jsem, že tento jeho fígl platí pro všechny úlohy ze zadaného cvičení. Zajímalo mě, proč tomu tak je a zda se dá tento fígl použít i u složitějších úloh. Začala jsem se tímto pravidlem tedy sama zabývat. Uvědomila jsem si, že Vaškův postup prakticky odpovídá sčítací metodě lineárních rovnic (**JEV:** řešení pomocí součtu rovnic):

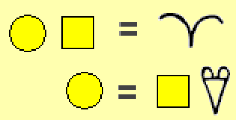
$$
\begin{array}{rll}
x + y = 5 + 3 & & \textit{ekvivalentní úpravy:} \\
x = y + 4 & & \\
\hline
x + y + x = 5 + 3 + y + 4 & |-y & \textit{odečtení stejného výrazu od obou stran rovnice} \\
2x = 5 + 3 + 4 & |:2 & \textit{dělení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem} \\
\hline
x = \dfrac{5 + 3 + 4}{2} & & \\
\underline{\underline{x = 6}} & &
\end{array}
$$

Toto pravidlo platí u uvedených úloh, protože všechny mají stejnou strukturu. Platí totiž pouze v případě, že všechna známá zvířátka jsou na jedné straně rovnic a zároveň jedna neznámá při sečtení (resp. odečtení) rovnic vypadne, musí se tedy vyskytovat v jedné rovnici na pravé straně, v druhé rovnici na straně levé. V jiném uspořádání by pravidlo nefungovalo. Také by se nedalo aplikovat, kdyby se v úloze vyskytovalo více neznámých x, nemohlo by se pak dělit dvěma, ale počtem těchto neznámých.

V pracovním sešitě, s kterým děti při vyučování pracovaly, se později vyskytuje podobný typ úlohy, jako v předcházejícím cvičení (F4-S2, s. 30):

$$\begin{aligned} x + y + M &= P + P \\ x &= y + H \\ \hline x + y + 1 &= 4 + 4 \\ x &= y + 3 \end{aligned}$$

V tomto případě by Vaškovo pravidlo nefungovalo, tedy pokud by stále postupoval stejným způsobem, tj. sečtením všech známých zvířátek, která jsou uvedena v zadání. Myš se v první rovnici vyskytuje na levé straně, na rozdíl od ostatních zvířátek, proto se musí od součtu hodnot zvířátek na pravé straně „odčítat“.

| **Úloha Z7:**  | | |
|---|---|---|
| 00:00<br><br><br><br>00:07<br><br><br><br><br><br><br><br>00:29 | **Ex1:** Můžu se tě zeptat, jak jsi řešila tady ty úlohy?<br>**Ci1:** Tady ty?<br>**Ex2:** Hm.<br>**Ci2:** No, já jsem si to vždycky zkoušela, a když mi to vyšlo pět, tak jsem si to tam dosadila, ale muselo mi to tady vyjít, aby tady *(ukazuje na druhou rovnici)* bylo stejný číslo. Takže jsem si tam dala dva plus jedna je tři. Takže husa má hodnotu tři a kočka dva a myš jedna.<br>**Ex3:** Hm, takže nejdřív jsi dosadila semka *(první rovnice)* nějaký zvířátka a pak jsi zkoušela, jestli to tady *(druhá rovnice)* taky platí?<br>**Ci3:** Jo.<br>**Ex4:** Hm. A pak dál jak jsi postupovala? | Cilka při řešení rovnice postupuje metodou pokus-omyl. V jejím zápise je také vidět, že kočka a husa nejsou první, co zkoušela do prázdných políček dosadit.<br>**JEV:** řešení metodou pokus – omyl<br><br>Hodnoty neznámých $x$ a $y$ Cilka přepíše z řešení rovnice v prostředí zvířat. Při vysvětlování ukazuje střídavě vždy na $x$, resp. $y$ v číselné rovnici a na odpovídající masku |

| | | |
|---|---|---|
| 00:38<br><br><br><br><br><br>01:07 | **Ci4:** Pak jsem si to napsala $x$ plus $y$ se rovná pět. A $x$ se rovná $y$ plus jedna. Pak jsem si dala $x$ se rovná tři, protože to je husa a ta má tři a $y$ má, je kočka, takže jsem tam napsala dvě.<br>**Ex5:** Aha, super, děkuju moc.<br>**Ci5:** Není zač. | v zadání. |

Ať již žáci řešili úlohy v prostředí zvířátek metodou pokus – omyl, nebo za pomoci nějakého pravidla, vždy bylo toto řešení primární. Číselné rovnice byly pouze přepisem těchto úloh do jazyka čísel. Tyto číselné rovnice neřešili, ještě na to nebyli dostatečně připraveni.

### 3.3.4 Krokování

Úlohy z prostředí krokování řešili žáci v rámci běžných hodin matematiky (E13, E14). V následujícím textu popisuji řešení tří žáků z experimentu E14. Úloha[34], jejíž řešení zde uvádím, byla první z tohoto prostředí, kterou během této hodiny žáci řešili.

| | |
|---|---|
| **Experiment:** | **14** |
| **Žák:** | **Dan** |
| **Třída:** | **4.** |
| **Datum:** | **8. 2. 2011** |
| **Místo:** | **ZŠ Praha 2** |

Dan při řešení používá malý krokovací pás (číselnou osu) a figurku z hry „Člověče, nezlob se“, kterou používá pro krokování. Úlohu Dan přepíše nejprve pomocí čísel. Zapíše levou stranu rovnice a rovnítko a začne krokovat figurkou na číselné ose.

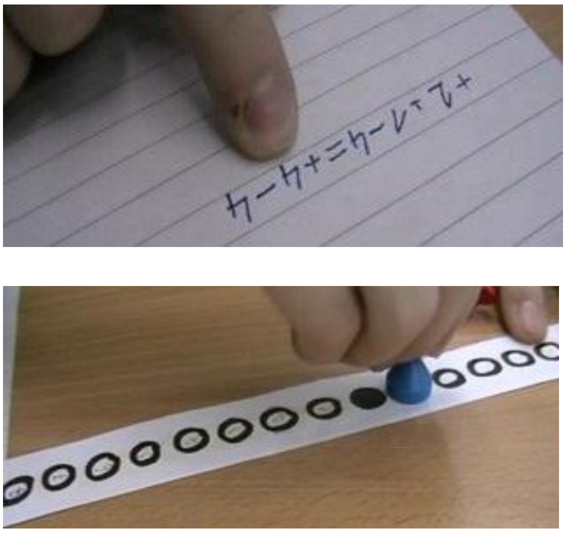
[34] Žáci řešili úlohy z (F4-S1, s. 27).

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha K1:** | →→ → ←←←← = ←←←← | |
| 00:00<br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br>00:52<br><br><br><br><br>01:03<br><br><br><br>01:17<br><br><br>01:24 | *Dan krokuje levou stranu rovnice, dostane se na pole -1. Poté vezme pero a chce doplnit číslo za neznámou. Pak se zamyslí a opět přesune svou pozornost k číselné ose. Figurku postaví na nulu a udělá dva kroky zpět, pak se ale zastaví a začne krokovat znovu od nuly čtyři kroky zpět.*<br><br>*Krátce se zamyslí a začne řešit úlohu znovu od začátku. Znovu odkrokuje levou stranu rovnice. Poté však udělá čtyři kroky vpřed. Do svého zápisu za znaménko rovná se doplní + 4 a poté – 4.*<br><br>**Ex1:** Mohl bys mi vysvětlit, jak jsi to řešil, tady tu úlohu? To byla ta první, tady ta úloha?<br><br>**Dn1:** Jo. Jo.<br><br>**Ex2:** Hm. A jak jsi to řešil?<br><br>**Dn2:** Že dvě dopředu je dva plus, jedna dopředu je plus jedna, čtyry dozadu je jedna mínus. Pak jsem si musel, uu, př, to, vypočítat to první číslo a pak jsem tam dopsal to mínus čtyři.<br><br>**Ex3:** A jak jsi, jak jsi počítal to první číslo?<br><br>**Dn3:** Todle.<br><br>**Ex4:** Tady tohle. To jak jsi říkal, že sis ho musel vy…<br><br>**Dn4:** Musel jsem si říct, že odtať *(ukazuje na políčko -1)* musím dojít někam, abych se mínus čtyři vrátil zase sem.<br><br>**Ex5:** A ukázal bys mi to, prosím tě, tady na tom, vod začátku, jak´s to řešil? Můžeš mi to říkat? | Velmi potichu, téměř neslyšně, si při krokování chvílemi odříkává počet kroků.<br><br>**JEV:** procesuální řešení úlohy<br><br>Dan patrně znejistěl, zda odkrokoval správně, proto začal znovu od nuly. Udělá čtyři kroky. Předpokládám, že se jedná o kroky v posledním políčku na pravé straně rovnice.<br><br>Domnívám se, že během tohoto zamyšlení došel k výsledku (hodnotě neznámé). Chce si správnost řešení ověřit, proto začne krokovat úlohu znovu, skončí odkrokováním zjištěné neznámé, kroky v posledním políčku nekrokuje. Je si svým řešením jist, zapíše ho.<br><br>Při vysvětlování ukazuje střídavě na zadání v učebnici a svůj přepis na papíře. Výrok „čtyry dozadu je jedna mínus“ si můžeme vykládat různě. Dan může myslet, že se dostane na pole -1. Spíše mi však připadá, že se pouze přeřekl a místo čtyři řekl jedna.<br><br>Dan neporozuměl mé otázce (Ex3), i když jsem přesně použila jeho slova. Ukazuje (Dn3) na první číslo na levé straně.<br><br>Ukazuje prstem na krokovací pás políčko -1.<br><br>Posouvám krokovací pás blíž ke kameře. Dan postavil figurku na pole - |

| | | |
|---|---|---|
| 01:45 | **Dn5:** Dva dopředu, jeden dopředu, čtyry dozadu. A teď se musím dostat zase zpátky, tak jsem si řek, čtyry dopředu, raz, dva, tři, čtyry a čtyry dozadu, raz, dva, tři, čtyry a zůstal jsem na tom samým místě.<br>**Ex6:** Hm. Super, děkuju moc. | 1, proto ho žádám, aby začal od začátku. Dan začne, ale pouze krokuje. Žádám ho tedy o slovní popis toho, co právě dělá.<br>Dan vysvětluje stále stejně. Neustále se opakuje tatáž chyba. |

V průběhu rozhovoru jsem si vůbec neuvědomila, že Dan dělá chybu. Jeho výsledek se však lišil od výsledků ostatních. Proto jsem si kladla otázku, proč tomu tak je. Při analýze jsem se snažila příčinu této chyby odhalit.

Dan ví, že se musí dostat na stejné políčko, ať krokuje podle pokynů na pravé straně, nebo na straně levé. Problémem však je, kde krokovat začíná. Dan začne levou stranu krokovat od nuly, zatímco pravou od políčka „cílového“, kam se krokováním levé strany dostal. Myslím, že problém by se vyřešil, kdyby Dan používal dvě figurky, pro každou stranu rovnice jednu, a obě před řešením úlohy postavil na políčko nula. Pak by se této chyby, myslím si, nedopustil.

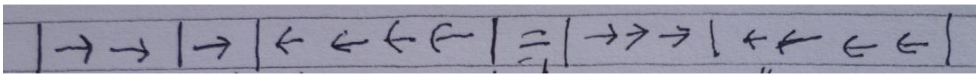


**Obr. 86**

Na následujících obrázcích vidíme Danovo řešení. Úlohu přepsal nejprve čísly, ale řešil ji poté procesuálně – pomocí krokování s figurkou.

| | |
|---|---|
| **Experiment:** | **14** |
| **Žák:** | **Alenka** |
| **Třída:** | **4.** |
| **Datum:** | **8. 2. 2011** |
| **Místo:** | **ZŠ Praha 2** |

Další rozhovor proběhl s Alenkou, která seděla s Danem v jedné lavici. Když mi Dan vysvětloval své řešení, také sledovala. Její postup byl zcela odlišný. Úlohu si přepsala přesně podle zadání, tedy v jazyce šipek. Její zápis můžeme vidět na následujícím obrázku.



**Obr. 87**

Zde si můžeme přečíst, jak Alenka vysvětlila svůj postup řešení.

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha K1:** | →→ \| → \| ←←←← \| = \|      \| ←←←← | |
| 00:00 | **Al1:** Tady jsem to přepsala, že jo, až sem *(ukazuje na levou stranu rovnice)*. Tak jsem si potom řekla, že *(ukazuje na pravou strnu rovnice)*. Já, no, jak to neumím, tak jsem si myslela, že vono tam máme jako doplnit, jak to mám vysvětlit, že jako k tomu..to, ee, k o, no, ee, že jako, jak je to tady nějak *(na pravé straně)*, tak něco, že to s tím má něco společnýho, to..<br>**Ex1:** A co? | Alenka ví, že Dan došel k jinému řešení než ona. Domnívá se tedy, že je její řešení chybné. Důvodem, proč si nevěří, může být skutečnost, že jsem Danovo řešení neoznačila za chybné. Možné je také, že Dana bere jako autoritu, protože je v matematice úspěšný.[35] Svou „chybu“ omlouvá tím, že tyto úlohy řešit neumí.<br>**JEV:** nízká sebedůvěra<br>Alenka má problém s formulací svých myšlenek, s vysvětlováním.<br>**JEV:** neschopnost vyjádřit své myšlenky |
| 00:28 | **Al2:** Aby to tam bylo jako… Nějak jako tady, že to máme udělat, ale jiným způsobem.<br>**Ex2:** Aha. A jak´s to teda udělala? | Alenka doplnila do prázdného políčka tři šipky vpřed. |
| 00:36 | **Al3:** No, takže, já jsem si tam napsala tu trojku.<br>**Ex3:** A proč? | |
| 00:41 | **Al4:** No, protože já jsem si myslela, že jak je to tady *(ukazuje na levou stranu rovnice)*, tak to, tak že je to něco jako ty obyčejný příklady, že jako dva plus jedna *(směje se tomu)*, něco takovýho. | Alenka vidí souvislost mezi krokovými a číselnými úlohami. Svým smíchem však vyjadřuje, že tento úsudek nepovažuje za správný, připadá jí spíše legrační. |
| 00:51 | **Ex4:** Aha. *(pauza 7s)* Takže tady sis | Chtěla jsem se zeptat konkrétněji, aby Alenčina odpověď byla přesnější. Nemohla jsem však v dané chvíli najít správná slova. Proto jsem nakonec položila vlastně stejnou otázku jako dříve |

[35] Jedná se pouze o moji domněnku. Nevím, jaké jsou Danovy výsledky v hodinách matematiky.

| | | |
|---|---|---|
| | myslím..Takže ještě… Takže tys tady napsala ty tři šipky proč? | (Ex3). Alenka také odpoví stejně.<br>**JEV:** neschopnost vyjádřit své myšlenky |
| 01:09 | **Al5:** No, protože já jsem si, že jo, myslela, že jak máme ty obyčejný příklady jako na sčítání, takže tady jsme to měli jakoby sečíst. | |
| 01:19 | **Ex5:** Aha, dobře, děkuju. | |

Alenčin postup je zajímavý. Úlohu řešila konceptuálně, nepoužívala krokovací pás ani figurku. Patrně si všimla, že na obou stranách rovnice se v posledních políčkách vyskytují čtyři šipky vzad. Proto se jimi nezabývala. Svou pozornost zaměřila na ostatní políčka. Ta se musí rovnat. Sečetla zbývající šipky na levé straně a stejný počet doplnila do prázdného políčka na straně pravé.

**JEV:** konceptuální řešení úlohy.

Skutečnost, že vidí souvislost mezi „obyčejnými příklady“ a úlohami z prostředí krokování, ukazuje na stupeň jejího poznání. Jednotlivé úlohy v prostředí krokování nebo obyčejné početní jsou pro ni izolovanými modely, které na sebe začaly poukazovat. V Alenčině poznání dochází k tvorbě generického modelu. **JEV:** generický model.

| | |
|---|---|
| **Experiment:** | **14** |
| **Žák:** | **Zuzka** |
| **Třída:** | **4.** |
| **Datum:** | **8. 2. 2011** |
| **Místo:** | **ZŠ Praha 2** |

V dalším rozhovoru figuruje Zuzka. Úlohu řeší jako jediná ze třídy u velkého krokovacího pásu, který byl žákům k dispozici, jak můžeme vidět na následujícím obrázku.


**Obr. 88**

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha K1:** | →→ \| → \| ←←←← \| = \| \| ←←←← | |
| 00:00 | **Ex1:** Jakou řešíš úlohu?<br>**Zu1:** Tady tu. Tu a.<br>**Ex2:** Tu první, jo?<br>**Zu2:** Jo.<br>**Ex3:** Hm. A můžeš si to říkat trochu nahlas? | Zuzka stojí vedle krokovacího pásu. Při krokování dopředu pokládá chodidla přesně vedle jednotlivých polí krokovacího pásu, při krokování vzad jsou však její kroky různě dlouhé, proto nedojde k poli -1, ale stojí mezi poli -1 a -2. Na její řešení to však nemá vliv. |
| 00:10 | **Zu2:** Hm. Takže dva dopředu, jeden, dva… jeden dopředu… Á čtyři dozadu, jeden, dva, tři, čtyři. A teď něco…<br>**Ex4:** A teď? | Moje otázka (Ex4) je zcela zbytečná. Zuzka ji neregistruje. |
| 00:30 | **Zu3:** …ale aby se to pak dalo otočit čelem.. čtyři. Takže, eee, takže počkat, kdybych udělala jeden, dva, tři, čtyři (jde dopředu). Jeden, dva, tři. Ale to je tři. Takže ještě jeden. Jeden, dva, tři, čtyři, pět. Jeden, dva, tři, čtyři. To mi vychází. Takže tam bude..<br>**Ex5:** Tak co tam doplníš? | Výraz „otočit čelem" Zuzka používá chybně, zde se pokyn „čelem vzad"[36] nevyskytuje. Zuzka ho má možná spojen se znaménkem mínus.<br>Stojí na poli -1. Z něj zkouší odkrokovat určitý počet kroků vpřed tak, aby se vrátila čtyřmi kroky dozadu na pole s nulou. Toto platí při doplnění pěti kroků. Chce tedy doplnit, ale ještě přemýšlí a stoupne si znovu na pole -1.<br>**JEV:** řešení metodou pokus – omyl |
| 01:12 | **Zu4:** Takže tam doplním jeden, pět, ne, čtyři, čtyři. Jestli se nemýlím. Jeden, dva, tři, čtyři, pět. Pět tam bude. Pět vpřed, pět vpřed. Nejspíš. | Při vysvětlování chce Zuzka začít znovu krokovat, udělá jeden krok. Pak si vzpomene, že doplnila pět. Odpověď však změní na čtyři, což bylo jejím prvním pokusem. Není si však vůbec jistá, potřebuje znovu zjistit výsledek. Proto začne krokovat znovu. |
| 01:31 | **Ex6:** Tak co že tam doplníš?<br>**Zu5:** Pět vpřed.<br>**Ex7:** Hm. | **JEV:** potřeba kontroly výsledku, opakované |

[36] Pokyn „čelem vzad" v úlohách v prostředí krokování najdeme, označuje však pouze znaménko mínus před závorkou a poté konec této závorky. V této třídě byly úlohy s pokynem „čelem vzad" již dříve řešeny.

| | | |
|---|---|---|
| 01:46<br><br>01:57 | **Zu6:** Tady budou šipky tam, pět jich tady bude. Jestli se nepletu.<br>**Ex8:** A jak zjistíš, jestli se pleteš, nebo se nepleteš?<br>**Zu7:** Hm, no, nechám si to asi pak okontrolovat od paní učitelky.<br>**Ex9:** Aha, dobře. | řešení úlohy<br>Opět se ptám na Zuzčino výsledné řešení (Ex6).<br>Svým řešením si Zuzka stále není stoprocentně jistá (Zu6).<br>Odpověď na otázku (Ex8) mě překvapila. Čekala jsem, že si řešení určitým způsobem překontroluje, buď opětovným řešením, nebo jiným způsobem. Zuzčina odpověď byla jiná, avšak upřímná. Učitelku chápe jako autoritu, která potvrzuje správnost řešení.<br>**JEV:** potvrzení správnosti autoritou |

Zuzka při řešení propojuje dvě reprezentace, znakový (šipkový zápis) a dramatizaci. Její řešení je procesuální. **JEV:** procesuální řešení úlohy.

Úlohu řeší metodou pokus-omyl. V jejím případě však vede k chybnému výsledku. Zuzka začíná krokovat od nuly. Po odkrokování levé strany rovnice se dostane na pole -1. Pravou stranu rovnice začíná krokovat z této pozice s cílem dostat se zpět na nulu. Zde je příčina Zuzčiny chyby. Ví, že se musí dostat na stejné místo. Její interpretace tohoto pravidla je ovšem mylná. Platí, rozdělíme-li rovnici na dvě části (strany) a každou z nich řešíme zvlášť. Začneme-li řešit obě od nuly, musíme se dostat po odkrokování obou z nich na stejné místo. Zuzka naopak spojila obě strany dohromady a vznikla tak odlišná rovnice. Její úlohu bychom mohli zapsat takto: $2 + 1 - 4 + x - 4 = 0$.

Zuzčina chyba je podobná Danově. I v tomto případě by bylo možné chybu odhalit, kdyby krokovali dva žáci, každý jednu stranu rovnice.

Úlohy z prostředí krokování byly také zařazeny do individuálních experimentů, zde uvádím část jednoho z nich.

**Experiment:** **20**
**Žák:** **Pavel**
**Třída:** **4.**
**Datum:** **28. 1. 2011**
**Místo:** **ZŠ Praha 6**

V experimentu E20 měl Pavel řešit 6. úlohu z pracovního listu 4, kde bylo úkolem přepsat číselnou rovnici pomocí šipek a vyřešit ji. Při řešení však došlo k určitým zmatkům. Nevěděla jsem, zda dělá Pavlovi problém přepis úlohy do jazyka šipek, či samotné řešení úlohy v prostředí krokování. Proto mě napadlo předložit mu další úlohu z prostředí krokování. Použila jsem úlohu, kterou jsem měla připravenu jako pomocnou pro případ, že by žáci nevěděli, jakým způsobem přepisovat rovnici do jazyka šipek.

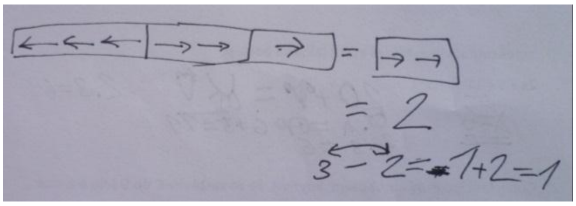
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| →→ | ←←← | | = | →→ |

**Obr. 89**

Tuto úlohu jsem však mírně upravila, vyměnila jsem vzájemně první dvě políčka. Chtěla jsem, aby Pavel řešil jinou úlohu, než kterou již viděl. Myslím však, že tato úprava byla zbytečná. Úloha se kvůli této úpravě stala složitější, protože se do prvního políčka dostaly šipky zpět. Při přepisu do čísel by tedy muselo být zapsáno $-3+2$. Jak Pavel tuto rovnici řešil, je zaznamenáno v následujícím přepisu.

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha K2:** | ←←← \| →→ \| \| = \| →→ | |
| 00:00 | **Pa1:** No už, se.. spadlo. Hm, takže. Jedu z čísla nějakýho, vyjde mi dvojka *(zapíše dvojku a rovná se)*. Jedu tři tam, takže z tady toho *(zapíše 2, pak mínus a tři)* se dostanu do mínus jedničky *(zapíše = -1)*. Né, do, do jedničky *(mínus škrtne)*. Hm… Né, do mínus jedničky. Mám to blbě napsaný, ale to je jedno. | Pavlovi spadlo víčko od fixy.<br>Zapisuje si čísla pod zadání. Je zajímavé, že čísla zapisuje odzadu, první záznam je 3 – 2 = -1. |
| 00:47 | **Ex1:** Co máš špatně napsaný?<br>**Pa2:** Tady to má bejt prohozený.<br>**Ex2:** Aha.<br>**Pa3:** Sem se do mínus jedničky, potom z toho pojedu dvě tam a zase budu na, *(zapisuje)* plus dvě, budu na jedničce. Hm, tady bude jedna šipka. | Všiml si, že má odčítat tři od dvou. Nad čísla dopíše šipku, která ukazuje jejich prohození.<br>Nyní již je výsledek mezikroku správný. Dostal se na pozici -1.<br>Nyní ale udělá chybu, patrně přičte podruhé 2, resp. dvě šipky vpřed. Tak se dostane na pozici 1. Musí tedy doplnit jednu šipku vpřed, aby se dostal na pozici 2. |
| 01:10 | **Ex3:** Hm, dobře, tak jo. | |

Zde vidíme Pavlův zápis řešení této úlohy.




**Obr. 90**

Pavlův postup mi byl dlouho nejasný. Vůbec jsem nerozuměla jeho číselnému zápisu a především důvodu, proč nakonec doplnil pouze jednu šipku. Nejdříve jsem si myslela, že mu dělají rovnice v prostředí krokování velký problém. Při analýze jsem však zjistila, že se jednalo patrně pouze o chybu z nepozornosti, protože přičetl dvakrát prostřední políčko, tedy dvě šipky vpřed. Potom musel doplnit pouze jednu šipku, aby rovnost platila. **JEV:** chyba z nepozornosti.

Pavel při řešení propojuje šipkový a číselný zápis. Řeší procesuálně, i když fyzicky nekrokuje. Proces probíhá podle mého názoru pouze v jeho myšlenkách. Soudím tak podle slov „jedu“, „dostanu se na“. **JEV:** procesuální řešení úlohy.

## 3.3.5 Číselné rovnice a jejich propojení s jinými prostředími

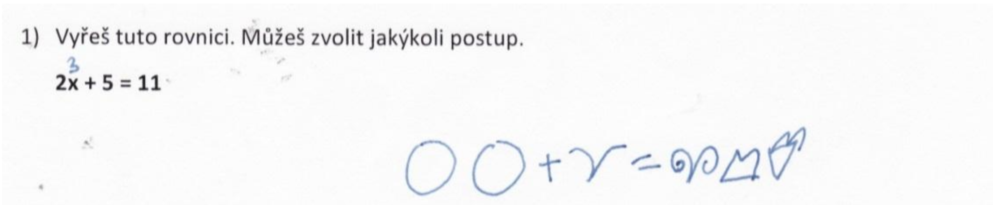
Číselné rovnice řešili žáci v rámci experimentů E 16 – E25. Do pracovního listu 4 byla číselná rovnice zařazena hned jako první úloha. Zařadila jsem ji za účelem zjistit, jak si žáci s řešením této rovnice poradí, zda ji převedou do některého jiného prostředí, které prostředí zvolí a jak v něm budou úlohu řešit, nebo zda vyřeší radši číselnou rovnici.

**Experiment:** **18**
**Žák:** **Kristýna**
**Třída:** **4.**
**Datum:** **28. 1. 2011**
**Místo:** **ZŠ Praha 6**

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha C1:** Vyřeš tuto rovnici. Můžeš zvolit jakýkoli postup. $2x + 5 = 11$ | | |
| 00:00 | **Ex1:** Tak můžeš začít řešit.<br>**Kr1:** Hm. Dvě $x$ je šest. Dvakrát tři plus pět je jedenáct.<br>**Ex2:** Hm. A jak jsi na to přišla? | Kristýna se pouze zamyslí a hned řekne správný výsledek.<br>Úlohu řešila pomocí dopočítávání, |
| 00:19 | **Kr2:** Protože si řeknu: „Pět a kolik je | řešila původní číselnou rovnici, |

| | | |
|---|---|---|
| | jedenáct?“ | nepoužila přepisu do jiného jazyka. |
| | **Ex3:** Aha. Můžeš to tam napsat, prosím tě? | **JEV:** řešení pomocí dopočítávání |
| | **Kr3:** Hm. Nad to? | **JEV:** řešení v matematickém jazyce |
| 00:38 | **Ex4:** Jak chceš. Nějak to napiš, abych poznala ten výsledek. Hm. | |

Později (po dokončení následující úlohy) jsem si vzpomněla na svůj původní záměr ptát se, zda by byli žáci schopni tuto rovnici přepsat či přeformulovat do jiného prostředí. Kristýna si vybrala prostředí zvířátek dědy Lesoně. Na mou otázku, zda by zvládla vytvořit podle této rovnice úlohu „Myslím si číslo“ nebo hada, odpověděla negativně.




**Obr. 91**

**Experiment:** **19**
**Žák:** **Míša**
**Třída:** **4.**
**Datum:** **28. 1. 2011**
**Místo:** **ZŠ Praha 6**

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha C1:** Vyřeš tuto rovnici. Můžeš zvolit jakýkoli postup. $$2x + 5 = 11$$ | | |
| 00:00 | **Ex1:** Můžeš mluvit nahlas, jo? | |
| | **Mí1:** Já si to jenom čtu. *(pauza 13 s)* Takže si spočítám jedenáct mínus pět je… šest, takže.. a to dvakrát $x$ znamená ty dvě masky, že to jsou, takže tam musí bejt husa, takže trojka. | Míša si začne velmi potichu, téměř neslyšně číst zadání. Míša začne řešit úlohu v jazyce čísel. Od čísla 11 odečte 5, používá strategie „odzadu“. |
| 00:40 | **Ex2:** Hm. Tak můžeš to tam napsat? *(Píše.)* Dobře. A vy jste přepisovali tady ty úlohy ještě | |

| | | |
|---|---|---|
| | do nějakých jiných... | **JEV:** použití strategie „odzadu“ |
| | **Mí2:** Rovnic. | Když se dostane k abstraktnímu označení neznámé $x$, interpretuje ji, jako by byla v prostředí zvířátek dědy Lesoně. Nepotřebuje to však přepisovat, tato transformace probíhá pouze v myšlenkách. Po vyřešení úlohy převede hodnotu neznámé opět do jazyka čísel, zapíše 3. |
| 00:51 | **Ex3:** No, do rovnic. Anebo třeba, jak jste to dělali ještě, do nějakých jiných úloh. | |
| | **Mí3:** No. | |
| | **Ex4:** Třeba jako „Myslím si číslo“. | |
| 01:02 | **Mí4:** No. | |
| | **Ex5:** Dokázala bys to? Vymyslet úlohu „Myslím si číslo“, která by se takhle počítala? *(pauza)* | |
| 01:18 | **Mí5:** To. Myslím si číslo, když k jeho dvoj, když k jeho dvojnásobku přičtu t, pět, vyjde mi jedenáct. | **JEV:** řešení v sémantickém jazyce<br>Míše nedělá problém ani vytvoření ekvivalentní úlohy „Myslím si číslo“. |
| 01:25 | **Ex6:** Hm. To by šlo. Ještě jste to zkoušeli přepisovat do něčeho jinýho? | |
| | **Mí6:** Do zvířátek. | |
| | **Ex7:** A co ti nejvíc vyhovuje? | Míše je nejbližší prostředí zvířátek, což bylo zřejmé také z jejího řešení. |
| | **Mí7:** Ty zvířátka. | |
| | **Ex8:** Ty zvířátka. | |
| 01:36 | **Mí8:** Ty mi dou. | |

**Experiment:** **20**
**Žák:** **Pavel**
**Třída:** **4.**
**Datum:** **28. 2. 2011**
**Místo:** **ZŠ Praha 6**

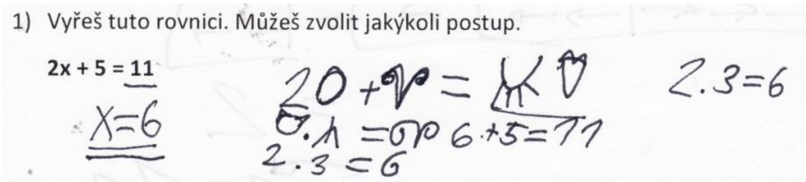
| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha C1:** Vyřeš tuto rovnici. Můžeš zvolit jakýkoli postup.<br>$\mathbf{2x + 5 = 11}$ | | |
| 00:00 | **Pa1:** Vyřeš, vyřeš tuto rovnici, můžeš zvolit jakejkoli postup. Hm, takže. Já to, | Pavel se zadání zalekne, ví, že mu tyto úlohy dělají problémy. Možná to však |

| | | |
|---|---|---|
| | já rovnice moc neumím *(směje se tomu).*<br>**Ex1:** To nevadí. | říká také jako omluvu možného neúspěšného řešení. |
| 00:13 | **Pa2:** No tak. Něco krát dva se musí rovnat šest. Protože jedenáct mínus pět je šest. Tak a. a potom tadyhlenc to krát dva musí bejt tři, protože tři krát dva je šest. Takže tady mám napsat $x$ rovná se..<br>**Ex2:** Třeba, no. | Přesto se však nakonec do řešení úlohy pustí. Úlohu řeší v jazyce čísel. Řešení, zdá se, mu nakonec nedělá velké problémy.<br>Když chce však zapsat výsledek, udělá chybu. Místo správně zjištěné hodnoty neznámé (3) doplní $x = 6$, což je hodnota celého výrazu $2x$. Této chyby si všimnu. Chci zjistit, zda se nestala pouze z nepozornosti. Pavel však správnost svého řešení potvrdí. |
| 00:30 | **Pa3:** Šestka, hm.<br>**Ex3:** A vy jste, ee… Jo, můžu se zeptat, jestli si myslíš, že je to správně? | |
| 00:43 | **Pa4:** Hm, může, musí to bejt, protože šest plus pět je jedenáct.<br>**Ex4:** Hm. A vy tady ty úlohy, takovýhle číselný rovnice, přepisujete ještě do ně, do nějakých jiných úloh.<br>**Pa5:** Do zvířat. | **JEV:** záměna výrazu za neznámou<br>Zajímá mě, zda svou chybu objeví, bude-li řešit úlohu v jiném prostředí. |
| 00:55 | **Ex5:** Do zvířat. Umí, uměl bys tudle rovnici přepsat? | |
| 01:00 | **Pa6:** Hm… Mně nejde přepisovat do… Ale mohl bych to zkusit.<br>**Ex6:** Tak to zkus.<br>**Pa7:** Já začnu jedenáctkou.<br>**Ex7:** Tak jo. | Pavel opět upozorňuje na to, že má s přepisováním problémy. Sám se však rozhodne, že to zkusí. |
| 01:07 | **Pa8:** Mám to udělat ve, jako..?<br>**Ex8:** Jak chceš. Jak chceš, to udělej. *(Pauza, zapisuje.)* | Číslo 11 zapíše jako krávu a myš, pak zapíše kozu na levé straně. |
| 01:26 | **Pa9:** Hm, a teďkom tady to dvakrát. *(pauza)* Nevím co to dvakrát. *(pauza)* Hm, tak já tam napíšu dvojku. Dvakrát maska. | Pavel narazil na problém, neví jak zapsat 2x. Nakonec ho však určitým způsobem vyřeší. |
| 01:44 | **Ex9:** Dokázal bys vyřešit tady tu úlohu?<br>**Pa10:** To je maska. | Zajímá mě, jestli Pavel bude řešit tuto úlohu, když už výsledek vlastně zná z řešení zadané úlohy.<br>Pavel začne řešit. Má stále problém |

| | | |
|---|---|---|
| 01:54 | **Ex10:** Jo, dobře.<br>**Pa11:** Hm, jo, protože dvakrát, takže dvojka, to si změním na kočku a dvakrát něco se musí rovnat beranovi… a to dvakrát něco musí bejt husa, protože dva krát tři je šest. | s onou dvojkou před neznámou. Změní ji za kočku a vznikne mu tak rovnice: kočka krát něco je beran. Tato vazba je z hlediska významu nesmyslná. Pavel s tím však nemá problém, patrně nechápe ikony jako reprezentanty zvířátek, ale čísel.<br>**JEV:** chápání ikon jako číslice |
| 02:23 | **Ex11:** Proč se musí tady to rovnat beranovi?<br>**Pa12:** Protože beran je za šest. Tohle je za dva a tohle je za tři.<br>**Ex12:** Aha.<br>**Pa13:** A dva krát tři se rovná šest. | Chci zjistit, proč zapsal rovnici právě v daném tvaru (Ex11). Pavel používá k vysvětlení popis rovnice čísly, čísla zapisuje na papír. |
| 02:40 | **Ex13:** A proč zrovna beran? Dyť tady je koza a.<br>**Pa14:** Koza je za pět.<br>**Ex14:** No a jak jsi přišel teda? Proč tady má být ten beran? Já tomu nerozumím.<br>**Pa15:** Tady jsem to zvoral. Tam má bejt… | Čekala jsem odpověď ve smyslu, že beran je 11 mínus 5. Proto jsem také upozornila na původní rovnici. Otázku (Ex13) jsem však nedopověděla, upozornila jsem pouze na kozu. Tím jsem Pavla značně zmátla (Pa15). |
| 02:55 | **Ex15:** Ne, ne, třeba to máš správně, já nevím.<br>**Pa16:** Ne, nemám. Tam musí bejt beran.<br>**Ex16:** Ale dyť tady, tady, podívej se, jak je ta rovnice. | Pavel přepíše v původní rovnici kozu na berana. Co bylo dobře, opravil nesprávně. Chtěla jsem ho na to upozornit, ukázala jsem tedy na zadání – číselnou rovnici (Ex16). |
| 03:06 | **Pa17:** Jo aha, tak tady má bejt teda koza. No, tak já jsem se spletl s tou rovnicí. No tak, prostě tadyhle musí bejt beran, protože to se rovná šesti a šest plus pět je jedenáct. | Pavel vidí, že koza je v zadání správně. Nyní dokáže i zdůvodnit, proč doplnil berana. Zdůvodňuje opět pomocí čísel, která také zapíše. |
| 03:25 | **Ex17:** A to jedenáct je co?<br>**Pa18:** Todle.<br>**Ex18:** Aha.<br>**Pa19:** A todle.<br>**Ex19:** Aha. Aha, dobře. Takže, hm.. kde je | Potrhne číslo jedenáct v číselné rovnici a následně pak krávu a myš v ekvivalentní rovnici.<br>Jako výsledek označí $x = 6$, podtrhne ho.<br>Pavel ho potvrdí ústně i tím, že ho podtrhne ještě jednou čarou. |

| | | |
|---|---|---|
| 03:43<br><br>00:48 | výsledek?<br>**Pa20:** Tady.<br>**Ex20:** Dobře, tak jo. Tak máš to teď správně?<br>**Pa21:** Jo. | |

Moje snaha o to, aby Pavel objevil chybu, kterou udělal, nebyla úspěšná. Pavel si byl správností svého výsledku jistý. Kdyby dostal další úlohu, kde by se opět vyskytoval několikanásobek neznámé, bylo by možné odhalit, zda se této chyby dopustil pouze nyní, nebo se vyskytne i v dalších případech.




**Obr. 92**

| | |
|---|---|
| **Experiment:** | **22** |
| **Žák:** | **Nela** |
| **Třída:** | **4.** |
| **Datum:** | **28. 2. 2011** |
| **Místo:** | **ZŠ Praha 6** |

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha C1:** Vyřeš tuto rovnici. Můžeš zvolit jakýkoli postup.<br>$\mathbf{2x + 5 = 11}$ | | |
| 00:00 | **Ne1:** Vyřeš tuto rovnici, můžeš zvolit jakýkoliv postup. Dvakrát pě..dva.. Jo aha. Dva $x$ plus pět rovná se jedenáct. Dva $x$ to musí být dvě stejné čísla, aby to dávalo dohromady pět, aby to dávalo dohromady šest, protože pět plus šest je jedenáct. Takže... trojky, jo. *(Zapisuje.)* Tři plus tři plus pět rovná se jedenáct. | Nelu zmátlo písmenko $x$. Nejprve si patrně myslela, že je to znaménko krát. Pak si ale uvědomila, že se jedná o číselnou rovnici.<br>Nela nepoužívá k řešení úlohy přepis do jiného jazyka (prostředí), řeší v jazyce čísel. Nejprve patrně dopočítá hodnotu výrazu $2x$, |

| | | |
|---|---|---|
| 01:04 | **Ex1:** Skvěle. Nelo, já se zeptám, vy takovýhle číselný rovnice přepisujete do, na jiný úlohy, třeba.. Na který, víš? Ve škole to děláte s paní učitelkou. *(pauza)* No přepisujete je třeba jako úlohu „Myslím si číslo“, nebo jako úloha o zvířátkách. Který, ee. Dokázala bys to nějak přepsat? Jako nějakou jinou úlohu? | kterou poté rozloží na dvě stejné části. Tak dostane hodnotu neznámé.<br>**JEV:** řešení v matematickém jazyce |
| | **Ne2:** No, možná do zvířátek. | |
| | **Ex2:** Do zvířátek, zkusila bys to? | |
| 01:32 | **Ne3:** A todle, nebo todle? | Nela nepoužívá masky, zapisuje je jako 2x, čísla přepíše pomocí ikon. |
| | **Ex3:** Tu první, no. A někam vedle tam to napiš. | |
| 01:38 | **Ne4:** Jojo... Počkej. Jo, tak dvě $x$… koza… rovná se kráva… a myš. | Nela začne řešit úlohu v prostředí zvířátek. Myslím, že ji řeší znovu, jako jinou úlohu. |
| 02:07 | **Ex4:** A tuhle bys dokázala vyřešit? | |
| | **Ne5:** Hm. | Jako výsledek zapíše znovu celou úlohu. |
| | **Ex5:** Tak to zkušíš? | |
| 02:17 | **Ne6:** Ee, to dvakrát, to musí bejt taky šest, protože koza je pět a todle je jedenáct, takže to je, počkat, jo, husa je tři, dvě husy, protože to je šest, koza, kráva a myš. | |
| 02:51 | **Ex6:** Hm. A co je pro tebe jednodušší, řešit to tady tu se zvířátkama, nebo tady tu s číslama? | Nela upřednostňuje řešení úloh v matematickém jazyce, který používá i při řešení úloh z prostředí zvířátek dědy Lesoně. |
| | **Ne7:** Asi s číslama. | |
| | **Ex7:** S číslama je pro tebe jednodušší. Hm. Proč? | |
| | **Ne8:** Hm, já si to, já si to stejně převádím tohle do čísel, když to řeším. | |
| 03:10 | **Ex8:** Aha, dobře. | |

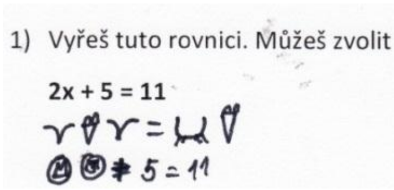

**Obr. 93**

**Experiment:** **23**
**Žák:** **Lukáš**
**Třída:** **4.**
**Datum:** **28. 2. 2011**
**Místo:** **ZŠ Praha 6**

| ČAS | ZÁZNAM EXPERIMENTU | POZNÁMKY, KOMENTÁŘE |
|---|---|---|
| **Úloha C1:** Vyřeš tuto rovnici. Můžeš zvolit jakýkoli postup. $\mathbf{2x + 5 = 11}$ | | |
| 00:00<br><br>00:25<br><br>00:53<br><br>1:04<br><br>01:20<br><br>01:25 | **Lu1:** Pětka je koza. A jedenáctku můžu rozložit třeba na krávu a myš. Takže tohle bude beran, teda, koza a ta druhá myš.<br>**Ex1:** Můžeš to zapsat? *(pauza – Lukáš zapisuje)* Je to správně?<br>**Lu2:** Jo.<br>**Ex2:** Hm, můžu se zeptat, proč tady je zrovna koza a myš?<br>**Lu3:** Protože tady je koza, tak jsem sem dal kozu a to je deset a pak jsem tam, tam musela bejt jenom myška... A tam může bejt něco jinýho, třeba.<br>**Ex3:** Aha.<br>**Lu4:** Ne, nemůže.<br>**Ex4:** Tak jak to teda je?<br>**Lu5:** Jo, třeba to může bejt ještě pes a kočka.<br>**Ex5:** Hm... A co znamená tady to dv..? | Lukáš začne úlohu řešit v prostředí zvířátek.<br>**JEV:** řešení v sémantickém jazyce<br>Nic si nepíše. Hodnota výrazu bude „beran“, šest. Protože v úloze jsou dvě masky, musí doplnit zvířátka, aby měla dohromady sílu berana. Zvolí kozu a myš. Lukáš si neuvědomuje podmínku těchto úloh, tedy že stejná maska označuje stejné zvíře.<br>**JEV:** nedodržení podmínky<br>Úlohu zapíše pomocí ikon zvířat.<br>Vysvětluje, proč zvolil za masky (neznámé) právě tato zvířátka. Vybral je víceméně náhodně. Usuzuji z jeho výroku „A tam může bejt něco jinýho.“ |

| | | |
|---|---|---|
| | **Lu6:** Dvakrát? Dvě masky. | Pak znejistí. Napadá mě, že si uvědomuje podmínku stejných masek, ale není tomu tak. Myslím, že pouze hledá jinou kombinaci zvířátek. |
| 01:45 | **Ex6:** Aha. A jaký jsou to masky? | |
| | **Lu7:** Jak jako, jaký masky? | |
| | **Ex7:** Můžeš, ee, zapsat tu úlohu s maskama? | |
| 01:57 | **Lu8:** Hm. *(Píše.)* Ne. *(Přepsal se, píše dál.)* | Chci ho nějakým způsobem upozornit na podmínku stejných masek. Nechci mu to sdělit přímo, mým cílem je, aby na to přišel sám. Moje snahy však nejsou úspěšné. |
| | **Ex8:** A můžeš tuhle úlohu vyřešit? | |
| 02:19 | **Lu9:** Jo. *(Píše.)* | |
| | **Ex9:** Co to je? | |
| 02:32 | **Lu9:** Kočka. | Lukáš mé otázce (Ex6) nerozumí. |
| | **Ex10:** Kočka, dobře. | Napadá mě, že si podmínku třeba uvědomí, bude-li mít masky zapsány. Ani toto nepomohlo, úlohu řeší stále stejně. |
| | **Lu10:** A sem, počkej, to bude.. pes. | |
| 02:42 | **Ex11:** Hm, dobře. Tak jo, děkuju. | |

Moje snahy upozornit Lukáše na chybu nebyly úspěšné. V danou chvíli mi připadaly jako jediné možné. Nyní mě napadá jiný způsob. Předložit Lukášovi stejnou úlohu, kde by místo dvou stejných masek byly dvě různé masky ($x$ a $y$). Ještě lepší by možná bylo dát mu tyto úlohy současně. Tak by si mohl uvědomit rozdíl mezi nimi a sám objevit nedostatek svého řešení.




**Obr. 94**

## 3.4 Přehled jevů

V následujícím odstavci shrnu jevy, které jsem při analýze svých experimentů našla. Roztřídím je na jevy kognitivní, metakognitivní, komunikační a osobnostní.

### 3.4.1 Jevy kognitivní

**Silně procesuální vnímání rovnosti** – s tímto jevem se v mých experimentech setkáváme především u rámečkových úloh, například v Natálčině řešení úlohy R2 (s. 57). Rovnost je chápána procesuálně, tedy znamená „proveď operaci a získáš výsledek“. Naproti tomu konceptuální vnímání rovnosti ukazuje na rovnováhu dvou výrazů, resp. dvou stran rovnosti (jako jsou například družstva v prostředí zvířátek dědy Lesoně).

**Chyba „z nepozornosti“** – s tímto jevem se setkáváme několikrát, například při řešení rámečkových úloh, kdy si žák (David) nevšiml pozice rovnítka v úloze R2 (s. 58), při řešení úlohy „Myslím si číslo“ (obr. 77, s. 65) nebo dále také v Pavlově řešení krokové rovnice K2 (s. 94). Nepozornost může mít několik příčin, vždy však hraje roli energie žáka, kterou musí na něco vydat. Jedním důvodem může být únava a tedy nedostatek energie. Zbylá energie pak může být použita pouze pro určité jevy. Dalším důvodem může být také jakési odčerpání energie na něco jiného (např. na další nápad či postup), pozornost se tak přesune k jiné oblasti. Domnívám se, že toto bylo příčinou právě v případě Davida, který pravděpodobně zaměřil pozornost na správnost sčítání čísel. Při řešení úlohy „Myslím si číslo“ se žák patrně zaměřil na zápis úlohy, nebo již na její řešení, a proto nezaznamenal druhou část zadání. Přesná příčina Pavlovy chyby mi bohužel není zcela zřejmá.

**Řešení zpaměti a potřeba zápisu** - tyto dva jevy se vyskytují v kapitole 2.4.1.2 o řešení úloh „Myslím si číslo“, kde je úloha zadána pouze slovně. Některé děti řeší bez problému zpaměti, jejich krátkodobá paměť funguje dobře. Patrně mají také vybudovánu strategii, kterou používají. Jiné děti mají s řešením zpaměti problém. Ten může být způsoben procesuálním přístupem k řešení. Děti si možná v mysli stále dokola opakují zadání, ale nedokážou ho uchopit. Potřebují k tomu pomůcku, kterou je písemný zápis. Jakmile je zadání zapsáno, stává se pro ně uchopitelným, umí ho řešit a vyřešit. Proto je vhodné umožňovat žákům písemný zápis při řešení těchto úloh.

**Kombinace zápisu a řešení zpaměti** – se vyskytlo při řešení dalších úloh „Myslím si číslo“ (kap. 2.4.1.2), kdy již bylo žákům zapisování povoleno. Myslím, že se jednalo o žáky, kteří zápis nepotřebují, úlohy řeší i zpaměti. Zapisovali pouze proto, že to bylo umožněno, bylo na to upozorněno.

**Zápis pomocí $x$** – v zápise úloh „Myslím si číslo“ (obr. 78, s. 66) se vyskytlo abstraktní $x$. Vedle zápisu pomocí masky, tečky či vynechaného místa se vyskytlo toto $x$. Bylo by zajímavé zjistit, jakým způsobem autor tohoto zápisu toto $x$ chápe, jak by ho interpretoval.

**Potřeba argumentace** – tento jev se vyskytl při řešení úlohy „Myslím si číslo“ MC5, s. 62-63). Došlo k němu z důvodu různosti řešení, která se ve třídě vyskytla. Žáci chtěli správnost svého řešení obhájit, nechtěli připustit svou chybu. Díky tomu, že jsou zvyklí argumentovat a představovat svá řešení, a díky chybě, jež se vyskytla, vzniklo ve třídě vhodné edukační prostředí. Důležité také bylo, že žáci diskutovali mezi sebou, vznikla z jejich potřeby, diskusi nevyvolala učitelka. V mnohých případech by tato skutečnost mohla být chápána ne jako pozitivní situace, ale jako vyrušování průběhu vyučování. Tento jev je důležitý při autokorekci.

**Potřeba kontroly výsledku, opakované řešení úlohy** – tento jev se vyskytl u Veroniky při řešení úlohy Z1 z prostředí zvířátek dědy Lesoně (s. 67) a v Zuzčině řešení krokové rovnice (s. 92). Opakovaným řešením úlohy chtěly získat větší jistotu, že jejich výsledek je správný.

**Volba jednotky** – se vyskytuje při řešení úloh z prostředí zvířátek dědy Lesoně, setkáme se s různými jednotkami. Veronika při řešení úlohy Z2[37] si volí jako jednotku kočku (s. 68), což je poměrně neobvyklé, nejčastěji se setkáme jednotkou myš. Sam si volí jako jednotku bod (s. 77).

**Hodnocení zvířátek čísly podle jejich pořadí v přehledu** – používá Jirka při řešení úloh z prostředí zvířátek dědy Lesoně (Z4, Z5, s. 74). Často se setkáme s přepisem zvířátek na čísla, tedy jevem **použití čísel místo ikon**, který se vyskytuje např. v Lukášově řešení úlohy Z4 (s. 79). Jirka však potřebuje jakési odůvodnění, proč ikona reprezentuje právě toto číslo. Je tedy určeno pořadím zvířátka v přehledu.

**Potřeba opakování postupu řešení k získání vhledu do situace** – je jev vyskytující se ve Veroničině řešení úlohy Z4 (s. 70-71). Díky tomuto procesu tak dochází k doplňování zkušeností a získávání vhledu do dané situace, daného problému, a na základě toho je nakonec schopná úlohu vyřešit.

**Potřeba vícenásobného řešení úlohy** – se vyskytla v Pavlově řešení soustavy dvou rovnic v prostředí zvířátek dědy Lesoně (Z6, s. 81). Svým způsobem se podobá předchozímu jevu. Pavel však tímto vícenásobným řešením nepotřebuje získat vhled. Spíše to ukazuje na skutečnost, že potřebuje explicitně vyřešit obě rovnice soustavy.

**Potřeba přesného popisu podmínek zadání** – Pavel potřebuje pro řešení úlohy Z6 (s. 81) přesně popsat podmínky, jež musí být splněny. Nestačí mu to však slovně, potřebuje, aby byly zcela zřejmé. Nejlepším způsobem je tedy názorná ukázka přímo v zadání úlohy. Tento jev se může často vyskytnout i během výuky. Aby děti podmínky určitým způsobem uchopily, je potřeba je jasně a především názorně představit či popsat, uvést konkrétní příklad.

**Generický model řešení soustavy tohoto typu** – s poznatky na úrovni generických modelů se setkáváme u žáků čtvrté třídy, konkrétně při řešení úlohy Z6 u Míši (s. 80), Anežky (s. 83), u Vaškova řešení úlohy Z7 (s. 84 ), nebo v Alenčině řešení úlohy K1 (s. 90). Zatímco Míša a Anežka tuto znalost již mají vytvořenu, u Vaška dochází během řešení úlohy k jejímu vzniku. V případě Alenky je podle mého názoru potřeba tento její generický model ještě podpořit několika izolovanými modely. Zda tyto poznatky vznikly vlastní činností, nebo byly původně

[37] Stejný jev se vyskytl i při řešení úloh, které úloze Z2 v rámci experimentu předcházely. V této práci však nejsou tato řešení popisována.

získány jako vzor, se bohužel z experimentů nedozvíme. Pouze v případě Vaška jsem si téměř jistá, že tento poznatek vznikl jeho vlastní intelektuální činností.

**Procesuální a konceptuální řešení úlohy** – se vyskytuje v popsaných experimentech z prostředí krokování ( kap. 3.3.4), téměř všichni řeší procesuálně pomocí dramatizace nebo krokováním v myšlenkách (Pavel, s. 94 ). Pouze Alenka (s. 91) řeší konceptuálně, úlohu chápe jako rovnost dvou stran, součty šipek na obou stranách se musí rovnat.

Při řešení číselných rovnic v kapitole 3.3.5 se vyskytly dva jevy: **řešení v matematickém jazyce** a **řešení v sémantickém jazyce.** – Pro některé je označení neznámé písmenem $x$ příliš abstraktní, potřebují rozumět jeho významu, lépe ho uchopit. K tomu použijí převod úlohy do sémantického prostředí, v popsaných experimentech jako úlohu o zvířátkách dědy Lesoně (Míša, s. 96-97, Lukáš, s. 102). Některým je bližší řešení v matematickém jazyce (Kristýna, s. 95, Nela 100-101, Pavel 97-100), buď dobře chápou význam označení $x$, nebo je pro ně tento způsob méně nepříjemným než přepis do jiného jazyka (jak tomu je možná v případě Pavla.

**Nedodržení podmínky** – Lukáš při řešení úlohy C1 (s. 102) nedodrží podmínku, že za stejnými maskami jsou schovaná stejná zvířátka. Na tuto podmínku jsem neupozornila jednak proto, že jsem nevěděla, jakým způsobem bude úloha řešena, především v jakém jazyce. Tento jev jsem ani neočekávala. Předpokládala jsem, že děti řeší tyto úlohy již poměrně dlouho a tuto podmínku aplikují již automaticky.

**Projev radosti z výsledku intelektuální práce** – můžeme vidět u Anežky, když vyřeší úlohu MC5 (s. 62-63). Je zařazen mezi jevy osobnostní, i když leží na pomezí jevů osobnostních a kognitivních. Tento jev provází poznávací proces. Objevuje se v případě, kdy dojde k objevu určité skutečnosti, k tzv. „aha“ efektu, či k dosažení výsledku.

### 3.4.2 Jevy metakognitivní

Za jevy metakognitivní budu považovat ty jevy, které se týkají toho, jak člověk poznává, jak se učí, které se týkají strategií jako východiska pro realizaci jistých kognitivních a autoregulačních postupů. Tedy z mých experimentů to může být volba strategie dalšího řešení úlohy. Uvedu zde řadu strategií, které jsem vypozorovala.

#### Strategie

- **sčítání více sčítanců** – pro řešení úlohy R2 použili někteří žáci strategii sčítání každých dvou sčítanců a následné sečtení jejich součtů (s. 58), protože se vyskytla (nebo její náznak) ve více případech, usuzuji, že se jednalo o formální aplikaci vzoru, se kterým se setkali.

- **vyškrtávání** – tato strategie je aplikována při řešení dvou ekvivalentních úloh: R2 a Z4. Vyskytla se však vždy pouze u jedné z nich (viz kapitola 3.3.3.1). Tato strategie odpovídá ekvivalentní úpravě odečtení stejného čísla či výrazu od obou stran rovnice. Ukazuje také na konceptuální chápání rovnosti.
- **sečtení členů na obou stranách rovnice a dopočítání hodnoty neznámé** – použili při řešení úloh R2 a Z4 ti žáci, kteří chápou rovnost procesuálně (viz obr. 74). Sečtením známých výrazů také žáci získávají lepší vhled do problému, stává se přehlednějším. Pak již mohou aplikovat strategii **dopočítání neznámé,** kterou aplikovala také Kristýna (s. 95) při řešení úlohy C1.
- **řešení zpaměti** – aplikují žáci v E11-E13 při řešení úloh „Myslím si číslo“ (kap. 3.3.2). Úlohy jsou zadány pouze slovně. Při řešení zpaměti musí žáci zapojovat krátkodobou paměť a tím ji také rozvíjí, proto je dobré tyto úlohy do výuky zařazovat.
- **„odzadu“** – se vyskytuje v experimentu E12 při řešení úloh „Myslím si číslo“ (s. 62, 63) nebo v E19 při Míšině řešení číselné rovnice (s. 96). Je možné, že Míša zná tuto strategii právě z řešení úlohy „Myslím si číslo“ a dokáže ji aplikovat i v jiných situacích. Tato strategie umožňuje lepší uchopení úlohy, kterou by bylo jinak možné řešit snad pouze metodou pokus-omyl. Aplikace této strategie odpovídá vlastně pravidlu o změně znaménka při převádění výrazu z jedné strany rovnice na druhou.
- **součtu rovnic** – tento postup řešení je jedinečný, vyskytuje se pouze ve Vaškově řešení úlohy Z6 (s. 84-85). Jak bylo již popsáno, odpovídá sčítací metodě řešení soustav rovnic. Předpokládám, že tato Vaškova zkušenost ulehčí jeho uchopení této metody, až se s ní jako s pojmem a prostředkem řešení soustav setká.
- **substituce** – při řešení úloh z prostředí zvířátek dědy Lesoně (Z1, s. 67) využívá Veronika substituci. Substitucí chápu nahrazení jednoho výrazu jiným bez ohledu na to, zda se jedná o definici, nebo rovnost, která je z ní vyvozená.

**Přetrvání strategie** – Veronika využívá substituce i v dalších úlohách, ve kterých by bylo vhodnější využít i jiné strategie. Veronika však jiné strategie ještě neobjevila, proto postupuje stále stejným způsobem. Kdyby řešila ve třídě či skupině, kde by se diskutovalo o způsobech řešení, které žáci použili, měla by možnost se seznámit i s jinými strategiemi a tím se obohatit. Zde je vidět důležitost diskuse nejen o získaných výsledcích, ale i o způsobech řešení.

**Metoda pokus-omyl** – tato metoda se v experimentech vyskytla poměrně často – při řešení úloh „Myslím si číslo“ (obr. 75), v Míšině (s. 80) či Anežčině řešení úlohy Z6 (s. 83), ale také v řešení Cilky (Z7, s. 86) nebo Alenčině řešení krokovací rovnice K1 (s. 90). Díky aplikaci této metody žáci nejen dojdou většinou k výsledku, ale zároveň také nabývají mnoho zkušeností s jevy obsaženými v dané úloze.

### 3.4.3 Jevy komunikační

**Neschopnost popsat postup řešení** – tento jev se vyskytuje ve dvou různých experimentech, u Lucky (E15, s. 73) a u Vojty (E31, s. 75). I když jsou oba jevy nazvány stejně, kvalitativně se velmi liší. Zatímco u Lucky jde spíše o nepochopení, co vlastně má popisovat, v případě Vojty se jedná spíše o jev metakognitivní, jeho neschopnost popsat svůj postup je způsobena nedostatečnou introspekcí nebo řešením vhledem.

**Neschopnost vyjádřit své myšlenky** – tento jev se vyskytuje v experimentu E14 při Alenčině řešení (s. 90), a to ve dvou případech: jednou v Alenčině vstupu, podruhé ve vstupu experimentátora (tedy mém). V obou případech je to způsobeno nedostatečnou slovní zásobou, resp. neschopností nalézt v danou chvíli odpovídající slova pro vyjádření daných myšlenek.

**Záměna výrazu za neznámou** – tento jev se vyskytl v Pavlově řešení číselné rovnice v kapitole 3.5.5 (s. 97-100). Úlohu vyřešil správně, ale jako výsledek zapsal místo neznámé hodnotu celého výrazu. Původně jsem si myslela, že se jedná o chybu z nepozornosti. Později však vyšlo najevo, že problém byl spíše komunikačního rázu. Pavel chápe hodnotu celého výrazu s $x$ jako něco, co nezná a musí zjistit. Jako výsledek zapíše $x = 6$, protože $2x$ i $x$ má pro něj stejný význam. Patrně k tomuto chápání došlo příliš brzkým přechodem k abstraktnímu matematickému jazyku. Když řeší úlohu zapsanou ikonicky, doplní za masku správně husu.

### 3.4.4 Jevy osobnostní

**Nízká sebedůvěra**, kterou můžeme vidět u Alenky (E14, s. 90), a jev **posilování sebedůvěry žáků** (E12, s. 62-63) spolu velmi úzce souvisí. Anežce se dostalo ocenění a tím podpory její sebedůvěry, stejně tak by to bylo vhodné v případu Alenky. Vyučování matematice tuto podporu umožňuje, a proto je dobré ji využívat.

**Potvrzení správnosti autoritou** – i tento jev může souviset s nízkou sebedůvěrou žáků, ale také, a tomu bylo pravděpodobně v případě Zuzky (E14, s. 92), s malou autonomií, s chápáním učitele jako autority. Učitel je ten, který rozhoduje o správnosti řešení. Je dobré o tomto jevu vědět a snažit se vést žáky k tomu, aby o správnosti řešení spíše diskutovali a hledali argumenty či vysvětlení daných případů.

Jevy byly roztříděny do skupin. Všechny však mají společný znak. Jejich výskyt je ovlivněn jedinečností dětí (jejich charakterem, intelektem, získanými zkušenostmi a poznatky), ale také aktuální situací a edukačním prostředím.

# 4 Závěr

Diplomová práce se věnovala tématu rovnic a možnostmi rozvoje porozumění rovnicím na 1. stupni ZŠ. Pro zpracování práce bylo vytyčeno několik cílů, jichž jsem se snažila dosáhnout.

Prostudovala jsem šest řad učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ. Na základě tohoto studia jsem vytvořila přehled typových úloh, které se v těchto učebnicích vyskytly a jsou propedeutikou rovnic, nebo se v nich alespoň myšlenka rovnic objevuje. Snažila jsem se postihnout všechny oblasti, zjistila jsem však, že pro zpracování této diplomové práce byl tento záměr příliš ambiciózní. Vazby, které lze rovnicemi popsat, se vyskytují i v mnoha dalších úlohách, které se v této práci neobjevují. Myslím však, že výčet uvedených úloh je i přesto velmi bohatý. Po zpracování přehledu oblastí a úloh s myšlenkou rovnic následuje kapitola o četnosti těchto úloh v jednotlivých učebnicích. Tímto jsem se snažila splnit první z vytyčených cílů.

Dalším cílem bylo seznámit se s koncepcí učebnic pro 2. stupeň ZŠ, v nichž je téma rovnic zpracováno. Tato činnost pro mě byla velmi zajímavá a také přínosná. Uvědomila jsem si, co a jak se žáci budou učit ve vyšších ročnících, na co je potřeba je již na 1. stupni ZŠ připravovat. Způsob, jakým je zpracováno téma rovnic v učebnicích pro 8. ročník je popsáno v přípravné části této práce, čímž byl splněn další její cíl.

Nejdůležitějším cílem bylo zkoumání žákovských řešení rovnic, s nímž velmi úzce souvisely cíle ostatní. Splnění těchto cílů byla věnována podstatná část mé práce. Realizovala jsem 31 experimentů různé povahy, jednalo se o experimenty individuální, ale i experimenty v rámci běžné výuky, s žáky mladšího i staršího školního věku.

Pro realizaci experimentů jsem připravila jejich scénáře, snažila jsem se vybrat úlohy, které co nejlépe postihnou smysl mého výzkumu. Této fázi jsem věnovala hodně času a energie, ale i přesto jsem při vyhodnocování získaných materiálů objevila, co jsem mohla udělat lépe, například jsem mohla klást větší důraz na materiální zabezpečení, dodání vhodných pomůcek pro řešení apod.

Když zpětně hodnotím volbu úloh, musím konstatovat, že jich bylo zařazeno příliš mnoho. To bylo způsobeno mým původním cílem popsat řešení úloh z většiny prostředí, která byla zpracována v přípravné části. Nyní bych se však zaměřila raději pouze na předem vybrané oblasti a těm se věnovala více do hloubky.

Cíl přípravy a realizace experimentů považuji za splněný.

Realizací experimentů jsem získala velké množství materiálů. Nebylo možné je zpracovat všechny, zaprotokolovala jsem tedy pouze části některých, většina z nich byla použita v této práci. Mnoho získaných materiálů však zpracováno ještě nebylo. I mezi nimi se vyskytly velmi zajímavé situace, které bych chtěla v budoucnu zpracovat a získat tak další poznatky.

Zaprotokolované experimenty byly analyzovány, zaměřila jsem se především na hledání odpovědí na otázky stanovené v úvodní kapitole experimentální části. Hloubka analýzy odpovídá mým dosavadním zkušenostem a dovednostem. Při každé další analýze jsem vždy odhalila další jevy či možné příčiny jevů. Jsem si jistá, že v daných ukázkách zůstalo ještě mnoho neodhaleného a nepopsaného. Výsledky mé analýzy, vypozorované jevy, byly uspořádány do skupin podle charakteru. V závěrečné kapitole je pak zpracován jejich přehled a stručný popis.

Všech cílů, které jsem si pro zpracování práce stanovila, bylo dosaženo. Pro mě osobně měla práce další významný přínos. Tím se zabývám v následující kapitole, která je reflexí mé práce.

# 5 Reflexe

Úkol napsat tuto diplomovou práci pro mě nebyl vůbec jednoduchý. Nakonec se mi však podařilo ho určitým způsobem splnit. Setkávala jsem se během toho s různými problémy, které jsem se musela učit překonávat. Prvním mým problémem, s kterým jsem se potýkala již od okamžiku výběru tématu této práce, bylo najít přínos, který bude tato práce mít. Bylo pro mě velmi důležité stanovit smysl svého snažení. Jediný hmatatelný přínos jsem viděla v možnosti, že by ji mohli využít například studenti učitelství nebo i učitelé. Nyní však vím, že i kdyby tuto práci nikdy nikdo z nich nepřečetl, přece byla přínosná – já sama jsem díky ní získala mnohé poznatky a zkušenosti. Zde uvádím jejich výčet:

Zjistila jsem, v kterých oborech se v praxi rovnice využívají. Tyto poznatky pro mě byly velmi zajímavé, některé až překvapivé.

Hlouběji jsem pronikla do teorie poznávacího procesu, který mi byl dlouho nejasný. Toto mé pronikání do problému však není ukončeno, mnohému ještě nerozumím zcela jasně. O to se budu snažit v dalším sebevzdělávání.

Seznámila jsem se s různými učebnicemi matematiky, které jsou v současné době k dispozici. Při jejich analýze jsem nesledovala pouze výskyt rovnic, ale seznamovala jsem se i s některými jinými úlohami a celkovou koncepcí těchto učebnic, což mohu využít v mé budoucí praxi.

Naučila jsem se také pracovat s videokamerou. Moje první nahrávky nebyly příliš zdařilé, poslední považuji již za přijatelné. Samotné nahrávky však bylo potřeba vždy určitým způsobem zpracovat. Tak jsem se naučila videonahrávky různě upravovat, stříhat a konvertovat. To považuji za velmi přínosné.

Uvědomila jsem si také, jak je obtížné odhadnout, kdy dítě potřebuje čas na přemýšlení a kdy již potřebuje podporu. Mnohdy jsem nevěděla, jak na určité fenomény reagovat, jaká volit slova. Předpokládám, že se s tímto problémem budu setkávat i v průběhu budoucí praxe. Každá zkušenost, kterou jsem získala, však usnadňuje jejich řešení.

Zjistila jsem, že pouze z písemných záznamů je velmi těžké odhalit způsob myšlení žáků, úroveň jejich poznání. Oproti tomu možnost nahrát postupy řešení žáků na videokameru a jeho následné opakované sledování toto odhalování velmi usnadňuje. Mnohokrát mi ani při třetím sledování téhož nebylo jasné, proč to daný žák udělal právě takto. K odhalení došlo většinou až po několikerém sledování. O to větší však pak byla moje radost z tohoto objevu.

Analyzování experimentů pro mě bylo velmi přínosné. Toto sledování jevů a zamýšlení se nad nimi zvyšuje mou senzitivitu k nim. Věřím, že rozvoj této kompetence mi umožní pohotovější reakce na tyto jevy, vyskytnou-li se během mé budoucí učitelské praxe.

Videonahrávky neumožňují pouze lepší poznání žáka a jeho jednání, ale také poznání mě samotné. Při sledování těchto záznamů jsem si mimo jiné uvědomila, jak nespisovně mluvím. Toto se mi bohužel v průběhu realizace experimentů nepodařilo odstranit. Je to můj dlouhodobý problém, se kterým se neustále musím snažit bojovat.

Objevila jsem pravdivost přísloví, že méně je někdy více. Je lepší stanovovat si menší cíle a radovat se z jejich dosažení, než se nechat ubíjet pocitem nedosažitelnosti cíle velkého. V mém případě mám na mysli například to, že jsem chtěla popsat řešení úloh z příliš mnoha prostředí, z čehož jsem nakonec musela ustoupit kvůli příliš velké obsáhlosti. Z toho pak vyplývají další skutečnosti. Kdybych se zaměřila již od začátku pouze na některá prostředí, mohla jsem se více věnovat přípravě konkrétních úloh a dalšímu materiálnímu zabezpečení, především pomůcek, které by žáci při řešení mohli používat (ikony zvířátek, krokovací pásy atd.). Mohla jsem například také sama připravit program vyučovacích hodin, ne se účastnit pouze jako pozorovatel. Všechny tyto mé chyby jsem však bohužel odhalila až zpětně, při opětovném sledování a rozboru jednotlivých experimentů.

Další skutečností, kterou jsem si během této práce uvědomila, je můj postoj k vlastní chybě. Při zpracovávání a analýze experimentů jsem objevila mnoho chyb, kterých jsem se dopustila. Objev mých chyb mě vždy velmi zasáhl a poměrně dlouho trvalo, než jsem se s nimi vyrovnala a smířila. Nakonec jsem si uvědomila, že mou největší chybou, kterou jsem při psaní mé diplomové práce udělala, byla snaha udělat a napsat vše bezchybně. Tato snaha mě neustále ubíjela a omezovala v další práci. Uvědomila jsem si, že mě čeká mnoho práce a úsilí naučit se pracovat se svou vlastní chybou, naučit se ji přijímat a chápat ne jako neúspěch, ale jako výzvu. Vždyť i mým cílem pro budoucí praxi je vést děti k tomu, aby se nebály chybovat, aby chybu chápaly jako prostředek k učení, protože z chyb se poučíme většinou nejvíce. Proto i mým úkolem do budoucna je naučit se chybovat a přijímat své chyby, své vlastní nedostatky. Zjištění mého osobního postoje k chybě a uvědomění si důležitosti s touto skutečností pracovat považuji za největší přínos této práce pro můj další profesní, ale i soukromý život.

# 6 Literatura a informační zdroje

**Seznam použité literatury**

BOMEROVÁ, E. *Hledání objektů dané vlastnosti a organizace souboru jevů : komparativní analýza žákovských řešení.* Praha, 2004. 167 s., obr., tab. Diplomová práce (Mgr.). Univerzita Karlova v Praze. Pedagogická fakulta. Katedra primární pedagogiky.

ČAPEK, R.,aj. *Geografická kartografie.* Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1992. ISBN 80-04-25153-6

*D 24 : předpisy pro zjišťování propustnosti železničních tratí.* Praha : ČD, 26.3.1965. 55 s. Dostupné z WWW: <http://drdla.wz.cz/d24.zip>.

DELVENTHAL, K. M.; KISSNER, A.; KULICK, M. *Kompendium matematiky.* Praha : Knižní klub, 2004. ISBN 80-242-1227-7.

GAVORA, P. *Výzkumné metody v pedagogice : příručka pro studenty, učitele a výzkumné pracovníky.* Brno : Paido, 1996. ISBN 80-85931-15-X.

GAVORA, P. *Úvod do pedagogického výzkumu.* Brno : Paido, 2000. ISBN 80-85931-79-6.

HEJNÝ, M. Mechanismus poznávacího procesu. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J.; STEHLÍKOVÁ, N. (ed.). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2004, s. 23-42. ISBN 80-7290-189-3.

HEJNÝ, M. Budování matematických schémat. In HOŠPESOVÁ, A.; STEHLÍKOVÁ, N.; TICHÁ, M. (ed.). *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice.* České Budějovice : Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2007, s. 81-122. ISBN 978-80-7394-052-2.

HEJNÝ, M., aj. *Matematika 2 : příručka učitele pro 2. ročník základní školy.* Plzeň : Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-771-7.

HEJNÝ, M., aj. *Matematika 3 : příručka učitele pro 3. ročník základní školy.* Plzeň : Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-827-1.

HEJNÝ, M., aj. *Matematika 4 : příručka učitele pro 4. ročník základní školy.* Plzeň : Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-943-8.

HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 1 : příručka učitele pro 1. ročník základní školy.* Plzeň : Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-628-4.

HEJNÝ, M.; KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika : konstruktivistické přístupy k vyučování.* 2. aktual. vyd. Praha : Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-397-0.

HRUŠA, K.; ZELINKA, R., aj. *Přehled elementární matematiky.* Praha : Státní nakladatelství technické literatury, 1957.

JABLONSKÝ, J. *Operační výzkum : kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování.* 3. vyd. Praha : Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3.

JANUROVÁ, E.; JANURA, M. *Matematika : průvodce učivem základní a střední školy.* Dotisk 1. vyd. Olomouc : Rubico, 2004. ISBN 80-85839-31-8.

JIROTKOVÁ, D. *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie.* Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2010. ISBN 978-80-7290-399-3.

KUNA, M., aj. *Nedestruktivní archeologie : teorie, metody a cíle.* Praha : Academia, 2004. ISBN 80-200-1216-8.

MALINOVÁ, E. *Kapitoly z elementární aritmetiky : vybrané se zřetelem k aplikacím středoškolské algebry pro studenty učitelství na 1. stupni základní školy.* Praha : SPN, 1986.

POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky.* 9. přeprac. vyd. Praha : Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.

*Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Praha: VÚP, 2005.

SLEZÁKOVÁ, J. Prostředí Krokování. In HOŠPESOVÁ, A. STEHLÍKOVÁ, N., TICHÁ, M. (ed.). *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice.* České Budějovice: Jihočeská Univerzita v Českých Budějovicích, 2007, s. 123-142. ISBN 978-80-7394-052-2.

STEJSKAL, V.; KULIŠ, Z. *Mechanika.* Praha : Victoria Publishing, 1996. ISBN 80-7187-025-0.

SVOBODA, E., aj. *Přehled středoškolské fyziky.* 3. vyd. Praha : Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-116-7.

VACÍK, J., aj. *Přehled středoškolské chemie.* 3. doplň. vyd. Praha : SPN, 1996. ISBN 80-85937-08-5.

### Elektronické zdroje

BDINKOVÁ, Věra. *Fyzika hrou* [online]. 2010 [cit. 2011-01-28]. Měřicí přístroje. Dostupné z WWW: <http://www.fyzikahrou.cz/fyzika/hracky-a-modely/merici-pristroje>.

BOMEROVÁ, Eva. *EB* [online]. 2010 [cit. 2011-01-28]. Děda Lesoň. Dostupné z WWW: <http://bomerova.cz/deda-leson>.

*Citace 2.0 : vše o citování literatury a dokumentů* [online]. c2004 [cit. 2011-03-01]. Generátor citací. Dostupné z WWW: <www.citace.com>.

*KMDM, PedF UK* [online]. 2008 [cit. 2011-02-01]. Pro studenty 1. stupně. Dostupné z WWW: <http://kmdm.pedf.cuni.cz/Default.aspx?PorZobr=2&PolozkaID=108&ClanekID=263>.

*Wikipedie : Otevřená encyklopedie* [online]. 19.2.2011 [cit. 2011-03-01]. Váhy. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Váhy>.

### Seznam použitých učebnic pro 1. stupeň ZŠ

(A1/1) LANDOVÁ, V.; STAUDKOVÁ, H.; TŮMOVÁ, V. *Matematika pro 1. ročník. Sešit č. 1.* 7. vyd. Všeň : Alter, 2002.

(A1/2) LANDOVÁ, V.; STAUDKOVÁ, H.; TŮMOVÁ, V. *Matematika pro 1. ročník. Sešit č. 2.* Všeň : Alter, 2006. ISBN 80-7245-094-8.

(A1/3) LANDOVÁ, V.; STAUDKOVÁ, H.; TŮMOVÁ, V. *Matematika pro 1. ročník. Sešit č. 3.* Všeň : Alter, 2006. ISBN 80-7245-095-6.

(A2/4) LANDOVÁ, V.; STAUDKOVÁ, H.; TŮMOVÁ, V. *Matematika pro 2. ročník. Sešit č. 4/B.* Všeň : Alter, 2006. ISBN 80-7245-081-6.

(A2/5) LANDOVÁ, V.; STAUDKOVÁ, H.; TŮMOVÁ, V. *Matematika pro 2. ročník. Sešit č. 5.* Všeň : Alter, 2006. ISBN 80-7245-058-1.

(A2/6) LANDOVÁ, V.; STAUDKOVÁ, H.; TŮMOVÁ, V. *Matematika pro 2. ročník. Sešit č. 6.* 6. vyd. Všeň : Alter, 2004.

(A3) BLAŽKOVÁ, R., aj. *Matematika pro 3. ročník základních škol.* Všeň : Alter, 2007. ISBN 80-7245-086-7.

(A4) BLAŽKOVÁ, R., aj. *Matematika pro 3. ročník základních škol.* Všeň : Alter, 2008. ISBN 978-80-7245-145-6.

(A5) JUSTOVÁ, J. *Matematika pro 5. ročník základních škol.* Všeň : Alter, 2008. ISBN 978-80-7245-154-8.

(F1/1) HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 1 : učebnice pro 1. ročník základní školy. 1. díl.* Plzeň : Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-626-0.

(F1/2) HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 1 : učebnice pro 1. ročník základní školy. 2. díl.* Plzeň : Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-627-7.

(F2/1) HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 2 : učebnice pro 2. ročník základní školy. 1. díl.* Plzeň : Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-768-7.

(F2/2) HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 2 : učebnice pro 2. ročník základní školy. 2. díl.* Plzeň : Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-769-4.

(F2/3) HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 2 : učebnice pro 2. ročník základní školy. 3. díl.* Plzeň : Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-770-0.

(F3) HEJNÝ, M., aj. *Matematika 3 : učebnice pro 3. ročník základní školy.* Plzeň : Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-824-0.

(F4) HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; BOMEROVÁ, E. *Matematika 4 : učebnice pro 4. ročník základní školy.* Plzeň : Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-940-7.

(F4-S1) HEJNÝ, M., aj. *Matematika 4 : pracovní sešit 1 pro 4. ročník základní školy.* Plzeň : Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-941-4.

(F4-S2) HEJNÝ, M., aj. *Matematika 4 : pracovní sešit 2 pro 4. ročník základní školy.* Plzeň : Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-942-1.

(M1) KITTLER, J. *Matematika pro 1. ročník základní školy.* Praha : Matematický ústav AV ČR, 1994. ISBN 80-85823-06-3.

(M2) KITTLER, J.; KUŘINA, F. *Matematika pro 2. ročník základní školy.* Praha : Matematický ústav AV ČR, 1994. ISBN 80-85823-12-8.

(M3) KITTLER, J.; KUŘINA, F.; TICHÁ, M. *Matematika pro 3. ročník základní školy.* Praha : Matematický ústav AV ČR, 1995. ISBN 80-85823-17-9.

(M4) KOMAN, M.; KUŘINA, F.; TICHÁ, M. *Matematika pro 4. ročník základní školy.* Praha : Matematický ústav AV ČR, 1996. ISBN 80-85823-22-5.

(M5) KOMAN, M.; KUŘINA, F.; TICHÁ, M. *Matematika pro 5. ročník základní školy.* Praha : Matematický ústav AV ČR, 1997. ISBN 80-85823-25-X.

(Pr1/1) MIKULENKOVÁ, H.; MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 1. ročník. 1. díl.* Olomouc : Prodos, 2006. ISBN 80-7230-158-6.

(Pr1/2) MIKULENKOVÁ, H.; MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 1. ročník. 2. díl.* Olomouc : Prodos, 2006. ISBN 80-7230-159-4.

(Pr1/3) MIKULENKOVÁ, H.; MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 1. ročník. 3. díl.* Olomouc : Prodos, 2006. ISBN 80-7230-160-8.

(Pr2/1) MIKULENKOVÁ, H.; MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 2. ročník. 1. díl.* Olomouc : Prodos, 2007. ISBN 978-80-7230-181-2.

(Pr2/2) MIKULENKOVÁ, H.; MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 2. ročník. 2. díl.* Olomouc : Prodos, 2007. ISBN 978-80-7230-182-9.

(Pr2/3) MIKULENKOVÁ, H.; MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 2. ročník. 3. díl.* Olomouc : Prodos, 2007. ISBN 978-80-7230-183-6.

(Pr3/1) MIKULENKOVÁ, H.; MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 3. ročník. 1. díl.* Olomouc : Prodos, 2007. ISBN 978-80-7230-184-3.

(Pr3/2) MIKULENKOVÁ, H.; MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 3. ročník. 2. díl.* Olomouc : Prodos, 2007. ISBN 978-80-7230-185-0.

(Pr3/3) MIKULENKOVÁ, H.; MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 3. ročník. 3. díl.* Olomouc : Prodos, 2007. ISBN 978-80-7230-186-7.

(Pr4/1) MIKULENKOVÁ, H.; MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 4. ročník. 1. díl.* Olomouc : Prodos, 2008. ISBN 978-80-7230-203-1.

(Pr4/2) MIKULENKOVÁ, H.; MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 4. ročník. 2. díl.* Olomouc : Prodos, 2008. ISBN 978-80-7230-204-8.

(Pr4/3) MIKULENKOVÁ, H.; MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 4. ročník. 3. díl.* Olomouc : Prodos, 2008. ISBN 978-80-7230-205-5.

(Pr5/1) MIKULENKOVÁ, H.; MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 5. ročník. 1. díl.* Olomouc : Prodos, 2008. ISBN 978-80-7230-208-6.

(Pr5/2) MIKULENKOVÁ, H.; MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 5. ročník. 2. díl.* Olomouc : Prodos, 2008. ISBN 978-80-7230-209-3.

(Pr5/3) MIKULENKOVÁ, H.; MOLNÁR, J. *Matematika a její aplikace pro 5. ročník. 3. díl.* Olomouc : Prodos, 2008. ISBN 978-80-7230-210-9.

(Pt1) HOŠPESOVÁ, A.; DIVÍŠEK, J.; KUŘINA, F. *Svět čísel a tvarů : Matematika pro 1. ročník.* Praha : Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-015-2.

(Pt2) HOŠPESOVÁ, A.; DIVÍŠEK, J.; KUŘINA, F. *Svět čísel a tvarů : Matematika pro 2. ročník.* Praha : Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-067-5.

(Pt3) HOŠPESOVÁ, A.; DIVÍŠEK, J.; KUŘINA, F. *Svět čísel a tvarů : Matematika pro 3. ročník.* Praha : Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-117-5.

(Pt4) HOŠPESOVÁ, A.; DIVÍŠEK, J.; KUŘINA, F. *Svět čísel a tvarů : Matematika pro 4. ročník.* Praha : Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-157-4.

(Pt5) HOŠPESOVÁ, A.; DIVÍŠEK, J.; KUŘINA, F. *Svět čísel a tvarů : Matematika pro 5. ročník.* Praha : Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-192-2.

(S1/1) ČÍŽKOVÁ, M. *Matematika pro 1. ročník základní školy. 1. díl.* Praha : SPN, 2007. ISBN 978-80-7235-346-0.

(S1/2) ČÍŽKOVÁ, M. *Matematika pro 1. ročník základní školy. 2. díl.* Praha : SPN, 2007. ISBN 978-80-7235-348-4.

(S2/1) ČÍŽKOVÁ, M. *Matematika pro 2. ročník základní školy. 1. díl.* Praha : SPN, 2007. ISBN 978-80-7235-370-5.

(S2/2) ČÍŽKOVÁ, M. *Matematika pro 2. ročník základní školy. 2. díl.* Praha : SPN, 2007. ISBN 978-80-7235-376-7.

(S3) ČÍŽKOVÁ, M. *Matematika pro 3. ročník základní školy.* Praha : SPN, 2008. ISBN 978-80-7235-405-4.

(S4) EIBLOVÁ, L.; MELICHAR, J.; ŠESTÁKOVÁ, M. M*atematika pro 4. ročník základní školy.* Praha : SPN, 2009. ISBN 978-80-7235-434-4.

(S5) VACKOVÁ, I.; FAJFRLÍKOVÁ, L.; UZLOVÁ, Z. *Matematika pro 5. ročník základní školy.* Praha : SPN, 2010. ISBN 978-80-7235-471-9.

**Seznam použitých učebnic pro 2. stupeň ZŠ**

BINTEROVÁ H.; FUCHS, E.; TLUSTÝ, P. *Matematika 8 : aritmetika : učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia.* Plzeň : Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-684-0.

COUFALOVÁ, J., aj. *Matematika 8 : pro 8. ročník základní školy.* 2. Uprav. Vyd. Praha : Fortuna, 2007. ISBN 978-80-7168-994-2.

HERMAN, J., aj. *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií : rovnice, nerovnice.* Dotisk 1. vyd. Praha : Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-014-4.

MOLNÁR, J., aj. *Matematika 8.* Olomouc : Prodos, 2000. ISBN 80-7230-062-8.

ODVÁRKO, O.; KADLEČEK, J. *Matematika pro 8. ročník základní školy : 2. díl.* Praha : Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-167-1.

PŮLPÁN, Z.; ČIHÁK, M.; TREJBAL, J. *Matematika pro 8. ročník ZŠ : algebra.* Praha : SPN, 2009. ISBN 978-80-7235-419-1.

# 7 Přílohy

# Příloha 1: Kompletní přehled realizovaných experimentů

| Experiment | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zúčastnění | **Vojtěch**, Ex | **Alžbětka**, Ex | **Bětka**, Ex | **Veronika**, Ex | **Jiřík**, Ex | **Alžbětka**, Ex | **Bětka**, Ex |
| Ročník ZŠ | 2. | 1. | 3. | 5. | 2. | 1. | 3. |
| Datum | 15.9.2009 | 15.9.2009 | 28.10.2009 | 28.10.2009 | 28.10.2009 | 28.10.2009 | 29.10.2009 |
| Místo | Malý Pěčín, Dačice | Malý Pěčín, Dačice | Hříšice, Dačice | Hříšice, Dačice | Malý Pěčín, Dačice | Malý Pěčín, Dačice | Hříšice, Dačice |
| Poznámky | V domácím prostředí, 16-16:40 | V domácím prostředí, 17-17:30 | V domácím prostředí, 15-15:30 | V domácím prostředí, 15:30-16:10 | V domácím prostředí, 16:45-17:15 | V domácím prostředí, 17:15-17:30 | V domácím prostředí, 14-14:30 |
| Další přítomní | Vojtova matka, mladší bratr a sestra | Alžbětčina matka, mladší sestra | Bětčina mladší sestra | Veroničina matka a mladší sestra | Jiříkova matka, Alžbětka a mladší sestra | Alžbětčina makta, Jiřík, mladší sestra | Bětčina mladší sestra |
| Nástroj | Úlohy z prostředí DL | Úlohy z prostředí DL | Úlohy z prostředí DL | Úlohy z prostředí DL | Úlohy z prostředí DL | Úlohy z prostředí DL | Úlohy z prostředí DL |
| Evidence | Videozáznam, přepis videozáznamu | Videozáznam | Videozáznam, přepis části videozáznamu | Videozáznam, přepis částí videozáznamu | Videozáznam | Videozáznam | Videozáznam |
| Umístění | Archiv autora | Archiv autora | Archiv autora | Archiv autora, 3.3.3, s. 66-71 | Archiv autora | Archiv autora | Archiv autora |

| Experiment | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|
| Zúčastnění | Žáci,Ex | Žáci,Ex | Žáci,Ex | Žáci,Ex |
| Ročník ZŠ | 8. | 8. | 9. | 9. |
| Datum | 18.5.2010 | 19.5.2010 | 8.9.2010 | 9.9.2010 |
| Místo | ZŠ Neratovice | ZŠ Neratovice | Hauptschule, Frankfurt am Main | Realschule, Frankfurt am Main |
| Poznámky | Během vyučování, 8:00 - 8:45, 16 žáků | Během vyučování, 8:55 - 9:40, 19 žáků | Během vyučování 11:40 - 12:25, 14 žáků | Během vyučování 8:00 - 8:45, 19 žáků |
| Další přítomní | Učitelka | Učitelka | Učitelka | Učitelka, praktikantka |
| Nástroj | Úlohy z pracovního listu 1, příloha č. | Úlohy z pracovního listu 1, příloha č. | Úlohy z pracovního listu 2, příloha č. | Úlohy z pracovního listu 2, příloha č. |
| Evidence | Videozáznam, písemné záznamy | Videozáznam, písemné záznamy | Písemné záznamy | Písemné záznamy |
| Umístění | Archiv autora | Archiv autora | Archiv autora | Archiv autora |

| Experiment | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. |
|---|---|---|---|---|---|
| Zúčastnění | Žáci, učitelka,Ex | Žáci, učitelka,Ex | Žáci, učitelka,Ex | Žáci, učitelka,Ex | Žáci,Ex |
| Ročník ZŠ | 4. | 4. | 4. | 4. | 2. - 3. |
| Datum | 12.5.2010 | 20.1.2011 | 2.2.2011 | 8.2.2011 | 27.1.2011 |
| Místo | ZŠ Neratovice | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 2 | ZŠ Praha 6 |
| Poznámky | Běžná vyučovací hodina, 8:55 - 9:40, 10:00 - 10:45, 26 žáků | Běžné vyučovací hodiny 10:00 - 10:45, 10:55 - 11:40, 22 žáků | Běžná vyučovací hodina, 8:00 - 8:45, 17 žáků | Běžná vyučovací hodina, 8 - 8:45, 14 žáků | Matematický kroužek ve volném čase 13:00 -14:00, 19 ž |
| Další přítomní | Praktikantka | Praktikantka | | | Učitelka |
| Nástroj | Úlohy z prostředí DL, MSČ, šipkových grafů | Číselné rovnice, úlohy z prostředí DL, MSČ | Úlohy z prostředí MSČ, krokování, pracovní list 3 | Úlohy z prostředí krokování, šipkových grafů | Úlohy z pracovního listu 3 |
| Evidence | VZ, přepis fragmentů, fotografie | VZ, fotografie písemných záznamů žáků | VZ, písemné záznamy, jejich fotografie | VZ, písemné záznamy žáků | VZ, písemná řešení |
| Umístění | Archiv autora, 3.3.2, s.60-61, 3.3.3.2, s.84-87 | Archiv autora, 3.3.2, s. 61-66 | Archiv autora, 3.3.1, s. 59-60, 3.3.3 s. 76-79, P6 | Archiv autora, 3.3.4, s. 87-93 | Archiv autora, 3.3.1 s. 56-59, 3.3.3, s. 72-73, P7 |

| Experiment | 16. | 17. | 18. | 19. | 20. |
|---|---|---|---|---|---|
| Zúčastnění | Adéla,Ex | Semi,Ex | Kristýna, Ex | Míša, Ex | Pavel, Ex |
| Ročník ZŠ | 4. | 4. | 4. | 4. | 4. |
| Datum | 27.1.2011 | 27.1.2011 | 28.1.2011 | 28.1.2011 | 28.1.2011 |
| Místo | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 |
| Poznámky | Odpoledne po vyučování | Odpoledne po vyučování | Během vyučování | Během vyučování | Během vyučování |
| Nástroj | Úlohy z pracovního listu 4 | Úlohy z pracovního listu 4 | Úlohy z pracovního listu 4 | Úlohy z pracovního listu 4 | Úlohy z pracovního listu 4 |
| Evidence | Videozáznam, žákovská řešení | Videozáznam, žákovská řešení | Videozáznam, žákovské řešení | Videozáznam, žákovské řešení | Videozáznam, žákovské řešení |
| Umístění | Archiv autora | Archiv autora | Archiv autora, 3.3.5, s. 95-6 | Archiv autora, 3.3.3.2 s. 79-81, 3.3.5 s.96-97, P8 | Archiv autora, 3.3.3.2 s. 81-82, 3.3.4 s. 93-95, 3.3.5 s. 97-100, P9 |

| Experiment | 21. | 22. | 23. | 24. | 25. |
|---|---|---|---|---|---|
| Zúčastnění | David, Ex | Nela, Ex | Lukáš, Ex | Filip, Ex | Marcela, Ex |
| Ročník ZŠ | 4. | 4. | 4. | 4. | 4. |
| Datum | 28.1.2011 | 28.1.2011 | 28.1.2011 | 2.2.2011 | 2.2.2011 |
| Místo | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 |
| Poznámky | Během vyučování | Během vyučování | Během vyučování | Během vyučování | Během vyučování |
| Nástroj | Úlohy z pracovního listu 4 | Úlohy z pracovního listu 4 | Úlohy z pracovního listu 4 | Úlohy z pracovního listu 4 | Úlohy z pracovního listu 4 a 5 |
| Evidence | Videozáznam, žákovské řešení | Videozáznam, žákovská řešení | Videozáznam, žákovské řešení | Videozáznam, žákovské řešení | Videozáznam, žákovské řešení |
| Umístění | Archiv autora | Archiv autora, 3.3.5, s. 100-101 | Archiv autora, 3.3.5, s. 102-103, P10 | Archiv autora | Archiv autora |

| Experiment | 26. | 27. | 28. | 29. | 30. | 31. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zúčastnění | Michala, Ex | Nikol, Ex | Sam, Ex | Anežka, Ex | Jirka, Ex | Vojta, Ex |
| Ročník ZŠ | 4. | 4. | 4. | 4. | 3. | 3. |
| Datum | 2.2.2011 | 2.2.2011 | 2.2.2011 | 2.2.2011 | 2.2.2011 | 2.2.2011 |
| Místo | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 | ZŠ Praha 6 |
| Poznámky | Během vyučování | Během vyučování | Během vyučování | Během vyučování | Během vyučování | Během vyučování |
| Nástroj | Úlohy z pracovního listu 5 | Úlohy z pracovního listu 5 | Úlohy z pracovního listu 5 | Úlohy z pracovního listu 4 | Úlohy z pracovního listu 6 | Úlohy z pracovního listu 6 |
| Evidence | Videozáznam, žákovské řešení | Videozáznam, žákovské řešení | Videozáznam, žákovské řešení | Videozáznam, žákovské řešení | Videozáznam, žákovské řešení | Videozáznam, žákovské řešení |
| Umístění | Archiv autora | Archiv autora | Archiv autora | Archiv autora, 3.3.3.2, s. 82-84 | Archiv autora, 3.3.3, s. 73-74 | Archiv autora, 3.3.3, s. 75-76 |

# Příloha 2: Scénář 1. experimentů

Seznámení s tím, co se bude dít, proč natáčím atd. Říci datum, kdy se experiment koná.

Rozhovor – do jaké třídy chodíš? Baví tě matematika? Co tě v matematice nejvíce baví? Co jste se učili naposledy? atp.

My dnes spolu budeme mít jinou matematiku, než jakou máte ve škole.

**Seznámení s prostředím**

Příběh: Slyšela jsem o jednom starém pánovi, který žil sám se spoustou zvířátek na samotě blízko lesa. Jmenoval se děda Lesoň. Zvířátek měl opravdu hodně, žili tam s ním myšky, kočky, husy, pejsci, kozy a berani. Zvířátka se navzájem měla moc ráda, ale jednou se začala pošťuchovat, strkat a nakonec se začala i prát. Hádala se totiž, kdo z nich je silnější. Nejvíce se ale hádaly husy s kočkami a myškami. Děda Lesoň už se na to nemohl dívat, a tak pro ně vymyslel jednu hru – přetahování lanem. Místo toho, aby se zvířátka prala, přetahovala se lanem a děda Lesoň jim dělal rozhodčího. Zjistil, že 2 jeho myšky mají sílu jako 1 jeho kočka. A když se myška spojí s kočkou, jsou stejně silné jako kterákoli dědova husa. Děda Lesoň si o jednotlivých soubojích dělal zápisy, zapisoval si to takhle. (Nakreslím na papír obrázky zvířátek.) To bylo ale moc zdlouhavé, než to děda stihl zapsat, zvířátka se rozutekla. A tak vymyslel pro svůj zápis tyto zkratky. (Napíšu na papír, zopakujeme vztahy mezi silou zvířátek, napíšu je na papír, nechám ho ležet před dětmi, aby se na ně mohly kdykoli podívat).

Zvířátka tato hra moc bavila, a tak začala tvořit různá družstva a přetahovala se spolu. Byla to třeba tato družstva.

**Úlohy**

Poznáš, které družstvo vyhraje?

1) MM ? K řeš. =
    1a) M ? K řeš. <

2) MK ? KM řeš. = Pozn. předpokládám, že z této úlohy poznám, jestli přijal, že všechny myšky, resp. kočky jsou stejně silné

3) MKM ? MMM řeš.>
    3a) K ? M řeš. >
    3b) MK ? MM řeš. > Pozn. oproti předešlé úloze je každé družstvo silnější o jednu myšku, mohu se zeptat, které družstvo bude silnější, když ke každému přijde na pomoc jedna myš.

4) MMM ? KK řeš. <
    4a) MM ? K řeš. =
    4b) K ? MMM řeš. <
    4c) MMM ? KK řeš. <

5) H ? KM řeš. =

5a) H ? H řeš. =

Pozn. cílem úloh je procvičení a upevnění základních vztahů mezi zvířátky

6) MM ? H řeš. <

6a) H ? K řeš. >

6b) KM ? H řeš. =

7) KM ? HM řeš. <

7a) KM ? H řeš. =

7b) HM ? K řeš >

8) H ? MMK řeš. <

9) HKMM ? KKK řeš. >

9a) MKMK ? HH řeš. =

10) HM ? KKM řeš. <

Dokážeš rozdělit zvířátka do 2 stejně silných družstev?

Teď se přišla přetahovat tato zvířátka, děda Lesoň je chce rozdělit do dvou stejně silných družstev, mohl/a bys mu pomoci?

11) MKMK řeš. MK=MK

12) MMMH řeš. MMM=H

13) MKKH řeš. KK=MH

14) MMMKH řeš. MMK=HM

Děda Lesoň měl také pejsky, byli to všichni bráškové, pěkní voříšci. Ti se s myškami, kočkami a husami neprali, ale když viděli jejich hru, zalíbila se jim a poprosili ji, jestli si s nimi také můžou hrát. Všichni hned souhlasili a vzali brášky voříšky mezi sebe. Při přetahování zjistili, že 1 pejsek má stejnou sílu jako husa s myškou. Děda Leson si to do svých zápisků poznamenal takto. Napíšu na papír k ostatním také tento vztah.

15) P ? H řeš. >

15a) HM ? P řeš. =

16) KMM ? P řeš. =

16a) P ? MMM řeš. >

16b) MMMM ? P řeš. =

17) P ? KK řeš. =

18) PM ? HK řeš. =

18a) PM ? HM řeš. >

18b) P ? HK řeš. <

Rozděl do 2 stejně silných družstev:

19) MMKP řeš. MMK=P

19a) PHM řeš. P = HM

20) MMMKH řeš. MMK = MH

21) MKHP řeš. MP = KH

21a) MMMHP řeš. MP = MMH

Děda Lesoň vytvořil tato 2 družstva, chtěl, aby byla stejně silná. Povedlo se mu to? Které zvířátko má přijít na pomoc slabšímu družstvu, aby byla obě družstva stejně silná?

22) MM = H řeš. Lv: M

23) P = KM řeš. Pr: P

24) KP = HKM řeš. stejně silná

25) PK = KK řeš. Pr: K

26) KKK = H řeš. Pr: H

**27) MMMM = P řeš. stejně silná úloha Z1**

**28) HK = M řeš. Pr: P úloha Z2**

29) MKMKM = HP řeš. stejně silná

Jednou děda Lesoň uspořádal pro zvířátka karneval, kam zvířátka přišla v maskách. Samozřejmě chtěla hrát opět svou oblíbenou hru. Tak se přetahovali, jenomže některá zvířátka měla stále masku, takže nikdo nevěděl, jaké zvířátko to je. Zjistil/a bys to?

Které zvířátko je schované za maskou?

**30) MMKM = M □ MM řeš. K úloha Z3**

31) KP = □ KH řeš. M

32) PK □ = HKMM řeš. M

**33) PMKM = KKM□ řeš. H úloha Z4**

34) MMM□ = PK řeš. H

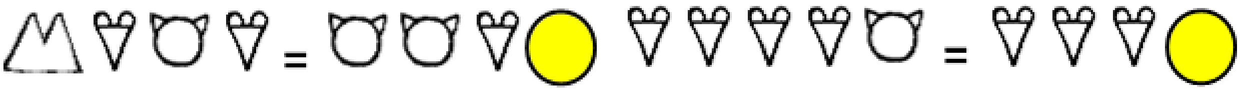
Reflexe:

Bavilo tě to? Co nejvíc? Proč? Co se ti nelíbilo? Bylo to pro tebe těžké? Co bylo nejtěžší? Chtěl bys znovu takto společně počítat?

Poděkování.

## Příloha 3: Pracovní list 3

1. **Které zvířátko je schované za maskou?**

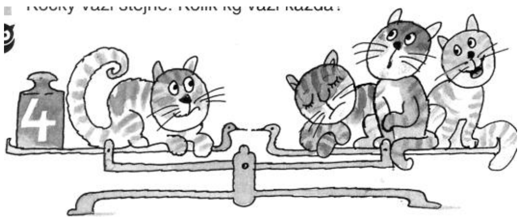


2. **Vyřeš:**

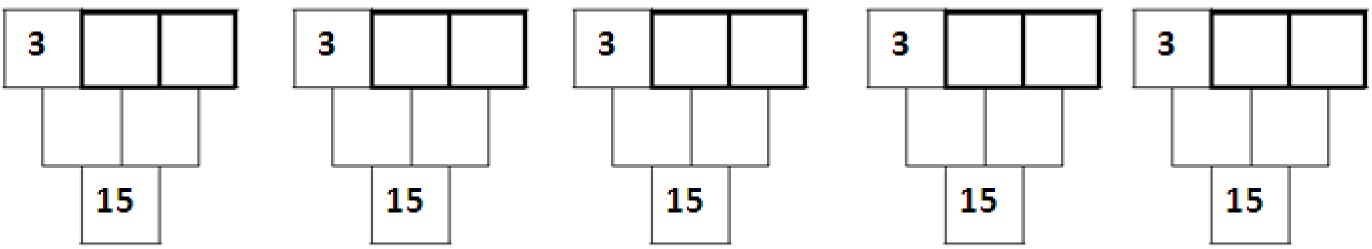
$6 = 3 + \square$

$4 + 1 + 2 + 1 = 2 + 2 + 1 + \square$

3. **Všechny kočky váží stejně, kolik váží každá kočka?**




4. **Doplň tak, aby byl součet v tučně označených polích 10.**




Vyřeš úlohu:

## Příloha 4: Pracovní list 4

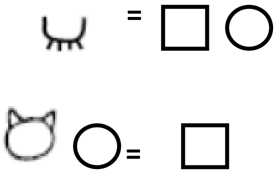
1) Vyřeš tuto rovnici. Můžeš zvolit jakýkoli postup.

   **2x + 5 = 11**

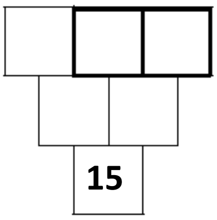
2) Doplň tabulku jízdy autobusem, když víš, že **ze zastávky C do D jelo o 6 více cestujících**, než jich **na zastávce C vystoupilo**.

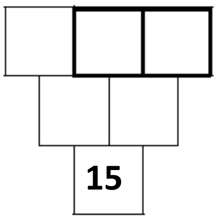
| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| V | | | | **5** | **7** |
| N | | **3** | **4** | | |
| J | **5** | **6** | | | |

3) Vyřeš tuto úlohu:

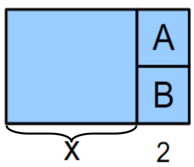


4) Doplň součtový trojúhelník, když víš, že **součet tučně označených políček je 10** a políčko v **pravém horním rohu je o 2 větší než** tučně označené **políčko vedle něj**:




5) Doplň chybějící délku (x), když víš, že **obsah** celého obdélníku **je 28** □ a čtyřúhelníky A a B jsou čtverce.

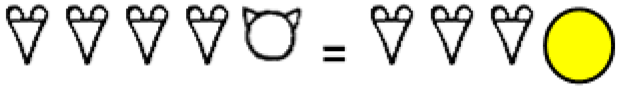



6) Přepiš tuto rovnici pomocí šipek a vyřeš.

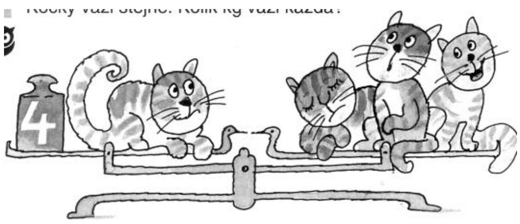
**4 + x – 2 + 3 = 7**

## Příloha 5: Pracovní list 6

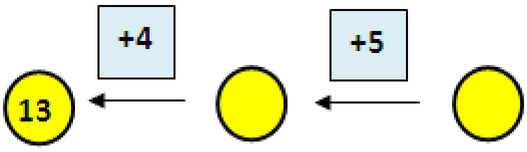
Které zvířátko je schované za maskou?

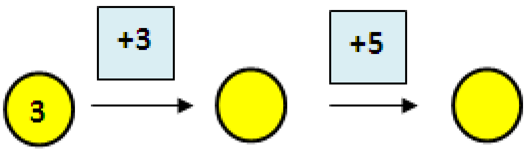


Všechny kočky váží stejně, kolik kil váží každá kočka?




Vyřeš úlohu:

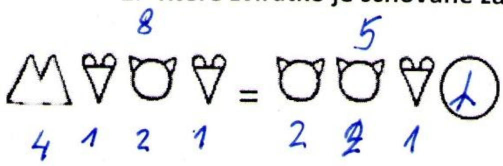


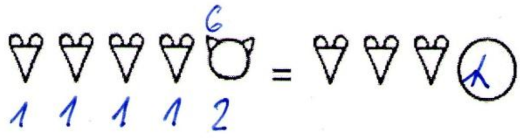



## Příloha 6: Experiment 13 – písemné záznamy řešení

Anežka

1. Které zvířátko je schované za maskou?



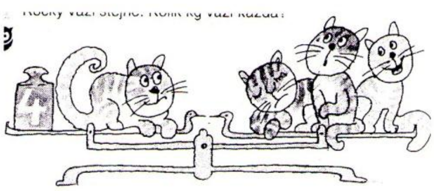

2. Vyřeš:

6 = 3 + $\boxed{3}$

4+ 1 + 2 + 1 = 2 + 2 + 1 + $\boxed{3}$

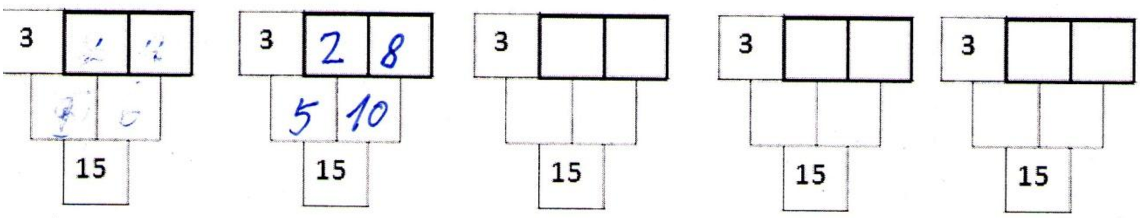
8 5+

3. Všechny kočky váží stejně, kolik váží každá kočka?



Jedna kočka váží 2 k

4. Doplň tak, aby byl součet v tučně označených polích 10.




Vyřeš úlohu:

$13 \xleftarrow{+4} 9 \xleftarrow{+5} 4$

$3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+5} 11$

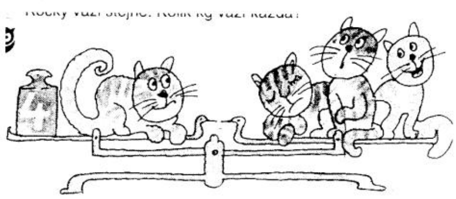
1. Které zvířátko je schované za maskou?

2. Vyřeš:

6 = 3 + $\boxed{3}$

4+ 1 + 2 + 1 = 2 + 2 + 1 + $\boxed{3}$ (8 … 5)

3. Všechny kočky váží stejně, kolik váží každá kočka?



KOČKA VÁŽÍ 2 KG

4. Doplň tak, aby byl součet v tučně označených polích 10.

| | | |
|---|---|---|
| 3 | **4** | **8** |
| | 5 | 10 |
| | 15 | |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | **** | **** |
| | | |
| | 15 | |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | **** | **** |
| | | |
| | 15 | |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | **** | **** |
| | | |
| | 15 | |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | **** | **** |
| | | |
| | 15 | |

Vyřeš úlohu:

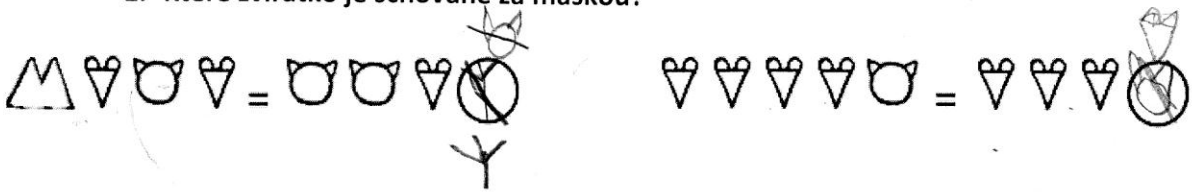
$13 \xleftarrow{+4} 9 \xleftarrow{+5} 4$

$3 \xrightarrow{+3} 2 \xrightarrow{+5} 7$

## Příloha 7: Experiment 15 – písemný záznam řešení (Lucka)

LUCKA

1. Které zvířátko je schované za maskou?

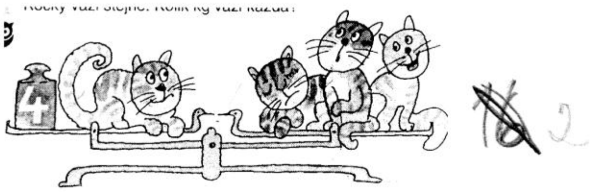


2. Vyřeš:

6 = 3 + 3

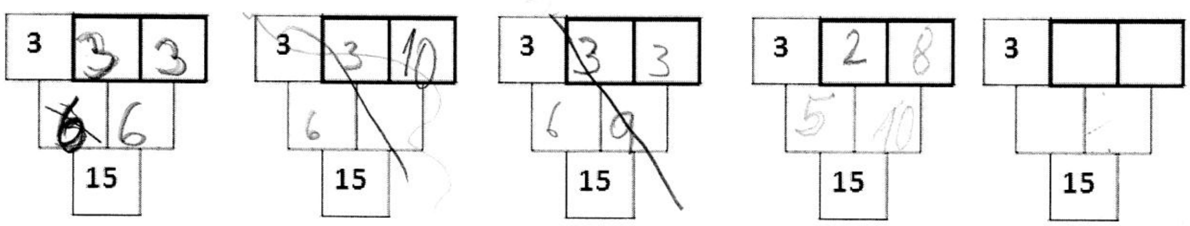
4+ 1 + 2 + 1 = 2 + 2 + 1 + 3

3. Všechny kočky váží stejně, kolik váží každá kočka?




~~16~~ 2

4. Doplň tak, aby byl součet v tučně označených polích 10.




Vyřeš úlohu:

# Příloha 8: Experiment 19 (Míša) – písemný záznam řešení

Míša P.

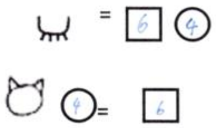
1) Vyřeš tuto rovnici. Můžeš zvolit jakýkoli postup.

$\overset{3}{\mathbf{2x}}$ **+ 5 = 11**

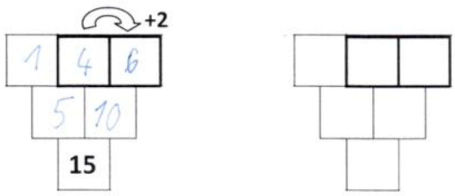
2) Doplň tabulku jízdy autobusem, když víš, že **ze zastávky C do D jelo o 6 více cestujících**, než jich **na zastávce C vystoupilo**.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| V | — | 2 | 2 | **5** | **7** |
| N | 5 | **3** | **4** | 4 | — |
| J | | **5** | **6** | 8 | 7 |

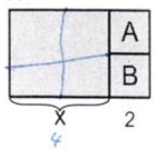
3) Vyřeš tuto úlohu:




4) Doplň součtový trojúhelník, když víš, že **součet tučně označených políček je 10** a políčko v **pravém horním rohu je o 2 větší než** tučně označené **políčko vedle něj**:

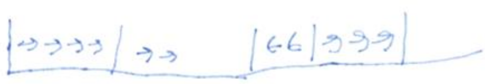



5) Doplň chybějící délku (x), když víš, že **obsah** celého obdélníku **je 28** □ a čtyřúhelníky A a B jsou čtverce.

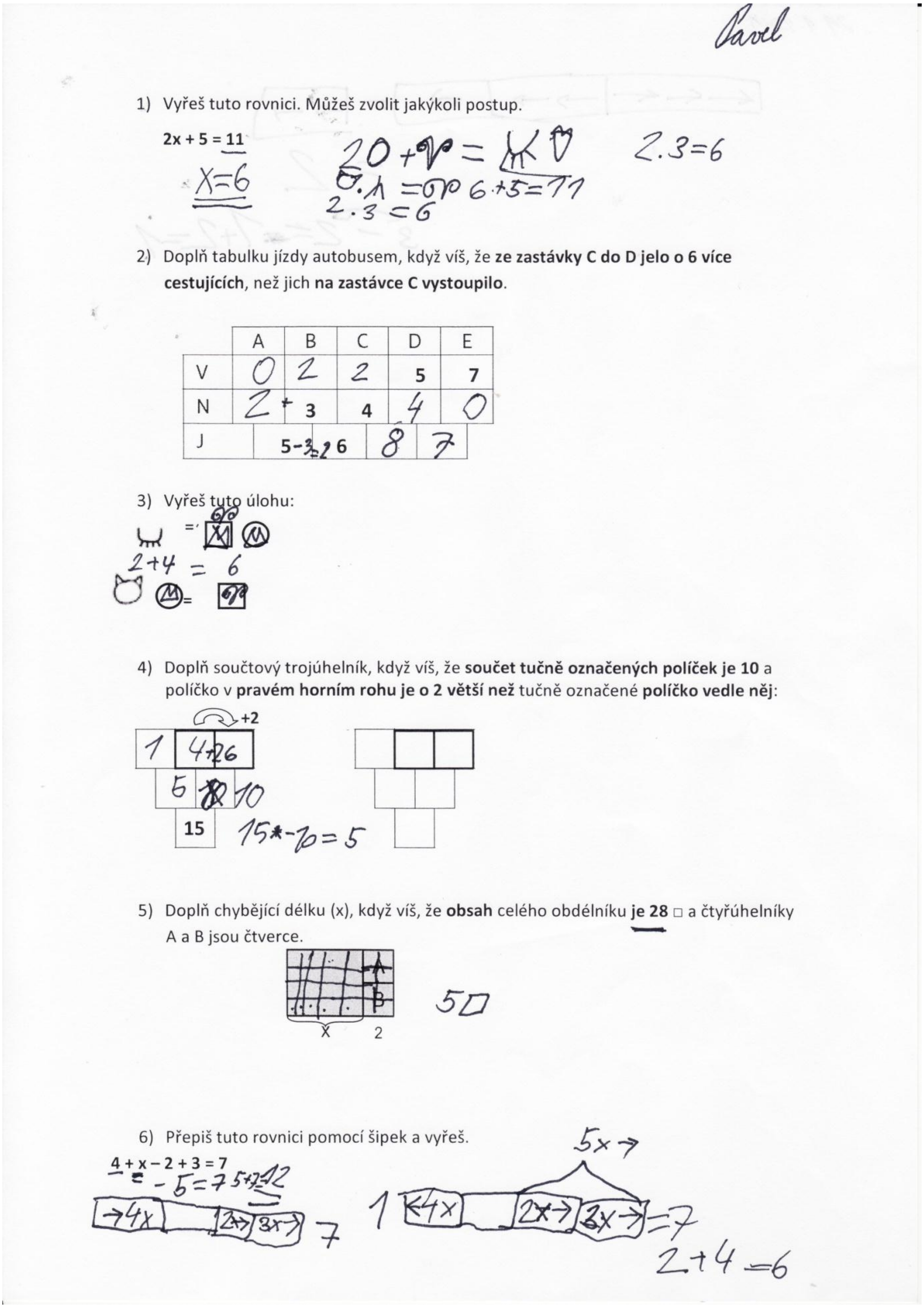



6) Přepiš tuto rovnici pomocí šipek a vyřeš.

**4 + x – 2 + 3 = 7**



## Příloha 9: Experiment 20 (Pavel) – písemný záznam řešení



Pavel

1) Vyřeš tuto rovnici. Můžeš zvolit jakýkoli postup.

$2x + 5 = 11$

$x = 6$ $2 \cdot 3 = 6$ $6 + 5 = 11$ $2 \cdot 3 = 6$

2) Doplň tabulku jízdy autobusem, když víš, že **ze zastávky C do D jelo o 6 více cestujících**, než jich **na zastávce C vystoupilo**.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| V | 0 | 2 | 2 | 5 | 7 |
| N | 2 | 3 | 4 | 4 | 0 |
| J | | 5-3=2 | 6 | 8 | 7 |

3) Vyřeš tuto úlohu:

2+4 = 6

4) Doplň součtový trojúhelník, když víš, že **součet tučně označených políček je 10** a políčko v **pravém horním rohu je o 2 větší než** tučně označené **políčko vedle něj**:

+2

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 6 |
| 5 | 10 | |
| 15 | | |

15-10=5

5) Doplň chybějící délku (x), když víš, že **obsah** celého obdélníku **je 28** □ a čtyřúhelníky A a B jsou čtverce.

A B x 2

5□

6) Přepiš tuto rovnici pomocí šipek a vyřeš.

$4 + x - 2 + 3 = 7$

5x→

=7

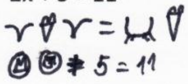
2+4=6

## Příloha 10: Experiment 23 (Lukáš) – písemný záznam řešení

LUKÁŠ P

1) Vyřeš tuto rovnici. Můžeš zvolit jakýkoli postup.

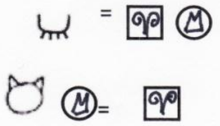
2x + 5 = 11




2) Doplň tabulku jízdy autobusem, když víš, že **ze zastávky C do D jelo o 6 více cestujících**, než jich **na zastávce C vystoupilo**.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| V | 0 | 2 | 204 | **5** | **7** |
| N | 5 | **3** | **4** | 426 | 0 |
| J | **5** | **6** | 1086 | 7 | |

3) Vyřeš tuto úlohu:



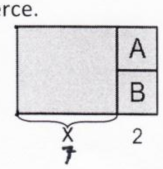
4) Doplň součtový trojúhelník, když víš, že **součet tučně označených políček je 10** a políčko v **pravém horním rohu je o 2 větší než** tučně označené **políčko vedle něj**:

+2

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 6 |
| | 5 | 10 |
| | **15** | |

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

5) Doplň chybějící délku (x), když víš, že **obsah** celého obdélníku **je 28** □ a čtyřúhelníky A a B jsou čtverce.




6) Přepiš tuto rovnici pomocí šipek a vyřeš.

4 + x − 2 + 3 = 7

4 →→→→ 6 ←←2← ← 3 →→→ = 7

# Příloha 11: Seznam přiložených videonahrávek experimentů

### Rámečkové úlohy

- E13_Adéla_rámečky
- E15_David_rámečky
- E15_Natálka_rámečky

### Zvířátka dědy Lesoně

- E11_Cilka_DL
- E11_Vašek_DL
- E13_Lukáš_DL
- E13_Sam_DL
- E15_Lucka_DL
- E19_Míša_DL
- E20_Pavel_DL
- E29_Anežka
- E30_Jirka_DL
- E31_Vojta_DL

### Krokování

- E14_Alenka_krokování
- E14_Dan_krokování
- E14_Zuzka_krokování
- E20_Pavel_krokování

### Číselné rovnice

- E18_Kristýna_cis_rovnice
- E19_MIsa_cis_rovnice
- E20_Pavel_cis_rovnice
- E22_Nela_cis_rovnice
- E23_Lukas_cis_rovnice