Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Dizertační práce

Praha 2011

Michaela Ulrychová

Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Konstrukce poznatků žáky v matematice (na příkladu Pythagorovy věty)

Pupils' Construction of Knowledge in Mathematics (the Example of Pythagoras' Theorem)

Michaela Ulrychová

Dizertační práce

Praha 2011

Školitelka:	doc. RNDr. Naďa Stehlíková, Ph.D.
Školící pracoviště:	Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Studijní program:	Pedagogika
Obor:	Didaktika matematiky

Prohlašuji, že jsem dizertační práci vypracovala samostatně s použitím uvedených pramenů a literatury. Práce nebyla dosud využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Karlova má právo uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Karlova oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Karlovy v Praze.

Březen 2011

Na úvod své dizertační práce bych ráda poděkovala doc. RNDr. Nadě Stehlíkové, Ph.D. za odborné vedení mé dizertační práce, za předání řady zkušeností, za cenné rady, připomínky, zájem a čas, který mi věnovala.

Dále děkuji RNDr. Darině Jirotkové, Ph.D. za poskytnutí důležitých materiálů k dizertační práci a za čas, který mi věnovala. Také bych ráda poděkovala za podněty, rady a pomoc dalším členům katedry.

Děkuji také RNDr. Lucii Csachové (roz. Ilucové), Ph.D. a žákům, kteří se na experimentech podíleli.

Název: Konstrukce poznatků žáky v matematice (na příkladu Pythagorovy věty)

Abstrakt: Dizertační práce se věnuje procesu konstrukce matematických poznatků u jednotlivce a skupiny žáků. Nejdříve jsou vymezeny některé pojmy, které patří mezi teoretická východiska práce (poznávací proces a jeho mechanizmus, typologie matematických poznatků, charakter matematické struktury, konstruktivistické přístupy k vyučování matematice, podnětná výuka a akční výzkum). Jsou uvedeny výsledky vybraných našich i zahraničních výzkumů týkající se problematiky konstruktivistických přístupů a též akčního výzkumu v didaktice matematiky. Metodologie práce sestává zejména z výukových experimentů, na které lze do jisté míry nahlížet jako na cykly kooperativního akčního výzkumu. Cílovou skupinou byli žáci nižšího stupně osmiletého gymnázia. Data získaná klasickými metodami kvalitativního výzkumu (participačním pozorováním, audio- a videozáznamy, artefakty, poznámky externího pozorovatele apod.) byla analyzována technikami založenými na zakotvené teorii. Výzkum přinesl výsledky trojího typu. (1) Do hloubky byly popsány kategorie individuální a společné konstrukce poznatků včetně jejich dimenzí (míra učitelova vlivu na konstrukci, spolupráce žáků, formálního uchopení poznatku žákem). Vše je ilustrováno konkrétními příklady. (2) Z hlediska metodologického byly identifikovány některé meze akčního výzkumu a byla zdůrazněna potřeba klinického výukového experimentu. (3) Byly navrženy některé aplikace výzkumu ve školní praxi, která usiluje o konstruktivistické přístupy k vyučování matematice.

Klíčová slova: konstrukce matematických poznatků, Pythagorova věta, individuální konstrukce, společná konstrukce, konstruktivistické přístupy k vyučování matematice, kooperativní akční výzkum.

Title: Pupils' Construction of Knowledge in Mathematics (the Example of Pythagoras' Theorem)

Abstract: The thesis deals with the process of construction of mathematical knowledge of an individual and a group of pupils. At the outset, some concepts are discussed which belong to the theoretical background of our research (knowledge construction process and its mechanism, typology of mathematical knowledge, character of a mathematical structure, constructivist approaches to the teaching of mathematics, creative teaching, action research). Some results of selected local and foreign research focusing on constructivist approaches and action research in mathematics education are given. The methodology mainly consists of teaching experiments which can, to a certain extent, be seen as cycles of cooperative action research. The target group consists of pupils of lower secondary grammar school. The data gathered through traditional methods of qualitative research (participation observation, audio and videorecordings, pupils' artefacts, notes of an external observer, etc.) were analysed using the techniques of grounded theory. The research has generated results of three types: (1) The categories of individual and group constructions in mathematics have been described in depth including their dimensions (the measures of the teacher's influence on the construction, of the pupils' cooperation, of pupils' formal acceptance of knowledge); examples have been given. (2) In terms of methodology, some limitations of action research have been identified and a need for a clinical teaching experiment emphasised. (3) Some practical applications have been drawn in terms of the applicability of constructivist approaches in teaching.

Keywords: mathematical knowledge construction, Pythagoras' theorem, individual construction of knowledge, group construction of knowledge, constructivist approaches to the teaching of mathematics, cooperative action research.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Se zkoumáním konstrukcí poznatků žáky jsem se setkala již při zpracovávání své diplomové práce (Ťupová, 2001), ale také v předmětu didaktika matematiky ve 4. a 5. ročníku studia učitelství matematiky. V září 2002 jsem začala vyučovat matematice (němčině již o rok dříve) na osmi- a čtyřletém gymnáziu v Praze 10 v Hostivaři a od začátku se snažím ve výuce uplatňovat konstruktivistické přístupy k vyučování (viz odstavec 2.2). Učivo se snažím zpřístupňovat žákům tak, aby se co nejvíce mohla uplatnit jejich aktivita, přičemž důležitým prvkem vyučování je jejich motivace k aktivitě. Podstatné je, aby žáci byli motivováni k formulaci vlastních názorů, myšlenek a nápadů, ale také aby byli schopni oponovat, vytvořit protipříklad a diskutovat o dané problematice apod.

Začala jsem zjišťovat, že každé matematické téma je jinak „přístupné“ konstruktivistickému zpracování. Navíc je tento přístup velmi časově náročný jak na přípravu učitele, tak i na vlastní realizaci ve vyučovací hodině. Problematika přípravy je zde důležitá zejména proto, že ve vyučování matematice není možné žáky pouze směrovat či orientovat svým způsobem, ale je nutné jim dát prostor k seberealizaci a objevitelské činnosti. Žák si vytváří vlastní představy a buduje si vlastní poznatkovou strukturu (poznatky nejsou žákovi předkládány hotové jako u transmisivního přístupu k vyučování). Dochází u něj k procesům porozumění, vznikají představy, krystalizují pojmy. Učitel musí být tedy pečlivě připraven na dané matematické téma a musí být také schopen pohotově reagovat na projevy žáků.

Mé prvotní zkušenosti s uplatňováním konstruktivistických přístupů ve vyučování matematice mi přinesly množství otázek a problémů s nimi souvisejících, řadu z nich jsem pozorovala i ve své praxi. Šlo např. o problematiku motivace celé třídy a nejen jednotlivého žáka, navození klimatu objevování, organizace práce a efektivity jednotlivých forem práce v rámci konstruktivistických přístupů (individuální, skupinová práce, domácí práce, frontální výuka), volby vhodného učiva, volby vhodných úloh, pomocí kterých by si žák zkonstruoval poznatek, plánování výuky a skutečného průběhu hodiny, časové náročnosti těchto přístupů, role učitele při konstruktivistických přístupech (stupeň intervence, jak hodně žáky vést, jaký prostor jim dát…), navození aktivní diskuze mezi žáky (potlačení role učitele při konstrukci poznatků), volby vhodných jazykových prostředků učitele, hodnocení účinnosti konstruktivistických přístupů apod.

Jak je vidět z výše uvedeného, celá tato problematika je velmi zajímavá, avšak obsáhlá oblast didaktiky matematiky. Ve své dizertační práci jsem se nakonec zaměřila na *proces konstrukce matematických poznatků u jednotlivce a skupiny žáků*, jak jej zkoumat, hodnotit a rozvíjet, na proveditelnost a účinnost konstruktivistických přístupů k vyučování matematice a s tím spojený akční výzkum s cílem zlepšit své vyučování.

Má práce by měla přispět nejen k teoretickému popisu konstrukce matematických poznatků, ale také k praktické aplikaci této problematiky ve vyučování matematice a k vlastnímu porozumění myšlenkovým pochodům žáků v matematice do té míry, abych jim mohla účinně pomáhat na jejich cestě za matematickým poznáním.

Kromě úvodu se dizertační práce skládá z dalších čtyř kapitol. Druhá kapitola se zaměřuje na *teoretická východiska práce*, tedy na vymezení některých pojmů, které jsem využila ve své práci – poznávací proces, typologie matematických poznatků, mechanizmus poznávacího procesu (konstrukce poznatků), charakter matematické struktury, konstruktivistické přístupy k vyučování matematice, podnětná výuka a akční výzkum. Ve třetí kapitole jsem se zaměřila na *metodologii*. Nejprve jsem zformulovala výzkumné otázky. Protože se mé výukové experimenty týkaly tématu Pythagorova věta, uvedla jsem zde její didaktickou analýzu. Dále jsem popsala cílovou skupinu, výukový experiment, metody sběru dat a analýzu dat (metody založené na zakotvené teorii).

Jádro práce tvoří čtvrtá a pátá kapitola. Ve čtvrté kapitole jsou popsány *tři výukové experimenty*, v nichž jsem postupně zpřesňovala výzkumné otázky a využila rigoróznější metody analýzy získaných dat. Protože se jednalo o výukové experimenty týkající se stejného tématu a byly provedeny v mé výuce, bylo možné je popsat též jako cykly akčního výzkumu, na němž se kromě mě jako učitelky podílel ještě expert, tedy má školitelka: nejprve je vždy uveden plán experimentu, poté je popsána akce, provedena analýza a následná reflexe.

Závěry z mé výzkumné práce shrnuje pátá závěrečná kapitola. Závěry jsou rozděleny na část obsahovou, která charakterizuje jednotlivé typy konstrukcí poznatků žáky, část metodologickou a část praktických aplikací. Též jsou nastíněny možnosti dalšího výzkumu.

Práce je doplněna třinácti přílohami. Přílohy obsahují jednotlivé přípravy experimentů (příloha 1 a 3), tabulky se záznamem vyučovacích hodin (příloha 2, 4 a 13), tabulku s identifikovanými jevy první fáze otevřeného kódování (příloha 5), tabulku s analytickými kategoriemi druhé fáze otevřeného kódování (příloha 6), vzor pracovních listů pro experiment v cyklu C3 (příloha 8) a pracovní listy jednotlivých skupin v cyklu C3 (příloha 9 až 12). Příloha 7 obsahuje pro úplnost přehled dalších výukových experimentů.

Kapitola 2

Teoretická východiska práce

V této kapitole se zaměřím na teoretická východiska své práce. V odstavci 2.1 popíši jednotlivá stádia poznávacího procesu (procesu konstrukce poznatků). V odstavci 2.2 stručně charakterizuji konstruktivistické přístupy k vyučování matematice a moje poučení pro vlastní výuku a výzkum. V posledním odstavci 2.3 se věnuji problematice akčního výzkumu a tomu, jak souvisí s mým výzkumem.

2.1 Poznávací proces

2.1.1 Typologie matematických poznatků

Matematické poznání člověka obsahuje dvě rozsáhlé oblasti, které pokrývají převážnou část lidského intelektu – *obsah* a *schopnosti* (Hejný, 2004).

Obsah matematického poznání

M. Hejný (2004, s. 25) orientačně rozčleňuje soubor matematických poznatků do následujících čtyř skupin:

1. *objekty* jsou základní stavební kameny poznatkové struktury (např. kružnice, trojúhelník, kolmost, posunutí, číslo 5, celé číslo, zlomek, součet, dělitelnost, pořadí, rovnice, funkce, implikace),
2. *vztahy* vzájemně propojují dva nebo více objektů nebo vztahů, které autor dále dělí na
   a) *tvrzení* (2 + 3 = 5, Pythagorova věta, kritéria dělitelnosti číslem 3),
   b) *vzorce* ($S = a \cdot b$, $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$ atd.),
3. *postupy* představují širokou třídu poznatků; patří sem
   a) *algoritmy* a *návody* zaměřené na realizaci procedury nebo řešitelského kroku (návod na písemné násobení, návod na sestrojení rovnostranného trojúhelníku, návod na krácení zlomku atd.),
   b) *řešitelské strategie* zaměřené na nalezení řešení nestandardní matematické úlohy,
   c) *argumentace* zaměřené na hledání souvislostí jevů a vztahů atd.,

4. *schémata* jsou ucelené představy, které se ve vědomí člověka vytvářejí na základě mnohonásobně opakované zkušenosti a které jsou nositelem mnoha konkrétních poznatků, jež člověk dokáže ze schématu vyvodit (zná je nepřímo, např. ze schématu svého bytu dovede vyvodit počet oken v bytě, ze schématu krychle počet tělesových úhlopříček tělesa).

Autor zdůrazňuje, že se jedná o poznatky uložené ve vědomí konkrétního člověka, proto se mezi nimi mohou vyskytovat i poznatky nepřesné nebo zcela chybné.

Hranice jednotlivých souborů matematických poznatků jsou neostré, závisí na kontextu, zda bude daný poznatek zařazen mezi vztahy nebo postupy (např. kritérium dělitelnosti číslem 3 může žák chápat jako tvrzení, jestliže jej má dokázat, nebo jako návod, jestliže jej použije ke zjištění dělitelnosti konkrétního čísla číslem 3).

Důležitou roli hraje kvalita daného poznatku – míra jeho provázanosti na další poznatky a životní zkušenosti člověka. Provázanost matematických poznatků je spíše záležitostí celé oblasti matematického poznání než jeho jednotlivých prvků, proto je nutné při zkoumání konkrétního poznatku zkoumat jeho uložení v celé struktuře[1] (Hejný, 2004, s. 25).

Oblast matematických schopností

Do oblasti matematických schopností zařazuje M. Hejný (2004, s. 25) například experimentování, analyzování situace, objevování, argumentaci, hledání řešitelské strategie, formulování myšlenky atd. Téměř všechny tyto schopnosti přesahují oblast matematiky a jsou součástí komplexní kognitivní a intelektuální výbavy člověka.

M. Vágnerová (2001, s. 129, 133–135) chápe matematické schopnosti jako specifickou složku inteligence. Jedná se spíše o soubor dílčích schopností než o jednu obecnou matematickou inteligenci. Tvoří ji několik základních dílčích kompetencí:

1. *schopnost chápat čísla* – porozumění podstatě čísla, schopnost psát čísla a chápat jejich názvy v mluvené i psané řeči,
2. *paměť pro čísla* – specifická varianta paměti (krátkodobá i dlouhodobá), která umožňuje uchovávat číselné informace,
3. *matematické dovednosti* – např. zvládnutí základních aritmetických operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení),
4. *matematické uvažování* – specifický způsob myšlení, který se projevuje porozuměním podstatě slovních úloh, resp. abstraktních algebraických úkolů, které nejsou formulovány jen na úrovni čísel, a jejich řešení. Jde o jakousi matematickou abstrakci, generalizaci.

[1] M. Hejný (2004, s. 25–26) uvádí následující příklad. Když žák napíše $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{3}{8}$, je jasné, že zde nestačí zaměřit reedukační zásah na porozumění pravidlu pro sčítání zlomků, ale je nutno prověřit kvalitu představy žáka o kmenovém zlomku a o zlomku obecném.

2.1.2 Mechanizmus poznávacího procesu (konstrukce poznatků)

M. Hejný a F. Kuřina (2001, s. 103, 111) chápou učení jako „proces konstruování poznatkových struktur u jednotlivých žáků“. Tedy ne hotové matematické struktury, ale jejich hledání jsou základním rysem vyučování matematice. Cesta k matematice nevede shora, od hotové struktury. Cesta k matematice je cestou postupného konstruování matematického světa v mysli žáka. Popisem konstrukce matematických poznatků se zabývá řada teorií didaktiky matematiky. Jde např. o APOS teorii (Dubinsky, 1991), teorii proceptu (Gray, Tall, 1994), teorii reifikace (Sfard, 1991), teorii ‚abstrakce v kontextu‘ (Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus, 2001); bližší popis těchto teorií lze nalézt např. v knize (Stehlíková, 2004c). Pro interpretaci dat v mém výzkumu jsem vybrala tzv. teorii generických modelů, protože je v českém kontextu již zavedená a podle mého názoru poměrně univerzální. Proto se budu věnovat hlouběji jen této teorii.

Proces zrození a budování nového (matematického) poznatku je podle M. Hejného (2004, s. 27–29) rozčleněn do následujících hladin a dvou hladinových přechodů (zdvihů), které jsou jádrem poznávacího procesu:

1. *hladina motivace,*
2. *hladina izolovaných*[2] *modelů,*
3. *zobecnění,*
4. *hladina generických modelů,*
5. *abstrakční zdvih,*
6. *hladina krystalizace (strukturalizace),*
   hladina automatizace.

Nyní budou jednotlivé hladiny stručně charakterizovány.

1. *Hladina motivace*

Hladina motivace je hybným momentem celého poznávacího procesu. M. Hejný a F. Kuřina (2001, s. 105) chápou motivaci jako souhrn podnětů, důvodů k určitému jednání. Rozpor mezi „nevím“ a „chtěl bych vědět“ je tedy klíčovým motivem.

M. Hejný rozlišuje dva typy motivace[3] – tradiční a konstruktivistickou. Pomocí tradiční motivace zaměřujeme pozornost žáků na jistý jev. Pozitivem může být propojení na životní zkušenost žáka. Např. v případě Pythagorovy věty žákům vysvětlíme, že se naučí něco, co jim umožní vytyčit pravý úhel a dopočítat např. třetí stranu zahrady tvaru pravoúhlého trojúhelníka. Nebo že půjde o zajímavý poznatek, který Pythagoras objevil již před 2 500 lety. Tedy nastíníme např. praktický problém, který je řešitelný tím, co se budeme učit, ale který sám ke zmíněnému novému poznatku žádným způsobem nevede. V konstruktivistickém pojetí se však úloha stane motivací jen pro ty žáky, v jejichž vědomí vznikne tenze mezi „nevím“ a „chtěl bych znát“.

[2] Ve starší literatuře používá M. Hejný pojmy separované modely a univerzální modely. V novější literatuře (Hejný, 2007, s. 120) se již objevují pojmy izolované modely a generické modely. V této práci se budu držet novější terminologie.
[3] Z nepublikovaných přednášek M. Hejného.

U žáků, kteří čekají na učitelovo řešení úlohy, nelze o konstruktivistické motivaci mluvit, a to ani v případě, že se žák na výklad učitele těší. Konstruktivistická motivace není pouhá zvědavost, ale *investigativní zvídavost*[4]. Ta je aktivní, nečeká na učitelovo řešení úlohy (dokonce se mu vyhýbá a někdy jej odmítá), ale vede žáka k samostatnému řešení. V jazyce teorie generických modelů: úloha ukazuje řešiteli cestu k izolovaným modelům – vede žáka k činnosti jejich tvorby.

Konstruktivistická motivace je tedy podle M. Hejného charakterizována dvěma parametry:

1. ve vědomí žáka vyvolává tenzi investigativní zvídavosti,
2. poukazuje na cestu k izolovaným modelům.

2. *Izolované modely*

Hladina izolovaných modelů v sobě zahrnuje postupné nabývání zkušeností s konkrétními případy budoucího poznání. Izolované modely jsou reprezentanty obecného pojmu (např. izolovanými modely čísla 3 jsou 3 jablka, 3 knoflíky…). Růst lidského poznání se obvykle opírá o soubory těchto izolovaných modelů budoucího pojmu nebo poznatku. Různorodost a množství těchto modelů podporuje pevnější výsledné poznání dítěte. Zásadní roli v poznávacím procesu hraje také vzájemná vazba izolovaných modelů budoucího poznatku, protože bez ní nemůže být konstruován generický model[5] (Hejný, Kuřina, 2001, s. 106–107; Hejný, 2004, s. 28).

Znalost, která není opřena o žádný izolovaný model, o žádnou konkrétní představu, je obvykle silně *formální*. V tomto případě je pak nutné dobudovat chybějící představy (tedy izolované, popř. pak také generické modely).

M. Hejný (2004, s. 30) rozčleňuje hladinu izolovaných modelů do následujících podhladin:

1. první konkrétní zkušenost, první model, který je zárodkem budoucího poznání,
2. postupný příchod dalších a dalších izolovaných modelů,
3. poznání vzájemné souvislosti některých modelů, vytváření jejich shluků na základě tušených souvislostí (vzniká předtucha, že tyto modely jsou v jistém smyslu „stejné“),
4. hledání podstaty oné „stejnosti“, více či méně uvědomělé poznání jejich podstaty a vytváření komunit izolovaných modelů,
5. soubor izolovaných modelů je dále obohacován, i když ve vědomí člověka je již model generický, nebo dokonce poznatek.

3. *Zobecnění (1. zdvih)*

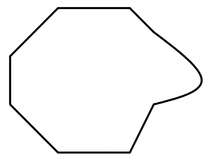
Izolované modely (dosud od sebe oddělené) začnou na sebe nejprve vzájemně poukazovat, různě se seskupovat a organizovat, až dojde k jejich strukturaci, k hlubšímu a operativnějšímu vhledu do dosavadního poznání. Jedná se často jen o krátký časový interval, v němž ve vědomí vznikne generický model (Hejný, 2004, s. 28). Proces objevování a objevení generického modelu

[4] Termín M. Hejného.

[5] Člověk, který má tuto vazbu u daného poznatku vytvořenou, dokáže k danému izolovanému modelu vytvořit paralelní model v jiné sémantické situaci (např. dokáže přenést situaci „kostky na stole“ do kontextu „auta na parkovišti“).

je *zobecněním*. Příkladem může být způsob, jakým si žáci postupně budují pojem mnohoúhelník. Již na prvním stupni se seznamují se čtverci, obdélníky a různými druhy trojúhelníků. Na druhém stupni pak zkoumají různé čtyřúhelníky a pravidelné i nepravidelné mnohoúhelníky a ze všech těchto izolovaných modelů se vytvoří generický model pojmu mnohoúhelník. K tvorbě generického modelu však přispívají i tzv. ne-modely, překvapivé a zdánlivé modely (Hejný, 2004, s. 28). *Zdánlivým modelem* je v našem případě útvar, který se zdá být mnohoúhelníkem, ale není jím (obr. 2.1). *Překvapivým modelem* je takový útvar, který je mnohoúhelníkem, ale žáci ho za něj často nepovažují (např. jím může být nekonvexní mnohoúhelník). *Ne-model* ilustruje komplement zkoumaného objektu, tedy vše, co není mnohoúhelník.

M. Hejný (2004, s. 32) chápe *objev*[6] jako náhlé uzření nové, obecnější nebo abstraktně vyšší skutečnosti. Objev je akt mentální konstrukce a je nejdůležitějším aktem procesu poznání vůbec. Přináší totiž do vědomí žáka něco podstatně nového a tím také zvyšuje hladinu motivace. Žák, který poznal radost z objevu, se bude pravděpodobně snažit tento prožitek opakovat.



Obr. 2.1

4. *Generický model*

Zatímco je hladina izolovaných modelů pojmu nebo poznatku hladinou hledání, je hladina generického modelu hladinou nalézání výsledků, společné podstaty komunity izolovaných modelů a jejich vzájemných souvislostí. Jakmile tedy vytvoří komunita izolovaných modelů strukturu, nazveme tento její strukturotvorný princip generickým modelem (Hejný, 2004, s. 31).

Generický model má obecnější charakter než libovolný izolovaný model. Izolovaný model má charakter ukázky, generický model představuje obecný návod, algoritmus, vzorec, graf apod. (Hejný, Kuřina, 2001, s. 108).

Generický model je podle M. Hejného (2004, s. 28) prototypem buď všech, nebo jisté skupiny izolovaných modelů, může zastupovat kterýkoli z izolovaných modelů této skupiny a působí ve skupině jako její organizační agent. Například použití prstů, popř. počítadla je generickým modelem pro počítání předmětů.

5. *Abstrakce a abstraktní poznání*

Abstrakční zdvih podněcuje zrod abstraktního poznání. Soubor izolovaných a generických modelů je restrukturován, a žák tak získá nový vhled, který má abstraktnější charakter (Hejný, 2004, s. 28). Abstraktní znalost je tedy již zbavena své závislosti na světě věcí a je často vyjádřena symbolickým záznamem, který novou strukturu reprezentuje – např. pomocí matematické symboliky.

Generický model a abstraktní poznání se liší tím, že generický model a izolované modely mají stejnou úroveň abstrakce, jsou ukotveny

[6] Vyučování matematice by mělo být podle M. Hejného a F. Kuřiny (2001, s. 113) lemováno objevy žáků. Samozřejmě tím nejsou míněny objevy nových matematických myšlenek, ale především toho, ‚jak to vlastně je?'. „Aha-efekt" zde hraje podstatnou roli.

v sémantickém světě, zatímco *abstraktní poznání* takové ukotvení nemá a je opřeno jen o jazyk a symboliku.

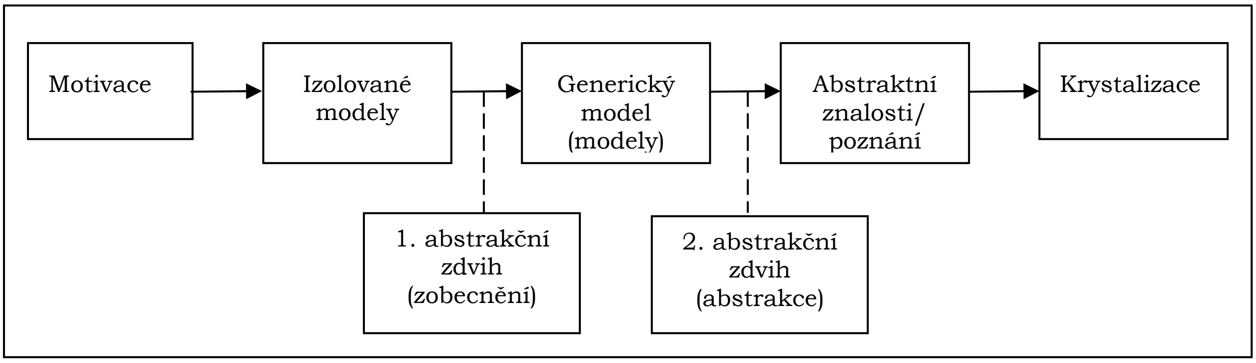
6. *Hladina krystalizace*

Na hladině krystalizace se nové poznání propojuje s předchozími vědomostmi – nejprve na úrovni modelů, potom na úrovni abstraktního poznání. Jedná se obvykle o dlouhodobý proces (Hejný, 2004, s. 29). Jde tedy o rozšiřování poznatku. Objevují se další izolované a generické modely a dochází k propojení nového poznatku na poznatky předchozí i nové.

Hladina automatizace

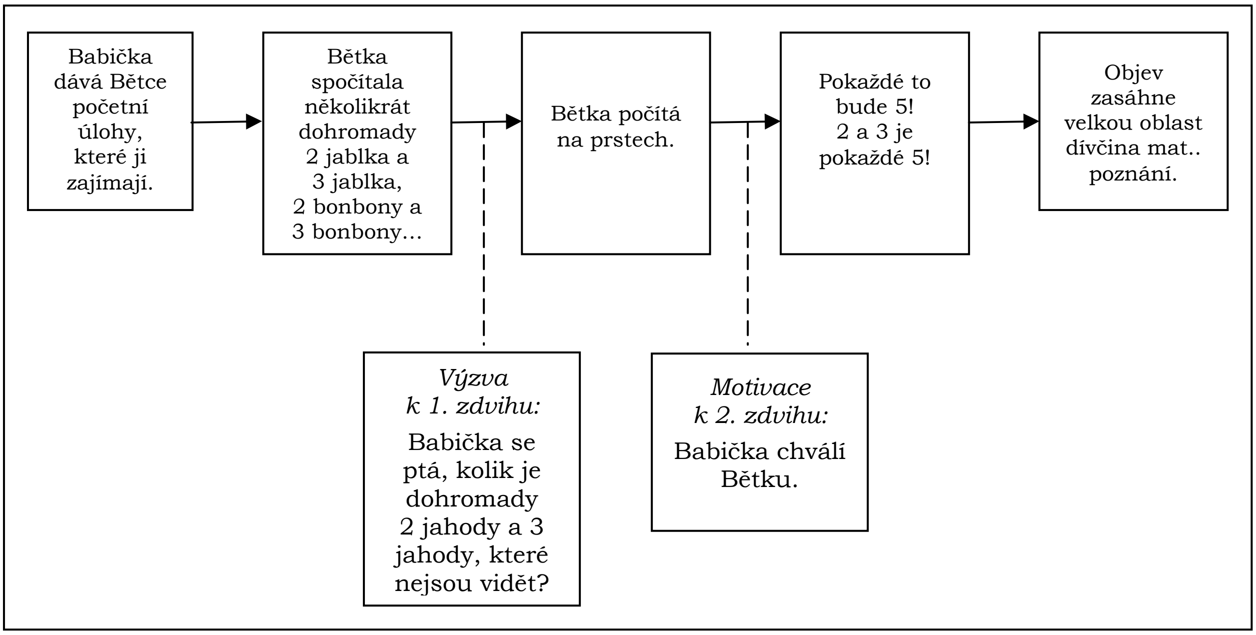
Hladina automatizace navazuje na předcházející proces, avšak nenáleží do poznávacího procesu, protože zde již nedochází k novému poznání, ale pouze k nácviku poznaného.

Celý poznávací proces je možné znázornit schematicky (viz obr. 2.2).



Obr. 2.2

Konkrétní příklad poznávacího procesu podle M. Hejného a F. Kuřiny (2001, s. 104) je ilustrován na obr. 2.3.



Obr. 2.3

Posloupnost hladin do jisté míry odpovídá časovému průběhu poznávacího procesu. Hranice mezi těmito hladinami jsou však neostré, jednotlivé hladiny se překrývají – neznamená to tedy, že po ukončení hladiny předchozí začíná tvorba hladiny následující. Nová zkušenost se většinou otiskuje do několika hladin najednou (pouze hladina motivace je aktivní v průběhu celého procesu).

Podle M. Hejného a F. Kuřiny (2001, s. 112–113) ne každý poznávací proces prochází všemi hladinami, každý poznávací proces však musí obsahovat hladinu izolovaných modelů a alespoň jeden zdvih. V matematice totiž podstatnou roli hrají objevy, náhlá uzření nové, obvykle obecnější nebo abstraktně vyšší skutečnosti.

Hladině modelů musí být ve vyučování matematice věnován dostatečný čas, aby nedocházelo k povrchnímu (*formálnímu*) poznání (např. mechanické používání vzorce $a^2 + b^2 = c^2$ při výpočtu délek stran v pravoúhlém trojúhelníku, viz odstavce 4.1.3 a 4.1.4). M. Hejný a F. Kuřina (2001, s. 121, 131) charakterizují formální znalost jako znalost, která postrádá oporu o separované (izolované) a univerzální (generické) modely a je uchována pouze pamětí. Formalizmus je chápán jako nemoc kognitivní struktury. Žák, který se sám pídí po tom, „jak to vlastně je“, nemocí formalizmu netrpí.

Proces konstrukce poznatků je již ze své podstaty neukončený. Otázkou je, kdy je možno považovat poznatek za „zkonstruovaný“. Můžeme např. očekávat, že se tak stane ve chvíli, kdy je připraven na takové úrovni, aby ho žák dokázal dobře využívat (tedy i v nestandarních úlohách). K tomu je potřeba tento poznatek konsolidovat (Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus, 2001), v jazyce teorie generických modelů musí tento poznatek krystalizovat. Protože jsem ve svých experimentech nesledovala vývoj konstrukce poznatku Pythagorova věta z dlouhodobého hlediska, budu zde konstrukcí poznatku myslet okamžik, kdy se poznatek poprvé objeví v mysli žáka. Je jasné, že o tom se pozorovatel dozví jen zprostředkovaně např. tím, že žák něco řekne, napíše, vyřeší úlohu apod.

Proces konstrukce poznatků byl popsán výše z hlediska kognitivního vývoje jedince, žáka. Učení však není individuálním procesem, k němuž dochází u jedince, ale je chápáno jako proces aktivní konstrukce znalostí žákem v interaktivním učebním prostředí (např. Steinbring, 2005, s. 62), kde do interakce vstupují žáci, učitel, učební látka a další proměnné. Tato myšlenka je také základem sociokognitivních teorií (Bertrand, 1998) a sociokulturních teorií vyučování, které se často opírají již o myšlenky Vygotského. L. Vygotský zdůrazňoval jednak roli kultury při učení a jednak roli interakce mezi jednotlivými jedinci (2004). Důležitý je jeho koncept *zóna nejbližšího vývoje*. Tuto zónu vymezuje jako vzdálenost mezi rovinou úrovně současného vývoje, která se měří schopností žáka řešit problémy *samostatně*, a rovinou úrovně vývoje měřené schopností žáka řešit problémy *s pomocí* někoho jiného (Bertrand, 1998, s. 134). Je zřejmé, že při konstrukci matematických poznatků žáky je důležité, do jaké míry je učitel schopen posoudit zónu nejbližšího vývoje každého žáka a přizpůsobit mu učební úkoly (a do jaké míry je to v podmínkách běžné školní třídy vůbec proveditelné).

2.1.3 Charakter matematické struktury

M. Hejný (2004, s. 26–27) uvádí dvě možnosti tvorby matematické struktury ve vědomí člověka. Jedná se o *kumulativní* a *genetický* způsob nabývání poznání.

Kumulativní model nabývání poznání

Kumulativní model nabývání poznání předpokládá, že se jednotlivé poznatky ukládají do našeho vědomí jako izolovaná fakta. Ta se později, když už jich je dostatek, spojí do nového celku, který představuje vyšší stupeň poznání. Po jistém čase se několik těchto celků spojí do ještě vyššího celku atd.

Učitel vyznávající kumulativní model nabývání poznání se zpravidla řídí následujícími zásadami (Hejný, 2004):

- do mysli žáka je nutno vložit co nejvíce konkrétních poznatků,
- musíme chránit žáka před nehotovými a chybnými představami; vše, co si bude pamatovat, musí být přesné a bezchybné,
- nesmíme připustit, aby poznatky, s nimiž žák pracuje, byly výsledkem jeho spekulací,
- matematiku je nutné žákovi prezentovat jako dokonalou a dobře založenou stavbu,
- žák může dostat k řešení pouze úlohy, které nepřesahují již probrané učivo.

Genetický způsob narůstání kognitivní struktury

Genetický model nabývání poznání předpokládá, že jednotlivé poznatky se tvoří jen postupně a v průběhu svého formování se navzájem propojují vazbami funkčnosti, časové následnosti, logické závislosti, důležitosti atd. Tímto způsobem vytvářejí strukturu, která se neustále variuje, dotváří a upravuje.

Genetický model vyzdvihuje neúspěšné cesty za poznáním, protože bez poznání, které přináší analýza chyb, nelze dojít k poznání pravdy. Velmi důležité jsou situace, kdy v důsledku zásadně nového pohledu na určitou oblast poznatků v ní dochází k *restrukturaci*[7]. Podle M. Hejného (2004) jsou restrukturace nezbytné pro zdravý vývoj kognice.

Učitel vyznávající genetický model nabývání poznání se zpravidla řídí následujícími zásadami:

- do mysli žáka je nutno také vložit co nejvíce konkrétních poznatků (izolovaných modelů),
- žák si vytváří i nehotové představy; struktura se tvoří postupně, pomocí zpřesňování poznatků a odstraňování chyb,
- vítáme práci s chybou jako důležitý mezník na cestě ke konstrukci poznatků,

[7] *Příklad restrukturace žákovských představ:* Jakmile žák pochopí ideu záporného čísla, stane se pro něj úloha 5 – 7 + 4 = řešitelná. Žák restrukturuje svoje dosavadní poznání pojmu „číslo“ a tato úloha se pro něj stane srozumitelnou. Dochází zde nejen k přidání nových poznatků, ale i k zásadní změně poznatků existujících. Změna se týká nejen pojmu číslo, ale i operací s číslem, tedy celé aritmetiky (Hejný, 2004, s. 27).

- poznatky, s nimiž žák pracuje, mohou být výsledkem jeho spekulací,
- matematiku žákovi neprezentujeme jako dokonalou a dobře založenou stavbu, ale jako stavbu, která se postupně buduje,
- žák může dostat k řešení také úlohy, které sice přesahují již probrané učivo, ale takové, které by byl schopen uchopit a měl by jistou představu, co s nimi má dělat.

2.2 Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice

P. Hartl a H. Hartlová (2000, s. 271) charakterizují konstruktivizmus v psychologických a sociálních vědách jako

> směr druhé poloviny 20. století, který zdůrazňuje aktivní úlohu člověka, význam jeho vnitřních předpokladů a důležitost jeho interakce s prostředím a společností.

Konstruktivizmus není jasně vymezenou teorií, ale skládá se z mnoha proudů, které dostávají různé přívlastky (např. radikální, sociální, didaktický) a neustále se vyvíjejí. Navíc nejde o teorii vyučování, ale o teorii učení. Podobně jako N. Stehlíková (2007, s. 15) věřím, že způsob projekce konstruktivizmu do vyučování je *vlastním konstruktem každého z nás*. Proto na závěr tohoto odstavce zformuluji své vlastní pojetí konstruktivistických přístupů k výuce. Nejdříve se však podíváme, jak jsou tyto přístupy chápány v české didaktické literatuře reprezentované zejména díly dvojice autorů M. Hejného a F. Kuřiny.

Pro konstruktivisticky pojaté vyučování matematice je podle M. Hejného a F. Kuřiny (2001, s. 162) charakteristické „aktivní vytváření části matematiky v duševním světě dítěte“. Podkladem pro takovou konstrukci může být otázka nebo problém ze světa přírody, techniky nebo matematiky samé. F. Kuřina (2002, s. 6) připouští, že konstruktivistické vyučování může obsahovat transmisi určitých partií nebo instrukci k řešení typických úloh.

Své pojetí shrnuli oba autoři do deseti zásad (Hejný, Kuřina, 2001, s. 160–162, kráceno):

- *Aktivita* (matematika je chápána především jako specifická lidská aktivita, ne tedy jako její výsledek).
- *Řešení úloh* (podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování).
- *Konstrukce poznatků* (poznatky je nutné budovat, jsou nepřenosné).
- *Zkušenosti* (vytváření poznatků je podmíněno zkušenostmi poznávajícího; zkušenosti si žák přináší z kontaktu s realitou svého života, avšak měl by mít také dostatek příležitostí nabývat zkušeností i ve škole, např. při experimentování, řešení úloh apod.).
- *Podnětné prostředí* (základem je prostředí podněcující tvořivost).

- *Sociální interakce ve třídě* (součástí konstrukce poznatků jsou diskuze, srovnávání výsledků, konstrukce příkladů a protipříkladů, argumentace …).
- *Reprezentace a strukturování matematických poznatků* (důležité je pěstování nejrůznějších druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa – třídění a hierarchizování dílčích zkušeností a poznatků, díky nimž vznikají obecnější a abstraktnější pojmy).
- *Komunikace* (pro konstrukci poznatků je důležitá komunikace učitel – žák, žák – žák, skupina žáků, učitel – skupina žáků, přičemž je důležitý jazyk matematiky, formulace domněnek a tvrzení, argumentace atd.).
- *Vzdělávací proces* (je zaměřený na minimálně tři hlediska, a sice porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky).
- *Zamezení formálního poznání* (vyučování, které má charakter předávání informací (vyučování transmisivní), nebo vyučování, které dává pouze návody, jak postupovat (vyučování instruktivní), vede především k ukládání informací do paměti – to umožňuje v lepším případě jejich následnou reprodukci a obvykle dochází k jejich rychlému zapomínání, popř. nevhodnému použití, není tedy opřeno o porozumění, ale o paměť; takové poznání je pseudopoznáním, poznáním formálním).

M. Hejný a F. Kuřina dále zdůrazňují, že zásadní roli hraje motivace, neboť bez motivace lze těžko očekávat od žáka či studenta aktivitu. Žák či student, „který nebude k učení motivován, si žádnou poznatkovou strukturu nevybuduje, ba on ji ani budovat nezačne, neboť k tomu je třeba jeho aktivita“ (2001, s. 105).

Podle konstruktivistického přesvědčení je tedy k nabytí poznání nutná intelektuální aktivita žáka. Důležitou roli také hraje žákova vnitřní motivace; úlohou učitele je tuto motivaci navozovat. Protože se výuka odehrává v kolektivu, působící faktory jsou jak sociální, tak psychologické i kognitivní. „Součinností všech faktorů je ve třídě vytvářeno jisté prostředí a cílem konstruktivisticky zaměřeného učitele je, aby toto prostředí bylo podnětné, aby povzbuzovalo zvídavost žáků, aby jim dopřálo pocit radosti z nového poznání i pocit sociální seberealizace“ (Stehlíková, 2004b, s. 16–17).

2.2.1 Mé chápání konstruktivistických přístupů k výuce (podnětné výuky)

Pro mé chápání konstruktivistických přístupů k vyučování matematice je důležitý důraz na a) motivaci žáka, b) aktivitu žáka. Ve vyučování matematice můžeme využívat vhodně volených a formulovaných otázek, problémů, paradoxů, záhad apod. Důležité je, aby žáci byli motivováni k formulaci vlastních názorů, myšlenek a nápadů, ale také aby byli schopni oponovat, vytvořit protipříklad a diskutovat o dané problematice. Podnětná výuka, jak ji chápu já, je taková výuka, která má následující charakteristiky:

- motivuje a aktivizuje žáky (k vlastnímu objevování, ke spolupráci apod.),

- klade důraz na aktivitu žáků,
- povzbuzuje zvídavost žáků,
- podněcuje tvořivost žáků, tvůrčí klima,
- dá možnost žákům použít při řešení úlohy různé strategie řešení,
- předkládá žákům dostatečné množství izolovaných modelů, aby se zamezilo formálnímu poznání,
- vede žáky k objevování, zdůvodňování a formulaci vlastních myšlenek, k ověřování správnosti, diskuzím, experimentování atd.

Ve výuce hrají klíčovou roli použité úlohy. Některé úlohy jsou pro podnětné vyučování vhodnější, jiné méně vhodné. Za úlohu vhodnou pro podnětné vyučování považuje D. Jirotková (2010, s. 231) takovou úlohu, která

1. je pro řešitele nestandardní – musí vyvinout intelektuální úsilí, aby ji vyřešil,
2. je k řešiteli vstřícná – je schopen úlohu uchopit a má jistou představu, co s ní má dělat,
3. má nastavitelnou obtížnost, kterou si případně může volit řešitel sám.

Podobně N. Stehlíková (2007, s. 20) uvádí, že podnětným prostředím může být problém, projekt nebo série úloh, které

> mají žáka motivovat k vlastnímu poznávání matematiky a jejich řešení má vést ke konstrukci nového matematického poznání. Může se jednat o problém z praxe, ale i o problém čistě matematický. K jeho řešení využívá žák své dosavadní poznatky a zkušenosti, ale může též vyhledávat v literatuře, v učebnicích, ptát se na radu apod.

N. Stehlíková však současně varuje, že nestačí mít k dispozici podnětné úlohy, musí se s nimi vhodně pracovat.

> Učitel [je] může svým způsobem použití znehodnotit (např. tím, že [je] rozdělí na řadu dílčích kroků), nebo naopak původně na první pohled nepodnětnou úlohu může využít podnětně.[8]

Podle N. Stehlíkové je tedy účelné odlišovat od sebe potenciál úlohy a realizaci tohoto potenciálu a studovat matematickou úlohu současně s kontextem jejího reálného použití (ibid, s. 21).

2.2.2 Poznámka o polaritách

Je zřejmé, že výše uvedená polaritní dělení (formální vs. neformální znalost, transmisivní vs. konstruktivistický přístup, kumulativní vs. genetický způsob narůstání kognitivní struktury) představují určitý ideální model a slouží ke stručnému popisu určité situace. V realitě se tyto póly těžko budou vyskytovat v čisté podobě, spíše bychom měli mluvit např. o míře transmisivnosti, tendenci ke konstruktivisticky vedené výuce apod.

[8] Příklady těchto využití úloh ve výuce je možné najít v (Stehlíková, 2007).

Pokud bude v následujícím textu použit termín konstruktivisticky vedená výuka nebo konstruktivistický přístup k vyučování, pak mám na mysli výuku vedenou v duchu mého přesvědčení uvedeného v odstavci 2.2.1.

2.3 Akční výzkum

Jak již bylo uvedeno v úvodu, jádrem této práce jsou tři výukové experimenty, kdy závěry plynoucí z předchozího experimentu ovlivnily organizaci, zaměření i hloubku analýzy dat následujícího experimentu. První dva experimenty jsem prováděla ve vlastní výuce, třetí experiment měl spíše charakter klinického experimentu. Můj výzkum tedy do značné míry odpovídá akčnímu výzkumu. Proto se mu v tomto odstavci budu věnovat podrobněji. V poslední části pak vyberu a popíši ty didakticko matematické výzkumy, které byly vedeny formou akčního výzkumu a mají souvislost s mou prací zejména proto, že se do větší či menší míry týkají konstruktivisticky vedeného vyučování. V následující metodologické kapitole se k problematice akčního výzkumu vrátím v odstavci 3.4, kde vymezím, které charakteristiky akčního výzkumu můj výzkum má a v čem se od něj odlišuje.

V odborné literatuře neexistuje jednotné vymezení pojmu *akční výzkum* (angl. *action research*, něm. *die Aktionsforschung*). Uvádí se však mnoho jeho charakteristik. Např. J. Průcha, E. Walterová a J. Mareš (1998, s. 19) vymezují akční výzkum jako

> druh pedagogického výzkumu, jehož účelem je přímo ovlivňovat či zlepšovat určitou část vzdělávací praxe. Akční výzkum zahrnuje intervenční strategie, navrhuje určitá doporučení a pokouší se je realizovat, průběžně sleduje efekty změn a vyvozuje z nich další postup.

Je tedy možné říci, že akční výzkum je chápán jako zásah do praxe, který přináší její zlepšení (Nezvalová, 2003). Učitel se snaží pochopit, vylepšit a zdokonalit svou výuku a obohatit své porozumění výuce (Raymond, Leinenbach, 2000).

D. M. Miller a G. J. Pine (1990, citováno v (Raymond, Leinenbach, 2000)) charakterizují tento druh výzkumu jako

> kontinuální proces systematického zkoumání, ve kterém učitelé zkoumají svou vlastní výuku a žákovo učení se pomocí popisu výuky, cílených diskuzí, sdílení zkušeností s kolegy a kritické reflexe za účelem zlepšování výuky ve třídě.[9]

Akční výzkum je také možné popsat jako systematickou reflexi profesních situací, která je prováděna učiteli, s cílem jejich dalšího rozvoje. Tato charakteristika zahrnuje podle T. Janíka (2004) dva důležité aspekty. Prvním aspektem je skutečnost, že je prováděna systematická reflexe profesních situací (čili zkoumání akce), a aspektem druhým je pokus o zlepšování těchto situací na základě jejich poznání (čili jednání, popř. akce). Akční

[9] “an ongoing process of systematic study in which teachers examine their own teaching and students’ learning through descriptive reporting, purposeful conversation, collegial sharing, and critical reflection for the purpose of improving classroom practice.”

výzkum je tedy formou sebereflexe, která zkvalitňuje porozumění pedagogické praxi. Učitel se účastní sledovaného jevu a tento jev se stává předmětem výzkumu. Takovýto druh výzkumu se zaměřuje, jak zdůrazňuje D. Nezvalová (2003), současně na žáka i učitele.

Podle D. Nezvalové (2003) je akční výzkum alternativou k *tradičnímu výzkumu*. Učitelé se zabývají problémy, se kterými se setkávají ve své každodenní činnosti při výuce. Sbírají informace, využívají svých zkušeností, reflektují praxi, sledují výsledky a navrhují řešení, která realizují při vlastní práci, což umožňuje hledat nové cesty vedoucí ke zlepšení dosavadní činnosti. Aktéři akčního výzkumu jsou současně účastníky zkoumaných procesů. Tradiční (akademický) výzkum realizují naopak většinou nezainteresovaní výzkumníci – akademici, kteří se snaží dosáhnout objektivity a následně ji zobecnit. Výzkumníci se osobně neúčastní studované situace.

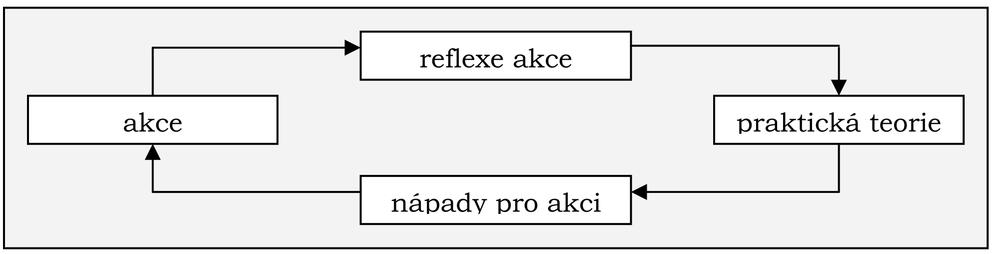
Akční výzkum přispívá k propojení teorie a praxe, a je tak nejen cestou k porozumění pedagogické situaci, ale také nástrojem, kterým lze tuto situaci dále rozvinout (Janík, 2004).

2.3.1 Fáze akčního výzkumu

Akční výzkum má charakter spíše cyklických intervencí než jednorázové intervence. Jak jsem již zmínila, akční výzkum umožňuje kontinuální sebereflexi, která je tvořena plánováním, činností, reflexí a opětovným plánováním. Jedná se tedy spíše o proces – ne pouze o jeden zásah ([B]).

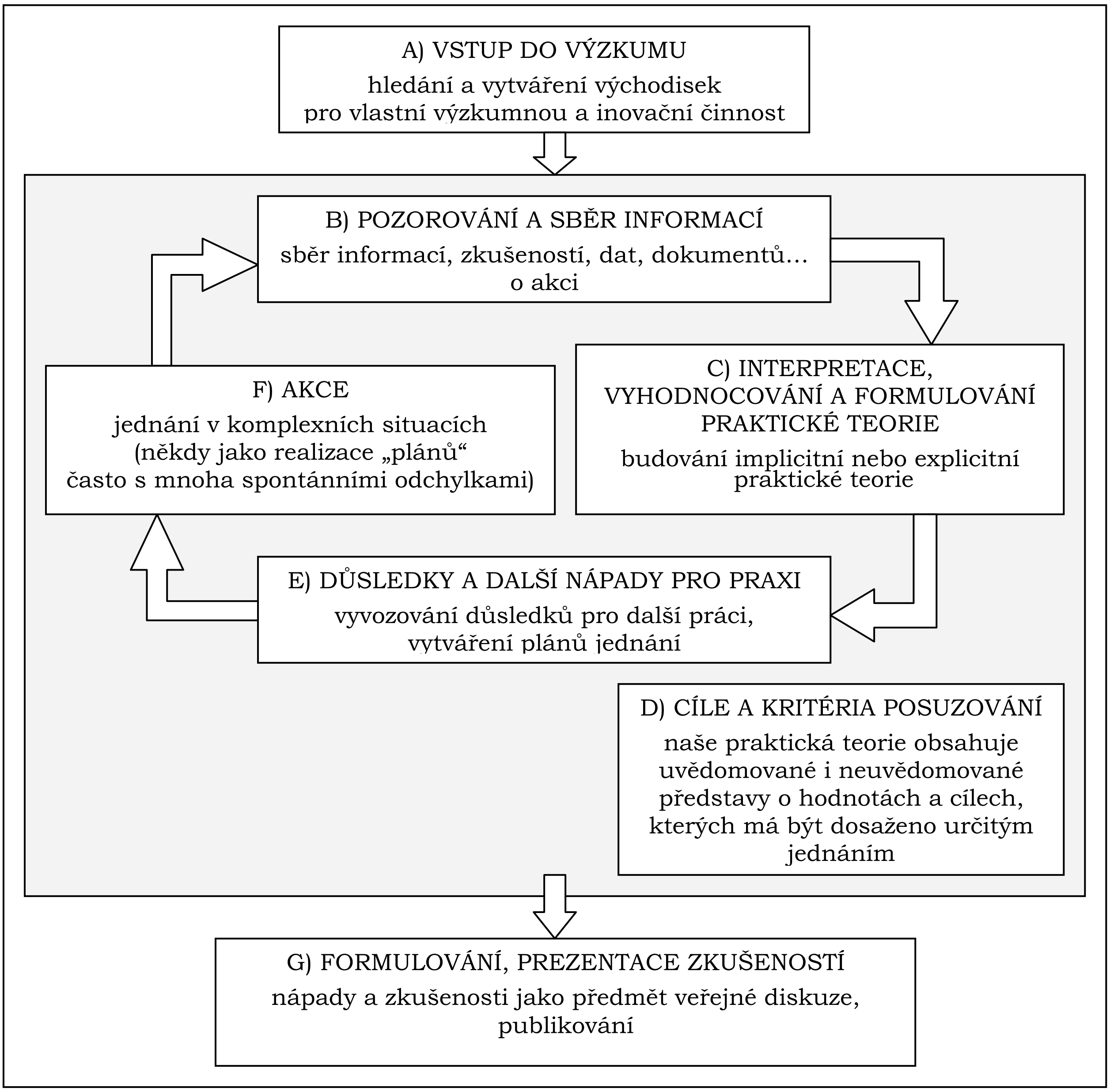
Mezi základní fáze (prvky) akčního výzkumu patří podle D. Nezvalové ([A]) akce, reflexe a revize. Cyklus akčního výzkumu je v jeho průběhu provázen otázkami jako např.: Co dělám? Proč to dělám? Jak to dělám? Jak to mohu udělat jinak? Co žáci skutečně dělají? Co se učí? Jak je to důležité? Co teď zamýšlím dělat? Podobně J. Mason (2002) uvádí následující cyklický sled, kterým charakterizuje jednotlivé fáze výzkumu: analýza, plán, akce, hodnocení, analýza, plán, …

Podle T. Janíka (2004) vystihují podstatu akčního výzkumu dvě slova, která jsou v tomto pojmu obsažena – výzkum a akce (nebo jinak řečeno reflexe a jednání). Jedná se o dvě fáze akčního výzkumu – v první fázi získává učitel poznatky o problému (výzkum), v druhé fázi uplatňuje řešení problému (akce), ke kterému na základě svého výzkumu došel. Tyto dvě fáze se opakují v gradujícím cyklu. V následujícím schématu (obr. 2.4) popisuje T. Janík (2004), inspirován J. Elliottem (1981), jednotlivé fáze přehledněji. Akční výzkum vychází vždy z akce, která je následně reflektována. Na základě reflexe je vytvořena praktická teorie, ze které jsou odvozeny nápady pro akci, a ty se poté uskutečňují opět v akci. Dochází tak k cyklu akce a reflexe, který praxi rozvíjí, zlepšuje, inovuje.



Obr. 2.4

H. Altrichter a P. Posch (1990, s. 22, citováno v (Janík, 2004, s. 58–59)) rozpracovali podrobněji Elliottovo schéma cyklu akce a reflexe. Proces akčního výzkumu (obr. 2.5) je zahájen hledáním východisek výzkumu (A), kdy si klademe a zodpovídáme otázky (např.: Co chci zkoumat? Má to smysl zkoumat? Jaká je šance na úspěch?). Po vyjasnění těchto otázek si vytváříme o zkoumaném jevu určitou představu (jak to funguje) – praktickou teorii, a to na základě sběru dat metodou pozorování, rozhovorů apod. (B) a na základě analýzy a interpretace těchto dat (C). V této fázi uplatníme svůj vlastní hodnotový systém (D) – naše představy, očekávání, předsudky atd. Poté se pokoušíme vytvořit strategie a plány svého jednání (E), které následně aplikujeme (F). V případě, že bychom chtěli své zkušenosti zpřístupnit pro kolegy nebo širší veřejnost, můžeme je zpracovat např. formou případových studií a publikovat (G).



Obr. 2.5

2.3.2 Typy akčního výzkumu

Akční výzkum můžeme klasifikovat ze dvou pohledů. První se liší sledem jednotlivých fází a druhá rozlišuje absenci a účast akademického výzkumníka.

Podle sledu fází rozděluje D. Nezvalová (2003) s odvoláním na R. A. Schmucka (1997) dva typy akčního výzkumu:

1. pro-aktivní (též aktivní)
2. reaktivní

Pro-aktivní akční výzkum je popisován jako výzkum, kdy akce (jednání) předchází sběru a analýze informací (reflexe). Učitel nejprve vyvíjí aktivity a teprve potom studuje výsledné efekty. Tento typ akčního výzkumu inspiruje učitele k zavádění nových přístupů do vyučování. Inspirace může vycházet z jeho minulé zkušenosti, zkušenosti kolegů nebo žáků.

Pro-aktivní akční výzkum zahrnuje následující kroky:

- pokusit se o nové přístupy, které by přinesly lepší výsledky,
- vidět v nových přístupech naději, mít vysoká očekávání,
- pravidelně sbírat informace a shromažďovat reakce žáků na realizované změny,
- vyhodnocovat získané informace,
- vzít v úvahu alternativní přístupy,
- pokusit se o další nové přístupy.

Reaktivní akční výzkum je takový výzkum, kdy učitel sbírá informace (reflexe) předtím, než se pokusí inovovat praxi (akce). Jeho aktivity vycházejí z předpokladu, že každá pedagogická situace je unikátní a že profesionální odpovědnost vyžaduje nejprve pochopit danou pedagogickou situaci a teprve potom zvolit odpovídající jednání. Tento typ akčního výzkumu je charakterizován následujícími stádii:

- sbírat informace k diagnóze situace,
- vyhodnocovat informace,
- distribuovat výsledky a vymezit změny, které budou následovat,
- pokusit se o nové přístupy,
- sledovat reakce ostatních,
- sbírat informace k diagnóze situace (návrat k prvnímu kroku, tento druhý sběr informací však ověřuje předchozí kroky a formuluje specifické otázky).

Uvedené rozdělení sice přehledně odlišuje dvě základní fáze akčního výzkumu, ovšem T. Janík (2004) se domnívá, že pro akční výzkum je podstatné to, že vychází z určité situace (akce), a je tedy vždy pro-aktivní a reaktivní současně.

Z druhého pohledu můžeme akční výzkum dělit do dvou skupin:

1. individuální (výzkum, který provádí učitel jako výzkumník)
2. kooperativní (výzkum prováděný ve spolupráci s akademickými výzkumníky)

Pro *individuální akční výzkum* je charakteristické, že se na výzkumu podílí učitel, který je zároveň výzkumníkem v jedné osobě. V případě, že učitel z praxe realizuje výzkum ve spolupráci s akademickým pracovníkem, jedná se o *kooperativní akční výzkum*. Univerzitní učitel může působit v roli poradce, má možnost sledovat aplikaci teoretických poznatků v praxi, chápat potřeby praxe a podle toho orientovat své teoretické výzkumy. Spolupráce vysokoškolských učitelů s učiteli z praxe, kteří realizují akční výzkum, vytváří propojení mezi teorií a praxí (Nezvalová, 2003).

Odborníci diskutují, do jaké míry je akční výzkum (zejména ten individuální) „skutečný" výzkum, který přispívá k rozvoji daného oboru. Např. Ch. Breen (2003) staví individuální akční výzkum na úroveň výzkumu akademického – dochází tedy k závěru, že výzkum učitele výzkumníka odpovídá legitimní formě výzkumu. Názory na tuto problematiku se však různí a vždy je třeba vzít v úvahu závěry konkrétního výzkumu a posoudit jejich širší platnost.

2.3.3 Akční výzkum v didaktice matematiky

Problematikou akčního výzkumu se v didaktice matematiky zabývá řada autorů – především zahraničních. V tomto odstavci představím vybrané výzkumy v didaktice matematiky u nás a v zahraničí a zaměřím se na to, jaké výzkumné otázky řeší a jak přispívají k rozvoji didaktiky matematiky. Ve všech případech se jedná o výzkumy, které se více či méně týkají konstruktivisticky vedené výuky.

Česká republika

V České republice se akčnímu výzkumu v didaktice matematiky věnuje několik autorů. Jedná se např. o práci N. Stehlíkové, která sledovala formou akčního výzkumu vlastní výuku v odborném matematickém kurzu *Geometrické transformace – analytická metoda* vedeném v „objevitelském" duchu (Stehlíková, 2004a). Jedním z praktických výsledků akčního výzkumu byly změny způsobu vedení přednášek tak, aby vyhovoval stanoveným cílům a reflektoval výsledky reflexe dosavadní výuky.

Podobně D. Jirotková a J. Kratochvílová (2004) popisuji výzkum v rámci vlastní výuky dvou kurzů *Geometrie* v oboru učitelství pro 1. stupeň základní školy a *Geometrie* v oboru učitelství na speciálních školách. Autorky vedly semináře vždy ve dvou paralelních skupinách, společně každý seminář připravovaly, hodnotily, reflektovaly, evidovaly atd. V následujícm roce pozměnily způsob práce. Program kurzu prodiskutovaly jen rámcově s cílem co nejméně se vzájemně ovlivňovat a teprve na konci kurzu porovnaly své výsledky výzkumu. Obě autorky vedly výuku formou experimentování, během kterého studenti konstruovali jednotlivé poznatky bez pomoci učitele. Učitelky ve výuce pouze formulovaly úlohy a směrovaly řešení studentů výzvami. Autorky podrobně popisují akci, tedy vlastní výuku, z mnoha hledisek (např. z hlediska práce s chybou, organizace diskuzí mezi studenty, individuálního tempa výuky). Tento popis přináší nejen vhled do procesu konstrukce poznatků studenty, ale též ukazuje jednu z možných cest, jak realizovat konstruktivisticky vedenou výuku a jak prostřednictvím akčního výzkumu zkoumat svou vlastní výuku a meze a přínosy konstruktivisticky vedené výuky.

Dalšími autorkami věnujícími se akčnímu výzkumu jsou A. Hošpesová a M. Tichá, které v rámci mezinárodního projektu programu Sokrates-Comenius *Understanding of mathematics classroom culture in different countries*[10] vedly vyučovací experimenty s učitelkami 1. stupně základní školy týkající se propedeutiky pojmu zlomek (Hošpesová, Tichá, 2003, 2007; Tichá, Macháčková, Hošpesová, 2005). Cílem experimentů bylo aktualizovat potřebné dětské zkušenosti a vytvořit podnětnou situaci pro rozvíjení uchopování vztahů celek – část a pro rozvíjení dovednosti rozdělovat na stejné části. Velkou roli zde také hrálo aktivní objevování nových poznatků a s tím související použití různých strategií žákovských řešení úloh. Tento kooperativní akční výzkum zdůrazňoval význam systematické sebereflexe a kolektivní reflexe (možnosti diskutovat o své práci s ostatními účastníky experimentu, popř. kolegy). Autorky uvádějí, že možnost spolupráce v mezinárodním týmu umožňuje kolektivní reflexi nejen učitelů z jedné školy, příp. z různých škol, ale dokonce reflexi učitelů z různých zemí. Je zde také zmiňována pozitivní zkušenost s poznáváním jiných tradic vzdělávání vycházejících z jednotlivých kultur. Jedním z přínosů jejich výzkumu je popis profesního i osobnostního rozvoje učitelek, s nimiž v rámci kooperativního výzkumu autorky spolupracovaly.

K akčnímu výzkumu na vysoké škole se řadí také práce J. Kratochvílové (2004), v níž zkoumala svou výuku didaktiky matematiky a proces vedení pedagogické praxe studentů v rámci vyučování matematice na 1. stupni základní školy. Jejím cílem bylo popsat a podrobněji analyzovat jednu konkrétní zkušenost, kterou autorka v roli „experta“[11] získala s mladou učitelkou 1. stupně základní školy, a přispět tak k hledání způsobů, jak ovlivňovat pedagogické přesvědčení učitelů. Důležitým zjištěním pro autorku bylo, že tato forma práce alespoň částečně změnila přístup k vyučování zmíněné učitelky, ale také sama autorka získala z jejich spolupráce mnoho zkušeností.

Další autorkou zabývající se problematikou akčního výzkumu je J. Hanušová, která ve své dizertační práci *Cesty učitele ke konstruktivistickým přístupům* (2007) zkoumala vlastní výuku na víceletém gymnáziu. Věnovala se didaktickému problému, který formuluje otázkou „Jak účinně bojovat proti formálním znalostem žáků v matematice?“. Popisuje, jak se postupně vyvíjelo a přetvářelo její učitelské přesvědčení od mateřské školy až do současnosti a co výrazněji ovlivnilo vývoj jejího učitelského pojetí (sebereflexe tedy tvoří důležitou součást její práce). Autorka je přesvědčená o tom, že objevitelská činnost žáků při hodinách matematiky přináší žákům kvalitnější poznání, proto se nabízí jako nástroj v boji proti formálním znalostem. Provedená forma akčního výzkumu byla obohacující nejen pro samu autorku práce, která se ve své praxi posunula blíže ke konstruktivistickým přístupům[12] k vyučování

[10] *Porozumění kultuře matematického vzdělávání a vyučování matematice v různých zemích.*

[11] Zde učitele budoucích učitelů.

[12] Autorka však zjistila také jisté omezení konstruktivistických přístupů. Různorodost řešitelských strategií svědčí o autonomii práce jednotlivých žáků, ale pro učitele vyvstává náročný úkol – zorganizovat další postup výuky pro celou třídu a přitom zohledňovat

matematice, ale je také přínosem pro didaktiku matematiky; i do běžné praxe je možné začlenit akční výzkum a alespoň některé principy konstruktivistické výuky, a změnit tak způsob výuky (metody práce) učitelů.

Výzkum (Kubínová, Stehlíková, 2007) se zaměřuje na problematiku funkčního myšlení žáků na 2. stupni základní školy, resp. v odpovídajících ročnících víceletého gymnázia a na střední škole. Obě autorky vedly v rámci mezinárodního projektu Socrates-Comenius IIATM (*Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics*[13]) akční výzkum učitelů z praxe.[14] Učitelé společně s autorkami připravili, rozpracovali a využili ve vlastní výuce úlohy, které byly podle jejich názoru vhodné pro rozvoj funkčního myšlení žáků. Následně pak provedené výukové experimenty společně analyzovali. Analýzy ukázaly potenciál navržených úloh a vedly k jejich upřesnění. Kooperativní způsob práce vedl také k rozvoji zkušeností spolupracujících učitelů a k ovlivnění jejich výukových strategií.

Zahraničí

Mezi zahraniční autory, kteří se věnují problematice akčního výzkumu, patří např. H. Steinbring (2002), který představuje výzkum provedený s budoucími učiteli (v rámci didaktiky matematiky na univerzitě) a s učiteli z praxe[15] (1. a 3. ročníku základní školy). Autor sice nemluví o konstruktivsticky vedené výuce, ale zdůrazňuje, že vyučování matematice není proces předávání hotových poznatků, ale že jeho základ tvoří vlastní aktivity a konstrukce poznatků žáky. Z tohoto hlediska je podle něj stále více zřejmé, že by tyto aktivity měly být detailněji reflektovány – a to jak žákem (samostatně nebo kolektivní reflexí s učitelem), tak také učitelem samotným (v rámci akčního výzkumu). Toto vzájemné doplňování se aktivity a reflexe hraje totiž ve vyučování matematice stále důležitější roli. V přípravě budoucích učitelů by se měly podle H. Steinbringa vyskytovat následující činnosti: a) vlastní učení matematiky a odborných didaktických znalostí, b) pozorování a analýza učebních procesů a procesů porozumění žáků, c) vlastní vyučování matematice (např. v rámci pedagogické praxe). Autor zároveň zdůrazňuje již zmíněné nezbytně nutné kolektivní reflexe těchto činností.

Práce P. Scherer, E. Söbbeke a H. Steinbringa (2004) je také věnována problematice kooperativní přípravy výuky a reflexe výuky. Hlavními aspekty společné přípravy vyučování jsou mj. odborné základy učitele, analýza důležitých předpokladů žáků, analýza žákovských prací, resp. zvláštních obtíží a osobní dokumentace výuky, které umožňují zrealizovat kooperativní analýzu a reflexi výuky. Na základě svých výzkumů připravili autoři doporučení pro kooperativní akční výzkum, kdy těžištěm společné analýzy a reflexe výukové činnosti je detailní analýza orientující se na jednu ze čtyř

různé pracovní tempo a rozdílné učební styly jednotlivých žáků. Jednou z možností, jak obejít tyto problémy, je podle J. Hanušové např. příprava rozdílných úkolů pro žáky podle stupně zvládnutí činnosti v úvodní hodině.

[13] *Zavedení inovativních přístupů do vyučování matematice*

[14] Podobně s jinou skupinou učitelů pracovali M. Hejný a D. Jirotková v oblasti geometrie (Hejný, Jirotková, 2007).

[15] V rámci projektu Comenius Action 3.1.

hlavních perspektiv:[16] analýza chápání žáků pozorovaného v interakci, analýza intencí/postupů vyučujícího během dění ve výuce, analýza interakcí mezi žáky a vyučujícím a analýza pozorovaných vlastních výukových činností vyučujícího. Tato doporučení by se podle autorů měla stát praktickým nástrojem pro reflexi učitele, a sloužit tak k dalšímu profesionálnímu rozvoji jeho práce.

Další zahraniční prací z oblasti akčního výzkumu je výzkum dvojice K. Crawfordové a J. Adlerové (1996), které na příkladu z Austrálie a Jižní Afriky dokládají změny ve smyslu zavádění nových progresivních forem učení a ukazují, jak je důležitá aktivní účast učitelů ve výzkumných aktivitách spojených s jejich profesionální praxí. Autorky upozorňují na to, že je věnována malá pozornost získávání zkušeností, díky kterým by se učitelé mohli vyvíjet ve své profesionální praxi. Učitelé totiž využívají své praktické zkušenosti a učí stejným způsobem, jakým byli oni sami ve škole učeni. Autorky konstatují, že je důležitý aktivní postoj učitelů a dostatek příležitostí k získávání právě těchto praktických zkušeností, např. formou akčního výzkumu. Podobně G. Hatch a Ch. Shiu (1998) poukazují na to, že je důležité, aby se učitel stal přímým účastníkem výzkumného procesu, čímž přispívá nejen k rozvoji znalostí vlastní praxe, ale také k rozvoji obecných vědeckých poznatků.

T. G. Edwards a S. M. Hensien (1999) popisují svůj tříletý kooperativní akční výzkum. Jedná se o výzkum mezi učitelkou matematiky na základní škole a učitelem budoucích učitelů. Výzkum je zaměřen na snahy učitelky změnit svou vzdělávací praxi ve smyslu radikálního odklonu od tradičního vyučování matematice. V procesu její změny hrály klíčovou roli pravidelné sebereflexe své vlastní praxe a přesvědčení. S. M. Hensien zdůrazňuje výhody kooperativní formy práce a připodobňuje ji k existenci mnoha cest, kterými se můžeme ubírat, abychom dosáhli stejného cíle. Čím více lidí se k takovému úkolu připojí, tím se stane poznání bohatší; pohled z odlišné perspektivy totiž často umožní všimnout si věcí, které by jinak zůstaly neodhaleny.

A. M. Raymondová a M. Leinenbachová (2000) zachycují příběh proměny učitelky matematiky na střední škole v USA (6.–8. ročník, tj. žáci 11–13 let) od přístupu tradičního, opírajícího se o učebnici, k přístupu inovativnímu (manipulativnímu[17]) v oblasti výuky algebry (konkrétně rovnic). Učitelka díky tomuto kooperativnímu akčnímu výzkumu (ve spolupráci s univerzitní vyučující) došla ke zjištění, že se žáci nejvíce naučí, když se můžou matematiky „dotýkat“ a manipulovat s objekty. Je přesvědčená, že aktivní účast a neustálá reflexe ze strany žáků je nezbytná pro porozumění matematice. Tato zkušenost nejen přivedla učitelku ke změně jejího pedagogického přesvědčení, ale poskytla jí tím také příležitost k profesionálnímu růstu. Jak tedy autorky ve svém článku uvádějí, akční výzkum je vhodným prostředkem pro rozvoj učitele.

[16] Tyto čtyři hlavní perspektivy nelze podle autorů od sebe ostře oddělit, protože se částečně překrývají. Autoři však doporučují orientovat se při společné analýze pokud možno pouze na jednu z těchto perspektiv.

[17] *Hands-On Equations: Making Algebra Child's Play* autora H. Borensona.

2.4 Závěr kapitoly

V kapitole 2 jsem se zaměřila na vymezení některých pojmů, které jsou důležité pro tuto práci. Popsala jsem problematiku poznávacího procesu a mechanizmu, jak si žák konstruuje poznatky, včetně typologie matematických poznatků. Stručně jsem se dotkla charakteru matematické struktury a také jsem se zaměřila na konstruktivistické přístupy k vyučování matematice, podnětnou výuku a akční výzkum.

Následující kapitola bude věnována metodologii a didaktické analýze Pythagorovy věty, která je pro tuto práci stěžejní.

Kapitola 3

Metodologie

Předkládaný výzkum je svou povahou výzkumem kvalitativním, který je příležitostí pro hluboké poznání a jemnou analýzu konkrétního prostředí (Gavora, 2000). V této kapitole se zaměřím na stanovení cíle výzkumu a formulaci výzkumných otázek, volbu matematického obsahu, na němž bude poznávací proces žáků zkoumán, volbu metod sběru dat, charakteristiku účastníků výzkumu a teoreticky i prakticky na příkladech z vlastní práce popíši zvolenou hlavní metodu analýzy dat – metodu zakotvené teorie.

3.1 Počáteční formulace výzkumných otázek

Osobní poznámka: Do doktorského studia jsem nastoupila již jako učitelka osmiletého gymnázia na plný úvazek. Přirozeně jsem se tedy rozhodla zkoumat svou vlastní praxi s cílem zlepšit své vyučování, dozvědět se podrobněji, jakým způsobem vznikají v mysli mých žáků matematické poznatky, a konečně zkoumat proveditelnost a účinnost konstruktivistických přístupů k vyučování matematice.

Na začátku jsem si stanovila tyto výzkumné otázky:

- Jak si žáci konstruují matematické poznatky?
- Lze odlišit individuální konstrukce poznatků a konstrukce, na nichž se podílí více žáků skupiny?
- Jak lze charakterizovat společnou konstrukci[18] poznatků?
- Jakou roli hraje v celém procesu učitel a výběr učebních úloh?

Na začátku doktorského studia jsem provedla několik výukových experimentů na ta témata, která jsem právě se žáky probírala. Tyto počáteční pokusy ještě nedosahovaly požadované odborné úrovně, i když je považuji za důležité, neboť jsem tak získávala zkušenosti s výzkumnou prací v didaktice matematice. Postupně jsem se zaměřila na jeden matematický obsah, a sice Pythagorovu větu, která se stala nástrojem mého výzkumu ve třech cyklech výukových experimentů. Proto právě problematiku Pythagorovy věty rozeberu podrobněji z didaktického hlediska.

[18] Spíše bychom měli mluvit o konstruování, protože nám jde o proces konstrukce spíše než její výsledek. Nicméně v práci budu pro stručnost vyjádření používat slovo konstrukce.

3.2 Didaktická analýza Pythagorovy věty

Pythagorova věta patří mezi důležitá témata školské matematiky. Má hodně aplikací v matematice i v běžném životě a v matematice základní školy. Je unikátní tím, že „kombinuje geometrické a algebraické uvažování, vyžaduje hodně předchozích znalostí [...] plus metakognitivní porozumění (co je matematická věta? Proč se musí dokazovat? Kdy ji lze obrátit?)“[19] (Klieme, Pauli, Reusser, 2009). Pro většinu lidí je právě tato věta symbolem toho, co se naučili v matematice na základní škole. Často se poukazuje na význam Pythagorovy věty v historii matematiky a na okolnosti jejího objevu. (Pro úplnost je stručný popis uveden v poznámce pod čarou,[20] hlubší analýzy nejsou předmětem této práce.)

3.2.1 Znění Pythagorovy věty a její důkaz

Pythagorova věta popisuje vztah, který platí mezi délkami stran v libovolném pravoúhlém trojúhelníku. Geometrický význam Pythagorovy věty zní:

> V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami.

V algebraickém tvaru je její znění:

> V pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami délek a, b a přeponou délky c platí $a^2 + b^2 = c^2$.[21]

Vedle Pythagorovy věty existuje také věta k ní obrácená, která zní:

> Jestliže v trojúhelníku platí, že součet druhých mocnin délek dvou kratších stran je roven druhé mocnině délky nejdelší strany, potom je tento trojúhelník pravoúhlý.

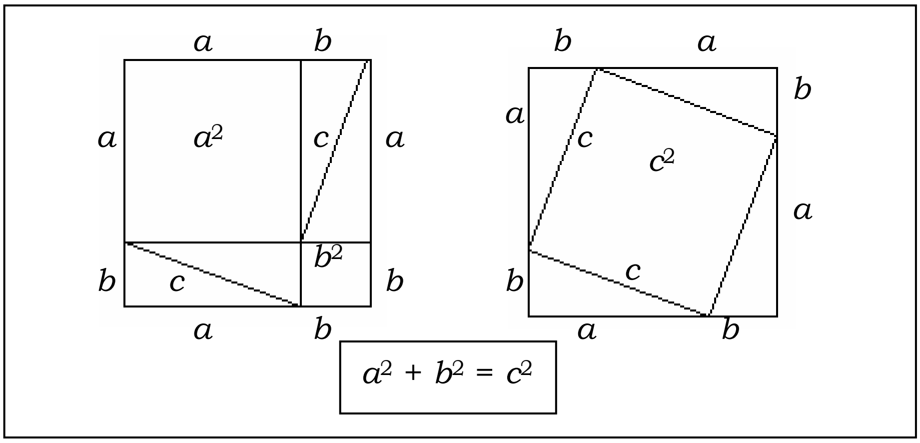
Pythagorova věta fascinuje matematiky i laiky již tisíciletí. O tom svědčí i celá řada jejích existujících důkazů. Např. v knize Loomis (1968) je údajně uvedeno 365 různých důkazů. Mnoho z nich najdeme i běžně na internetu. Zde uvedeme jen jeden, kterým je grafický důkaz často uváděný v českých učebnicích matematiky (viz obr. 3.1).

---

[19] “it combines geometric with algebraic reasoning, requires a set of specific prerequisites [...] plus some meta-mathematical understanding (what is a mathematical theorem? Why does it have to be proven? When can it be reversed?)”

[20] *Stručná historie* (např. Baumgart et al., 2004): Pythagorova věta byla pojmenována podle řeckého filozofa, vědce a politika Pythagora ze Samu (asi 580 až 500 př. n. l.); který ji v 6. století př. n. l. objevil pro Evropu, resp. starověké Řecko a je možné, že ji jako první dokázal (i když o tom se dosud vedou spory). Věta však byla zřejmě známa už více než 1000 let před Pythagorem v Babylonii a Egyptě. Již před více než 4 000 lety používali tzv. napínači lan na vyměřování pozemků a základů různých staveb tzv. měřičský provazec – jednoduchou pomůcku k vytyčení pravého úhlu. Na provaze uvázali 13 uzlů stejně vzdálených od sebe. První uzel spojili s třináctým a provaz napnuli do trojúhelníku se stranami 3, 4 a 5 dílů. Staří Indové zase používali k vytyčování pravých úhlů v přírodě pravoúhlého trojúhelníku, jehož délky stran jsou 5, 12 a 13 jednotek. Je možné tedy téměř jistě předpokládat, že již tenkrát si všimli, že platí rovnost $5^2 = 4^2 + 3^2$, popř. také $13^2 = 12^2 + 5^2$.

[21] Tedy: V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen.



Obr. 3.1

Čtverec o straně $a + b$ je možné složit dvěma způsoby (ze čtyř pravoúhlých trojúhelníků a dvou čtverců o délkách stran a a b, nebo ze čtyř pravoúhlých trojúhelníků a jednoho čtverce o straně c). Obsah čtverce se stranou délky $a + b$ se vypočítá $S = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. V prvním případě (obsah čtverce vlevo S_L) je potom součet obsahů jednotlivých částí čtverce roven výrazu $S_L = a^2 + b^2 + 2ab = S$, ve druhém případě (obsah čtverce vpravo S_P) je $S_P = c^2 + 2ab = S$. Protože se jedná o dva čtverce se shodným obsahem, platí vztah $c^2 = a^2 + b^2$.

3.2.2 Přístupy k výuce tématu Pythagorova věta

Podle mých zkušeností se při výuce Pythagorovy věty klade často důraz spíše na její algebraickou podobu (a tak si ji také žáci zpravidla pamatují) a zejména na její důkaz, než na proces, kterým se žáci mohou tohoto poznatku sami dobrat. Podíváme-li se např. na obrázek 3.1 k důkazu Pythagorovy věty, je tento obrázek sice výmluvný jako důkaz, nicméně nedovedeme k němu zřejmě najít *izolované modely*, které by vedly k objevu Pythagorovy věty. Podobně je tomu patrně i u dalších důkazů, jejichž principem je rozdělení čtverců nad stranami pravoúhlého trojúhelníka a jejich „přeskládání“.

D. Jirotková a J. Kloboučková (2011) uvádějí, že z hlediska teorie generických modelů je při zavádění Pythagorovy věty ve výuce matematiky etapa izolovaných modelů velmi krátká nebo dokonce zcela chybí. Proces generalizace a etapa generických modelů jsou pak zcela vynechány a žákům je nabídnut přímo abstraktní poznatek. Dále tvrdí, že i když je důkaz považován za nástroj přesvědčení žáka o pravdivosti tvrzení, neznamená to však, že je také „pro žáka nástroj porozumění myšlence“.

Podívejme se nyní na několik přístupů k výuce Pythagorovy věty, které jsou popsány v odborné literatuře a vybraných učebnicích.[22]

[22] Cílem mé práce není najít „optimální“ způsob výuky Pythagorovy věty, proto zde není udělána úplná analýza přístupů k výuce tohoto tématu na základě dostupných řad učebnic (koneckonců skutečný způsob výuky tématu se může oproti plánům v učebnicích podstatně lišit). Pythagorova věta je použita jen jako prostředek pro zjišťování obecných mechanismů, jak si žáci konstruují poznatky.

F. Kuřina (Hejný, Kuřina, 2001) popisuje pět přístupů k výuce[23] tématu Pythagorova věta, které předložil učitelům z praxe s cílem zjistit, kterému z nich dávají (nebo by dávali) přednost. F. Kuřina připouští, že při realizaci svého experimentu zjistil, že by bylo vhodné některé přístupy modifikovat, avšak v knize uvádí pouze pět původních návrhů. Zde zmíním pouze tři z nich (dva podle mého názoru nevhodné pro konstruktivistický způsob vyučování (přístup A a B)[24] a jeden, který by snad v určité modifikaci vhodný byl (přístup E)).

Přístup A (ibid, s. 42–43) zdůrazňuje užitečnost Pythagorovy věty v praxi. Žáci řeší úkoly zadané učitelem pomocí vhodné instrukce, zadání každé úlohy doprovází velmi návodný obrázek. První dvě úlohy znějí: *Vypočítejte délku c trámu na střeše podle obrázku.* a *Do jaké výšky b dosahuje žebřík dlouhý 4 m opřený 1 m ode zdi (viz obr.)?*. V obou případech následuje řešení pomocí Pythagorovy věty aplikované na tyto konkrétní situace. Poté je uvedena formulace Pythagorovy věty pouze v algebraickém znění ve všech třech možných vyjádřeních a obrázek pravoúhlého trojúhelníku *ABC* s označením jeho stran *a*, *b*, *c*. Důkaz není uveden. Na závěr řeší žáci úlohu *Která cesta z místa A do místa C na náměstí je nejkratší? O kolik metrů je kratší přímá cesta AC než cesta ABC?* a zadání úlohy je opět doprovázeno návodným obrázkem. Přístup je značně transmisivní (jsou uvedeny dva izolované modely algebraické formulace věty a věta je ihned podána abstrakně pomocí symboliky), motivace je navozována pomocí užitečnosti nového poznatku v praxi.

Přístup B (ibid, s. 44–45) je založen na přesvědčení, že zdůvodnění v matematice jsou založena na empirických zkušenostech žáků. Žáci řeší úlohy, aby ověřili teorii; aplikace geometrie jsou zde nepodstatné. Žákům je nejprve předloženo algebraické vyjádření Pythagorovy věty, které je doprovázeno geometrickou interpretací Pythagorovy věty (obrázek pravoúhlého trojúhelníku s příslušnými čtverci délek stran 3, 4 a 5 jednotek). Poté mají žáci za úkol doplnit tři tabulky – nejprve mají jednotlivé pravoúhlé trojúhelníky narýsovat a délku zbývající strany změřit a nakonec ověřit platnost Pythagorovy věty. V druhém případě mají nejprve doplnit zbývající údaj v tabulce dosazením do uvedeného vzorce a následně ověřit platnost rýsováním a měřením a ve třetím případě mají žáci doplnit chybějící údaj výpočtem na kalkulačce a jeden z uvedených trojúhelníků narýsovat a srovnat výsledky s vypočítanými hodnotami. Abstraktní poznatek je žákům sdělen hned na počátku a žáci jej mají jen „ověřit“ na izolovaných modelech.

V přístupu E (ibid, s. 50–52) vychází matematika z problémů praxe, které vedou k formulaci hypotéz a k jejich ověření. Důležitým aspektem je vytvoření tvořivého prostředí. Žáci řeší nejprve úlohu, zda můžeme nastěhovat skříň do místnosti podle daného obrázku. Potom je žákům předložen problém *Jak závisí délka c přepony pravoúhlého trojúhelníku na*

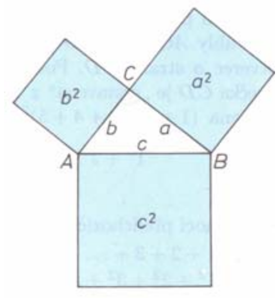
[23] Přístupem k výuce rozumí M. Hejný a F. Kuřina (2001, s. 41) „naznačení základních didaktických postupů prováděných ve třídě, nikoli však rozvržení jednotlivých kroků do vyučovacích hodin, jejich metodické zpracování, nebo dokonce formulace toho, co má učitel ve třídě říkat“.

[24] F. Kuřina uvádí, že přístupům A a B dávaly přednost více než dvě třetiny učitelů, u nichž svůj výzkum provedl (z celkového počtu 133).

délkách jeho odvěsen a, b?. Další úlohou je doplnění tabulky (jedná se o určení c, $a^2 + b^2$, c^2) na základě narýsování příslušného pravoúhlého trojúhelníku a následné ověření platnosti algebraického znění Pythagorovy věty narýsováním několika pravoúhlých trojúhelníků, změřením délek jejich stran a výpočtem pomocí kalkulačky. Poté následuje důkaz Pythagorovy věty. Přístup E je zakončen znázorněním závislosti délky odvěsny y pravoúhlého trojúhelníku s přeponou délky c na délce jeho přepony x. Autor zde sice nabízí možnost přemýšlet nad závislostí délky c přepony pravoúhlého trojúhelníku na délkách jeho odvěsen a a b v první úloze, avšak v druhé úloze se pouze na několika konkrétních příkladech ověřuje algebraický vztah Pythagorovy věty. Tento přístup tedy opět nenabízí žákovi izolované modely, pomocí nichž by si vytvořil generický model.

Pro úplnost uvedu ještě přístupy k výuce Pythagorovy věty ze dvou řad učebnic – jedné pro osmileté gymnázium a jedné pro základní školu.

Žáci se v učebnici (Herman a kol., 1995) seznamují s Pythagorovou větou v jejím geometrickém znění. Mají za úkol narýsovat libovolný pravoúhlý trojúhelník *ABC* s přeponou *AB* a nad každou z jeho stran *a*, *b*, *c* sestrojit čtverec (viz obr. 3.2). Dále se měřením přesvědčí, že platí vztah $c^2 = a^2 + b^2$. Trojúhelník je zde označen tradičně *ABC* s pravým úhlem u vrcholu *C* a doplněn vzorečkem $c^2 = a^2 + b^2$. Následuje slovní vyjádření Pythagorovy věty.[25] Autoři nenabízejí žákům cestu k objevu Pythagorovy věty, tedy nenabízejí izolované modely, pomocí nichž si žák může vytvořit generický model. Autoři uvádějí i důkaz Pythagorovy věty a věnují se také obrácené Pythagorově větě a jejímu důkazu. Dále žáci řeší úlohy, některé jsou uvedené s řešením. V úlohách se vyskytuje označení trojúhelníku *ABC*, ale také *XYZ* a *KLM*, nebo trojúhelník není označen písmeny, ale např. pomocí slov odvěsna, přepona, úhlopříčka obdélníku. Kapitola je doplněna o historickou poznámku k osobě řeckého matematika Pythagora ze Samu.



Obr. 3.2

Pythagorova věta je v (Novotná a kol., 1998) uvedena motivačním příběhem o vymodelování pravého úhlu pomocí provázku se čtyřmi uzlíky vzdálenými 3, 4 a 5 metrů, který doprovází izolovaný model Pythagorovy věty $5^2 = 3^2 + 4^2$. Chlapec Kryšpín zde také poučuje dívku Betku o tom, že druhá mocnina délky přepony je rovna součtu druhých mocnin délek odvěsen. Betka Kryšpína pochopí, pátrá v paměti a připomíná, co znamenají pojmy „přepona“ a „odvěsna“. V následující úloze žáci nevymýšlejí vztah $c^2 = a^2 + b^2$ sami, ale pouze ho ověřují. Dále autoři uvádějí algebraické znění Pythagorovy věty, důkaz Pythagorovy věty (pomocí nůžek a papíru) a geometrické vyjádření Pythagorovy věty. V úlohách je nejprve uvedeno tradiční označení trojúhelníku *ABC*, ale dále jsou jednotlivé trojúhelníky označovány *KLM*, *XYZ*, *OPR*, *EFG* apod. Žáci mají řešit i úlohy, které jsou zadány netradičně (v Gaussově soustavě souřadnic, v trojrozměrném prostoru, modelováním, pomocí průsvitného papíru apod.), u některých úloh autoři uvádějí řešení. Ani zde nechybí krátká historická poznámka k Pythagorovi. Opět není nabídnuta cesta, pomocí níž si žák může vytvořit generický model věty.

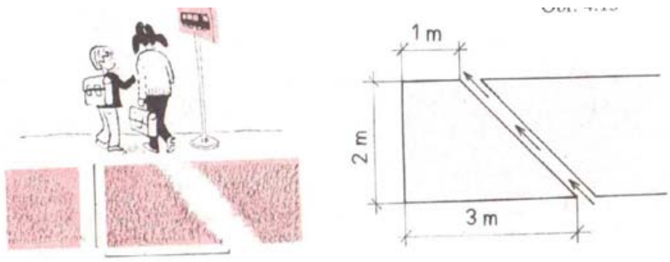
[25] Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami.

3.2.3 Neúplné či chybné představy žáků

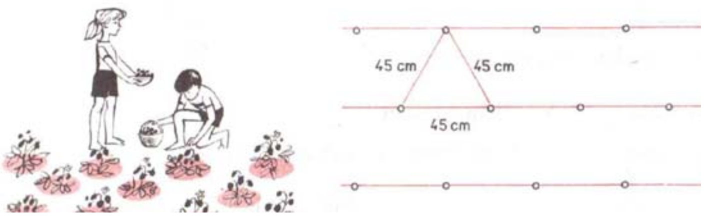
Asi každý učitel se setkal s tím, že žáci při použití Pythagorovy věty chybují. N. Stehlíková (2010b, s. 267) uvádí dvě základní obtíže, které se v souvislosti s Pythagorovou větou objevují:

- Žáci si větu pamatují formálně jako vzorec $c^2 = a^2 + b^2$. Často si přitom neuvědomují důležitý předpoklad, že v takovém případě musí být pravý úhel u vrcholu *C*, a neumějí větu formulovat pro trojúhelníky, které nejsou označeny prototypicky jako *ABC* nebo které nejsou v prototypické poloze (např. jsou nějak pootočené).
- Žáci neumějí najít pravoúhlý trojúhelník v komplexním obrázku.

Tyto obtíže by měl učitel vzít v úvahu při přípravě výuky Pythagorovy věty. Tedy konkrétně by bylo vhodné používat při zavádění i procvičování látky trojúhelníky v různých polohách a různě označené (nejen např. písmeny *KLM*, ale u trojúhelníku *ABC* označit vrchol u pravého úhlu jinak než *C*). I když se zpravidla dostatek času věnuje procvičování Pythagorovy věty na úlohách, bude toto procvičování málo účinné, pokud se současně nebude klást důraz na fázi rozboru komplexního obrázku (viz obr. 3.3[26] a 3.4[27]), v nichž sami žáci budou rozpoznávat pravoúhlé trojúhelníky, pro něž by mohli větu použít.



Obr. 3.3



Obr. 3.4

V souvislosti s první obtíží zmíněnou nahoře (problém, který žáci mají, pokud je trojúhelník označen jinak než *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C*) se podívejme na výsledek, k němuž dospěla N. Stehlíková (2010b). Ve svém výzkumu nechala učitele matematiky z praxe (celkem 49) a budoucí učitele matematiky (celkem 70) formou nedokončených vět interpretovat několik videoukázek z hodin matematiky. Jedna z nich se týkala Pythagorovy věty a obsahovala určitou konvenci týkající se označení trojúhelníku. Podívejme se na přepis části ukázky.

[26] Úloha k obr. 3.3: *Na sídlišti si lidé zkracují cestu na zastávku autobusu přes trávník (viz obr.). Kolik kroků si takto ušetří, jestliže počítáme délku kroku 75 cm? Vyplatí se jim to?* (Müllerová, 1990, s. 95)

[27] Úloha k obr. 3.4: *Jahody jsou vysázeny v trojúhelníkovém sponu (viz obr.) tak, že vzdálenost každých dvou sousedních sazenic je 45 cm. Jak daleko od sebe jsou jednotlivé řady?* (Müllerová, 1990, s. 94)

U1: „Tak a dáme si hned příklad." (Píše na tabuli a diktuje.) „Trojúhelník *ABC*, do závorky napíšu tohleto" (píše $|\angle ACB| = 90°$.) „a napíšu to jenom jednou, víckrát už to psát nebudu. Co to pro tebe znamená?" (Žáci nereagují.)
U2: „Že když označíš trojúhelník *ABC*, přečti to! [Jméno žáka.]" (Žák nezřetelně čte.)
U3: „Velikost!"
Ž1: „Velikost úhlu *ACB* se rovná 90 stupňů."
U4: „Co to teď pro tebe znamená?"
Ž2: „Jako že … je to pravoúhlý trojúhelník."
U5: „No to je jasný, že to bude pravý. Ale ještě něco víc."
Ž3: „Že úhel *AB* … *ACB* svírá 90 stupňů."
U6: „Čili bude pravý. Čili jinými slovy vrchol u pravého úhlu bude vždycky označen?"
Ž4: „*C*."
U7: „Písmenkem *C*. Pokud budeme mít označen trojúhelník písmenky *ABC*, vždycky vrchol u pravého úhlu písmenkem *C*."

Z výše uvedených důvodů se konvence zavedená učitelem nejeví jako šťastná. Přesto 51,4 % studentů učitelství matematiky a dokonce 77,1 % učitelů matematiky nevidělo na této konvenci nic, co by stálo za pozornost. N. Stehlíková uvádí, že jeden student a dva učitelé zmínili tento fakt v neutrálním tónu a dva studenti ho dokonce ocenili s poukazem, že „učitel rozvíjí logické myšlení". Jen 40,0 % studentů a 18,8 % učitelů uvedlo nevýhody konvence („žáci si zafixují, že *C* je vždy vrchol pravého úhlu, což není pravda", „žáci nebudou umět řešit úlohy, kde je trojúhelník označen jinak" apod.) a někteří z nich ji odsoudili jako „škodlivou".

Výše bylo uvedeno, že žáci mají často Pythagorovu větu uloženu paměťově jako vztah $c^2 = a^2 + b^2$. Ne vždy to však musí být znakem formálního poznání, viz například situace, kterou popisuje jedna ze studentek učitelství, která doučovala 14letou dívku (Stehlíková, 2010a):

> Požádala jsem Janu, aby nejprve nakreslila obrázek a označila ho. Pokaždé vedle obrázku udělala rámeček a v něm $c^2 = a^2 + b^2$. Chtěla jsem vědět, jestli má Pythagorovu větu naučenou pouze jako vzoreček, nebo jestli ji umí pružně používat. A tak jsem jí zadala úlohu, kde přepona byla *a*. Nakreslila obrázek a správně ho označila (s *a* jako přeponou), ale do rámečku vedle obrázku napsala opět $c^2 = a^2 + b^2$. Konečné řešení bylo správné! Když jsem se jí zeptala, proč to tak udělala, odpověděla: „Vždycky to takhle píšeme a teprve potom dosadíme správná písmena a čísla." Zadala jsem jí další úlohy s různým označením a umístěním trojúhelníku a ona je vyřešila správně.

Pro Janu je rovnost $c^2 = a^2 + b^2$ zřejmě generickým modelem rovností čtverců délek stran pro pravoúhlé trojúhelníky, které jsou označeny různými písmeny, je to jakási předloha, do níž správně dosazuje podle okolností (Stehlíková, 2010a). Z toho, co říká, je zřejmé, že právě tak je k tomu vedena učitelem. Naopak daná rovnost není na úrovni generického modelu u žáka, který ji automaticky napíše i tam, kde je jasně nepravdivá, a neumí ji dále modifikovat. Vzorec je pak protézou skutečného poznání, umožňuje žákovi počítat i to, čemu nerozumí – vzorec kryje formálnost poznání (Hejný a kol., 1991).

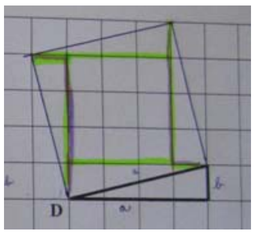
Generickým modelem by mohlo být i slovní znění Pythagorovy věty ve smyslu „součet obsahů čtverců nad odvěsnami je roven obsahu čtverce nad přeponou“, do něhož je opět možno dosazovat podle okolností.

3.2.4 Teoretický model Pythagorovy věty pomocí teorie generických modelů

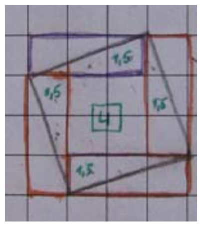
Na základě výše uvedených úvah nyní uvedu teoretický model výuky Pythagorovy věty, a to pomocí teorie generických modelů (viz odstavec 2.1.2). Tento model se do jisté míry stal východiskem druhého a zejména třetího, z hlediska výuky Pythagorovy věty i z hlediska mého výzkumu nejpropracovanějšího, výukového experimentu uvedeného v odstavci 4.3. Byl vytvořen na základě studia literatury a konzultací s M. Hejným.[28]

Motivace v konstruktivistickém duchu a získání izolovaných modelů[29]

Příkladem konstruktivistické motivace, která by vedla žáky k činnosti tvorby izolovaných modelů, může být následující situace. Zvolíme práci na čtverečkovaném papíru. Začneme tím, že rýsujeme mřížové čtverce a počítáme jejich obsahy (žáci používají „krájení“ (viz obr. 3.5), nebo „rámování“ (viz obr. 3.6)). Pokud již žáci znají odmocninu, počítáme i obvody čtverců. Pak učitel uvede motivační situaci. Řekne žákům, že obsah mřížového čtverce umí rychle vypočítat, aniž by obrázek čtverce zkoumal. Žáci kreslí mřížové čtverce, učitel si u každého vypočítá délku strany (pomocí délky odvěsen příslušného pravoúhlého trojúhelníka) a řekne výsledek. Žáci, kteří si pro učitele připravili náročné úlohy a obsahy počítali dlouhou dobu, jsou překvapeni, jak rychle to učitel zvládá, a chtějí jeho tajemství odhalit. Všechny tyto izolované modely si žáci poznamenávají do sešitu (nejlépe do tabulky). Tím získají mnoho příkladů mřížových čtverců; u každého je napsán obsah a obvod. Zvláštní pozornost přitahuje šikmo vůči přímkám mříže položený čtverec s obsahem 25 mm^2 (viz obr. 3.7). Ten jediný má obvod přesně 200 mm. Později se možná najde i čtverec s obsahem 169 mm^2 (viz obr. 3.8).



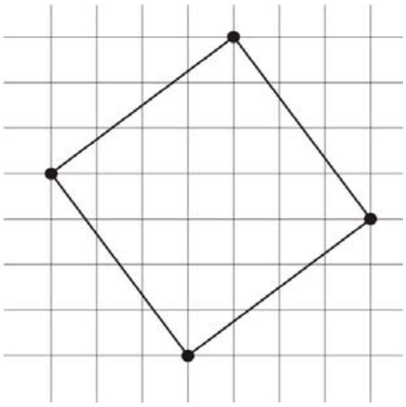
Obr. 3.5



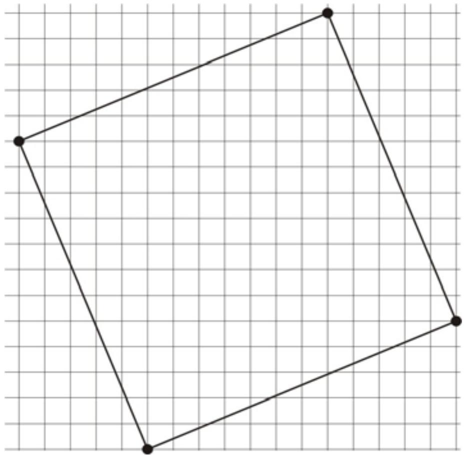
Obr. 3.6

[28] Experiment, v němž studenti učitelství prvního stupně znovu objevovali Pythagorovu větu pomocí čtverečkovaného papíru, popisuje i D. Jirotková (2010).

[29] Celý proces by se dal rozložit i mezi ročníky. Např. s izolovanými modely začít v 6. ročníku a generický model vyvodit až v 7. ročníku.



Obr. 3.7

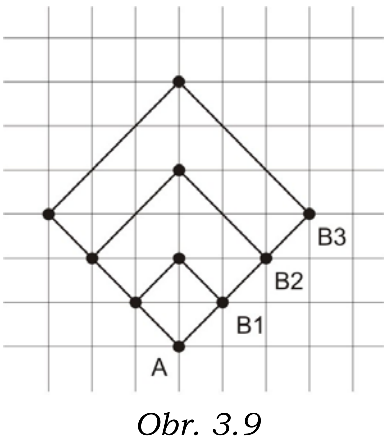


Obr. 3.8

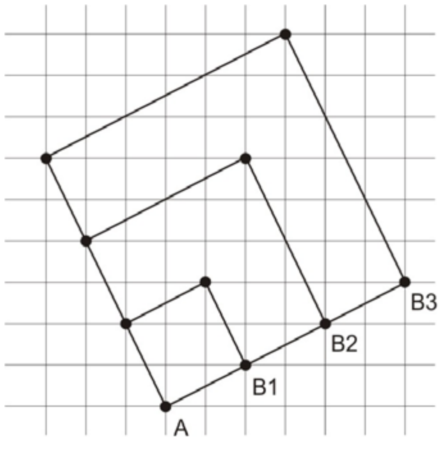
Žáci tedy získají řadu izolovaných modelů, které vznikly jako testovací úlohy pro učitele. Zatím mezi nimi zřejmě nevidí souvislost. Potřebují ještě získat zkušenost, že se těchto souvislostí mohou dobrat systematizací výsledků (organizací izolovaných modelů) např. pomocí tabulace výsledků. K tomu by je měl učitel systematicky vést i při výuce jiných témat. Předpokládejme tedy, že tuto metakognitivní dovednost mají.

Cesta ke generickým modelům

Generické modely vznikají popisem jednoparametrických sérií. První z nich může být série čtverců $ABCD$, kde $A[0;0]$, $B[n;n]$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ (viz obr. 3.9). Zde má generický model daný stranou AB, kde $A[0;0]$ a $B[n;n]$, obsah $2n^2$ a obvod $4\sqrt{2}\cdot n$. Druhá může být série čtverců, pro kterou je $A[0;0]$, $B[2n;n]$ (viz obr. 3.10). Třetí může být např. série, pro kterou je $A[0;0]$, $B[4n;3n]$.



Obr. 3.9



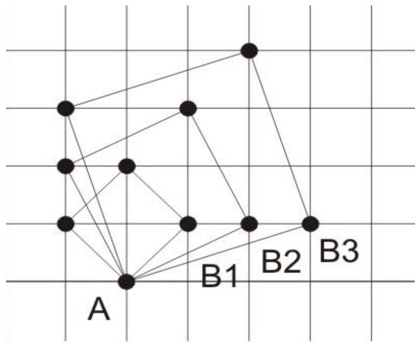
Obr. 3.10

Žádný z těchto generických modelů však neukazuje, jaký „trik“ učitel používá. Užitečnost této práce žáků spočívá jednak v tom, že získávají zkušenost se slepými uličkami zkoumání, jednak se ale zvyšuje jejich vhled do vazeb čtverec – strana – obvod v geometricko-aritmetické polaritě.

Některého žáka může po čase napadnout vzít sérii čtverců *ABCD*, kde $A[0;0]$, $B[n;1]$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ (viz obr. 3.11). Žáci najdou tabulku typu

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
S	2	5	10	17	26	37	50	64	82	101	122	145	170

a z ní pak vyvodí nejprve procesuální pravidelnost „ve druhé řádce postupně přidáváme lichá čísla 3, 5, 7, …“, a pak i konceptuální pravidelnost $S = n^2 + 1$. To je pro žáky velký objev a zdroj uspokojení – pracné kreslení čtverců a hledání jejich obsahů bylo odměněno elegantním vztahem, který zahrnuje celou sérii předchozích obrázků. To je motivuje k uvolňování druhého parametru.



Obr. 3.11

Druhá série je dána čtverci *ABCD*, kde $A[0;0]$, $B[n;2]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Analogicky se zde dojde ke vzorci $S = n^2 + 4$. Třetí sérii tvoří čtverce *ABCD*, kde $A[0;0]$, $B[n;3]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Výsledkem je $S = n^2 + 9$. Zde již žáci postupují pravděpodobně rychleji.

Pohled na tyto dílčí generické modely

$\rightarrow$ pro $B[n;1]$ je $S = n^2 + 1$

$\rightarrow$ pro $B[n;2]$ je $S = n^2 + 4$

$\rightarrow$ pro $B[n;3]$ je $S = n^2 + 9$

ukazuje na generický model[30]

$\rightarrow$ pro $B[n;m]$ je $S = n^2 + m^2$.

Objevením generického modelu samozřejmě proces konstrukce poznatku Pythagorova věta nekončí. Žáci by se měli setkat i s dalšími izolovanými modely (viz níže) a pomocí řešení vhodně volených úloh dospět i k abstraktnímu poznání Pythagorovy věty a jejímu důkazu.

Jiné příklady izolovaných modelů Pythagorovy věty, generický model a abstraktní poznání

Izolovanými modely Pythagorovy věty jsou např. různé pravoúhlé trojúhelníky s výpočty konkrétních příslušných obsahů čtverců nad jejich odvěsnami a přeponou, mezi nimiž je rovnost, a to ve tvaru obsah čtverce nad přeponou se rovná součtu obsahů čtverců nad odvěsnami i ve tvaru obsah čtverce nad jednou odvěsnou je roven rozdílu obsahů čtverce nad přeponou a nad druhou odvěsnou. Izolovanými modely mohou být také pravoúhlé trojúhelníky s velikostmi stran, které tvoří Pythagorejské trojice, např. trojúhelník o stranách 3, 4 a 5 jednotek. Izolovanými modely jsou dále trojúhelníky označené různými písmeny a v různých polohách s příslušnými rovnostmi čtverců stran.

[30] Popsaný způsob odhalování generického modelu Pythagorovy věty obsahuje metodu postupného uvolňování parametru, která je založena na experimentování a systemizaci výsledků (např. pomocí tabulky) a odhalování zákonitostí a zobecnění (Hejný, Jirotková, 1999).

Spolu s izolovanými modely by měly být použity též *ne-modely,* tedy žáci by měli zkoumat i vztah mezi obsahy čtverců nad stranami trojúhelníků, které nejsou pravoúhlé. Při výpočtu obsahů čtverců nad jednotlivými stranami trojúhelníků (pravoúhlých i nepravoúhlých) žáci přicházejí na to, že pro všechny trojúhelníky neplatí příslušné rovnosti obsahů čtverců, popř. součtů obsahů čtverců.

Zdánlivým modelem by mohla být situace, v níž je nakreslena geometrická interpretace Pythagorovy věty pro trojúhelník, který je „téměř“ pravoúhlý. Např. strany mají délku 3 cm, 4 cm a 5,1 cm. Teprve ověření dosazením do vzorce ukáže, že věta neplatí.

Překvapivým modelem by pro některé žáky mohla být situace, v níž je trojúhelník zobrazen v netypické poloze, tedy nějak natočený, nebo dokonce situace, v níž je trojúhelník označen *ABC,* ale pravý úhel je u vrcholu *B* (viz odstavec 3.2.3). „Překvapivost“ a „zdánlivost“ modelu je samozřejmě do značné míry subjektivní a záleží na zkušenostech každého jedince.

Teprve po objevu generického modelu přijde čas na některý z důkazů Pythagorovy věty. Například v nahoře uvedeném postupu je věta objevena pouze v případě, když poměr odvěsen pravoúhlého trojúhelníka je racionální číslo. Vzniká tedy otázka, zda to platí obecně, což je dobrá motivace žáků k důkazu.

Abstrakcí je obecné používání vztahu $c^2 = a^2 + b^2$ ve všech jeho obměnách jako stavebního kamene ve struktuře. Např. používáme vzorec při hledání Pythagorejských trojúhelníků, tedy pravoúhlých trojúhelníků s celočíselnými délkami stran, nebo využijeme Pythagorovu větu pro odvození kosinové věty apod.

3.3 Cílová skupina

Účastníci mého výzkumu jsou žáci jednoho osmiletého gymnázia v Praze 10. Některé experimenty jsem realizovala ve třídě, kde jsem byla v té době třídní učitelkou. Se žáky jsem již v primě navázala úzký vztah a snažila se budovat ve třídě klima otevřené pro konstruktivistické přístupy. Poslední experiment jsem zrealizovala ve třídě, ve které jsem matematiku nikdy neučila, pouze jsem zde jeden rok vyučovala konverzaci v německém jazyce. Podrobnější informace o jednotlivých třídách i žácích jsou uvedeny přímo u popisu experimentů v odstavcích 4.1.1, 4.2.1 a 4.3.1.

3.4 Výukové experimenty v mém výzkumu

Jak již bylo uvedeno, mým hlavním cílem bylo sledovat proces konstrukce poznatků přímo v hodinách matematiky. Jako primární metodu jsem tedy použila *výukový experiment.*

Výukový experiment je experiment, který je „zaměřen na výchovně-vzdělávací proces, v němž sleduje činnost učitele, činnost žáků, příp. jejich vzájemná interakce“ (Hartl, Hartlová, 2000, s. 150). Odehrává se v přirozených podmínkách. J. Pelikán (1998) označuje výukové experimenty za didaktické experimenty, které lze použít např. při „ověřování nových didaktických postupů, při zavádění nových osnov, učebnic a podobně“.

Slovo experiment je v pedagogickém výzkumu používáno jako zkrácený výraz pro *experimentální metodu* (Gavora, 2000, s. 125), což je „vědecká metoda, ve které jsou kontrolovány všechny proměnné tak, aby se ze změn daly vyvozovat kvantitativně vyjádřitelné závislosti“ (Hartl, Hartlová, 2000, s. 148). Ovšem výukové experimenty v mém výzkumu nejsou experimenty v tomto slova smyslu, neměla jsem žádnou kontrolní skupinu a mým cílem nebylo ukázat, že jeden výukový přístup je z nějakého hlediska lepší než jiný. Slovem experimentem budu tedy v této práci myslet jen *výukový experiment.*

Ve výukovém experimentu je důležité, že ho výzkumník organizuje s nějakým záměrem – chce něco ověřit, zjistit, podrobněji popsat apod. Snaží se tedy kontrolovat co nejvíce proměnných, což může být v pedagogickém výzkumu problém. Učitel nemůže mít pod kontrolou všechny proměnné, které ovlivňují výsledky získané z experimentu. V mém případě jsem u každého experimentu předem určila[31]

- místo, čas, délku trvání a cílovou skupinu,
- cíl výukového experimentu,
- téma, které bude podkladem výukového experimentu a na jehož základě budu zkoumat proces konstrukce poznatků žáky (Pythagorova věta), s rozpracovanými příslušnými úlohami,
- formu práce (individuální či skupinová práce),
- míru své pomoci žákům v případě, že si nebudou vědět rady,
- způsob sběru dat, shromáždění dokumentace, záznamů.

Je zřejmé, že některé proměnné (např. téma či forma práce) byly dobře kontrolovatelné, jiné (např. míra mé pomoci) závisely do značné míry na průběhu výukového experimentu a docházelo u nich ke značným odchylkám oproti přípravě.

V odstavci 2.3 jsem uvedla, že pro popis mého výzkumu lze do jisté míry využít některé charakteristiky akčního výzkumu. Podívejme se nyní na tuto problematiku podrobněji.

Můj výzkum má tyto charakteristiky akčního výzkumu:

- Byla jsem nejen v roli výzkumníka, ale i v roli učitele, tedy byla jsem účastníkem zkoumaných procesů. První dva v této práci uvedené experimenty jsem prováděla ve své třídě, v běžné výuce.
- Výzkum jsem neprováděla zcela sama, ale spolupracovala jsem s badatelkou, která nebyla na výuce zainteresovaná (se svojí školitelkou) – jednalo se tedy o výzkum kooperativní.
- Můj výzkum má cyklický charakter – výsledky každého cyklu ovlivnily cyklus následující (u každého cyklu jsem prováděla akci a reflexi).
- Využívala jsem způsoby získávání dat, které se využívají i v akčním výzkumu (viz odstavec 3.5).

[31] Podrobněji viz kapitola 4.

V některých ohledech se však můj výzkum od „čistého" akčního výzkumu odlišuje:

- Primárním cílem mého výzkumu nebylo zlepšení vyučování, ale získání vhledu do procesu konstrukce matematických poznatků.
- Jen do jisté míry byl mým cílem vlastní rozvoj jako učitelky.
- Třetí experiment uvedený v této práci má spíše charakter klinického experimentu než výukového experimentu provedeného v rámci akčního výzkumu.

Z terminologie akčního výzkumu jsem si „vypůjčila" způsob popisu výukových experimentů, a sice popis plánu, akce, analýzy a reflexe (z hlediska vlastní výuky i dalšího výzkumu: viz kapitola 4), který se mi pro mé potřeby jevil jako přehledný a přínosný.

Již několikrát jsem uvedla, že jádro mého výzkumu tvoří tři výukové experimenty zaměřené na kontrukci poznatků v matematice na pozadí (znovu)odvozování Pythagorovy věty. Nicméně v průběhu mého studia jsem provedla výukových experimentů více. Některé z nich ještě před zmíněnými experimenty s Pythagorovou větou. Ty považuji spíše za přípravné a jejich prostřednictvím jsem získala řadu cenných zkušeností, i když ještě nebyly systematicky připraveny a vyhodnoceny.

Další experimenty jsem provedla mezi druhým a třetím zde uvedeným experimentem s Pythagorovou větou a týkaly se zejména problematiky funkčního myšlení u žáků (jejich stručný přehled je v příloze 7). Zprávy z některých jsem publikovala v (Hricz a kol., 2005a; Hricz a kol., 2005b; Ulrychová, 2006). Řada z těchto experimentů proběhla v rámci kooperativního akčního výzkumu výzkumníků a učitelů projektu IIATM (např. Kubínová, Stehlíková, 2007; Hejný, Jirotková, 2007). Tyto dílčí experimenty však v této práci neuvádím, protože se jednak nehodí do obsahové linie zmíněných tří hlavních experimentů, a jednak nepřispěly k významnému obohacení výsledků, které jsem získala z tří hlavních experimentů. Jistě však nebyly v mé práci bezvýznamné. Minimálně jsem jimi získala více zkušeností s výzkumem v didaktice matematiky, poučení pro svou vlastní výuku a zvýšila si svou teoretickou citlivost na myšlenkové pochody žáků při konstrukci matematických poznatků.

3.5 Metody sběru dat

V rámci svého kvalitativně orientovaného výzkumu jsem zvolila metody sběru dat uvedené v tabulce, které následně stručně popíši. Abych zamezila opakování, konkrétní příklady jejich použití v mém výzkumu budou uvedeny v odstavcích 4.1.1, 4.2.1 a 4.3.1 přímo u jednotlivých experimentů.

Metoda sběru dat	*Data*	*Zdroj dat*
participační (zúčastněné) pozorování	přípravy na hodinu, terénní zápisy z průběhu hodiny, reflektivní poznámky po vyučovací hodině	učitel-výzkumník

neformální rozhovory se žáky (mimo vyučovací hodinu)	písemný záznam	učitel-výzkumník, žáci
obrazový záznam (fotografie), audionahrávky nebo videozáznam	protokoly z audio- a videozáznamů	externí pozorovatel
práce vytipovaných žáků – artefakty (školní sešit, domácí práce)	kopie žákovských prací	žáci
přítomnost externího pozorovatele	písemný záznam pozorovatele	pozorovatel

Participační pozorování a terénní zápisy

Participační (zúčastněné) pozorování vymezuje R. Švaříček (2007, s. 144) jako

> takový druh pozorování, kdy sledujeme studované jevy přímo v prostředí, kde se odehrávají. Toto pozorování se nazývá zúčastněné proto, že dochází k interakci mezi výzkumníkem a pozorovanými účastníky výzkumu.

Podle R. Švaříčka (2007, s. 143) je možné participační pozorování charakterizovat jako dlouhodobé, systematické a reflexivní sledování probíhajících aktivit přímo ve zkoumaném terénu. Zúčastněný pozorovatel zde zastává dvě role zároveň: jednak se zúčastňuje na činnostech pozorovaných osob – je účastníkem interakcí, přičemž se od ostatních lidí odlišuje mírou účasti na aktivitách, jednak uskutečňuje výzkum – je pozorovatelem (badatelem), který se od ostatních aktérů odlišuje záměrem (např. chce objevit novou teorii o pozorovaných jedincích). Participační pozorování je podle něj vhodné právě pro studium školní třídy, protože nijak nenarušuje schéma sociální interakce a edukačních procesů ve škole.

Obdobně charakterizuje participační pozorování P. Gavora (2000, s. 149, 154). Výzkumník (pozorovatel) se osobně zúčastňuje činnosti pozorovaných osob, je do činnosti zaangažován a snaží se současně získat rozsáhlou a hlubokou znalost zkoumané reality. Proto je z hlediska vynaloženého úsilí pro výzkumníka náročnější než neparticipační pozorování, kde je výzkumník pouze „registrátorem událostí“, ale ne jejich aktérem (ibid, s. 154–155).

Na rozdíl od rozhovoru, který dokáže zachytit pouze to, co účastníci říkají, že si myslí, slouží pozorování k popisu jednání aktérů a k pochopení jejich zkušenosti (Švaříček, 2007, s. 143–144).

Participační pozorování se obvykle používá společně s jinými výzkumnými metodami (v mém případě viz tabulka). Použitím více výzkumných metod a více zdrojů údajů získává výzkumník širší pohled na zkoumanou problematiku a uskutečňuje tzv. triangulaci (ibid, s. 155), která spočívá v získání údajů o téže věci pomocí více metod, více výzkumníky nebo z více zdrojů, abych získaná data byla věrohodná, autentická a pravdivá.

Důležitou součástí pozorování (nejen participačního) je psaní terénních poznámek, protože do jisté míry reprezentují danou skutečnost. Výzkumník tak dodává pozorovanému smysl, omezuje chaotičnost a popisuje jen určité události, neuskutečňuje úplný záznam jednotlivých aspektů, což nutně vede k selektivitě poznámek (Švaříček, 2007, s. 155). Sám se rozhoduje, co je pro pozorování důležité a co ne. To však v sobě zahrnuje i určité nebezpečí. N. Stehlíková (2007, s. 17) zdůrazňuje, že i přes to, že se výzkumník při popisu dané skutečnosti snaží vždy o maximální objektivitu, ne vždy se to skutečně daří. I pokud totiž popisuje situaci, kterou zažil nebo kterou má možnost opakovaně vidět na videozáznamu, dopouští se tím současně i určité interpretace. Tím, že něco zanedbá, něčeho si nevšimne, nebo naopak něco vyzdvihne, už událost do určité míry interpretuje: „Čeho si všímáme, je zcela zarámováno tím, co známe. Okamžik ‚všimnutí si' je již vždy okamžikem interpretace."[32] (Towers, Davis, 2002)

Zápis z pozorování je zpravidla chronologický, a slouží tak výzkumníkovi pro další zpracování. V průběhu pozorování si pozorovatel dělá jen zkratkovité poznámky, většinou není k dispozici dostatek času k vytváření rozsáhlejších zápisů. Později doplňuje záznam o vlastní komentář k pozorovaným jevům, který je jeho vlastní interpretací pozorovaných jevů a má sloužit k lepšímu pochopení pozorovaných jevů (Gavora, 2000, s. 152).

Rozhovory

Rozhovory patří k důležitým součástem kvalitativně vedených výzkumů. V mém případě šlo výhradně o nestrukturované, neformální a předem nepřipravené rozhovory, které jsem vedla (zpravidla po skončení hodiny) s cílem zjistit od žáka vysvětlení či doplňkové informace. Z těchto rozhovorů nebyl pořízen jiný záznam než můj písemný popis.

Artefakty

Mezi artefakty, které jsem podle potřeby z výukových experimentů sbírala, patří zejména kopie práce některých žáků, jejichž práce se jevila jako důležitá pro pochopení, jak si vytvářejí poznatky. Jednalo se o kopie stránek z jejich školních a domácích sešitů.

Audiozáznamy, videozáznamy a protokolace dat

Audionahrávka se stala neodmyslitelnou součástí realizace kvalitativního výzkumu. Jsme sice schopni zapamatovat si krátké útržky a obrysy toho, co jiní lidé řekli, avšak není možné si všimnout již při realizaci všech souvislostí a zapamatovat si přesné formulace, emocionální projevy (překvapení, zklamání atd.) a nejazykové projevy v řeči (odmlky, dlouhé mlčení před odpovědí, přeřeknutí, vynechání apod.). Pro analýzu výzkumu jsou potřeba přesné postupy a přesná data (Švaříček, 2007, s. 179).

Jak také uvádí M. Miková a T. Janík (2007, s. 192), v každém výzkumu nutně dochází k redukci komplexnosti zkoumané reality. Míra této redukce je dána naším rozhodováním (se) o tom, čeho se bude výzkum týkat, jaké výzkumné otázky si položíme, s jakým zkoumaným souborem budeme pracovat, jak budeme sbírat a analyzovat data a jak budeme výsledky výzkumu prezentovat. Aby se zmírnilo toto redukování komplexity

[32] „What we notice is completely framed by what we know. An event of noticing is always and already an event of interpretation."

zkoumané reality v oblasti sběru dat, nabízí se další metoda – pořizování videozáznamu. Oproti audiozáznamu hraje podstatnou roli právě vizuální záznam zkoumané reality. Videozáznam zachycuje zkoumané jevy relativně komplexně, i když nevýhodou zůstává selektivita záběru kamery (ibid, s. 199–200).

V obou případech je důležitým krokem protokolace dat, tedy přepsání rozhovoru či výukové situace, popř jejich části. Jedná se o činnost velmi časově náročnou a v případě protokolace videozáznamu i nesnadnou. Při analýze a interpretaci dat je velmi důležité se k údajům opětovně vracet a znovu je pročítat a následně kódovat (viz odstavec 3.6.1). Přepis rozhovoru nám tedy usnadní práci, protože neustálé poslouchání dat (uchovaných pouze v audiopodobě) spojené s analýzou a interpretací by zabralo mnohem více času. Dalším významným důvodem přepisu je vizualizace dat. Při jejich analýze je možné je zvýrazňovat, kódovat, komentovat poznámkami, lépe se v nich orientovat, vytvářet sítě vztahů na všech analytických úrovních apod. (Švaříček, 2007, s. 181).

Zatímco audiozáznam jsem využila již ve druhém experimentu, videozáznam pouze ve třetím z nich. Obávala jsem se totiž, že by přítomnost videokamery negativně ovlivnila práci žáků, kteří na pořizování videozáznamů nebyli zvyklí. Nicméně ukázalo se, že pro získání skutečně komplexních dat je videozáznam nezbytný, proto jsem ho z posledního, klinického, experimentu pořídila.

J. Švaříček (2007, s. 177) doporučuje při výzkumu s žáky používat techniku *myšlení nahlas*, která se využívá pro zachycení kognitivních procesů odehrávajících se během řešení matematických či jazykových úloh. Žákovi je zadán úkol s tím, že výzkumníka zajímá vše, co se odehrává v jeho hlavě při řešení úlohy. Autor zde také zdůrazňuje význam kresby, popř. náčrtku, který by usnadnil průběh realizace výzkumu. Výše řečené se týká spíše individuálních experimentů s jednotlivými žáky, nicméně i v akčním výzkumu může učitel vést žáky k tomu, aby vyjadřovali své myšlenky nahlas, popisovali svá řešení, vysvětlovali své strategie, což je konečně důležité nejen pro jeho výzkum, ale i pro rozvoj matematických znalostí u samotného žáka i žáků naslouchajících. V mém případě jsem se o to snažila ve všech cyklech výzkumu, ale zejména jsem na to kladla důraz v posledním, třetím výukovém experimentu.

Externí pozorovatel

Cílem práce externího pozorovatele je pozorovat a zaznamenávat skupinovou dynamiku, gesta, zajímavé momenty, celkovou atmosféru diskuze, popř. další charakteristiky účastníků (Sedláček, 2007, s. 187). Externí pozorovatel doplní data, která získal učitel – výzkumník, zprostředkovává mu další úhel pohledu, často si všimne věcí, kterých si učitel nestačí nebo ani nemůže všimnout apod. Externí pozorovatelé byli přítomni v mém druhém a třetím experimentu a jejich poznámky jsem využila jako doplněk ostatních dat.

3.6 Analýza dat – metody založené na zakotvené teorii

Při analýze získaných dat jsem u druhého a třetího výukového experimentu do jisté míry využila metodu *zakotvené teorie (angl. grounded theory)*,[33] kterou zde blíže popíši. Tento popis slouží pro seznámení se s metodou obecně, konkrétní ukázky jejího použití při analýze mých dat jsou v odstavcích 4.2.3 a 4.3.3 (tedy přímo u jednotlivých experimentů). Obecný popis i konkrétní ukázky budou ilustrovat, jak metodu zakotvené teorie chápu (což se může lišit od toho, jak ji zamýšleli autoři).

Metodu zakotvené teorie rozpracovali B. Glaser a A. Strauss[34] a česky byla popsána v knize (Strauss, Corbinová, 1999), z níž budu při svém popisu zejména vycházet.

Zakotvená teorie je podle A. Strausse a J. Corbinové (1999, s. 14)

> teorie induktivně odvozená ze zkoumání jevu, který reprezentuje. To znamená, že je odhalena, vytvořena a prozatímně ověřena systematickým shromažďováním údajů o zkoumaném jevu a analýzou těchto údajů. Proto se shromažďování údajů, jejich analýza a teorie vzájemně doplňují. Nezačínáme teorií, kterou bychom následně ověřovali. Spíše začínáme zkoumanou oblastí a necháváme, ať se vynoří to, co je v této oblasti významné.

Pojem *zakotvená* tedy znamená, že závěry, které učiníme na základě analýzy, jsou zakotvené (*grounded*) v reálných údajích, tzn. nevznikly teoreticky. Jedná se tedy o opak toho, kdy výzkumník formuluje určitou teorii, kterou pak chce potvrdit, nebo vyvrátit na základě experimentu. U metody zakotvené teorie přistupuje výzkumník k datům bez předchozí teorie, ta teprve postupně vystupuje z analýzy (ibid, s. 14, 191).

Základem této metody je pro výzkumníky odhalení a porozumění tomu, co je podstatou jevů, o nichž toho ještě moc nevíme. Tím, že interpretujeme údaje, vytváříme vlastní teorii. Pro jednotlivé jevy hledáme označení, pojmenování – konceptualizujeme, identifikované fenomény usouvztažňujeme a zasazujeme do určitého reálného kontextu (ibid, s. 14).

Autoři (ibid, s. 27–28, 39, 54) dále zdůrazňují pojem *teoretická citlivost*, který poukazuje na určitou osobní vlastnost výzkumníka, a to na schopnost rozlišovat jemné detaily ve významu údajů. Teoretickou citlivostí se rozumí schopnost vhledu, schopnost dát údajům význam, porozumět a oddělit související od nesouvisejícího; je to schopnost „vidět“ s analytickou hloubkou to, co reálně existuje. Je možné ji získat z několika zdrojů – např. studiem odborné literatury, profesními a osobními zkušenostmi a analýzou samotnou. Teoretická citlivost umožňuje vytvoření teorie, která bude

[33] Tato metoda byla v českém didaktickomatematickém výzkumu použita např. v práci N. Stehlíkové (2004c), kde jsem se s ní také poprvé blíže seznámila.

[34] Metoda zakotvené teorie je poměrně mladou výzkumnou metodou. Základní principy této metody byly popsány v 60. letech 20. století ve společné knize zakladatelů B. Glasera a A. Strausse (1967). Byla primárně vytvořena pro použití v sociologii, ale v zahraničí se běžně používá i ve výzkumu v didaktice matematiky. U nás ji v didaktice matematiky použila např. N. Stehlíková (2004c).

zakotvená, pojmově hutná a dobře integrovaná. Aby byl člověk schopný vytvořit teorii, která by fungovala, je k tomu podle autorů zapotřebí udržet rovnováhu mezi tvořivostí, kritičností, vytrvalostí a hlavně teoretickou citlivostí.

3.6.1 Kódování

Jádrem zakotvené teorie je fáze kódování, tedy analýzy získaných dat. Směřuje k velmi detailní a hloubkové práci s textem (Šeďová, 2007b, s. 90, 222). Jedná se o poměrně dlouhé a komplexní stádium. Podle A. Strausse a J. Corbinové (1999, s. 39)

> kódování představuje operace, pomocí nichž jsou údaje rozebrány, konceptualizovány a opět složeny novými způsoby. Je to ústřední proces tvorby teorie z údajů.

Analýza v zakotvené teorii se skládá ze tří typů (stádií) kódování: otevřeného, axiálního a selektivního. Hranice mezi nimi jsou neostré, odděleny jsou jen pro přehlednost. Jednotlivá stádia mohou prolínat, nemusí nutně následovat za sebou jako nějaké stupně (ibid, s. 40).

Otevřené kódování

Proces analýzy dat začíná fází otevřeného kódování, což je podle A. Strausse a J. Corbinové (1999, s. 39, 42) proces rozebírání, prozkoumávání, porovnávání, pojmenování (konceptualizace) a kategorizace[35] údajů. Výsledkem tohoto procesu jsou pojmy[36] a kategorie, které jsou základními stavebními kameny teorie. Pojmy jsou identifikovány a rozvíjeny ve smyslu svých vlastností a dimenzí, přičemž se využívá dvou základních analytických postupů: kladení otázek o údajích a porovnávání (zjišťování podobností a rozdílů porovnáváním jednotlivých případů, událostí a jiných výskytů zkoumaného jevu mezi sebou) (ibid, s. 52).

A. Strauss a J. Corbinová (1999, s. 43–51) uvádějí jednotlivé fáze otevřeného kódování:

1. *Označování (konceptualizace) jevů* – rozbor pozorování, řádku, věty nebo odstavce a následné přidělení jména (*kódu*), tedy něčeho, co bude zastávat nebo reprezentovat tento jev.
2. *Určování analytických kategorií (kategorizace)* – proces seskupování pojmů, které se zdají, že přísluší stejnému jevu. Jev reprezentovaný určitou kategorií dostane také pojmové označení, ovšem toto označení by již mělo být abstraktnější než jména pojmů, které jsou v této kategorii uskupeny. Vytváří se zde hierarchie kategorie – podkategorie.
3. *Pojmenovávání kategorií* – mělo by být dostatečně názorné, aby rychle připomínalo to, na co odkazuje.

[35] *Kategorie* – třída pojmů. Tato třída je objevena, když se při vzájemném porovnávání pojmů zdá, že náleží podobnému jevu. Takto jsou pojmy seskupovány do vyššího řádu – pod abstraktnější pojem nazývaný *kategorie*. (Strauss, Corbinová, 1999, s. 42)

[36] *Pojmy* – pojmová označení přidělená jednotlivým událostem, případům a jiným výskytům jevu (Strauss, Corbinová, 1999, s. 42).

4. *Rozvíjení vlastností a dimenzí kategorií* – vlastnosti kategorie jsou charakteristiky nebo znaky kategorie a dimenze kategorie reprezentují umístění vlastnosti kategorie na nějaké škále (jde o tzv. dimenzionální rozsah). Proces otevřeného kódování podněcuje objevování nejen kategorií, ale také jejich vlastností a dimenzí.

Úskalí, kterým je třeba se při kódování vyhnout, protože brzdí následně průběh analýzy, je podle K. Šeďové (2007a, s. 220) mnoho. Důležité je mj.

- usilovat o vystižení toho, co se objevuje v datech (a nikoli toho, co si myslíme my sami),
- nevolit kódy příliš obecné, ani příliš detailní a komplikovaně nazvané (cirkulární povaha kvalitativního výzkumu však umožňuje, abychom se ke kódům vraceli a revidovali je – přehnaně obecný kód, pod který spadá podezřele mnoho citací, můžeme rozčlenit do detailnějších kódů; a detailní jednotlivosti naopak sloučit pod obecnější kód).

Axiální kódování

Paralelně ke kódování získaných dat si vytváříme seznam existujících kódů, které následně, již systematicky, kategorizujeme, tedy seskupujeme je k sobě podle podobnosti nebo jiné vnitřní souvislosti. Toto seskupení je však stále ještě provizorní, v dalších fázích analýzy dochází ještě často k různému přeskupení a přepracování; chápeme ho ale jako zárodečné stádium budoucí teorie, popř. analytického příběhu (Šeďová, 2007a, s. 220–221).

Axiální kódování je tedy soubor postupů, pomocí nichž jsou údaje po otevřeném kódování znovu uspořádány novým způsobem, prostřednictvím vytváření spojení mezi kategoriemi. Vzniká struktura kategorií a jejich podkategorií. Kategorie jsou následně podrobněji rozpracovány, a to nejen z pohledu vlastností a dimenzí, ale i z pohledu bližšího určení kategorie (jevu) pomocí

- *podmínek*, které jej zapříčiňují,
- *kontextu*, v němž je zasazen (jeho konkrétního souboru vlastností),
- *strategií* jednání a interakce, pomocí kterých je zvládán, ovládán a vykonáván,
- a *následků* těchto strategií.

Ačkoli se otevřené a axiální kódování liší analytickými postupy, výzkumník se při reálné analýze neustále pohybuje mezi oběma typy kódování (Strauss, Corbinová, 1999, s. 71).

Selektivní kódování

Selektivní kódování je proces, kdy se vybere jedna (popřípadě více) centrální kategorie, kolem které je organizován základní analytický příběh. Klíčová kategorie je pak systematicky uváděna do vztahu k ostatním kategoriím. Tyto vztahy se dále ověřují a kategorie, u nichž je to třeba, se dále zdokonalují a rozvíjejí (Strauss, Corbinová, 1999, s. 86).

Centrální kategorii doporučuje A. Strauss (1987, citováno v (Šeďová, 2007b, s. 93)) volit na základě následujících kritérií:

- je v centrálním postavení vůči ostatním kategoriím (pokud bychom si nakreslili kategorie jako body a vztahy mezi nimi jako spojnice, bude centrální kategorie ta, ke které se sbíhá nejvíce spojnic – ať už přímých, nebo zprostředkovaných přes jiné body, viz schéma kategorií, které vzešlo z mého výzkumu, v odstavci 4.2.3.1),
- je velmi dobře datově nasycená,
- je inkluzivní, tzn. dokáže pod sebe pojmout jiné kategorie,
- směřuje k vytvoření obecnější teorie, je tedy dostatečně abstraktní,
- je dostatečně variantní, tzn. existuje dost dokladů o tom, jakých různých podob mohou nabývat její vlastnosti a dimenze, jak se proměňuje v souvislosti se změnou podmínek atd.,
- po rozpracování detailů této kategorie postupuje vznikající teorie zjevně vpřed.

Úkolem selektivního kódování je integrace jednotlivých kategorií (již propracovaných z axiálního kódování) do zakotvené teorie. Integrace se příliš neliší od axiálního kódování, provádí se pouze na vyšší, abstraktnější úrovni analýzy (Strauss, Corbinová, 1999, s. 86–87).

Selektivní kódování se skládá z několika kroků, které nemusí nutně následovat po sobě přesně v tomto pořadí (ibid, s. 87):

1. podrobné vyložení kostry příběhu o ústředním jevu výzkumu (o centrální kategorii),
2. uvedení pomocných kategorií do vztahu k centrální kategorii podle paradigmatu (podmínečné vlivy, kontext, strategie a následky),
3. vzájemné vztahování kategorií na dimenzionální úrovni,
4. ověřování těchto vztahů podle údajů,
5. doplnění kategorií, které je třeba dále upřesnit a rozvinout.

Účelem vytvoření kostry analytického příběhu je formulace klíčových tvrzení, která se soustřeďují kolem centrální kategorie. Typickou chybou při vytváření kostry analytického příběhu je odpoutání se od výzkumné otázky, malá informační hloubka, přílišná obecnost nebo rozvleklost. V okamžiku, kdy máme hotovou kostru analytického příběhu, začínáme psát vlastní výzkumný text (Šeďová, 2007a, s. 239–241, 244).

3.6.2 Konstruování teorie

Jak jsem již zmínila, jednotlivé etapy od sebe nejsou striktně odděleny, prolínají se – nová teorie vzniká tedy již v průběhu kódování. V této fázi, kdy je analýza dokončena, popisujeme souvislosti centrální kategorie s ostatními kategoriemi a všemi jejich vzájemnými vztahy, čímž postupně zasytíme objevenou analytickou linku (Šeďová, 2007a, s. 239–240).

Výsledná teorie bývá jednak vyložena slovně, jednak bývá zobrazena graficky pomocí různých schémat, diagramů apod. (ibid, s. 95). Podle autorky je třeba, aby při postupném zpracovávání teorie docházelo ke stále větší odpoutanosti od konkrétních zpracování dat a k zobecňování a zabstraktňování vzniklé teorie. Konkrétní příklad konstruování teorie je uveden v odstavci 5.1.

3.7 Závěr kapitoly

V kapitole 3 jsem se zaměřila na metodologii mého výzkumu. Zformulovala jsem výzkumné otázky, které jsem si kladla. Uvedla jsem podrobnou didaktickou analýzu Pythagorovy věty, protože mé výukové experimenty byly zacíleny na toto téma. V této kapitole jsem také popsala cílovou skupinu, vymezila pojem výukový experiment, abych mohla sledovat proces konstrukce poznatků přímo v hodinách matematiky, popsala metody sběru dat a jejich analýzy (konkrétně techniky založené na zakotvené teorii). Pro kvalitativně zaměřený výzkum je důležité si uvědomit, že pokud chceme popisovat, co se pravděpodobně děje v hlavách žáků při řešení úloh, musíme vycházet z jejich vnějších projevů, tedy jak se chovají, co říkají, co zapisují, jaké řešitelské strategie používají apod. K tomu musíme získat co nejbohatší data. I tak je však třeba formulovat úsudky a závěry opatrně.

V následující kapitole budou podrobně rozpracovány tři stěžejní výukové experimenty.

Kapitola 4

Výukové experimenty a jejich analýza

V této kapitole popíši svůj výzkum, který tvoří tři výukové experimenty. Jak jsem již uvedla, je na ně do jisté míry možné nahlížet jako na cykly akčního výzkumu. V tabulce je uveden základní popis všech cyklů, který je dále podrobně rozveden v odstavcích níže.

Cyklus C1	**Cyklus C2**	**Cyklus C3**
Cíl: - vyzkoušení aktivity, která je výrazně podnětná - zjišťování odpovědí na některé otázky (Co se děje v mysli žáků při výuce, při níž mají aktivně poznávat (jak uvažují)? Jak ve třídě probíhá proces řešení úlohy? Jaké překážky se zde objevují? Jaká je moje role v celém procesu? Apod.)	*Cíl:* - nalezení lepšího způsobu získávání dat o práci žáků i učitele - získání dalších informací pro popis činnosti žáků při podnětné výuce, a to prostřednictvím analýzy získaných dat pomocí technik zakotvené teorie	*Cíl cyklu C3:* - rozpracování centrální kategorie *konstrukce poznatků žáků* (konkrétně popsat mechanizmus společné konstrukce poznatků v malých skupinách a identifikovat komunikační vzorce, které k této konstrukci přispívají)
Cílová skupina: - žáci sekundy osmiletého studia (odpovídající 7. ročníku ZŠ)	*Cílová skupina:* - žáci sekundy osmiletého studia (odpovídající 7. ročníku ZŠ)	*Cílová skupina:* - žáci kvarty osmiletého studia (odpovídající 9. ročníku ZŠ)

Upřesnění výzkumné otázky (po cyklu C1):

- Jak si žáci konstruují matematické poznatky?
- Lze odlišit individuální konstrukce poznatků a konstrukce, na nichž se podílí více žáků skupiny?
- Jakou roli hraje v celém procesu učitel a výběr učebních úloh?

Upřesnění výzkumné otázky (po cyklu C2):

- Jak dochází k individuální a společné konstrukci poznatků?
- Jak lze charakterizovat společnou konstrukci poznatků?
- Jaký typ komunikace přispívá ke společné konstrukci poznatků?

4.1 Cyklus C1: Pythagorova věta – „skříň a mozaika“

Na základě zkušeností z prvního roku své výuky matematiky jsem si stále více uvědomovala, jak velké nároky jsou na učitele kladeny. Snažila jsem se učit v souladu se svou představou o „dobré praxi“ ve výuce matematiky, ale přitom jsem měla málo informací o tom, jaký vliv má moje výuka na žáky z hlediska rozvoje jejich matematických znalostí. Rozhodla jsem se tedy provést výukový experiment, který byl později označen jako cyklus C1.[37]

4.1.1 Plán pro cyklus C1

Cíl cyklu C1

Cílem experimentu[38] v cyklu C1 bylo vyzkoušet se žáky aktivitu, která je výrazně podnětná (viz odstavec 2.2.1), a začít zjišťovat odpovědi na některé otázky, které jsem si kladla během prvního roku výuky:

- Co se děje v mysli žáků při výuce, při níž mají aktivně poznávat (tedy jak uvažují)?
- Jak ve třídě probíhá proces řešení úlohy?
- Jaké překážky se při tom objevují?
- Jaká je moje role jako učitelky v celém procesu? Apod.

Z hlediska žáků bylo mým primárním cílem, aby pomocí samostatného řešení vhodně volených úloh odvodili Pythagorovu věty (viz výběr tématu), tedy aby pochopili a uměli používat její geometrickou interpretaci i algebraický popis.

Cílová skupina

Účastníci experimentu byli žáci sekundy osmiletého studia (odpovídající 7. ročníku základní školy). Třídu navštěvovalo celkem 32 žáků, z toho 12 chlapců a 20 dívek. Jak jsem již zmínila v odstavci 3.3, v této třídě jsem byla třídní učitelkou a matematiku jsem žáky učila od primy. Se žáky jsem navázala přátelský vztah. Již od primy se jevili jako komunikativní, s kladným vztahem k matematice, a proto byla volba cílové skupiny experimentu pro mě jednoznačná. Od začátku jsem se snažila jejich výuku vést v konstruktivistickém duchu, většina žáků byla vůči tomuto způsobu výuky vstřícná, uvítali, když byla hodina vedená zajímavě nebo netradičně.

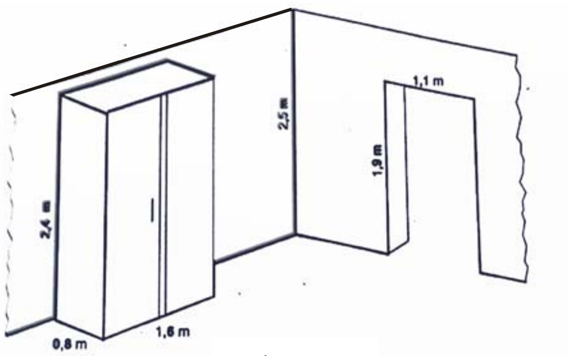
Téma – volba vhodného matematického tématu a jeho zpracování

Jako téma experimentu jsem zvolila Pythagorovu větu. Cílem experimentu byl objev Pythagorovy věty, se kterou se žáci zatím nesetkali. Hlavním důvodem bylo, že toto téma se objevilo přirozeně v tematickém plánu a současně šlo o téma, které se dá zpracovat mnoha různými způsoby, více či méně podnětně.

[37] Cyklus C1 byl popsán i v článcích (Ulrychová, 2004, 2005).
[38] Slovem experiment v této práci budu rozumět výukový experiment (viz odstavec 3.4).

Při přípravě mého přístupu k výuce jsem se inspirovala zpracováním Pythagorovy věty v knize (Hejný, Kuřina, 2001, s. 41–53), v níž F. Kuřina představuje pět přístupů k vyučování Pythagorovy věty od instruktivního, kde učitel předkládá žákům pouze hotové poznatky a vztahy (přístup A), až po konstruktivistický, který žáka aktivizuje k řešení praktického problému (přístup E, podrobněji viz odstavec 2.2). Pro seznámení žáků s Pythagorovou větou jsem zvolila modifikovaný přístup E, který motivoval žáka úlohou z praxe a podle mého tehdejšího názoru nejvíce vedl k vlastnímu objevování.[39]

Cyklus C1 obsahuje úlohy uvedené v tabulce 4.1, příprava experimentu je rozpracována v příloze 1.[40] Jako motivační úlohu jsem plánovala použít úlohu o naklopení skříně v místnosti (obr. 4.1) a pro objevení Pythagorovy věty jsem vybrala prostředí mozaiky[41] (Müllerová a kol., 1990, s. 83), které jsem modifikovala tak, aby nebylo tak instruktivní a nebylo založené pouze na paměťové reprodukci vztahu $a^2 + b^2 = c^2$. Zároveň jsem se snažila předcházet formálnímu uchopení Pythagorovy věty tím, že jsem například v úloze 3 zavedla označení pro obsahy daných trojúhelníků S_1, …, S_9 místo běžného a^2, b^2, c^2. Formulace úlohy 3 však nebyla matematicky zcela korektní. Nekorektnost spočívala ve dvojím významu znaků S_i. Jednak tak byly označeny geometrické objekty, trojúhelníky (vrcholy trojúhelníků nebyly označeny písmeny), jednak číselné veličiny, obsahy těchto trojúhelníků, které měly být značeny spíše $|S_i|$. Tedy matematicky korektní znění úlohy 3 mělo být: *Vypočítejte obsahy trojúhelníků S_1, S_2, …, S_9 (viz obr. 4.3) a najděte součty* $|S_1| + |S_2|$ atd. Věřila jsem však, a jak se později ukázalo, právem, že žáci s tím nebudou mít problém a že tento dvojí význam symbolu S_i nepovede k nedorozumění.



Obr. 4.1

Pro lepší představu a praktické uchopení Pythagorovy věty jsem zvolila modelování konkrétního pravoúhlého trojúhelníku, viz úloha 5 v tab. 4.1. Inspiraci jsem čerpala v (Müllerová a kol., 1990, s. 86),[42] avšak zadání úlohy jsem opět přeformulovala.

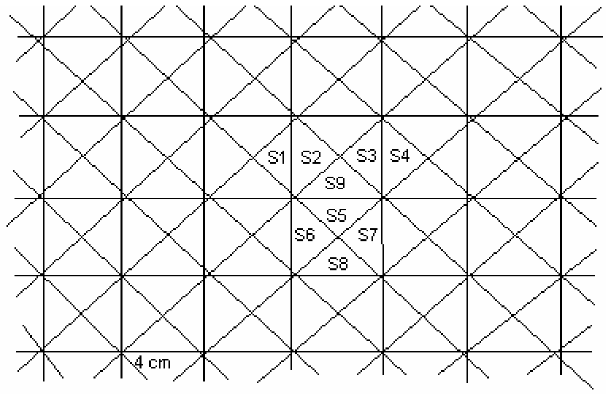
[39] Didaktickou analýzu učiva uvedenou v odstavci 3.2 jsem tehdy ještě neudělala.

[40] V přípravě jsem kromě úloh měla uvedenu ještě formu práce a poznámky shrnující moje očekávání – co úlohou sleduji.

[41] F. Kuřina navrhuje jako další úlohu v přístupu E doplnit tabulku a tím vlastně ověřit, že vztah $a^2 + b^2 = c^2$ pro daný pravoúhlý trojúhelník platí. Mně se však zdála tato úloha umělá, a tak jsem zvolila úlohu podle mého názoru vhodnější. Chtěla jsem, aby žáci sami odvodili vztah a vyslovili Pythagorovu větu.

[42] Původní zadání této úlohy (doplněné o vše prozrazující obrázek) znělo: *Zdůvodněte správnost vytyčení pravého úhlu, které je možno provést v praxi takto: na napjatém motouzu se uváže 13 uzlů tak, aby každé dva měly vždy tutéž vzdálenost (např. 1 m). Pak motouz vypneme tak, aby uzly 1, 4, 8 (a 13 upevněný na témže místě jako 1) se staly vrcholy trojúhelníku. Získáme tak pravoúhlý trojúhelník.*

Dále následovalo řešení dalších úloh na Pythagorovu větu – ať už úloh procvičovacích (ve smyslu osvojování si poznatku), tak i úloh, ve kterých došlo k rozšiřování poznatku (etapa krystalizace).

Úloha 1	Projde skříň s rozměry 1,6 m x 2,4 m x 0,8 m (*š* x *v* x *h*) dveřmi s rozměry 1,1 m x 1,9 m (*š* x *v*)?
Úloha 2	Lze tuto skříň naklopit v místnosti vysoké 2,5 m?
Úloha 3	Vypočítejte obsahy trojúhelníků S_1, S_2, …, S_9 (viz obrázek), a najděte součty $\|S_1\| + \|S_2\| =$, $\|S_2\| + \|S_3\| =$, $\|S_5\| + \|S_6\| + \|S_7\| + \|S_8\| =$.“ 
Úloha 4	Vypočítejte délky stran trojúhelníku S_9.
Úloha 5	Máme lano, na kterém je uvázáno 13 uzlů tak, že každé dva mají vždy tutéž vzdálenost mezi sebou. Spojíme 1. a 13. uzel v jeden. Ve kterých uzlech budou vrcholy pravoúhlého trojúhelníku? (modelovací úloha)
procvičování a rozšiřování poznatku	Úlohy na výpočet délky strany pravoúhlého trojúhelníku, konstrukce pravoúhlého trojúhelníku, ověření, zda je daný trojúhelník pravoúhlý (početně i graficky), slovní úlohy na užití Pythagorovy věty v praxi apod.

Tab. 4.1

Volba formy práce

Když jsem se zamýšlela nad tím, jakou formu práce zvolit, rozhodla jsem se, že použiji frontální a individuální formu práce. Skupinová práce mi nepřipadala vhodná, protože s ní žáci neměli příliš zkušeností. Tato forma práce mi připadala přínosnější i z hlediska cíle experimentu, kterým bylo získat vhled do toho, jak konkrétně žáci poznávají a jak dospívají k Pythagorově větě. Měla jsem zato, že pokud by žáci pracovali v jednotlivých skupinách, nemohla bych je dobře sledovat.

Způsob sběru dat, shromáždění dokumentace, záznamů

V době experimentu jsem měla jen málo zkušenosti s výukovými experimenty ve třídě.[43] Dosud byly mé pokusy spíše neutříděné a data jsem shromažďovala nesystematicky a nárazově. Pro daný experiment jsem se rozhodla provádět participační pozorování, jehož výsledkem budou zejména terénní zápisky pořízené v průběhu hodiny a okamžitě po jejím závěru, zorganizovat doplňkový rozhovor se žáky se zápisem a získat kopie prací vybraných žáků. Videozáznam jsem odmítla z toho důvodu, že pro žáky to měla být běžná výuka, a obávala jsem se, že by přítomnost videokamery mohla průběh hodiny významně narušit. Po pečlivé přípravě a promyšlení obou hlavních částí experimentu jsem provedla vlastní experiment.

4.1.2 Akce

Experiment byl proveden v říjnu 2003 celkem ve 4 vyučovacích hodinách matematiky. Žáci nebyli nijak upozorněni, že se jedná o výukový experiment, pro ně se jednalo o běžnou výuku. Externí pozorovatel nebyl přítomen, hodina nebyla nahrávána. Záznam z mého participačního pozorování jsem zapsala do tabulky, která je v příloze 2. Zde uvedu jen stručný popis[44] realizace experimentu, který bude podkladem pro pochopení analýz v odstavci 4.1.3.

Během první vyučovací hodiny ve středu 15. 10. (12^{45} – 13^{30}), které se účastnilo 30 žáků, jsme se zabývali úlohami 1 až 4.

Druhé vyučovací hodiny v pátek 17. 10. (8^{00} – 8^{45}) se účastnilo 31 žáků. Náplní této hodiny byla ještě úloha 4, protože žáci podávali další způsoby řešení, a tak jsem této úloze chtěla dát oproti plánu větší časový prostor.

Třetí vyučovací hodiny v pondělí 20. 10. (8^{55} – 9^{40}) se účastnilo také 31 žáků. Na začátku hodiny žáci shrnuli dosavadní poznatky (na základě mých otázek: „Známe-li délky dvou stran v trojúhelníku, jak vypočítáme délku té třetí?“, „Když označíme délky stran písmenky, jak vypočítáte délku dané strany?“, „Jak bychom to mohli formulovat slovně?“) a postupně došli ke zformulování Pythagorovy věty (žáky jsem předem seznámila s pojmy přepona a odvěsna). Pak žáci řešili úlohy na výpočet pomocí Pythagorovy věty a také jsem zadala domácí úkol zaměřený na modelování konkrétní situace (viz tab. 4.1).

Na začátku čtvrté vyučovací hodiny v úterý 21. 10. (10^{00} – 10^{45}), které se účastnilo 30 žáků, jsme se nejprve zaměřili na domácí úkol, a pak následovaly procvičovací úlohy.

Na začátku experimentu jsem volila frontální formu práce. Přitom jsem žáky pozorovala a zapisovala si, co se děje. V okamžiku, kdy někteří žáci odkryli určité poznatky, jsem se jim začala věnovat individuálně a jednotlivě je obcházela. Když měli žáci následně prezentovat svá řešení, nebylo pro mě jednoduché vést je tak, aby si vzájemně naslouchali a aby dále na určitém

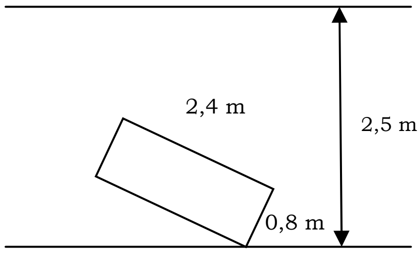
[43] V rámci své diplomové práce (Ťupová, 2001) jsem realizovala několik experimentů, avšak ne ve školní třídě, jen individuálně.

[44] I když by se mělo jednat jen o čistý popis („account of“) toho, co se v hodinách dělo, u vysvětlování činností žáků se nemohu ubránit i jisté interpretaci („account for“), která přijde podrobněji v dalším odstavci Analýzy.

problému pracovali společně. Projevila se nejen jejich výrazná individualizace, ale zřejmě též moje pedagogická nezkušenost. Žáci byli ochotni popisovat své řešení, ale přitom nechtěli věnovat pozornost řešením ostatních.

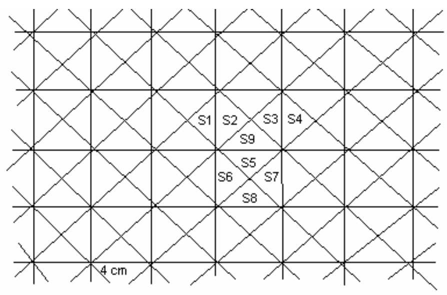
První úloha[45] nečinila žákům velké obtíže, avšak při jejím řešení se někteří z nich nezabývali skutečnými rozměry skříně a dveří, ale modelovali danou situaci např. pomocí penálu a krabičky od kalkulačky, jiní svá řešení pouze tipovali. Někteří žáci začali mezi sebou diskutovat (např. kdyby se skříň otočila o 90°, tak by poté bylo možné pronést skříň dveřmi apod.). Řešení této úlohy jsem nakonec nechala otevřené, abych žáky příliš nenaváděla ke způsobu řešení úlohy následující. Snažila jsem se postupovat co nejvíce konstruktivisticky, a proto i způsob práce žáků zde nebyl lineární, ale „střapatý". Tím, že žáci nahlíželi na tentýž problém z různých stran, začalo se v jejich vědomí vytvářet schéma daného problému.

Zadala jsem druhou úlohu[46] a nakreslila jsem na tabuli boční pohled (obr. 4.2), abych úlohu zkonkretizovala a upřesnila žákům, jakým způsobem mají skříň zvedat. To zřejmě nebylo nutné, protože ani řešení této úlohy nebylo pro žáky obtížné. Měla jsme žáky nechat, aby schematizovali situaci sami. Objevilo se hned několik strategií řešení. Někteří žáci navrhovali naklápět skříň pomalu – měli snad dojem, že řešení daného problému je závislé na rychlosti, nebo ve skutečnosti navrhovali praktické řešení – „budeme skříň pomalu naklápět a uvidíme, kdy se zadrhneme". Matematická situace zde byla propojena velmi intenzivně na životní zkušenost – jeden žák testoval teorii přímo praxí. Druhý den jsem totiž zjistila, že tento žák dokonce doma vyklidil skříň a zkoušel, jestli lze opravdu skříň pomocí naklápění v takto vysoké místnosti postavit. Postupně pak žáci dospěli k tomu, že hlavní úlohu zde hraje úhlopříčka obdélníku 2,4 m x 0,8 m (v x h) a pomocí kružítka lze zjistit, zda se dá skříň naklopit.



Obr. 4.2

Ve třetí úloze[47] žáci správně vypočítali požadované obsahy trojúhelníků jako jednu čtvrtinu obsahu čtverce se stranou délky 4 cm a jejich příslušné součty. Tuto úlohu jsem žákům zadala proto, abych jim napomohla na cestě za objevem Pythagorovy věty. Byla to úloha přípravná pro úlohu 4. Znají-li totiž žáci příslušné obsahy čtverců, není pak již podle mého mínění obtížné vypočítat délky stran trojúhelníku S_9 (o čemž mě přesvědčil Petr,[48] viz dále).



Obr. 4.3

[45] *Je možné pronést skříň s rozměry 1,6 m x 2,4 m x 0,8 m (š x v x h) dveřmi s rozměry 1,1 m x 1,9 m (š x v)?*

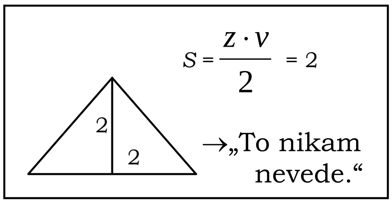
[46] *Lze tuto skříň naklopit v místnosti vysoké 2,5 m?*

[47] *Vypočítejte obsahy trojúhelníků S_1, S_2, …, S_9 (viz obr. 4.3) a najděte součty $|S_1| + |S_2|$, $|S_3| + |S_4|$, $|S_5| + |S_6| + |S_7| + |S_8|$.*

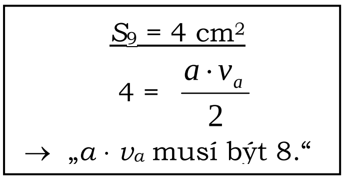
[48] Jména žáků jsou pseudonymy, odpovídají však pohlaví žáka.

Ve čtvrté úloze[49] se ukázala značná variabilita ve způsobech řešení úlohy, které však nutně nevedly ke správnému řešení. Někteří žáci[50] se pokusili využít vzorec pro obsah trojúhelníka (obr. 4.4[51] a 4.5[52]), jiní určovali délky stran pomocí přibližných odhadů[53] (obr. 4.6 a 4.7) a „sklápění” (otočení) – opět hraje roli pohyb (obr. 4.8[54]). Jednoho žáka také napadlo určit délky stran trojúhelníku pomocí trojúhelníkové nerovnosti (což k cíli nevede), ovšem dále svou myšlenku nerozvedl.

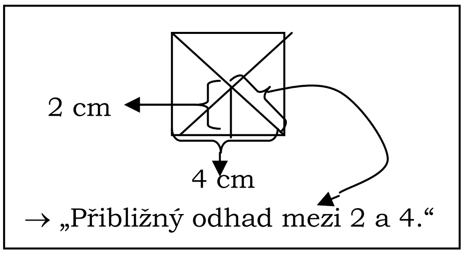
V průběhu první hodiny vypočítal délky stran daného trojúhelníka jen jeden žák (Petr).[55] Proto se podrobněji podíváme na celou jeho práci, která vedla až k objevu Pythagorovy věty.



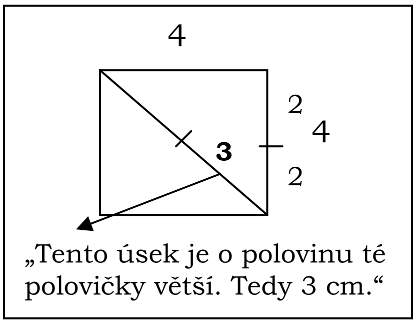
Obr. 4.4



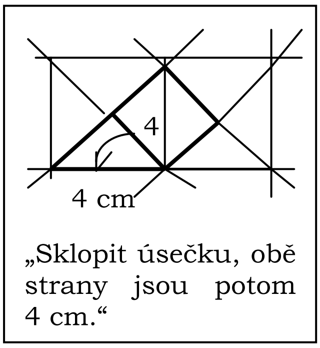
Obr. 4.5



Obr. 4.6



Obr. 4.7



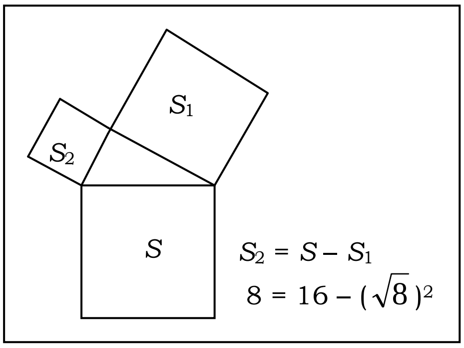
Obr. 4.8

Petr si nejprve uvědomil, že trojúhelníky S_3 a S_4 tvoří čtverec, sečetl jejich obsahy a potom již odmocněním obsahu čtverce vypočítal příslušnou odvěsnu trojúhelníka (viz dále). S Petrem jsem pracovala individuálně (ostatní žáci se většinou zabývali řešením zadané úlohy nebo přihlíželi řešení souseda). Petr tedy znal délky tří stran v trojúhelníku, a tak jsem mu zadala úkol, aby určil vztah mezi těmito stranami v trojúhelníku (což by podle mého názoru mohlo vést k objevu Pythagorovy věty).

Petr uvažoval následovně: „$S = S_3 + S_4 = 8$ cm^2. Délka strany čtverce je tedy $\sqrt{8}$ cm. Druhá strana v trojúhelníku je totéž, trojúhelník je rovnoramenný a třetí strana je jasná [4cm].“ Zeptala jsem se, zda mezi stranami trojúhelníku existuje nějaký vztah. Během první hodiny již Petr

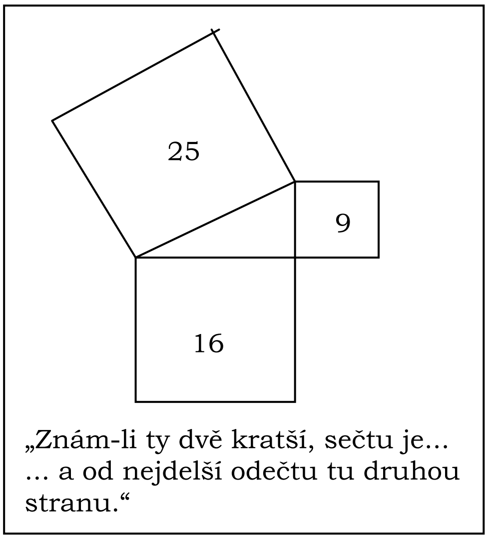
[49] *Vypočítejte délky stran trojúhelníku S_9.*
[50] Uvedené práce žáků jsou překresleny z tabule.
[51] Výpočet na obrázku 4.4 je chybný, základna trojúhelníku má délku 4 cm. To si však žák neuvědomil a řešení nenašel.
[52] Výpočet je sice správný, ovšem žáka také k cíli nedovedl.
[53] Přibližné odhady délky strany jsou velmi hrubé.
[54] Řešení je chybné, jde o chybnou intuitivní představu.
[55] Petr patřil mezi nadané žáky. Úspěšně řešil Matematickou olympiádu, v primě mi na škole v přírodě pokládal různé hádanky, logické úlohy atd.

s dalším řešením nepřišel a já jsem se věnovala ostatním žákům. Vzhledem k nedokonalému zdokumentování průběhu experimentu již není možné zpětně dohledat, jak Petr dále v první hodině postupoval. Během druhé hodiny přemýšlel Petr nad danou zákonitostí. Nejprve přišel na řešení, které k objevu nevedlo (viz příloha 2, promluva a v řádku 14) a sám ho zavrhl. Po chvíli přemýšlení objevil následující zákonitost: Vztah mezi délkami stran v pravoúhlém trojúhelníku se dá vyjádřit pomocí obsahů čtverců (viz obr. 4.9).[56] Vyšel z obsahů čtverců v mozaice z úlohy 3 a překreslil si obdobný obrázek. Jednotlivé čtverce označil S, S_1 a S_2 a přemýšlel nad možnou zákonitostí. Je zde vidět jakási změna v jeho způsobu uvažování. Již nepoužívá prostředí mozaiky, trojúhelník už není rovnoramenný, avšak ještě stále dosazuje do vztahu hodnoty pro rovnoramenný trojúhelník. Otázkou je, proč zvolil ve vyjádření tu, podle mého názoru, těžší variantu – vztah pomocí rozdílu druhých mocnin délek stran.



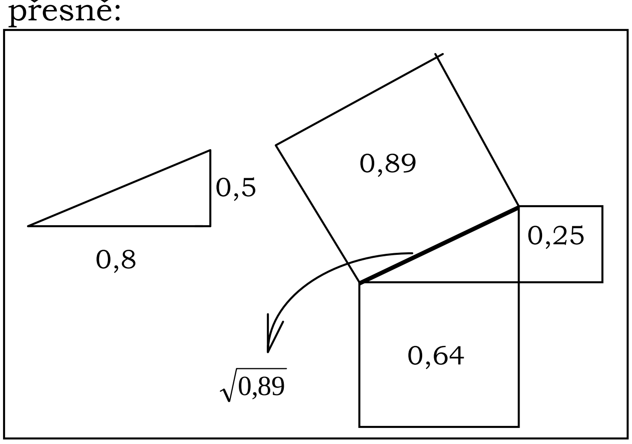
Obr. 4.9

Zeptala jsem se Petra na obecné řešení. Po chvilce individuální práce podal konkrétní příklad (obr. 4.10). Ja zajímavé, proč zvolil právě trojúhelník se stranami 3, 4, 5. Buď již tento trojúhelník někde viděl (na což ale neukazuje nic z toho, co mi během experimentu řekl), nebo vzhledem k jeho zálibě v číslech a logických hádankách ho tato číselná kombinace mohla po určitých úvahách i napadnout. Pomocí tohoto trojúhelníku Petr zformuloval v podstatě dva izolované modely Pythagorovy věty, i když ne úplně přesně: „Znám-li ty dvě kratší, sečtu je … a od nejdelší odečtu tu druhou stranu."



Obr. 4.10

Požádala jsem Petra, aby řešil podobnou úlohu, kde by však délky stran byly zadány desetinnými čísly. Petr zvolil dvě délky stran v trojúhelníku, a to 0,8 cm a 0,5 cm (obr. 4.11) – zřejmě měl od začátku v úmyslu, že půjde o odvěsny –, a řešil tuto úlohu následovně. Nejprve určil obsahy čtverců nad odvěsnami



Obr. 4.11

[56] Bohužel nemám k dispozici originály Petrových řešení. Jeho práci jsem si překreslila a v tom tvaru ji zde také reprodukuji.

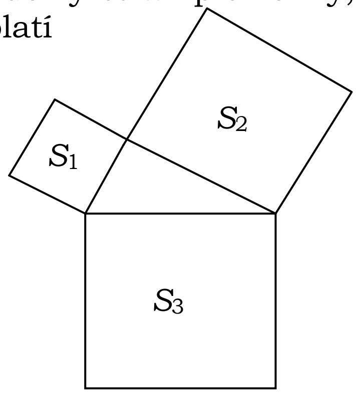
(pojmy odvěsna a přepona zatím nepoužíval)[57], pomocí součtu těchto obsahů vypočítal obsah čtverce nad přeponou a odmocněním získal délku strany čtverce, tedy přeponu pravoúhlého trojúhelníka. Tato úloha vlastně ověřila, že Petr má již solidní představu o Pythagorově větě.

Dalším problémem, který jsem Petrovi nastínila, bylo, jestli tento vztah pro délky stran v trojúhelníku platí i v obecném trojúhelníku (tedy chtěla jsem, aby se setkal s ne-modelem). Petr si nakreslil rovnostranný trojúhelník,[58] nakreslil příslušné čtverce nad jeho stranami a pomocí číselného výpočtu hned objevil, že daný vztah neplatí.

Na začátku třetí hodiny se Petr přihlásil ke slovu a vysvětlil, na co doma přišel. Doma totiž ještě zkusil narýsovat obecný trojúhelník, změřil pravítkem délky stran trojúhelníku a vypočítal příslušné obsahy čtverců. Po dosazení objevené pravidlo pro součet obsahů čtverců neplatilo. Pro něj to byl dostatečný důkaz, že daný vztah pro obecný trojúhelník neplatí.

Potom jsme společně se všemi žáky shrnuli získané poznatky u tabule (pravděpodobně na základě Petrovy domácí práce[59]), tedy že délky stran vypočítáme pomocí vztahu $S_1 + S_2 = S_3$ (tento vztah byl vázán k obrázku, viz obr. 4.12) a jeden žák na mou výzvu („Když označíme délky stran písmenky, jak vypočítáte danou stranu?“) napsal na tabuli,[60] že platí

$S_1 = a^2$
$S_2 = b^2$ $\qquad S_1 + S_2 = S_3$
$S_3 = c^2$ $\qquad a^2 + b^2 = c^2.$



Obr. 4.12

Na základě těchto poznatků byli žáci společně schopni vyslovit Pythagorovu větu. Dále jsme potom již jen procvičovali a společně řešili úlohy na tabuli. Z mých záznamů nelze vyčíst, kteří žáci kromě Petra ještě větu samostatně nebo s pomocí objevili.

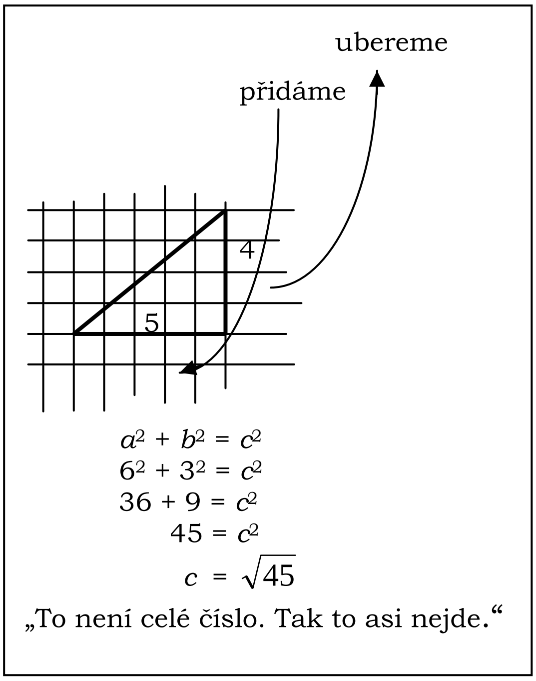
Za domácí úlohu[61] jsem zvolila takový úkol, v němž žáci modelovali trojúhelník, a vlastně tak problematiku prakticky uchopili. Důležitou roli hrála manipulace s předměty.

Čtvrtou hodinu jsme zahájili domácím úkolem. Věra vymodelovala z provázku pravoúhlý trojúhelník (s vrcholy v uzlech 1, 4 a 8) a nalepila ho na papír. Petr tentokrát doma nepracoval, ale byl inspirován prací spolužačky, a tak si na místě ustřihl proužek papíru (aby nahradil provázek), který složil tak, aby přehyby představovaly dané uzly. Pomocí tohoto modelu hledal pravoúhlé trojúhelníky. Objevil též 1., 4. a 8. uzel. „To znamená, že

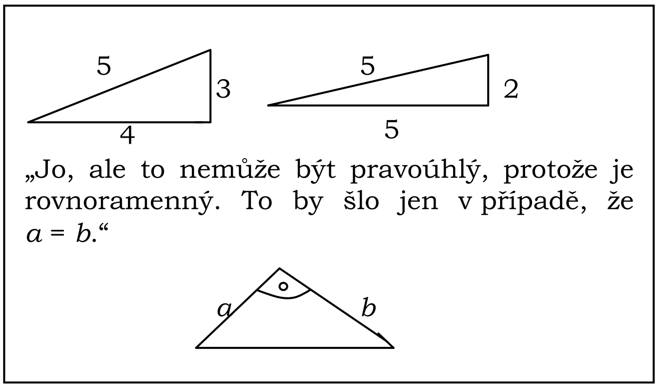
[57] Žákům jsem tyto pojmy připomněla až ve třetí vyučovací hodině experimentu.
[58] Bohužel jsem si nepoznačila, jakou délku strany zvolil.
[59] To však není možné již zpětně dohledat. Opět se ukazuje, že experiment nebyl dostatečně zdokumentován.
[60] Žák sám označil strany v trojúhelníku *a*, *b*, *c*.
[61] *Na laně je uvázáno 13 uzlů tak, že každé dva uzly mají vždy tutéž vzdálenost. Spojíme 1. a 13. uzel v jeden. Ve kterých uzlech budou vrcholy pravoúhlého trojúhelníka?*

trojúhelník má délky stran 3, 4 a 5 jednotek," řekl. Někteří žáci konkrétní situaci pouze načrtli na papír.

Jiná žákyně (Tamara) se začala úlohou zabývat také až při hodině. Pracovala na čtverečkovaném papíru a stále uvažovala, že provázek má 13 uzlů. Chtěla najít jiný příklad pravoúhlého trojúhelníku. O dané problematice měla následující představu (obr. 4.13): „Ubereme-li jeden dílek a přidáme ten dílek sem, trojúhelník zůstane pravoúhlý a má obvod 12." Na vyzvání však žákyně ukázala, že její úvaha nebyla správná, protože po odmocnění součtu druhých mocnin délek odvěsen nevyjde celé číslo. Pokusila se svou myšlenku uplatnit ještě jednou a navrhla jiný trojúhelník, ve kterém zkusila také odebrat a přidat ještě jeden dílek (obr. 4.14), avšak ani tentokrát ji to k cíli nedovedlo.



Obr. 4.13



Obr. 4.14

Dále následovaly procvičovací úlohy z učebnice.

4.1.3 Analýza

Průběh experimentu jsem po vyučovacích hodinách zaznamenala do tabulky (tab. 4.2). Celá tabulka se nachází v příloze 2, zde uvádím pouze ilustrativní příklad, který se týká úvodní situace se skříní. Tabulku jsem zpracovala do tří sloupců – činnost učitele, činnost žáků (popis) a poznámky, které zpravidla představují doplňující informace, případně mou prvotní interpretaci. Pokud jsem nevěděla, kdo z žáků reagoval, zapsala jsem místo jména písmeno X. Promluvy žáků jsem dávala do uvozovek.

K tomuto zpracování jsem využila participačního pozorování žáků, rozhovorů při hodině (kdy jsem reagovala na řešení žáků nebo se zeptala na to, co mi nebylo jasné), analýzy materiálů (terénních zápisů z průběhu hodiny, podrobných příprav na hodinu, prací vytipovaných žáků: školní sešit, domácí práce). S pomocí svého záznamového archu jsem provedla následnou analýzu experimentu.

Činnost učitele	*Činnost žáků (popis)*	*Poznámky*
3 „A jak se o tom přesvědčíme početně, že to lze?“	**a)** - X: „Musíme to narýsovat a změřit úhlopříčku.“	
	b) - X: „Ne, o ty dva rohy se to zadrhne.“	- nedokonalá představa (rozhodující je ten jeden roh)
4 „A jak ji početně určíme?“	**a)** - X: „Je potřeba získat úhlopříčku.“	- zopakovalo se
	b) - X: „Ano, když to dojde do stropu, spodní část posuneme.“	- opět představa pohybu
	c) - František ukazuje na penálu, jak zvedá skříň	- nebere ohled na zadané rozměry
	d) - XX a Pavel: „To se musí zkusit kružítkem půlkružnicí, jestli ano nebo ne.“ - nakonec většina žáků navrhovala tento způsob řešení	- Pavel – pečlivý, sešit vede v naprostém pořádku, rýsuje přesně, píše úhledně, – raději dopisuje úlohu doma …

Tab. 4.2

Některé poznatky, k nimž jsem dospěla na základě analýzy získaných dat, jsem již z důvodu přehlednosti popisu uvedla výše v části Akce. Proto se zde vyjádřím jen k několika aspektům experimentu.

Cíl, aby žáci odvodili Pythagorovu větu pomocí řešení daných úloh, byl v experimentu částečně splněn (alespoň pro některé žáky). U Petra se podařilo zachytit postup jeho objevování poměrně podrobně. Domnívám se, že si vytvořil generický model již po několika málo izolovaných modelech. (Otázkou zůstává, zda se náhodou s izolovaným modelem trojúhelníku o stranách délek 3, 4 a 5 nesetkal již dříve.) Již méně se dařilo zjišťovat, jak uvažovali ostatní žáci. Lze jen říci, že třída jako celek k žádoucímu výsledku dospěla.

Očekávala jsem, že přístup, kdy žáci sami vyvodí Pythagorovu větu, u nich pomůže zamezit vzniku formálního poznání, ovšem to se ukázalo jako neoprávněné. Z následujících hodin bylo patrné, že si stále někteří z nich pamatují vztah $a^2 + b^2 = c^2$ (abecedně) a nechápou, co je tímto vztahem vyjádřeno. Přesvědčila jsem se o tom např. tehdy, když jsem označila trojúhelník jinak než *ABC*. Někteří žáci si okamžitě trojúhelník přeznačili na trojúhelník *ABC*. Jen málo z nich pak bylo schopno úlohu řešit správně – u nich by mohl vztah $a^2 + b^2 = c^2$ být na úrovni generického modelu. Ostatní měli problém uvědomit si, co je odvěsna a co přepona, a potom při řešení úloh náhodně druhé mocniny dvou zadaných délek stran sčítali (mechanicky používali vzorec), méně často odčítali. Bylo zajímavé, že tito žáci často odmítali nápomoc obrázkem, jako by nechtěli do situace proniknout, ale stačil by jim návod, jak postupovat. To bylo pro mě jistým zklamáním, protože jsem se při své výuce snažila tyto tendence potlačit.

U úloh na procvičování Pythagorovy věty jsem zaznamenala, že někteří žáci zapisují a řeší úlohu pomocí obsahů čtverců $S_1 + S_2 = S_3$ (ne vztahem pro výpočet délek stran $a^2 + b^2 = c^2$). U těchto žáků převládá zřejmě geometrická interpretace Pythagorovy věty, žáci si opravdu pod druhými mocninami představují obsahy čtverců nad danými stranami pravoúhlého trojúhelníka (označení stran tedy není formální). Vztah $S_1 + S_2 = S_3$ spolu s geometrickou představou situace by pro ně mohl být generickým modelem.

Připomeňme, jaké byly cíle prvního experimentu. Chtěla jsem zjišťovat, co se asi děje v hlavách žáků při výuce, při níž mají aktivně poznávat, jak ve třídě probíhá proces řešení úlohy, jaké překážky se při tom objevují a jaká je moje role v celém procesu. Na tyto otázky se podařilo odpovědět jen částečně. Výše jsem na základě jednání a promluv žáků popsala pravděpodobný způsob uvažování několika málo žáků, lépe se dařilo zachytit některé jejich strategie řešení úloh. Mezi hlavní překážky konstruktivisticky vedené výuky patřila má určitá pedagogická nezkušenost (nedařilo se např. navodit produktivní diskuzi mezi žáky) a některé osobnostní rysy žáků, kteří upřednostňují přejímání poznatků či nechtějí naslouchat strategiím ostatních a prosazují pouze svoje řešení. Potvrdilo se také, že role učitele je v konstruktivisticky pojaté výuce klíčová.

4.1.4 Reflexe

Reflexe směrem do výuky

Při realizaci experimentu jsem začala zjišťovat odpovědi na některé otázky, které jsem si kladla během prvního roku výuky. Přesvědčila jsem se o tom, že podnětný přístup k vyučování je vhodným prostředkem k probuzení aktivity žáků k vlastnímu objevování. Žáci se pustili do práce s nadšením a skutečně na hledaný poznatek alespoň někteří z nich přišli. Na druhé straně se to ovšem nepodařilo u všech a otázkou zůstává, do jaké míry předložený způsob odhalování Pythagorovy věta pomáhá v zamezení formálních poznatků (viz odstavec 3.2.3).

Dalším poznatkem při realizaci a analýze tohoto experimentu bylo, že se např. při řešení úlohy 4 objevila velká variabilita způsobů řešení, které by vlastně mohly být izolovanými modely příštího poznání. K tomu je však nutné, aby tyto způsoby řešení byly též prezentovány a prodiskutovány (reflektovány žáky). Jak jsem zmínila, bylo obtížné přimět žáky, aby si navzájem naslouchali. Domnívám se, že jednou z příčin by mohl být charakter žáků přijímaných na naše gymnázium. Tito žáci patřili na základní škole zpravidla mezi premianty a hráli vedoucí roli ve třídě (alespoň v matematice). I na gymnáziu chtějí pak patřit mezi ty nejúspěšnější a vyniknout. Není tedy jednoduché je přimět k tomu, aby si navzájem naslouchali a snažili se pochopit i řešení či nápady ostatních. Žáci upřednostňují většinou pouze svá řešení, proto se při řešení různých problémů a úloh vyskytuje velké množství nápadů a myšlenek.

Z toho pro mě vyplynulo ponaučení, že by bylo třeba, aby žáci prezentovali své způsoby řešení, které by obohacovaly i ostatní žáky a pomáhaly jim, aby si konstruovali vlastní matematické poznání. Je tedy nutné zaměřit se nejen při realizaci experimentu, ale také při samotném vyučování na koordinaci práce všech žáků ve třídě a vést žáky, aby si vzájemně naslouchali, i když je to v tomto počtu (30–32 žáků) někdy obtížné.

Dalším faktem, který jsem si uvědomila, byla otázka vhodné motivace. Úloha o naklopení skříně v místnosti (úloha 2) se mi následně začala jevit sice jako úloha zajímavá, motivující, avšak v tradičním, ne konstruktivistickém pojetí (viz odstavec 2.1.2). Nedostatkem takové úlohy je, že nevede k tvorbě izolovaných modelů, resp. neukazuje cestu k cíli. Spíše má navodit zájem žáků dozvědět se onen poznatek, pomocí kterého lze úlohu teoreticky vyřešit (prakticky by to žáci řešili tak, že by prostě skříň pomalu naklápěli a experimentálně zjistili, zda to půjde).

V průběhu experimentu došlo k řadě zajímavých situací. Mezi ně patří např. úvahy žáků v úloze 2, kdy řešení daného problému (naklápění skříně) je, jak jsem již zmínila, závislé na rychlosti. Zajímavé by jistě bylo, kdyby se žáci zamysleli nad tím, jak vypadá trajektorie tohoto pohybu.

Dalším mým zjištěním je, že úloha 3 se mi zpětně jeví jako úloha, kterou nebylo nutné žákům na cestě za objevem Pythagorovy věty zadávat. Některým žákům sice usnadnila řešení úlohy (např. Petrovi), protože jim vlastně ukázala „mezikrok”, který by bylo možné použít, kdyby úloha 3 zadána nebyla, ale na druhou stranu se nejedná o úlohu návodnou, která by pomohla procesu konstrukce daného poznatku.

Konečně z toho, jaké obtíže žáci měli z dlouhodobého hlediska (projevy formálnosti jejich uchopení Pythagorovy věty), jsem usoudila, že pro neformální uchopení poznatku nestačí jen samotný fakt, že žáci poznatek sami objeví, ale že je třeba cíleně pracovat na kontextu, v němž ho objevují, a na upevnění poznatku. Konkrétně v tomto kontextu jde o to, používat více takových úloh, v nichž se bude Pythagorova věta používat pro pravoúhlé trojúhelníky označené jinými písmeny než *a, b, c*, případně na trojúhelníky označené sice *ABC*, ale s pravým úhlem u vrcholu *A* a *B*. Zřejmě je třeba žákům zprostředkovat více izolovaných modelů, než jim umožnil mnou zvolený přístup.

Další otázkou je, zda by nebylo vhodnější zvolit pro objev Pythagorovy věty trojúhelník, který není rovnoramenný, nebo alespoň doplnit rovnoramenný trojúhelník ve fázi objevování ještě trojúhelníkem, který rovnoramenný není. Ovšem z analýzy experimentu vyplynulo, že okolnost, že byl zvolen rovnoramenný trojúhelník, žákům potíže nepůsobila.

V průběhu experimentu se projevila výrazná individualizace žáků, ale zřejmě též moje pedagogická nezkušenost. Žáci chtěli popisovat své řešení, ale přitom nevěnovali pozornost řešením ostatních. Ocitla jsem se zde trochu v dilematu, kdy jsem si uvědomovala, že bych měla podporovat autonomii každého žáka na straně jedné, a vyvolat diskuzi na straně druhé. Objevily se zde situace, kdy se mi to dařilo, ale také situace, kdy se mi to nedařilo. Je však již těžké vzhledem k nedokonalému zdokumentování dat se zpětně zaměřit na toto hledisko analýzy. Zaměřím se na něj tedy v následujícím cyklu.

Reflexe směrem k dalšímu výzkumu

Po vytvoření tabulky v příloze 2 jsem si uvědomila, že pozorování je velmi důležitou metodou pro získání dat, není ale dostačující. Určitě je nutné obohatit způsoby získávání informací o práci žáků např. pomocí audio-, popř. videozáznamu. Vhodná by také byla účast externího pozorovatele. Podrobnější data by umožnila jejich hlubší analýzu, než jakou jsem mohla provést v cyklu C1. Jak již bylo uvedeno, v podstatě jsem byla schopna popsat způsob konstrukce poznatků u jednoho žáka a pak u třídy jako celku. Zpětně jsem již nedokázala rozpracovat, jaká byla participace žáků na „společné“ práci – kolik udělal učitel a kolik žáci; a právě míra participace žáků vs. učitele na „společné“ práci je pro konstruktivistický postup rozhodující. Dále jsem se příliš soustředila na jednotlivce a rekonstrukci jeho myšlenkových pochodů na cestě za objevem, aniž bych byla schopná posoudit, do jaké míry se při konstrukci poznatků žáci ovlivňují. Otázkou také zůstává (viz reflexe do výuky), jak ovlivnil proces objevování Pythagorovy věty výběr úloh.

Na základě analýzy dat z prvního experimentu jsem nakonec upřesnila původní výzkumné otázky z odstavce 4.1.1.

Upřesnění výzkumných otázek

- Jak si žáci konstruují matematické poznatky?
- Lze odlišit individuální konstrukce poznatků a konstrukce, na nichž se podílí více žáků skupiny?
- Jakou roli hraje v celém procesu učitel a výběr učebních úloh?

4.2 Cyklus C2: Pythagorova věta – „mřížový čtverec 1“

Na základě poučení z cyklu C1 jsem se rozhodla provést další experiment, ve kterém se zaměřím na vylepšení způsobu zaznamenávání dění ve třídě a na následnou hlubší analýzu dat s cílem hledat odpovědi na výzkumné otázky a identifikovat důležité kategorie, díky nimž budu moci svou práci ještě konkrétněji zaměřit.

4.2.1 Plán pro cyklus C2

Cíl cyklu C2

Mým cílem bylo zrealizovat experiment, v němž bude opět využita podnětná výuka, s cílem a) nalézt lepší způsob získávání dat o práci žáků i učitele, b) získat odpovědi na výzkumné otázky z odstavce 4.1.4, a to prostřednictvím rigoróznější analýzy získaných dat (pomocí technik zakotvené teorie).

Z hlediska žáků bylo mým hlavním cílem, aby pomocí jiných vhodně volených úloh než v cyklu C1 znovuodvodili Pythagorovu větu, tedy aby tuto větu uviděli v nových souvislostech, což by mohlo přispět k odbourávání formálnosti poznatků u některých z nich. Ve druhém plánu by se žáci měli seznámit s novou metodou práce – metodou postupného uvolňování parametrů.

Cílová skupina

Experiment jsem záměrně provedla se žáky stejné třídy o půl roku později než cyklus C1 (ve stejném školním roce). Chtěla jsem porovnat způsob jejich práce s určitým časovým odstupem a sledovat, zda uvidí souvislost s tím, co již dělali (Pythagorova věta jim byla již známa). Kromě toho jsem doufala, že znovuobjevení Pythagorovy věty může napomoci u některých žáků v odstraňování formálnosti jejich uchopení této problematiky.

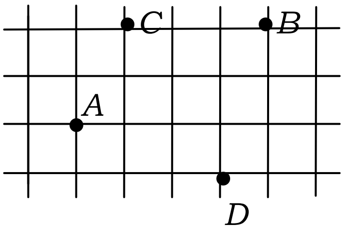
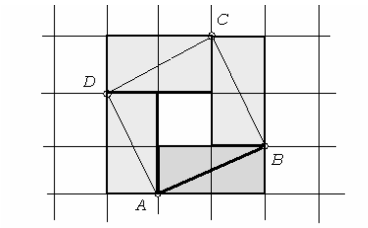
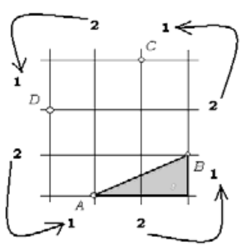
Téma – volba vhodného matematického tématu a jeho zpracování

Experiment, který jsem provedla v říjnu 2003 a jehož cílem bylo objevení Pythagorovy věty pomocí prostředí mozaiky, byl značně nedokonalý, teprve jsem se seznamovala s metodologií výzkumu. Žáci Pythagorovu větu tehdy neznali, jednalo se tedy o konstruování zcela nového poznatku.

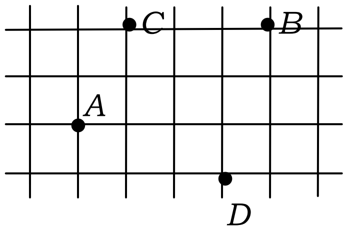
Pro druhý experiment jsem zvolila stejné téma, ale jiný způsob odvozování. Jednalo se o *Pythagorovu větu metodou postupného uvolňování konstant* (inspirace pochází od D. Jirotkové, 2004). Cílem experimentu bylo znovuobjevení Pythagorovy věty v prostředí čtverečkovaného papíru a metodou postupného uvolňování konstant (parametrů) (Jirotková, 2004; Stehlíková, Ulrychová, 2005). Tato metoda patří mezi důležité metody práce v matematice, rozvíjí induktivní usuzování a umožňuje žákům vlastním experimentováním odvozovat nové poznatky. Proto bylo cílem experimentu nejen znovuobjevit Pythagorovu větu, ale také do jisté míry zvládnout novou metodu práce.

Mým úkolem bylo podrobně si rozmyslet jednotlivé úlohy pro žáky, formulovat problémové otázky, zamyslet se nad jejich obtížností, vytvořit různé podpůrné (ne však příliš návodné) otázky, rozvrhnout úlohy do vyučovacího procesu, rozpracovat možná řešení žáků a s tím související moje reakce na argumenty žáků atd.

Pro podrobnou přípravu experimentu jsem připravila podobně jako v cyklu C1 tabulku (ukázka je v tab. 4.3, nezkrácená tabulka je v příloze 3), která obsahuje dva sloupce. První sloupec obsahuje úlohy, otázky, možná řešení, ilustrace, formy práce. Ve druhém sloupci jsou uvedeny moje případné poznámky a očekávání. V tabulce 4.4 jsou vypsány pouze úlohy pro žáky bez komentáře.

Činnost *(problém, forma práce)*	Co tím sleduji? *(očekávání)*
Úloha 1: *Vzájemná poloha dvou bodů* • a) Zapište symbolicky, jak se dostaneme z bodu *A* do bodu *B*, a pak zpět z bodu *B* do bodu *A* (totéž pro body *C* a *D*) (viz obr.). - individuální forma práce  Např.: *A* →→→→↑↑*B*, popř. *A* ↑↑→→→→*B, A* →↑→↑→→*B,* popř. $A \overset{4}{\rightarrow} \overset{2}{\uparrow} B$ • b) Najděte nejkratší cestu z bodu *A* do bodu *B*.	- přípravná úloha - očekávám vyšší variabilitu způsobů řešení žáků - efektivita práce?
Úloha 2: *Mřížový čtverec* • a) Vytvořte k dané mřížové úsečce mřížový čtverec. - individuální forma práce Různé způsoby řešení: - otočení o 90°  i) konceptuální (je obrázek) – otočení obdélníku s příslušnou úhlopříčkou, popř. trojúhelníku (viz obr. vlevo) popis: $A \overset{2}{\rightarrow}\overset{1}{\uparrow} B \overset{2}{\uparrow}\overset{1}{\leftarrow} C \overset{2}{\leftarrow}\overset{1}{\downarrow} D \overset{2}{\downarrow}\overset{1}{\rightarrow} A$  ii) procesuální (proces 2 - 1, 3 – 1, …) (viz obr. vlevo) Např. čtverec nad mřížovou úsečkou 3 – 1: $A \overset{3}{\rightarrow}\overset{1}{\uparrow} B \overset{3}{\uparrow}\overset{1}{\leftarrow} C \overset{3}{\leftarrow}\overset{1}{\downarrow} D \overset{3}{\downarrow}\overset{1}{\rightarrow} A$ • b) Popište obecně, jak vznikne mřížový čtverec nad danou mřížovou úsečkou.	- přípravná úloha

Tab. 4.3

<table>
<tr><td>Úloha 1</td><td>Vzájemná poloha dvou bodů
a) Zapište symbolicky, jak se dostaneme z bodu A do bodu B, a pak zpět z bodu B do bodu A (totéž pro body C a D) (viz obr.).


b) Najděte nejkratší cestu z bodu A do bodu B.</td></tr>
<tr><td>Úloha 2</td><td>Mřížový čtverec
a) Vytvořte k dané mřížové úsečce[62] mřížový čtverec[63].
b) Popište obecně, jak vznikne mřížový čtverec nad danou mřížovou úsečkou.</td></tr>
<tr><td>Úloha 3</td><td>Obsah mřížového čtverce
a) Načrtněte mřížový čtverec 2 – 0[64] a vypočítejte jeho obsah.
b) Vypočítejte obsah mřížového čtverce 1 – 1.
c) Vypočítejte obsah mřížového čtverce 2 – 1.
d) Vypočítejte obsah mřížového čtverce 3 – 1.
atd.</td></tr>
<tr><td>Úloha 4</td><td>Závislost
a) Zapište obsahy mřížových čtverců do tabulky.
→ navrhnout tabulku (pro n = 1):
<table>
<tr><td>$A \rightarrow$</td><td>$B \uparrow$</td><td>S</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td></td></tr>
<tr><td>m</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>
b) Doplňte řádek 5 – 1, aniž byste si nakreslili obrázek.
c) Vytvořte tabulku pro n = 2, 3, …, n</td></tr>
</table>

Tab. 4.4

Volba formy práce

Když jsem volila formu práce pro cyklus C2, zvažovala jsem i závěr z cyklu C1, a sice že je nutné vést žáky k vzájemnému naslouchání a spolupráci. Ovšem opět jsem měla dilema, jak v případě skupinové práce vlastně zjistit, jak žáci pracují. Navíc jsem chtěla dát žákům prostor pro velkou variabilitu řešení. Proto jsem opět zvolila frontální a individuální formu práce s tím, že jim v průběhu experimentu nebudu bránit v případné spolupráci.

[62] Mřížová úsečka je úsečka, jejíž krajní body leží v uzlových bodech mřížky.

[63] Mřížový čtverec je čtverec, jehož vrcholy leží v uzlových bodech mřížky.

[64] Mřížový čtverec $m - n$ (čtverec $ABCD$, v každé polorovině jeden) je dán mřížovou úsečkou $m - n$ (úsečka AB), pro kterou platí A[0; 0] a B[m; n].

Způsob sběru dat, shromáždění dokumentace, záznamů

Velmi důležitým krokem při přípravě experimentu v cyklu C2 bylo zamyslet se nad tím, jakým způsobem vylepším sběr dat oproti předcházejícímu experimentu, aby vypovídající hodnota dat byla větší. Zdroje, které jsem se rozhodla použít, byly opět participační pozorování, terénní zápisky, práce vytipovaných žáků a rozhovor se žáky; navíc jsem tentokrát zařadila audionahrávky některých částí experimentu na diktafon a několik videosekvencí a fotografií žákovských prací z tabule. Na jednu vyučovací hodinu jsem plánovala pozvat také externího pozorovatele (D. Jirotkovou).

4.2.2 Akce

Experiment byl proveden v dubnu 2004 ve třídě při hodinách matematiky. Žáci opět nebyli upozorněni, že se účastní výukového experimentu, pro ně to byla běžná výuka. Experimentu jsme věnovali tři celé vyučovací hodiny a část další hodiny. Průběh experimentu jsem následně zaznamenala do tabulky se sloupci *činnost žáků*, *činnost učitele* a *poznámky* s náznakem interpretace a s doplňkovými informacemi. Celá tabulka je v příloze 4.

Během první vyučovací hodiny v pátek 16. 4. (8^{00} – 8^{45}), které se účastnilo 29 žáků, jsme se zabývali pouze úlohou 1. Druhé vyučovací hodiny ve středu 21. 4. (12^{45} – 13^{30}) se účastnilo 30 žáků a žáci řešili úlohu 2. Část další hodiny v pátek 23. 4. (8^{00} – 8^{12}), kdy bylo přítomno celkem 32 žáků, jsem využila pro připomenutí šipkového zápisu a daného prostředí (v úloze 2b). Čtvrté vyučovací hodiny v pondělí 26. 4. (8^{00} – 8^{45}) se zúčastnilo 30 žáků a dva externí pozorovatelé (D. Jirotková a G. Littler). Zabývali jsme se řešením úloh 3 a 4. V této hodině došlo také k znovuobjevení Pythagorovy věty.

Tentokrát jsem měla k dispozici více zdrojů dat, proto mohu práci žáků dokumentovat i analyzovat podrobněji. V zájmu přehlednosti textu a zamezení opakování informací bude tentokrát popis akce cyklu C2 stručnější a bude doplněn odkazy na práci žáků v příloze. Podrobnější popis průběhu experimentu pak bude zřejmý z další části, kde popisuji způsob analýzy (odstavec 4.2.3). U experimentů, které sestávají z několika vyučovacích hodin a týkají se více úloh, je někdy nesnadné oddělit od sebe při popisu fázi akce a analýzy.

V průběhu první hodiny jsme řešili pouze úlohou 1. V úloze 1a)[65] si žáci měli osvojit práci se šipkovým zápisem v prostředí čtverečkovaného papíru. Doufala jsem, že tento způsob zaznamenání vzájemné polohy dvou bodů žáci sami v úloze 1a) navrhnou, protože by to bylo výhodné pro řešení dalších úloh. To se také potvrdilo. Žáci navrhli několik možných popisů „cest“, jak se dostat z bodu *A* do bodu *B* (viz příloha 4, promluvy 1a)–d) a 3a)–d)[66]). Jednou z možností byl právě šipkový zápis. Také v úloze 1b)[67] využili žáci kromě obrázku šipkového zápisu. Žákům tento způsob zápisu připadal „jednodušší“, jak se vyjádřili.

[65] *Vzájemná poloha dvou bodů: Zapište symbolicky, jak se dostaneme z bodu A do bodu B (viz obr. 1 v příloze 3).*

[66] Symbol 1a) znamená promluva a) v řádku 1 tabulky v příloze 4.

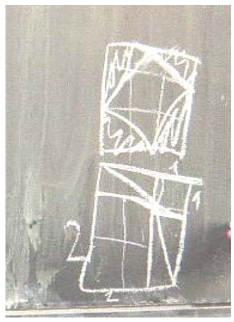
[67] *Najděte nejkratší cestu z bodu A do bodu B.*

Během druhé hodiny jsme se zabývali úlohou 2. V úloze 2a)[68] se projevila u žáků značná variabilita ve způsobu řešení (viz příloha 4, promluvy 9a)–j)). Způsoby žákovských řešení této úlohy popíši podrobněji v odstavci 4.2.3.2. Tato úloha nečinila žákům velké obtíže. Úlohu 2b)[69] řešil žák Marek v návaznosti na předcházející úlohu, ve které začal zobecňovat z řádu 2 na řád 3. Díky mému návodnému obrázku (viz příloha 4, promluva 10) úlohu vyřešil.

První část třetí hodiny byla věnována připomenutí dané problematiky – šipkovému zápisu a prostředí čtverečkovaného papíru, protože měla následovat ještě jedna vyučovací hodina, v jejímž rámci měli žáci znovuobjevit Pythagorovu větu. Tuto funkci splnila úloha 2b), k jejímuž řešení jsem se ještě vrátila. Vyvolala jsem žáka (Marka), který tuto úlohu v minulé hodině vyřešil, nikdo jiný se nehlásil. Marek zakreslil do sítě ještě bod *B* a okomentoval své řešení: „Když je tady *A* a tady *B*, tak *m* je to, co je na té vodorovné a *n* na svislé…“ Na tabuli napsal: *A*, $m\rightarrow$, $n\uparrow$, *B*, $m\uparrow$, $n\leftarrow$, *C*, $m\leftarrow$, $n\downarrow$,*D* , $m\downarrow$, $n\rightarrow$, *A*. Poté jsem se zeptala, zda v zápisu žáci nevidí nějakou závislost. Žákyně Tamara vyjádřila danou závislost obecně pomocí *m* a *n* následovně: „První je vždy *m* a druhé je vždy *n* a šipky se střídají. U *m* je to doprava, nahoru, doleva a dolů a u *n* nahoru, doleva, dolů a doprava.“

V následující hodině byli přítomni dva externí pozorovatelé, kteří vytvořili částečnou fotodokumentaci a několik videosekvencí. V průběhu této hodiny jsme řešili úlohu 3a)–c)[70] a 4a)[71]. Žáci neřešili všechny úlohy, jak jsem je měla předem připravené (viz příloha 3, úloha 3 a 4), protože mi to v danou chvíli připadalo zbytečné.

V úloze 3 se opět prokázala velká variabilita ve způsobu řešení žáků (viz příloha 4, promluvy 14a)–g), 16a)–d), 17, 18a)–c), 19). Za povšimnutí stojí jistě řešení úlohy žáka Petra (viz příloha 4, promluva 18c)), ve kterém zřejmě nevědomky nastínil důkaz Pythagorovy věty (viz obr. 4.15 – fotografie tabule). Potom jsme řešili úlohu 4a) a Pythagorova věta byla (znovu)objevena. Žák Štěpán vysledoval z tabulky pro postupné uvolňování konstant závislost $n^2 + 1$, kde *n* je v šipkovém zápisu počet kroků vpravo a číslo 1 je počet kroků nahoru (viz příloha 4, promluvy 27b) a 29a)). Na základě tohoto poznatku zobecnil Marek danou závislost takto: $N^2 + m^2 = S$, proměnné *N* a *m* zvolil zcela náhodně (výběr totiž doprovodil slovem „třeba“) a písmeno *S* mu napověděl Pavel. Potom jsem žáky ještě vyzvala, aby se nad těmito vztahy zamysleli. Žákyně Tamara objevila, že: „Je to vlastně na principu Pythagorovy věty, protože tam máme i ten trojúhelník.“ (smích) „Fakt! … Tady máme takhle ten trojúhelník. A tady je ten největší čtverec…“ (viz obr. 4.16). Na tabuli naznačila Tamara



Obr. 4.15

[68] *Mřížový čtverec: Vytvořte k dané mřížové úsečce mřížový čtverec.*

[69] *Popište obecně, jak vznikne mřížový čtverec nad danou mřížovou úsečkou.*

[70] *Obsah mřížového čtverce*

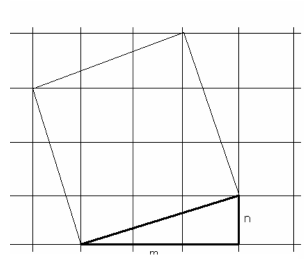
a) Načrtněte mřížový čtverec 2 – 0 a vypočítejte jeho obsah.

b) Vypočítejte obsah mřížového čtverce 1 – 1.

c) Vypočítejte obsah mřížového čtverce 2 – 1.

[71] *Závislost: Zapište obsahy mřížových čtverců do tabulky.*

i čtverce nad odvěsnami. „No, podle tý Pythagorovy věty, že když sečteme tyhle dva menší obsahy, tak nám vyjde ten velký.“

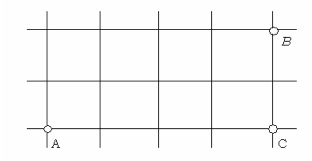


Obr. 4.16

V průběhu realizace experimentu se objevily situace, kdy se mi dařilo vyvolat diskuzi žáků, ale také situace, kdy se mi to nedařilo. Prvním příkladem, kdy žáci přispívali ke společné diskuzi, byl např. okamžik, kdy žáci byli vyzváni, aby posoudili efektivitu řešení úlohy spolužáka. Zajímalo mě, který způsob zaznamenání cesty z bodu A do bodu B je nejefektivnější. Následně pak měli žáci za úkol zkrátit toto řešení („Jak je možné zapsat zkráceně tuto cestu?“) (viz příloha 4, promluvy např. 2–8). Dalším příkladem, kdy se mi dařilo vyvolat diskuzi, bylo zopakování myšlenky řešení jednoho žáka pro ostatní spolužáky. Např. v tomto případě jsem znovu zopakovala myšlenku žáka Pavla, že Marek zlepšil Štěpánovo řešení. Žáci se shodli spíše na pojmu ‚upřesnil’ (viz příloha 4, promluvy např. 30g)). V řadě případů se však vyvolat diskuzi žáků nepodařilo. To bylo např. v případě, kdy jsem se žáků zeptala na zobecnění šipkového zápisu (viz příloha 4, promluva 10), čímž jsem žáka Marka (a pravděpodobně i ostatní žáky) zaskočila. Žákům zřejmě chybělo dostatečné množství izolovaných modelů, aby došlo k tomuto myšlenkovému zdvihu (jednalo se tedy o vyzvání žáků, aby se zamysleli nad dalším – jiným způsobem řešení, které nemělo žádoucí efekt). Bez videozáznamu je těžké zpětně dohledat jednotlivé příklady těchto situací.

4.2.3 Analýza

Celý průběh experimentu jsem jako u cyklu C1 zaznamenala do tabulky, která obsahuje tři sloupce – činnost učitele, činnost žáků (popis) a poznámky (ilustrace je v tab. 4.5, nezkrácená tabulka je v příloze 4). Při zpracování tabulky jsem podle plánu využila informací, které pocházely z různých zdrojů: participační pozorování a terénní poznámky z něj, rozhovor s žáky, práce vytipovaných žáků, audionahrávky a videosekvence některých částí a fotografie žákovských prací z tabule. Poznámky pozorovatelů byly bohužel jen málo podrobné, proto při zpracování dat nehrály velkou roli.

<table>
<tr><th>Činnost učitele</th><th>Činnost žáků</th><th>Poznámky</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1 <u>Úloha 1a)</u>:
Vzájemná poloha dvou bodů
Zapište symbolicky, jak se dostaneme z bodu A do bodu B.</td><td>a) – Patrik: „$A \rightarrow B$“</td><td rowspan="2">Variabilita způsobů řešení úlohy</td></tr>
<tr><td>b) – Tamara:


1. p, $p \in A$
2. C, $|AC|$ = 4 cm
3. $p \perp t$, $t \in B$
4. $|CB|$ = 1 cm
- uč.: Proč 4 cm?“
- T.: „Protože mám milimetrový papír. Teda centimetrový, půlcentimetrový.“</td></tr>
</table>

Tab. 4.5

Analýza cyklu C2 byla tentokrát ukotvena v teoretickém rámci zakotvené teorie, jejíž některé techniky jsem využila. Zatímco v odstavci 3.6 byla tato metoda analýzy popsána obecně, zde bude ukázáno, jak přesně jsem ji použila ve svém výzkumu. Nejdříve popíši způsob kódování a prezentuji jeho výsledky. V odstavci 4.2.3.2 bude pak podán „analytický příběh“ experimentu prostřednictvím popisu procesu konstrukce poznatku „mřížový čtverec“ u několika žáků. Nakonec bude jejich práce porovnána z hlediska tří podkategorií kategorie *Konstrukce poznatků žáky*.

4.2.3.1 Kódování

1. fáze otevřeného kódování – Označování jevů

Protože se mi zaznamenávání údajů do tabulky pro svou přehlednost osvědčilo, sestavila jsem i pro první fázi otevřeného kódování tabulku (příloha 5), která vyjadřuje konceptualizaci experimentu – označování jevů. Část této tabulky je níže v tab. 4.6. Obsahuje tři sloupce – *odkaz*, *pojem*, *charakteristika*. První sloupec *odkaz* (*kód*[72]) slouží jak k označení určitého *pojmu* – jevu ve druhém sloupci, tak také k přiřazení určité výpovědi žáka nebo situace ve třídě. Tento kódovací systém (spolu s odkazy na výpovědi žáků) je vytvořen na základě tabulky záznamu vyučovacích hodin (příloha 4). Každou výpověď žáka, učitele nebo každou situaci jsem označila číslem, popř. pro přehlednost písmenem, jednalo-li se o výpovědi žáků vztahující se k jedné situaci, popř. úkolu učitele.

Analýzu dat jsem začala mikroanalýzou. Do druhého sloupce jsem postupně zaznamenala všechny jevy, které se staly výsledkem mikroanalýzy. Provedla jsem velmi podrobnou analýzu žákovských projevů, řešení a situací, ve kterých se ocitli žáci nebo učitel. Analyzovala jsem zpravidla větu po větě. Každý jev či vzniklou situaci jsem se snažila výstižně označit, pojmenovat, tedy konceptualizovat. Zaměřila jsem se jak na matematické, tak i didaktické a sociální fenomény.

Ve třetím sloupci jsem stručně charakterizovala a analyzovala daný pojem a zmínila jsem jeho jednotlivé *dimenze* (vlastnosti na určité škále). Jedná se o škálu vlastností, které má daný jev, s poznámkou, jak tomu bylo v daném případě. Je nutné zmínit, že se při sepisování jednotlivých pojmů začaly určité pojmy opakovat. Zdálo se, že tyto pojmy budou hrát v experimentu důležitou roli. To, že se pojem opakuje, jsem poznamenala ve třetím sloupci odkazem na pojem již zmíněný, tedy na pojem s danou charakteristikou (např. viz 1b). V některých případech jsem ve třetím sloupci charakterizovala určité matematické nebo didaktické aspekty, které jsou širšího rozsahu (avšak pro konkrétní charakteristiku jsou důležité). Vyskytují se zde také pracovní poznámky, které jsou spíše orientační – pro mě – pro další zpracovávání a analýzy.

[72] Slovo *kód* je zde použito ve smyslu *odkaz*, ne ve smyslu *jména/pojmu*, popř. něčeho, co zastává nebo reprezentuje daný jev, jak uvádí (Šeďová, 2007a, s. 212).

Od-kaz	*Pojem*	*Charakteristika*
1a	Zavedení/ konstrukce vlastní symboliky	- žák si konstruuje/zavádí vlastní symboliku
	Akceptování symboliky	- učitel i žáci symboliku přijali/nepřijali (zde přijali) - *pracovní poznámka*: Je nutné sledovat, zda to je ovlivněno učitelem.
1b	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	- využití zkušeností a poznatků z jiné matematické oblasti (zde z planimetrie) - *dimenze*: spontánní/nespontánní přenos z jedné matematické oblasti do jiné (žákyně sama navrhla, využívá svých zkušeností v jiném kontextu); zde spontánně
	Chyba žáka	- chyba z nepozornosti (viz 1 cm)
	Nepřesné řešení	- konstrukce není jednoznačně určena
1c	Konstrukce symboliky	- pokračování v symbolice - *dimenze*: individuální/společná konstrukce poznatků
1d	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	- viz 1b - zde zavedení soustavy souřadnic

Tab. 4.6

První část analýzy vznikala ve dvou krocích. Mezi oběma kroky se uskutečnilo setkání s N. Stehlíkovou, při kterém jsem prodiskutovala nalezené pojmy a dimenze. Na základě tohoto setkání jsem danou tabulku dále zpřesňovala.

V první části analýzy jsem tedy sestavila podrobný přehled jednotlivých fenoménů, které jsou charakteristické pro daný proces. Pojmy nejsou ještě nijak kategorizovány ani tříděny.

2. fáze otevřeného kódování – Analytické kategorie

Ve druhé fázi otevřeného kódování jsem začala jednotlivé pojmy kategorizovat, tedy určitým způsobem třídit, seskupovat. Vytvořila jsem dvě tabulky (příloha 6) – první tabulka obsahuje matematické a didaktické kategorie (ukázka je zde v tab. 4.7), ve druhé tabulce jsou sociální kategorie.

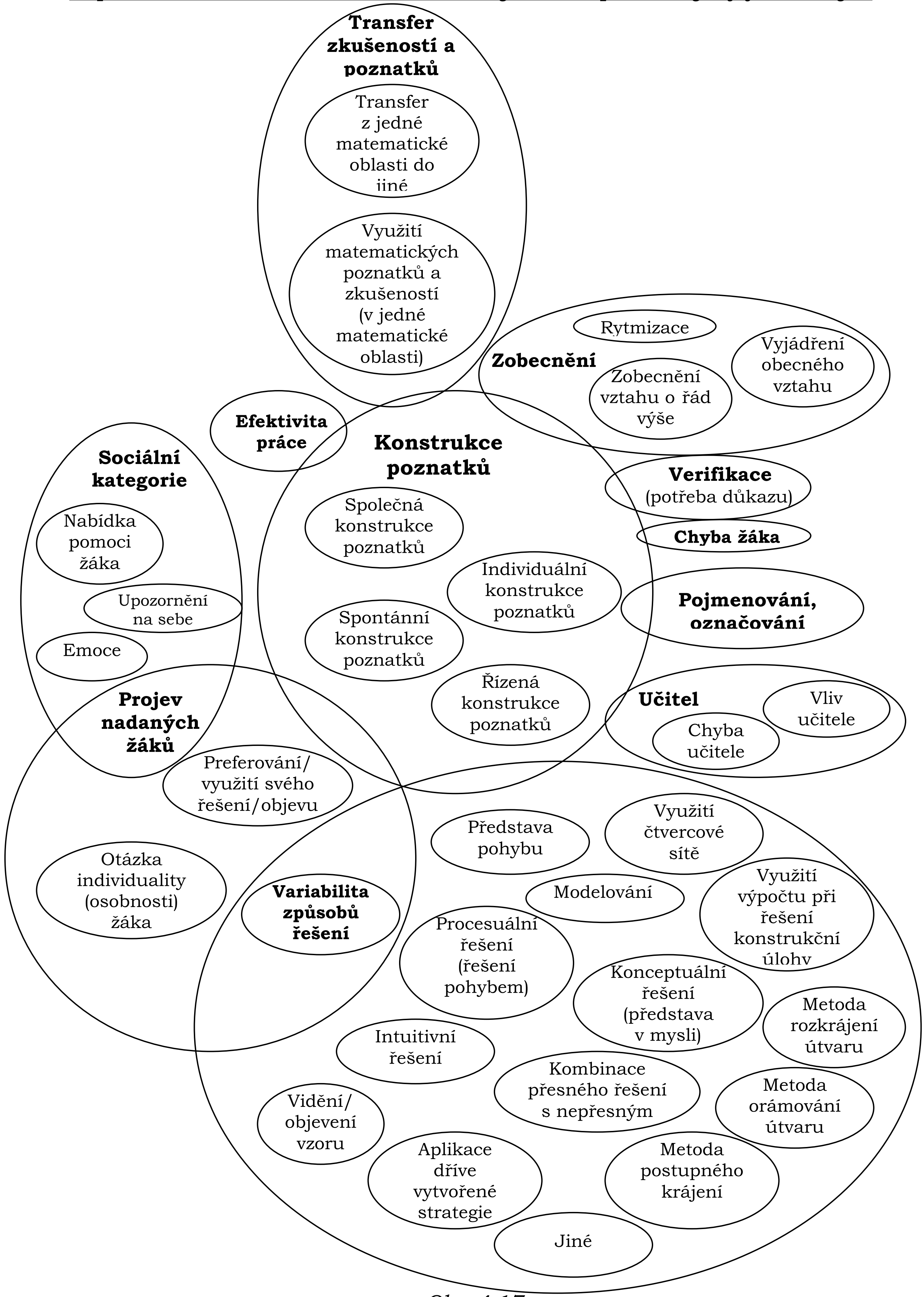
Obě tabulky obsahují čtyři sloupce – *kód*, *kategorie*, *podkategorie* a *dimenze*. První sloupec je zatím prázdný, protože pro dané seskupení a utřídění pojmů nebyl kód důležitý. Ve druhém sloupci jsou zaznamenány jednotlivé kategorie. Tyto kategorie jsem identifikovala z pojmů (příloha 5). Jedná se vlastně o pojmy, které mají důležité postavení – buď se častěji opakovaly, nebo se staly nadpojmy jiných pojmů, které jsou uvedeny ve třetím sloupci jako podkategorie. Jednotlivé kategorie a podkategorie jsem přesunovala ze sloupce do sloupce postupně, jak se objevovaly, nebo jsem pro skupinu pojmů vytvořila nový název (projevy nadaných žáků, způsob řešení žáků atd.). Postupně jsem rozšiřovala sloupce o další. Ve čtvrtém sloupci jsem charakterizovala některé dimenze kategorií.

<table>
<tr><th>Kód</th><th>Kategorie</th><th>Podkategorie</th><th colspan="2">Dimenze</th></tr>
<tr><td rowspan="6"></td><td rowspan="6">Konstrukce poznatků</td><td>Spontánní konstrukce poznatků</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Řízená konstrukce poznatků</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Společná konstrukce poznatků</td><td rowspan="2">zahrnující transmisi
vs. inspirace</td><td>Převzetí poznatku s porozuměním</td></tr>
<tr><td>Převzetí poznatku bez porozumění</td></tr>
<tr><td>Individuální konstrukce poznatků</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Zavedení/ konstrukce vlastní symboliky</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">Projev nadaných žáků</td><td rowspan="2">Preferování/ využití svého řešení/objevu</td><td colspan="2">s možností volby</td></tr>
<tr><td colspan="2">bez možnosti volby</td></tr>
<tr><td>otázka individuality (osobnosti) žáka</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Variabilita způsobu řešení úloh</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Tab. 4.7

Ve druhé fázi otevřeného kódování jsem vytvořila strukturu kategorií a podkategorií a rozpracovala jsem některé jejich dimenze. Bylo by dobré, kdyby tabulka obsahovala ještě pátý sloupec, ve kterém bych charakterizovala jednotlivé kategorie a podkategorie. Tato tabulka však měla sloužit pouze pro přehlednost a utřídění daných pojmů, pro které jednotlivé charakteristiky nebyly nezbytně nutné. V příloze 6 se kromě dvou popsaných tabulek vyskytují ještě dvě menší pomocné tabulky. Jsou to tabulky s pojmy, které jsem zatím ještě nijak nekategorizovala.

Jak jsem již zmínila, hranice mezi jednotlivými typy kódování jsou neostré. Téměř současně s otevřeným kódováním došlo také k *axiálnímu kódování* (odstavec 3.6). Přitom jsem uspořádala pojmy novým způsobem (rozdělila je do kategorií matematických, didaktických, sociálních a utřídila je ve vztahu pojem – nadpojem). Celou situaci jsem uchopila pomocí schématu (viz obr. 4.17).


Transfer zkušeností a poznatků
Transfer z jedné matematické oblasti do jiné
Využití matematických poznatků a zkušeností (v jedné matematické oblasti)
Zobecnění
Rytmizace
Vyjádření obecného vztahu
Zobecnění vztahu o řád výše
Efektivita práce
Konstrukce poznatků
Sociální kategorie
Nabídka pomoci žáka
Upozornění na sebe
Emoce
Společná konstrukce poznatků
Individuální konstrukce poznatků
Spontánní konstrukce poznatků
Řízená konstrukce poznatků
Verifikace (potřeba důkazu)
Chyba žáka
Pojmenování, označování
Učitel
Vliv učitele
Chyba učitele
Projev nadaných žáků
Preferování/ využití svého řešení/objevu
Otázka individuality (osobnosti) žáka
Variabilita způsobů řešení
Představa pohybu
Využití čtvercové sítě
Modelování
Využití výpočtu při řešení konstrukční úlohy
Procesuální řešení (řešení pohybem)
Konceptuální řešení (představa v mysli)
Metoda rozkrájení útvaru
Intuitivní řešení
Kombinace přesného řešení s nepřesným
Metoda orámování útvaru
Vidění/ objevení vzoru
Aplikace dříve vytvořené strategie
Metoda postupného krájení
Jiné

Obr. 4.17

4.2.3.2 Výklad jednání žáků – 2. vyučovací hodina

Kategorie *Konstrukce poznatků žáky* se mi jevila jako kategorie, která má potenciál stát se centrální kategorií (viz obr. 4.17), a proto se dále zaměřím na podrobnou analýzu konstrukce poznatků u některých žáků.

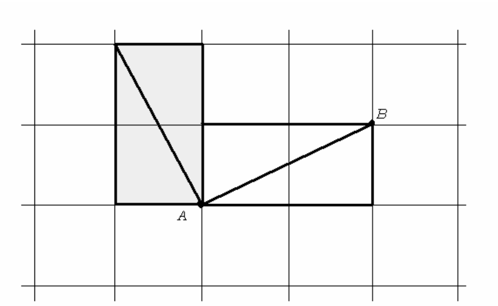
Jak jsem již uvedla, jedním z cílů experimentu bylo znovuodhalení Pythagorovy věty, tentokrát nestandardním způsobem – na základě šipkového zápisu a čtverečkovaného papíru. Během první vyučovací hodiny si měli žáci osvojit práci v prostředí čtverečkovaného papíru. Úkolem druhé vyučovací hodiny bylo vytvořit k dané mřížové úsečce mřížový čtverec (a poté zjistit obsahy jednotlivých čtverců a na základě závislosti daných údajů objevit vzorec charakterizující Pythagorovu větu). Žáci měli nejprve možnost rozmyslet si své řešení úlohy v lavici a teprve potom postupně prezentovali u tabule své řešení pro ostatní žáky. Právě na druhou vyučovací hodinu se zaměřím při analýze práce některých žáků. Jedná se o žáky, kteří byli sami při řešení úloh aktivní a tvořiví a o jejichž práci jsem získala větší množství dat. Nejdříve popíši, jakým způsobem přistupovali k řešení dané úlohy a jak se případně zapojovali do společné práce. Později dám jejich práci do souvislosti.

Činnosti žáků (viz příloha 4, promluvy 9 a 10) *v reakci na úkol a situaci,*[73] *kterou jsem připravila v minulé hodině*

Žáci přicházeli k tabuli postupně tak, jak jsou zde uvedeni, a prezentovali svá řešení.

Žák Pavel

Pavel využívá ke svému řešení čtvercovou síť, předpokládá pravidelnou čtvercovou mřížku. Vychází z kolmosti čtvercové sítě, tím má zaručen požadavek kolmosti a shodných délek stran vepisovaného čtverce („Máme dva čtverečky a propojíme je. Ty čtverce dáme sem a doděláme tak, aby to byl pravý úhel.“, viz obr. 4.18). Těmito dvěma předpoklady Pavel zajišťuje, že vepisovaný útvar je čtverec. Při řešení daného úkolu tedy nepotřebuje měřit.



Obr. 4.18

Jedná se o procesuální řešení, kdy při řešení úlohy žák využívá pohyb. Jako „důkaz“ využívá intuitivně rotaci kolem bodu *A*. Na tuto geometrickou interpretaci se Pavel neodkazuje, má zřejmě geometrické vidění („vidí to“), nemá potřebu vysvětlovat. Pavlovo řešení je elegantní – jednoduché a pro něj přesvědčivé.

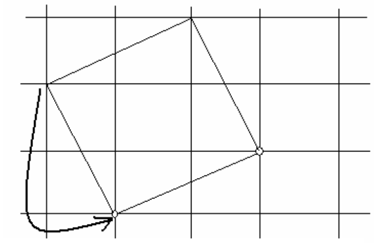
---

[73] *Úkolová situace* – čtverečkovaná mřížka, zavedení symbolického zápisu a procvičování v daném prostředí v 1. vyučovací hodině; *úkol* zněl: „Vytvořte k dané mřížové úsečce mřížový čtverec.“

Úloha propedeuticky připravuje žáka na nové učivo (zde propedeutika rotace), popř. propedeuticky připravuje na nový kontext (zde shodnost trojúhelníků).

Žákyně Nikola

Nikola využívá při řešení úlohy pohybu (zřejmě se inspirovala šipkovým zápisem v minulé hodině). Jedná se o určitou rytmizaci – periodicitu pohybu (dvakrát nahoru a jednou doleva, dvakrát doleva a jednou dolů …) Na základě této rytmizace je schopna zobecnit své řešení. Na geometrickou interpretaci se Nikola odkazuje jednak slovně („Dvakrát nahoru a jednou doleva, dvakrát doleva a jednou dolů. Pořád je to stejné, když to otočím.“ (Myslí čtverec.) „Pro každý bod dostávám stejný obrázek – dvakrát doprava a jednou nahoru – po každém otočení.“), ale také šipkou v nákresu (viz obr. 4.19).



Obr. 4.19

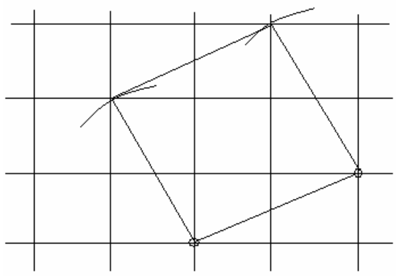
Nikola využívá ke svému řešení čtvercovou síť – mřížové body. Neuvědomuje si vlastnosti čtvercové sítě, nemá potřebu dokazovat kolmost a shodné délky stran ve čtverci. Intuitivně předpokládá shodné délky stran (v závislosti na otočení), kolmost stran vepsaného čtverce neuvažuje. Při řešení daného úkolu Nikola nepotřebuje žádné nástroje, což však neukazuje na eleganci řešení (vzhledem k absenci důkazu).

Způsob řešení úlohy Nikoly je ovšem velmi vhodný pro objevení Pythagorovy věty (v tu chvíli to ale ještě Nikola netuší).

Žákyně Anička

Pro řešení Aničky je charakteristický spontánní transfer z matematické oblasti planimetrie (konstrukční úlohy) do matematické oblasti jiné (prostředí čtvercové mřížky). Žákyně využívá svých zkušeností a poznatků v jiném kontextu.

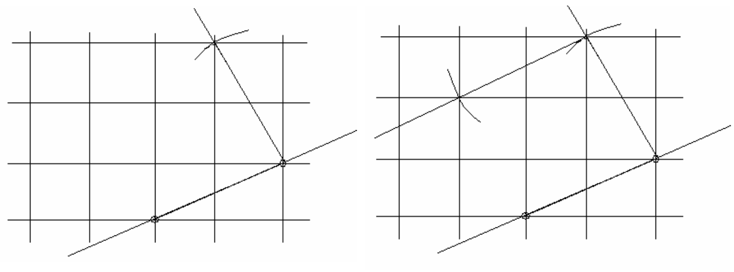
Ve svém řešení (viz obr. 4.20) využívá Anička čtvercovou síť pouze částečně, nevychází z vlastností čtvercové mřížky. Řešení komentuje následově: „Kružítkem sestrojím kružnici z bodu *B* s poloměrem *BA* a kružnici z bodu *A* s poloměrem *BA.* Protne se to v bodech.“ (Myslí uzlových.) „Musí se to protnout v těch bodech, ta vzdálenost se přenese i kružítkem.“ Anička zde používá označení bodů *A* a *B*, aniž by byly v obrázku zakresleny. Přebírá označení bodů podle zadání úlohy. Při konstrukčním řešení proto potřebuje měřit – kružítkem přenáší stejnou vzdálenost, aby zaručila shodnost délek stran (zde však pouze délek tří stran čtverce). Anička intuitivně předpokládá, že i délka zbývající (čtvrté) strany čtverce bude stejná. Chybí předpoklad kolmosti – líbí se jí, že část kružnicového oblouku prochází mřížovým bodem, a intuitivně předpokládá, že vzniklý útvar bude čtverec. Anička nemá potřebu dokazovat, vysvětlovat; troufá si na výroky „Musí se to protnout…“ bez jakéhokoli zdůvodnění.



Obr. 4.20

Anička dojde k cíli, avšak řešení úlohy chybí jakýkoli rozbor, vysvětlení, popř. důkaz.

Žákyně Bára



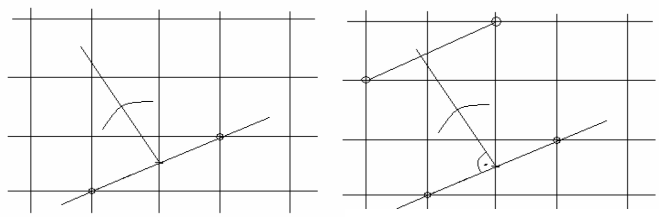
Obr. 4.21

Pro toto řešení je charakteristická reakce žáka na předchozí výpověď jiného žáka (viz obr. 4.21). Bára se zřejmě inspirovala řešením Aničky. Jedná se o společnou konstrukci poznatků, kdy žák využívá předchozích poznatků jiných žáků a řešení úlohy vysvětluje jiným způsobem („Pravítkem – proložím body *A* a *B* přímkou, udělám kolmici pomocí rysky, kružítkem nanesu stejnou vzdálenost. A pak zase kolmici k přímce v bodě *C*.“ … „A nebo nanesu 90°, 90° a zase 90°.“). Zde jde o jiný způsob řešení konstrukční úlohy (pomocí kolmice), o nespontánní transfer z matematické oblasti planimetrie (konstrukční úlohy) do jiné matematické oblasti (viz s. 74).

Při řešení úlohy nevyužívá Bára čtvercovou mřížku vůbec. (Předpokládám, že Báře slouží čtverečkovaný papír pouze pro kontrolu řešení, že se jednotlivé úsečky opravdu protnou v mřížovém bodě.) Požadavek kolmosti a shodných délek stran čtverce je dán konstrukčními postupy – nanést kolmici a přenést danou délku strany. Konstrukční úloha vyžaduje použití kružítka a pravítka s ryskou, popř. úhloměru (jak Bára naznačila ve druhém způsobu řešení úlohy).

Postup úlohy nepotřebuje Bára vysvětlovat ani dokazovat, protože se jedná o základní konstrukci čtverce. Nevýhodou tohoto způsobu řešení je jistá nepřesnost při konstruování čtverce.

Žákyně Martina



Obr. 4.22

Je možné, že Martina byla také inspirována konstrukčním řešením Aničky, protože prezentovala své řešení až po Aničce, nedovedu to však z dostupných údajů s jistotou říct.

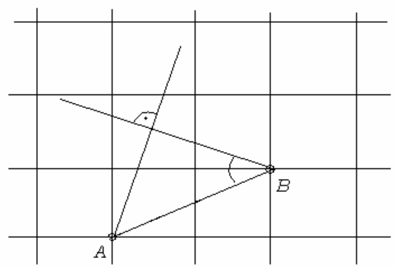
Martina navrhuje řešení „přes průsvitku“ (viz obr. 4.22). Graficky najde střed čtverce. „Tento bod je střed a pomocí průsvitky otočíme tak, aby to bylo rovnoběžné.“ I zde se tedy zřejmě jedná o společnou konstrukci poznatků. Transfer z jedné matematické oblasti do jiné matematické oblasti proběhl ve dvou směrech: 1) nespontánní transfer konstrukčních postupů při řešení úlohy a 2) spontánní využití poznatků a zkušeností se shodnými zobrazeními (symetrie – modelování, využívání průsvitného papíru). Průsvitky jsme využívali v předchozím roce (v učivu Osová souměrnost), žákyně si práci s průsvitkou spontánně vybavila

Když porovnáme toto řešení úlohy s řešením předcházejícím, je patrné, že se zde nejedná pouze o základní konstrukci čtverce. Martina posunula řešení úlohy o trochu dál. Je typickým příkladem individuální konstrukce poznatku ve smyslu zavedení pojmu rotace. Martina využívá pohybu – rotace, aniž bychom toto zobrazení kdykoli ve výuce zmínili (zkonstruovala si pojem rotace kolem středu čtverce). Na základě znalosti práce s průsvitkou, kdy jsme jen průsvitku překládali, ona vytvořila model otočení.

Čtvercové sítě využívá Martina pouze ke konstrukci středu úsečky, svou hypotézu však nedokazuje. Ke konstrukci středu čtverce využívá Martina kružítka – nanese polovinu délky strany čtverce. Vzhledem ke konstrukčním postupům bez zdůvodnění, popř. rozboru úlohy je toto řešení nepřesné, což ovlivňuje požadavek kolmosti a shodnosti délek stran čtverce. Intuitivně však využití čtvercové sítě (mřížových bodů) zaručuje správné řešení.

Žákyně Zdenka

Zdenka řeší úlohu konceptuálně (viz obr. 4.23), má dobrou představu čtverce, „vidí“ vlastnosti čtverce (zde úhel 45°). Navrhuje totiž konstrukci „úhlopříčkou” a vysvětluje: „Spojím body a naměřím 45° u *B*. Potom sestrojím kolmici, která prochází bodem *A*, a odměřím kružítkem vzdálenosti a dodělám body *C* a *D*.“ Je možné, že její konstrukční řešení bylo inspirováno předchozími způsoby řešení,[74] nedovedu to však z dostupných údajů říct.



Obr. 4.23

Řešení Zdenky je založeno na konstrukčních postupech (opět bych řešení úlohy doplnila o zdůvodnění, popř. rozbor úlohy). Žákyně využívá úhloměru, pravítka s ryskou a kružítka. Kolmost a shodnost stran čtverce je dána konstrukcí čtverce. Jde o přístup bez využití čtvercové sítě.

Žákyně Blanka.

Blanka chce také přispět svým řešením (vidí, že ostatní žáci mají mnoho nápadů). U tabule však jen zopakuje řešení Aničky: „Sestrojím kolmice v bodě *A* a *B* a kružítkem nanesu vzdálenost *AB*.“

Žákyně Tamara

Tamara řeší úlohu pomocí kombinace numerického a konstrukčního řešení. Navrhuje: „Spočítat úhlopříčku pomocí Pythagorovy věty.[75] Ale není to přesné.“ Následně pravítkem měří délku strany *AB* s výsledkem 11 mm a píše:

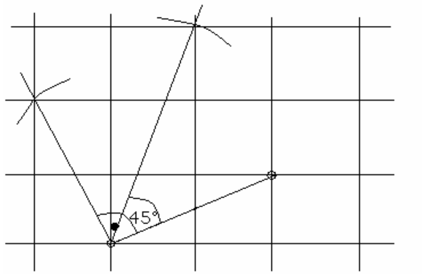
$$11^2 + 11^2 = c^2$$
$$121 + 121 = c^2$$
$$\sqrt{242} = c$$
$$15{,}5 = c$$

[74] Žákyně využívá zřejmě předchozích poznatků jiných žáků a řešení úlohy vysvětluje jiným způsobem – pravděpodobně nespontánní transfer z oblasti planimetrie

[75] Pokud je mi známo, jako jediná chtěla použít Pythagorovu větu.

K tomu říká komentář: „Úhlopříčka je dlouhá 15,5. Teď sestrojím 45° z *A*, kružítkem nanesu úhlopříčku 15,5 a dostanu tak bod *C*. Pak sestrojím 90° z bodu *A* a nanesu 11 cm, a tak dostanu bod *D*.“

Tamara má dobrou představu o vlastnostech čtverce (konceptuální představa). Při řešení konstrukční úlohy využívá výpočet. Měří délku strany, aby mohla použít Pythagorovu větu, Pythagorovu větu samotnou v zadané úloze nevidí (čtvercovou síť nepoužívá, není jí pomocníkem).



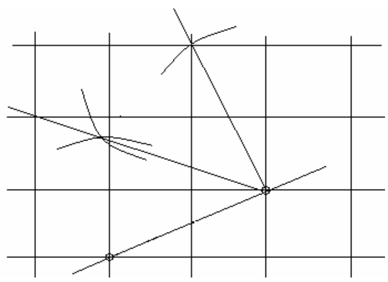
Obr. 4.24

Při konstrukčním řešení (viz obr. 4.24) využívá Tamara zřejmě nespontánně svých zkušeností a poznatků z planimetrie (konstrukční úlohy) – pravděpodobně se inspirovala předcházejícími řešeními spolužáků – a úlohu řeší dále svým způsobem. Probíhá zde i spontánní transfer z matematické oblasti zahrnující Pythagorovu větu: Pythagorova věta se zde objevila poprvé.

Požadavek kolmosti a shodnosti stran čtverce ztroskotává na nepřesném konstrukčním postupu (na základě změřené délky strany čtverce provést výpočet a následnou konstrukci; konstrukci bez zdůvodnění, důkazu nelze považovat za přesné řešení). Tamara využívá úhloměru, pravítka, kružítka a kalkulačky.

Žákyně Táňa

Je možné, že i Táňa (viz obr. 4.25) se inspirovala předchozími řešeními žáků, ovšem úlohu dál řeší po svém. Vedle nespontánního transferu konstrukčních postupů zde začíná hrát roli spontánní transfer z oblasti osy úhlu: „Pomocí osy úhlu.“



Obr. 4.25

Řešení úlohy je opět založeno pouze na konstrukčních postupech bez zdůvodnění (kolmost a shodnost délek stran čtverce je dána konstrukcí čtverce, ovšem je otázka, zda toho využívá, protože osa neprochází mřížovým bodem). Táňa při řešení nevyužívá čtvercové sítě, osa neprochází mřížovým bodem. Úloha není dokončena, otázkou je, jakým způsobem by postupovala dál.

Žák Marek

Marek řeší úlohu takto: „Pomocí šipek.“ Úlohu řeší bez obrázku a na tabuli píše:

A; 2 →; ↑; *B*; 2 ↑; ← ; *C*

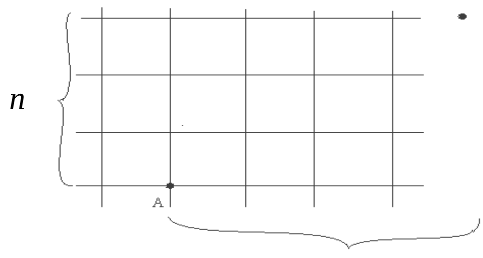
Přitom si zřejmě situaci představuje (rukou ukazuje ve vzduchu, jak postupuje), a pak píše dále:

2←; ↓ ; *D* 2↓; → *A*

„To by bylo pro dvojku a pro trojku by to bylo takhle...“ a opravuje zápis (místo 2 píše 3). „Pro 3 – 1 by to bylo „*A*; 3 →; ↑; *B*; 3 ↑; ← ; *C*; 3 ←; ↓ ; *D* 3↓; → *A*.“

Vyzvala jsem ho k obecnému řešení a svou výzvu jsem doplnila obrázkem (obr. 4.26): „A obecně by to bylo jak?“

Marek píše na tabuli: *A*; *m* →; *n*↑; *B*; *m* ↑; *n*← ; *C*; *m* ←; *n*↓ ; *D* *m* ↓; *n*→ *A*



Obr. 4.26

Marek využívá svých poznatků a zkušeností v jedné matematické oblasti (příloha 5, kód 3d, 7) – využívá způsobu zavedení symboliky. Úlohu pak spontánně zobecňuje o řád výš. Zcela využívá prostředí čtvercové sítě. Otázku kolmosti a shodnosti délek stran čtverce neuvažuje, pravděpodobně intuitivně předpokládá pravidelnost čtvercové mřížky. Při řešení daného úkolu asi tedy nepotřebuje měřit, nepotřebuje žádné nástroje.

Řešení úlohy je založeno na procesu (ukazuje si rukou ve vzduchu). Odmítá nápomoc náčrtkem, což je pro Marka typické. Markův způsob řešení úlohy vede také k cíli.

Charakteristika práce žáků z hlediska kategorie Konstrukce poznatku žáků

Následně jsem provedla shrnutí činnosti zmíněných žáků ještě z hlediska kategorie „konstrukce poznatku – čtverec ve čtvercové síti” a jejích tří podkategorií: 1) využití mřížové sítě, 2) verifikace (dokazování), 3) transfer z jiné matematické oblasti.

	Využití mřížové sítě	*Verifikace*	*Transfer z jiné matematické oblast*
Pavel	zcela	Ano	Pohyb (rotace), shodnost trojúhelníků
Nikola	zcela	Ne	Pohyb (šipkový zápis), periodicita, rytmizace
Anička	částečně	Ne	Planimetrie (konstrukční úlohy)
Bára	vůbec	Ne	Planimetrie (konstrukční úlohy)
Martina	částečně/vůbec	Ne	Planimetrie (konstrukční úlohy), shodná zobrazení (symetrie, pohyb – rotace, osová souměrnost), modelování
Zdenka	vůbec	Ne	Planimetrie (konstrukční úlohy)
Blanka[76]	Opakuje řeš. Aničky	----	----
Tamara	vůbec	Ne	Planimetrie (konstrukční úlohy), Pythagorova věta (numerické řešení)
Táňa	vůbec	Ne	Planimetrie (konstrukční úlohy)
Marek	zcela	Intuice?	Nevyužívá jiné matematické oblasti.

[76] Blanka pouze opakuje řešení Aničky, proto ji do následující kategorizace nezahrnuji.

1. *Využití mřížové sítě*

U podkategorie *využití mřížové sítě* můžeme sledovat dimenzi: a) zcela, b) částečně a c) vůbec. Z tohoto hlediska můžeme rozdělit žáky do tří skupin.

První skupinu tvoří žáci, kteří úlohu řeší na základě využití čtverečkovaného papíru: Pavel, Nikola, Marek. Dá se říci, že řešení každého tohoto žáka (zejména Pavla a Nikoly) je z konstruktivistického pohledu velmi přínosné. Do nestandardního prostředí (prostředí čtvercové mřížky) zanesli svůj individuální způsob řešení.

Druhou skupinou jsou žáci, kteří využívají čtvercovou síť pouze částečně – Anička a Martina. Úlohu řeší pomocí konstrukčních postupů, proto není využití mřížky v tomto případě úplně nezbytné. Pokud bychom chtěli zpřesnit dané kategorizování, nachází se Martina spíše mezi druhou a třetí skupinou žáků. Čtvercovou mřížku totiž využívá pouze k pomocné konstrukci středu úsečky.

Třetí skupinu tvoří žáci, kteří prostředí čtvercové mřížky nevyužívají vůbec: Bára, Zdenka, Táňa a Tamara. První tři dívky řeší úlohu pouze planimetrickými konstrukčními postupy, Tamara si ještě přizvala ke konstrukčnímu řešení numerické řešení pomocí Pythagorovy věty a kombinuje tyto dva přístupy. Prostředí čtvercové mřížky tyto žáky nijak neruší, ale ani jim nepomáhá.

2. *Verifikace*

Podkategorie *verifikace* není v tomto případě asi příliš vhodná. Většina žáků (Nikola, Anička, Bára, Martina, Zdenka, Tamara a Táňa) nepotřebovala dokazovat svá tvrzení a obhajovat svá řešení. Důvodem absence verifikace bylo pravděpodobně to, že jsem žáky nevyzvala,[77] aby svá řešení vysvětlili, a také to, že pro každého žáka byl jeho postup intuitivně jasný a přesvědčivý. Žáci tedy neměli potřebu dokazovat a ostatní žáky zřejmě přesvědčili.

Pouze u dvou žáků se nachází určitá verifikace. Nejznatelnější je u Pavla, který předpokládá pravidelnou čtvercovou mřížku a vychází z kolmosti čtvercové sítě, čímž si zajišťuje, že vepisovaný útvar je čtverec. Marek pravděpodobně intuitivně předpokládá pravidelnost čtvercové mřížky (otázku kolmosti a shodnosti délek stran čtverce neuvažuje).

3. *Transfer z jiné matematické oblasti.*

Při řešení úlohy se žákům vybaví určité souvislosti s jinými poznatky v jejich poznatkové struktuře. Vztahy mezi jednotlivými poznatky se propojí, a žáci tak začnou při řešení určité úlohy využívat poznatků z jiné matematické oblasti. Můžeme říci, že dochází k další krystalizaci poznatků.

V našem případě se nejvíce objevuje využití planimetrie (konstrukčních úloh), i když toto řešení je při absenci důkazu nepřesné. Tohoto přístupu využívají dívky Anička, Bára, Zdenka a Táňa.

Další skupinu žáků tvoří Tamara a Martina, které ještě kromě planimetrie (konstrukčních úloh) využívají jiné matematické oblasti, a sice Tamara Pythagorovy věty a Martina shodných zobrazení.

[77] Tato úloha byla myšlena pouze jako úloha přípravná, proto jsem na zdůvodňování nekladla důraz.

Dalším důležitým aspektem při řešení úlohy byl pohyb, který použili tři žáci. Pavel a Martina ve smyslu rotace, Nikola ve smyslu periodicity šipkového zápisu. Pavel navíc využívá shodnosti trojúhelníků.

Ve čtvrté skupině je Marek, který nevyužívá jiné matematické oblasti a snaží se rozvinout dále šipkový zápis (z minulé hodiny).

4.2.3.3 Objev Pythagorovy věty

Ke znovuobjevu Pythagorovy věty došlo během čtvrté vyučovací hodiny. Žáci nejprve podávali větší množství různých způsobů řešení úlohy 3 – výpočty obsahů jednotlivých mřížových čtverců (viz příloha 4, promluvy 14a)–g), 16a)–d), 17, 18a)–c), 19). Jak už bylo zmíněno, objevilo se zde zajímavé řešení úlohy (výpočet obsahu mřížového čtverce 2 – 1) žáka Petra[78] (viz příloha 4, promluva 18c)), ve kterém zřejmě nevědomky nastínil důkaz Pythagorovy věty. Petr nakreslil na tabuli útvar (viz horní část obrázku 4.15, s. 62) a komentoval to následovně: „Takže tady jsou čtyři trojúhelníčky, tadyto je ten velkej čtverec. Když bychom si teď ty malý trojúhelníčky trošku přeházeli [kreslí dolní část obrázku 4.15], tak si můžeme dát tady dva vedle sebe a tady dva vedle sebe. Dokreslíme čtvercovou síť. A vlastně víme, že ta strana je jedna jednotka [píše 1] a tady to jsou dvě jednotky [píše 2]. Takže dva krát dva jsou čtyři a jeden krát jedna je jedna. To znamená jedna plus čtyři je pět.“ Tak vypočítal Petr obsah mřížového čtverce 2 – 1.

Dále jsme řešili úlohu 4a) – zapsat obsahy mřížových čtverců *ABCD*, kde $A[0;0]$, $B[n;1]$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, m$,[79] do tabulky. Žáci vyplnili první čtyři řádky tabulky a pak již žák Štěpán vysledoval z tabulky pro postupné uvolňování konstant závislost $n^2 + 1$, kde n je v šipkovém zápisu počet kroků vpravo a číslo 1 je počet kroků nahoru (viz příloha 4, promluva 27b), 29a)): „Tady to vždycky vychází … Tadyto číslo vlevo na druhou plus tohlensto, a tak mi vždycky vyjde tohle. No, n na druhou plus jedna.“ Na základě tohoto poznatku zobecnil Marek danou závislost takto: $N^2 + m^2 = S$, proměnné N a m volí Marek zcela náhodně (výběr totiž doprovází slovem „třeba“) a písmeno S mu napověděl Pavel. Své zobecnění vysvětlil Marek slovy: „N na druhou plus třeba m na druhou… Jedna na druhou je jedna, takže prostě že i to m je na druhou, protože to je vždycky jednička. Jednička na druhou je jednička.“ Pavel dodává: „A to je rovno S,“ snaží se prosadit svoji myšlenku.

Dále jsem žáky vyzvala, aby se nad těmito vztahy zamysleli. Žáci začali přemýšlet ještě nad jinými případy (např. viz příloha 4, promluva 30b)) a hlasitě diskutovat (např. viz příloha 4, promluva 30f), 32c)). Žákyni Tamaru napadlo (viz příloha 4, promluva 33a)): „Je to vlastně na principu Pythagorovy věty, protože tam máme i ten trojúhelník.“ (smích) „Fakt! … Tady máme takhle ten trojúhelník. A tady je ten největší čtverec…“ (viz obr. 4.16, s. 63). Na tabuli naznačila Tamara i čtverce nad odvěsnami. Jedná se zde o jistou formu zobecnění, protože i přes to, že se jedná o mřížový čtverec 3 – 1, označuje příslušné odvěsny trojúhelníku m a n. „No, podle tý Pythagorovy věty, že když sečteme tyhle dva menší obsahy, tak nám vyjde

[78] Petr významně posunul řešení úloh již v cyklu C1, kde také mj. objevil Pythagorovu větu (viz odstavec 4.1.2; příloha 2, promluvy 6, 14–18, 20, 27b)).

[79] V hodině jsem zvolila místo parametru m parametr n.

ten velký.“ (viz příloha 4, promluva 33g)). Pythagorova věta byla zde tedy znovuobjevena.

Tabulku pro postupné uvolňování konstant žáci chápali spíše jako možnost zápisu a shromáždění získaných výpočtů. Obecný vztah byl objeven již z vysledování závislosti v první tabulce (pro číslo 1; viz příloha 4, promluva 29a)), jiné tabulky nebyly použity. Otázkou zůstává, zda by tato tabulka stačila i v případě, kdyby žáci Pythagorovu větu ještě neznali.[80]

4.2.3.4 Shrnutí analýzy z hlediska cílů experimentu

Podívejme se nyní opět na upřesněné výzkumné otázky a cíle cyklu C2. Podrobněji se podařilo rozpracovat, jak si jednotliví žáci konstruují poznatek mřížový čtverec, a do jisté míry jsem i ukázala, kde šlo převážně o individuální konstrukci poznatků a kde žák zřejmě převzal poznatky prezentované jinými žáky. Méně jsem již byla schopná vysledovat, jaký byl můj vliv na konstrukci poznatků. Můžeme však konstatovat, že jsem se záměrně držela v pozadí, o čemž svědčí například právě velká variabilita řešení, kterou žáci nabídli.

Podařilo se významně vylepšit způsob získávání dat i použít metodu zakotvené teorie pro hlubší analýzu dat. Pomocí ní jsem získala řadu kategorií, které jsem dala do souvislostí (viz obr. 4.17, s. 67).

Žáci si vytvořili strategie práce ve čtvercové mřížce, konkrétně pro konstrukci mřížových čtverců a hledání jejich obsahů. Viděli již známý poznatek (Pythagorovu větu) v nových souvislostech, tedy můžeme říci, že došlo k jeho další krystalizaci. Nedovedu však říci, do jaké míry byl splněn můj další cíl, a sice aby došlo k odbourávání formálnosti poznatků v této oblasti u některých z nich. Žáci se seznámili s metodou postupného uvolňování parametrů, ovšem otázka je, do jaké míry si ji ovlastnili, protože k znovuobjevení Pythagorovy věty došlo již po konstrukci první tabulky (princip této metody tedy nebyl zcela ukázán).

4.2.4 Reflexe

Reflexe směrem do výuky

Jak jsem již zmínila, důležitým problémem byla otázka verifikace. Žáci nepociťovali potřebu dokazovat svá řešení. Bylo by tedy dobré zamyslet se nad vhodnou formulací úlohy, aby žáci potřebu verifikace pocítili sami a sami ji (bez vyzvání učitele) formulovali (viz níže).

Jiným problémem se opět ukázala být volba vhodné formy práce – individuální nebo skupinové. Z experimentu vyplynulo, že zkoumaným žákům vyhovuje spíše individuální forma práce (jak jsem již uvedla výše). Při experimentu ihned po zadání úlohy někteří žáci přicházeli s řešením a nechtěli naslouchat řešení jiných (viz příloha 4, promluvy např. 1a)–d), 9a)–j), 14a)–g)). Opět jsem se ocitla v situaci, kdy jsem chtěla podporovat autonomii každého žáka, ale zároveň také vyvolat jejich diskuzi. Objevily se

[80] Zřejmě ne, jak ukazuje zkušenost N. Stehlíkové, která pro odvození Pythagorovy věty v 8. ročníku použila podobné úlohy. Žáci potřebovali tři tabulky, aby závislost odhalili. (Z osobního rozhovoru.)

situace, kdy se mi to dařilo (např. vyzvání žáků, aby posoudili efektivitu řešení spolužáka a následně pak zkrátili toto řešení; zopakování myšlenky řešení jednoho žáka pro ostatní), ale také situace, kdy se mi to nedařilo. Jak jsem již zmínila, je nutné zdokonalit způsob zaznamenávání dat, aby bylo možné lépe zpětně dohledávat jednotlivé příklady těchto situací.

Reflexe směrem k dalšímu výzkumu

Co se týče sběru dat, během tohoto experimentu jsem stále ještě pociťovala nedostatky. Audionahrávka sice zachytila průběh celého experimentu, postrádala jsem však vizuální aspekty, díky kterým by bylo snazší analyzovat určité jevy. V dalším experimentu by tedy bylo vhodné přidat k již aplikovaným metodám sběru dat ještě videonahrávku i za cenu toho, že bude žáky do jisté míry rozptylovat. Také přítomnost externího pozorovatele po celou dobu experimentu by napomohla k celkovému náhledu na realizaci prováděného experimentu.

Zvolením metody zakotvené teorie se povedlo prohloubit analýzu dat, pomocí níž se odkrylo mnoho jevů a kategorií, na které by bylo možné se dále zaměřit a rozpracovat je. Jako nejdůležitější se jeví kategorie *Konstrukce poznatků žáky*.

Po skončení analýzy dat experimentu jsem provedla novou kategorizaci získaných pojmů (viz tab. 4.8). Důležitou změnou bylo utřídění jednotlivých podkategorií a dimenzí podkategorií kategorie Konstrukce poznatků žáky. Kategorie Konstrukce poznatků žáky obsahuje pouze dvě podkategorie – *společná* konstrukce poznatků a *individuální* konstrukce poznatků. Řízená konstrukce poznatků (míra řízenosti učitelem, a to i prostřednictvím výběru úloh) se stala dimenzí podkategorií společná a individuální konstrukce poznatků, protože každá konstrukce je do určité míry řízená. Kategorii spontánní konstrukce poznatků jsem zrušila úplně, protože mi po znovuutřídění nedávala smysl. Zrušila jsem také první sloupec tabulky (kód), protože se ukázalo, že pro mou další práci nebyl důležitý.

Kategorie	*Podkategorie*	*Dimenze*
Konstrukce poznatků žáky	Společná konstrukce poznatků	míra řízení učitelem (míra zapojení učitele)
		míra formálnosti převzetí poznatku od jiné osoby (žáka, učitele)
	Individuální konstrukce poznatků	míra řízení učitelem (míra zapojení učitele)
Projev nadaných žáků	Preferování/ využití svého řešení/objevu	s možností volby
		bez možnosti volby
	Otázka individuality (osobnosti) žáka	
	Variabilita způsobu řešení úloh	

Tab. 4.8

Pokud mám v dalším výzkumu sledovat zejména kategorii Konstrukce poznatků žáky a její podkategorie společnou a individuální konstrukci poznatků, pak se jeví jako výhodnější změnit formu práce z individuální na skupinovou. V tom případě však je experiment proveditelný spíše s menším počtem žáků. Budu tak moci lépe vysledovat, jak se budou žáci vzájemně ovlivňovat, zda budou společně konstruovat poznatky apod.

Upřesnění výzkumných otázek

- Jak dochází k individuální a společné konstrukci poznatků?
- Jak lze charakterizovat společnou konstrukci poznatků?
- Jaký typ komunikace přispívá ke společné konstrukci poznatků?

4.3 Cyklus C3: Pythagorova věta – „mřížový čtverec 2“

Mezi cyklem C2 a C3 je delší časový úsek. Během něho jsem provedla několik dílčích výukových experimentů (viz jejich přehled v příloze 7), které však nakonec nezapadly do linie tří cyklů představených v této kapitole z hlediska obsahu a ani nepřinesly podstatné nové výsledky osvětlující proces konstrukce poznatků žáky. Proto je zde neuvádím a přecházím k cyklu C3, který logicky navazuje na předchozí dva cykly.

V tomto experimentu jsem se v souladu s reflexí cyklu C2 zaměřila na jednu centrální kategorii „konstrukce poznatků žáky“ a organizovala ho již spíše jako klinický experiment – přítomno bylo méně žáků, než je běžná třída, experiment proběhl mimo hodiny matematiky, byl nahráván na videokamery a navíc byl přítomen externí pozorovatel. Cíle z hlediska výuky matematiky (tedy z hlediska rozvoje matematických poznatků žáků) byly potlačeny ve prospěch výzkumných cílů.

4.3.1 Plán pro cyklus C3

Cíl cyklu C3

Cílem experimentu v cyklu C3 bylo pomocí analýzy získaných dat rozpracovat centrální kategorii *Konstrukce poznatků žáky*, konkrétně popsat mechanizmus společné konstrukce poznatků v malých skupinách a identifikovat komunikační vzorce, které k této konstrukci přispívají.

Cílová skupina

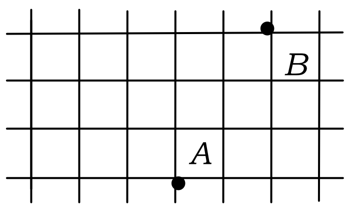
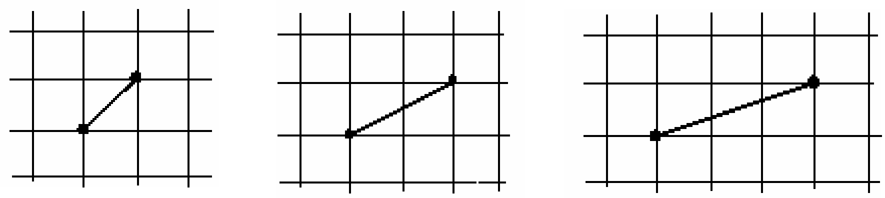
Experiment byl proveden se žáky kvarty osmiletého studia (odpovídající 9. ročníku základní školy) koncem školního roku v červnu 2008. V té době jsem vyučovala matematice pouze ve vyšších ročnících gymnázia a pro ně se mnou zamýšlené úlohy nehodily. Proto jsem experiment provedla se žáky kvarty, které jsem sice znala z hodin německého jazyka, ale nebyla jsem jejich učitelkou matematiky. Vystupovala jsem tedy pouze v roli experimentátorky. Za výhodu můžeme také považovat to, že jsem žáky neznala, co se týče jejich matematických znalostí, a tak jsem se při analýze provedeného experimentu mohla soustředit pouze na jeho konkrétní průběh a neměla jsem někdy svazující očekávání.

Nespornou výhodou bylo, že konverzace se vždy účastní pouze polovina třídy, a tak odpadl problém s větším množstvím žáků ve třídě. V této skupině bylo 14 žáků, z toho 4 chlapci a 10 dívek.

Téma – volba vhodného matematického tématu a jeho zpracování

Pro cyklus C3 jsem zvolila stejné téma (*Pythagorova věta – metoda postupného uvolňování konstant*) jako v cyklu C2, jehož výsledky jsem chtěla využít. Pythagorova věta byla žákům známa již od sekundy, a tak jsem – jako v předcházejícím experimentu v cyklu C2 – byla zvědavá, zda si všimnou souvislosti s tím, co již znají, a zda dojde ke znovuobjevení Pythagorovy věty.

Připravila jsem pracovní listy (příloha 8, zde tab. 4.9), aby mohli žáci pracovat ve skupinách co nejsamostatněji a s co nejmenší mou intervencí (viz níže). Zpřesnila jsem zadání úloh a každou úlohu jsem uvedla zvlášť na čtverečkovaném papíře. Navíc jsem připravila dvě odstupňované nápovědy u úlohy 4.

Úloha 1	a) Zapište symbolicky, jak se dostanete z bodu *A* do bodu *B*. Ve čtvercové síti se můžete pohybovat pouze vodorovně a svisle.  b) Najděte nejkratší cestu z bodu *A* do bodu *B*. Zdůvodněte své tvrzení. Ve čtvercové síti se můžete opět pohybovat pouze vodorovně a svisle.
Úloha 2	Vytvořte k dané úsečce čtverec. Vrcholy čtverce musí ležet pouze v uzlových bodech čtvercové sítě. Popište podrobně, jak jste postupovali.
Úloha 3	Načrtněte příslušné čtverce a zjistěte jejich obsah. a) b) c) 
Úloha 4	Zkoumejte vztah mezi délkou strany čtverců a jejich obsahem. (V případě nutnosti požádejte o 1., popř. 2. nápovědu.)
Úloha 4 (1. nápověda):	Vytvořte jednotlivé tabulky, ve kterých zafixujete svislé kroky a necháte probíhat vodorovné kroky (např. od 0 do *m*), abyste prošli všechny možnosti.

<table>
<tr>
<td>Úloha 4
(2. nápověda):</td>
<td>Zapište obsahy čtverců do tabulky a poté zkoumejte vztah mezi délkou strany čtverců a jejich obsahem.
<table>
<tr><td>$\rightarrow$</td><td>$\uparrow$</td><td>S</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>m</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$\rightarrow$</td><td>$\uparrow$</td><td>S</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>m</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>$\rightarrow$</td><td>$\uparrow$</td><td>S</td></tr>
<tr><td>0</td><td>n</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>n</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>n</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>n</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>n</td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>m</td><td>n</td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Tab. 4.9

Volba formy práce

Na základě zkušenosti, kterou jsem získala při realizaci a analýze předcházejícího experimentu, jsem nyní zvolila skupinovou formu práce. Žáci měli řešit dané úlohy zformulované na jednotlivých pracovních listech, které jsem jim plánovala dávat postupně vždy po vyřešení předcházející úlohy, a nahlas mezi sebou úlohy řešit, zdůvodňovat svá řešení a argumentovat. Experimentu se účastnily celkem 4 skupiny žáků (1 skupina po čtyřech žácích a 3 skupiny po třech žácích) a 1 žák pracující individuálně.[81]

- Skupina 1 – Nela, Anežka, Klára, Marcela
- Skupina 2 – Alena, Monika, Katka
- Skupina 3 – Karolína, Jitka, Tereza
- Skupina 4 – David, Jakub, Martin

Tato forma práce vyžadovala určitou míru samostatnosti, na kterou však žáci nebyli zvyklí, protože v jejich hodinách matematiky značně převládala frontální forma výuky. Toho jsem si byla vědoma a očekávala jsem možné problémy s tím, že žáci budou vyžadovat větší míru mé pomoci.

Způsob sběru dat, shromáždění dokumentace, záznamů

Po pečlivé reflexi předcházejícího experimentu se ukázalo jako nutné do spektra zdrojů, ze kterých budu získávat data a informace, zařadit kromě již použitého participačního pozorování, terénních zápisků, žákovských prací a diskuzí se žáky (v průběhu hodiny) také videonahrávku celého průběhu experimentu a přítomnost externího pozorovatele po celou dobu experimentu. Nakonec jsem se rozhodla pro použití čtyř videokamer, aby bylo možné nahrát práci všech skupin. Tím se snížil tlak na mé pořizování terénních zápisků v průběhu hodiny.

[81] Samostatně pracoval sluchově postižený chlapec. Jeho práci jsem do analýz níže nezahrnula, protože o své práci s nikým nediskutoval. Mohla bych analyzovat jen jeho písemná řešení, kde však řada informací přirozeně chybí.

4.3.2 Akce

Experiment v cyklu C3 byl proveden ve školní třídě v červnu 2008 v mých hodinách konverzace v německém jazyce. Experiment probíhal ve dvou vyučovacích hodinách ve středu 11. 6. 2008 (11^{50}–13^{30}, tj. 5.–6. vyučovací hodinu) a, jak už bylo zmíněno, bylo přítomno 14 žáků. Po celou dobu experimentu byla účastna externí pozorovatelka,[82] která mapovala celou situaci a pořizovala si své vlastní zápisky. Ve třídě byly čtyři videokamery. Každou videokameru jsem umístila k jedné skupině[83] a snažila jsem se ji nasměrovat vždy tak, aby snímala všechny žáky ve skupině. Žáci s přítomností kamer souhlasili a během experimentu se zdálo, že nemají s natáčením žádný problém.

Žáci pracovali samostatně na jednotlivých úlohách, já jsem obcházela třídu a všímala jsem si, jak pracují. O tom jsem si dělala poznámky, stejně jako externí pozorovatelka. Protože se nejednalo o hodinu matematiky a byly přítomny kamery, lze předpokládat, že pro žáky byla tato situace poměrně neobvyklá a na rozdíl od cyklů C1 a C2 ji nepociťovali jako běžnou hodinu matematiky. Na druhou stranu na ně nebyl vyvíjen žádný tlak, co se týče získávání matematických poznatků.

Na začátku hodiny po společném úvodu, kdy jsem žáky seznámila s experimentem a požádala je, aby se snažili jednotlivá řešení co nejpodrobněji popisovat, jsem je vyzvala, aby se rozdělili do čtyř skupin. Důvodem bylo, že jsem měla k dispozici čtyři videokamery, již předem jsem předpokládala rozdělení do skupin po 3–4 žácích. Rozdělení do skupin proběhlo rychle a bez problémů. V každé skupině jsem zadala první úlohu na samostatném listu papíru a žáci začali pracovat. Všichni se zapojili velmi aktivně do práce. Po přečtení zadání úlohy 1a) nastal v každé skupině problém s tím, co to znamená „symbolicky“. Zkusila jsem žákům přeformulovat zadání úlohy tak, abych jim příliš nenapověděla (slovo „symbolicky“ jsem vysvětlila formulací „pomocí znaků“).

Po vyřešení zadané úlohy se skupiny vždy přihlásily, aby mi jednotlivě mohly okomentovat své řešení a aby dostaly následující úlohu. Zde nastal technický problém, začaly vznikat prostoje, protože některé skupiny musely čekat, než jsem vyslechla řešení jiných, a to snižovalo jejich koncentraci na práci a zvyšovalo únavu. Nechtěla jsem však, aby jednotlivé skupiny navzájem poslouchaly svá řešení, abych zabránila jejich vzájemnému ovlivnění. Žáci byli velmi tolerantní a chápaví a snažili se mi v mém úsilí pomoct.

Když jsem komunikovala s žáky v jednotlivých skupinách, vždy jsem se snažila, abych je co nejméně naváděla a ovlivňovala. Hlavním cílem bylo pochopit jejich řešení, abych mohla adekvátně analyzovat jejich práci a proces, jakým si tvoří poznatky.

U úlohy 4 jsem měla připraveny dvě nápovědy pro případ, kdyby žáci nevěděli, jak pokračovat. První nápovědu (*Vytvořte jednotlivé tabulky, ve kterých zafixujete svislé kroky a necháte probíhat vodorovné kroky (např. od 0 do m), abyste prošli všechny možnosti.*) jsem v průběhu experimentu

[82] L. Ilucová.
[83] Sluchově postižený žák nebyl videokamerou snímán.

doplnila následujícím způsobem: *Existuje mezi danými údaji a obsahem čtverce určitá závislost?* Původní nápověda nebyla totiž žákům srozumitelná. Skupina 2 se nápovědě bránila a snažila se úlohy vyřešit bez ní. Ostatní skupiny rády nápovědu přijaly (viz dále).

Externí pozorovatelku překvapilo, jak moc byli žáci vstřícní vůči řešení úloh, ale také vůči sobě. Pracovali dobře, i když jsem nad nimi nestála a i přesto, že je matematice neučím. Nesnažili se skončit dříve, pracovali navzdory tomu, že nemuseli. V průběhu realizace experimentu však přece jen pozornost trochu poklesla.

Nejvíce času jsem strávila u skupiny dívek (skupina 1), kterou jsem si následně vybrala pro podrobnější analýzu, a u skupiny chlapců (skupina 4), které jsem se snažila více navést (než všechny ostatní skupiny). Skupinu 1 a 4 jsem také nejvíce žádala o vysvětlení a nabádala je k další práci („ještě vymyslete…“ apod.). Skupinám 2 a 3 jsem se věnovala méně a spíše jsem se u nich zaměřovala na formální instrukce.

Zpočátku jsem se snažila žáky spíše povzbuzovat a nabízet jim formu práce („napište…“, „zkuste…“), teprve později jsem je více naváděla a směřovala v práci (podle dojmu pozorovatelky proto, že jsem viděla jejich únavu). Experiment byl veden přes dvě vyučovací hodiny vcelku – a tím, že žáci čekali, až se k nim jako experimentátor dostanu, otupovalo se jejich vnímání.

Podívejme se nyní rámcově na to, jak se jednotliví členové skupiny zapojovali do práce.[84]

Ve skupině 1 se nejvíce do práce zapojovaly Nela a Anežka, které práci vedly, o trochu méně Klára. Marcela většinou práci dívek jen pozorovala. Ve skupině 2 se do práce příliš nezapojovala Klaudie a spíše se ocitla v roli pozorovatelky. Pro dívky v této skupině bylo typické, že hodně úsilí věnovaly pořádku na stole (např. změřily pravítkem, co potřebovaly, a hned zase pravítko uklidily). Skupina 3 pracovala podle odhadu pozorovatelky pouze přibližně jednu třetinu času. Práci skupiny řídila Karolína. Ve skupině 4 probíhala práce pouze mezi Davidem a Jakubem; Martin se bavil s dívkami ze skupiny 3. Používali kalkulačku na mobilu.

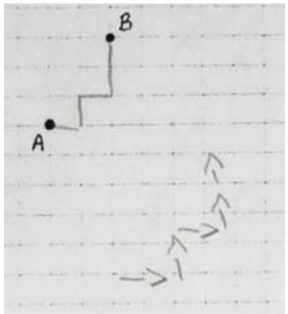
Pro popis akce v následujících odstavcích je důležité uvést způsob analýzy práce skupin. Jak jsem již uvedla, pro podrobnou analýzu jsem si vybrala skupinu 1. Dívky ochotně na kameru popisovaly svá řešení a živě se mnou o své práci komunikovaly. Videozáznam jejich práce jsem následně přepsala do podrobného protokolu (o 39 stranách) a podrobila analýze z hlediska výzkumných otázek. U skupin 2 až 4 jsem pořídila stručnější zápis[85] o jejich práci tak, abych mohla popsat „dějové linie“ (odstavec 4.3.2.1), tedy shrnutí, jak řešily úlohy (bez analýzy). Následně jsem pak analyzovala práci i těchto skupin na základě výsledků analýzy práce skupiny 1. Abych se tedy vyhnula opakování, vynechám v následujícím odstavci dějovou linii skupiny 1, protože té se bude týkat podrobná analýza uvedená v odstavci 4.3.3.1. Nakonec podám v odstavci 4.3.3.2 analýzu práce skupin 2 až 4 obohacenou výsledky analýzy práce skupiny 1.

[84] Jistou charakteristiku skupin vystihla externí pozorovatelka jejich pojmenováním: skupina 1 – „pečlivky” (barevné a přesné řešení), skupina 2 – „slušňačky”, skupina 3 – „roztleskávačky”.

[85] Při analýze jsem se pak opakovaně vracela k videozáznamům jejich práce.

4.3.2.1 Dějové linie skupiny 2, 3 a 4

Skupina 2 – Alena, Monika, Katka (kopie jejich řešení jsou v příloze 9)



Obr. 4.27

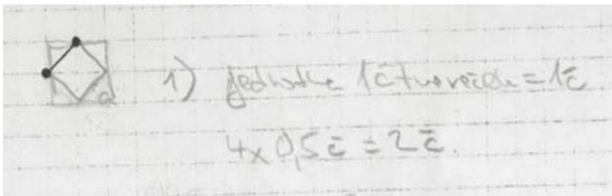
Dívky si nejprve přečetly zadání úlohy 1a). Důraz položily na slovo „symbolicky”, a pak se ujistily, že nesmí postupovat „nakřivo”, jak zmínily. Alena se ujala práce a nakreslila cestu z bodu *A* do bodu *B* jako jeden dílek doprava, jeden nahoru, jeden doprava a dva dílky nahoru. Tím považovaly úlohu za vyřešenou a Alena přečetla zadání úlohy 1b). Dívky přemýšlely nad různými možnostmi, ale Alena vždycky napočítala pět dílků, a tak nakreslila jednu z možných cest (jeden dílek doprava, dva nahoru, jeden doprava a jeden nahoru) a vedle obrázku napsala jako zdůvodnění: „Všechny cesty jsou stejné.” Potom se ještě vrátila ke slovu symbolicky v úloze 1a) a zeptala se mě „Jak symbolicky?”, já jsem v roli experimentátora nechala volbu na dívkách. Alenu napadlo vyznačit cestu pomocí šipek a pod obrázek vyznačila stejnou cestu jako v obrázku, ale ne pomocí úseček, ale pomocí šipek (viz obr. 4.27). Katka při řešení úlohy 1 pouze přihlížela práci dívek, Monika diskutovala nad řešením s Alenou.

Ještě jsem dívky upozornila, aby v úloze 1b) zdůvodnily, proč jsou všechny cesty stejně dlouhé. Alena vygumovala větu „Všechny cesty jsou stejné,” a napsala: „Jedna z cest, která vede po pěti čtverečcích.” Potom se Alena zeptala: „Ale proč to nemůže být třeba čtyři čtverečky?” Monika jí odpověděla „No protože to nemůže být šikmo,” a Alena prohlásila „Prostě kratší cesta neexistuje,” a napsala: „Kratší cesta již nelze, protože bychom cestu musely vést přes diagonálu.” Přečetla jsem si řešení úlohy 1 a zadala dívkám úlohu 2.

Alena opět přečetla nahlas dívkám zadání úlohy. Potom si dívky ještě pročetly zadání úlohy potichu každá sama pro sebe. Alena prohlásila, že tečky musí být stejně daleko od sebe a vyznačila dva zbývající vrcholy čtverce do poloroviny směrem dolů od zadané mřížové úsečky. – Monika řešení Aleny ještě okomentovala, že čtverec vlastně musí být našikmo, a Alena příslušný čtverec správně dokreslila (směrem dolů od zadané mřížové úsečky). Potom si znovu dočetla zadání úlohy: „Popište, jak jste postupovali,” a správně nakreslený čtverec vygumovala se slovy „To není čtverec, to je obdélník”. Monika ji okřikla, aby to negumovala. Alena chvíli zapřemýšlela a povzdechla si „I když asi jo,” a nakreslila příslušný čtverec do opačné poloroviny (směrem nahoru od zadané mřížové úsečky).

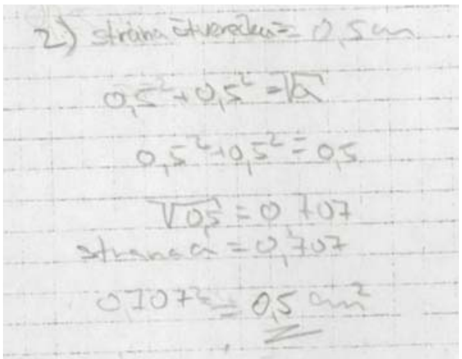
Dále Alena přemýšlela, jakým způsobem zapsat postup řešení, a obrátila se na Moniku s otázkou „Jak se to řekne?” a rukama naznačovala dvě rovnoběžné přímky. Katka jí napověděla „Rovnoběžky,” a Alena začala zapisovat postup řešení: „Nejprve jsme si udělaly rovnoběžku ve vzdálenosti a poté jsme spojily čtyři body.” Popsala řešení, které však přesně takto nepoužila. Katka ještě připomněla, že tam musí být pravý úhel. Pak jsem si opět přečetla řešení dívek a zeptala se, jestli ještě neexistuje jiné řešení, popř. ještě jiná další. Alena navrhla opět konstrukční způsob řešení, a to pomocí pravého úhlu, který před chvilkou zmínila Katka. Alena druhý způsob řešení popsala následovně: „Ještě pomocí pravého úhlu udělat kolmice na úsečku a spojit ve vzdálenosti *a*.” Dále dívky přemýšlely nad třetím způsobem řešení úlohy 2. Alenu napadlo toto řešení: „Vždy o dva řádky výše než základní úsečka a o jedno doleva.” Monika kontrolovala její řešení a souhlasila. Katka přihlížela. Opět jsem si přečetla řešení dívek, všechny tři mi vysvětlovaly třetí způsob řešení. Vyzvala jsem je ještě k hledání dalšího způsobu řešení úlohy. Alenu okamžitě napadlo následující řešení: „Z bodu *A*[86] o dva čtverečky doprava a jeden nahoru. Z bodu *B* o dva čtverečky nahoru a jeden doleva. Z bodu *C* o dva čtverečky doleva a jeden dolů a spojit body.” Byla jsem s řešením dívek spokojená a zadala jsem úlohu 3.

Alena opět přečetla zadání úlohy a ihned dokreslila příslušné mřížové čtverce v úloze 3a), 3b) a 3c). Dívky přemýšlely nad výpočtem obsahu. Monika ukázala na obrázek v úloze 1a) a řekla „Tohle je… já nevím…,” a Katka ji doplnila: „… jeden čtvereček.” Alena ještě mezitím změřila pravítkem délku strany mřížového čtverce a délku strany čtverce ve čtvercové síti. Alena navrhla použít 0,5 cm, Katka jí oponovala: „Já bych dala jeden čtvereček. A obsah budou dva čtverečky, protože to máš půl čtverečku, půl čtverečku, půl čtverečku a půl čtverečku.” Tím myslela obsahy čtyř pravoúhlých trojúhelníků, ze kterých se skládá mřížový čtverec 1 – 1. Alena zapsala tento způsob řešení: „Jednotka jeden čtvereček = 1č,” a „4 x 0,5č = 2č” (viz obr. 4.28). Dívky si tímto zavedly jednotku (délku strany čtverce ve čtvercové síti 1 čtvereček).

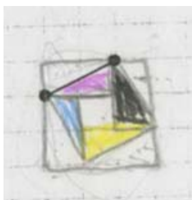


Obr. 4.28

Dívky dále začaly řešit úlohu 3b) a chtěly použít stejný způsob. Alena si však uvědomila, že tady to bude jinak, chvíli přemýšlela a raději se vrátila k úloze 3a), aby zapsala druhý způsob řešení pomocí Pythagorovy věty, a to v jejím navrhovaném měřítku 0,5 cm (viz obr. 4.29): „Strana čtverečku = 0,5 cm”, „$0{,}5^2 + 0{,}5^2 = = \sqrt{a}$”[87], „$0{,}5^2 + 0{,}5^2 = 0{,}5$”, „$\sqrt{0{,}5} = 0{,}707$”, „strana = 0,707”, „$0{,}707^2 = 0{,}5\ \text{cm}^2$”. Katka a Monika kontrolovaly, co Alena píše. Potom se Alena vrátila k řešení úlohy 3b): „Tady to bude těžší.” Navrhla „Takže to uděláme zase po čtverečkách” a přemýšlela, jak na to. Katka si vzala tužku, rozdělila čtverec na čtyři pravoúhlé trojúhelníky a jeden čtvereček uprostřed a cosi zamumlala. Alena začala zapisovat řešení a vybarvila jednotlivé trojúhelníky různými barvami (viz obr. 4.30): „5 čtverečků, protože každé vybarvené pole je jeden čtvereček.” Dále předala psaní Monice a diktovala „Za druhé. Teď to vypočítáme matematicky.”



Obr. 4.29



Obr. 4.30

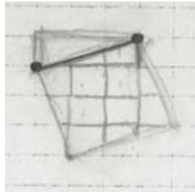
---

[86] V obrázku si označila čtverec *ABCD*.

[87] $\sqrt{a}$ je chybně (správně má být a^2).

a přemýšlela. Monika navrhla, že délka strany čtverce je 1 cm, obě dívky ji však opravily, že to tak není. Katka si zatím vzala druhý list s úlohou 3c) a okomentovala úlohu: „Tak tady to bude stejný princip…, nakreslím tam ty čtverečky.” (Viz obr. 4.31.) Alena odhadla, že obsah čtverce 2 – 1 v úloze 3b) je 1,5 cm^2:[88] „Ale jak jsem na to přišla, to vám neřeknu.” Chvilku se zamyslela, a pak ukázala v jednom z pravoúhlých trojúhelníků přeponu a dvě odvěsny. Provedla výpočet na kalkulačce a vyšlo jí 1,25 cm^2.

Katka vznesla dotaz k řešení v úloze 3c): „Kolik čtverečků tvoří ten pravoúhlý trojúhelník?” Monika a Alena si prohlédly řešení Katky, ale vrátily se zpátky ke svému řešení v úloze 3b). Alena nadiktovala Monice druhý způsob v úloze 3b) následovně: „Je to 1,25 cm^2. A teď proč jsme to tak udělaly? […] Napiš fialový trojúhelník, jedna strana měří půl centimetru, druhá strana centimetr … druhá odvěsna… A přepona otazník. A teď to vypočítáme [počítá na kalkulačce]. No, přepona je 1,11 [nezaokrouhlila]. A obsah? Dej to na druhou. [Monika píše $1{,}1^2 = 1{,}25$.] 1,1 na druhou, a to se rovná 1,25.”



Obr. 4.31

Potom Alena vzala druhý pracovní list s úlohou 3c) a začala tuto úlohu řešit s Monikou. Katka již na úloze nepracovala.[89] Alena s Monikou se pokusily určit počet čtverečků ve čtverci 3 – 1. Monika vypočítala: „Deset.” Alena hodnotu ještě přepočítala a vyšlo jí také deset čtverečků. Monika zapsala: „Deset čtverečků.” Alena zvýraznila v obrázku pravoúhlý trojúhelník[90] (viz obr. 4.31) a použila jiný způsob řešení: „Jedna strana 0,5 cm, druhá strana 1,5 cm, [???], přepona je 1,5 cm a 2,5 centimetru má obsah.” Katka: „To je blbost… 1,5.” Alena souhlasila a přepočítala úlohu (asi natřikrát): „Přepona je 1,58.” Potom vznikla prodleva, kdy dívky čekaly na mě. Alena okomentovala způsoby řešení úlohy 3.

Alena opět přečetla nahlas zadání úlohy 4. Dívky se zamyslely nad možným řešením. Alenu napadla myšlenka: „Když budeš mít jinou délku čtverce, tak budeš mít i jinej obsah, že jo?” Monika prohlásila „Čím delší strana, tím větší obsah”, avšak zapsala „Čím delší strana, tím delší obsah.” Alena dále nadiktovala Monice druhý způsob řešení: „Obsah je strana na druhou.”

Potom dívky přemýšlely nad dalším možným způsobem řešení. Nakreslily čtverec 5 x 5 se stranami rovnoběžnými se čtvercovou sítí. Alena to okomentovala: „Takže pokud mám čtverec s délkou strany 2,5 cm, obsah bude 6,25 cm^2 [smích].” Potom Alena rozdělila podle čtvercové sítě čtverec 5 x 5 na jednotlivé čtverečky.

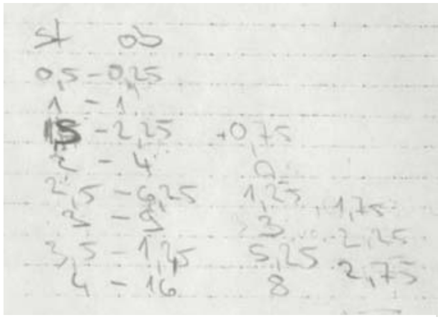
Zastavila jsem se u skupiny a Alena řekla, že už nevědí, co dál. Zeptala jsem se, jestli chtějí nápovědu. Alena odpověděla: „My spíš nevíme, jak to máme zkoumat.” Pokusila jsem se přeformulovat zadání úlohy: „Zkuste vymyslet, jestli tam třeba neexistuje vztah… nějaká závislost. […] Měla jsem na mysli, že když se podíváte tady na ty předchozí případy, tak jestli v tom neexistuje nějaká obecná závislost… […] mezi těmi údaji. Je vám to jasný?” Dívky se usmívaly. Chtěla jsem jim dát první nápovědu, dívky ji však ještě

[88] Chybný odhad (správně má být 1,25 cm^2).

[89] Není vidět, kolik toho Katka vyřešila sama.

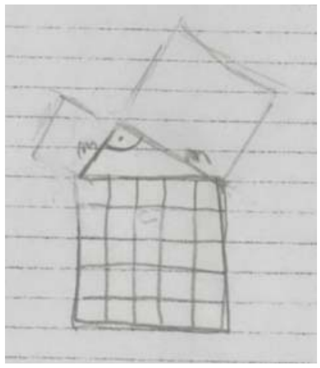
[90] Není vidět, jestli Alena zvýraznila trojúhelník uvnitř čtverce, nebo dokreslila trojúhelník mimo čtverec (viz obr. 4.31).

nechtěly, vyžádaly si ještě chvilku. Alena začala pročítat již vyřešené úlohy a upozornila ostatní „Hele, tenhle ten má délku strany [nezřetelné] a obsah je 0,5, tenhle ten má délku strany 1,58 a obsah je 2,5, tenhle ten má délku strany 1,1 a obsah je 1,25. To je divný," a přemýšlela dál. Dolů na pracovní list s úlohou 2 (viz obr. 4.32) začala Alena vypisovat do dvou sloupců přehled délek strany čtverce a vždy příslušného obsahu. Potom se snažila vyzkoumat určité závislosti mezi jednotlivými údaji (rozdíl apod.). Dívky ji pozorovaly, Monika se snažila pochopit její způsob řešení. Alena však žádnou závislost neodhalila.


Obr. 4.32

Upozornila jsem dívky, že neznají délku strany čtverce, že mají pouze zadaný bod A a bod B: „A teď se zamyslete nad tím, jak vznikla... Jak se dostanete z bodu A do bodu B? Vy neznáte délku strany AB, ale víte, jak se dostanete z bodu A do B. Zkuste využít těchto údajů." Alena obhajovala své řešení, že zjistily závislost strany čtverce na obsahu: „Jak se to postupně zvyšuje přímou úměrou.[91] Že dvojnásobek strany když se odečte od obsahu, tak to číslo je vždycky 3, 4, 5, 6.[92] A takhle se to zvyšuje od dvojky." Na toto řešení jsem nereagovala, položila jsem však otázku, zda může existovat mřížový čtverec s délkou strany 1, když je takto natočený. Upozornila jsem na to, že nyní uvažujeme pouze takto natočené mřížové úsečky/čtverce.

Dívky byly trochu zklamané, že neodhalily závislost. Dopsaly ještě třetí způsob v úloze 3b). Po chvilce jsem se k nim vrátila a zkusila je navést ke správné závislosti. Zeptala jsem se, jakým způsobem můžeme charakterizovat stranu čtverce, který si dívky nakreslily v úloze 4. Dívky nejdříve nechápaly, co myslím. Vrátila jsem je k úloze 3 a Alena určila, že vždycky jde o několik čtverečků nahoru a pak doprava. Zeptala jsem se, jestli i v tomto případě nelze charakterizovat danou stranu obdobně. Alena dokreslila k horní straně čtverce 5 x 5 pravoúhlý trojúhelník (viz obr. 4.33). Společně se mnou zobecnily délky odvěsen m a n pro obecný případ. Alena dále dokreslila nad obě odvěsny příslušné čtverce a určila, že vlastně $m^2 + n^2$ je rovno obsahu čtverce nad přeponou, tento obsah označila S. Tímto způsobem se do hry dostal geometrický význam Pythagorovy věty $m^2 + n^2 = S$. Zde byl patrný moment překvapení Aleny. Dívky si oddechly, že se jim nakonec úlohu přece jen podařilo vyřešit.


Obr. 4.33

Skupina 3 – Karolína, Jitka, Tereza (kopie jejich řešení je v příloze 10)

Po přečtení zadání úlohy 1a) dívky napadaly různé způsoby řešení, nejprve je ústně navrhovaly. Prvním způsobem řešení byla „cesta" od bodu B dolů a kolmo doleva do bodu A (Tereza). Druhým řešením bylo jít od bodu A jeden

[91] Chybná úvaha.
[92] Toto neplatí.

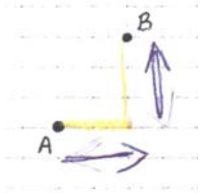
dílek nahoru, doprava, nahoru, doprava, nahoru (Jitka). Třetím řešením byla cesta směrem dolů od bodu *B* čtyři dílky, potom doleva dva dílky a jeden dílek nahoru do bodu *A* (Karolína). Potom se Karolína ujala práce a začala kreslit řešení úlohy – zvolila první cestu. Přitom si připomínala, že musí postupovat pouze vodorovně a svisle.

Dívky dále přemýšlely nad tím, co znamená slovo „symbolicky”. Vysvětlily si ho jako „barevně”. Karolína se také krátce zamýšlela nad tím, jestli „rovně” a „klikatě” budou cesty stejně dlouhé (což bylo úkolem následující úlohy), úlohu však nevyřešila. Dívky se dále zaměřovaly pouze na slovní popisování průběhu řešení úlohy. Projevil se zde sociální aspekt, kdy se mi dívky snažily vyjít vstříc, aby co nejlépe okomentovaly své řešení. Karolína na závěr shrnula řešení úlohy: „Snažily jsme se najít co nejkratší a nejjednodušší cestu, i když některé z nás [...] napadla složitá [...] složitější cesta, která vypadala [...] lépe vizuálně.”

Dívky přešly k úloze 1b). Shodly se na tom, že řešením úlohy je totéž, co řešily v úloze 1a).

Potom mě Karolína zaslechla, jak u jiné skupinky vysvětluji pojem „symbolicky” (pomocí symbolů nebo znaků), a vrátila se k úloze 1a). První způsob řešení úlohy pomocí symbolů, který Karolínu napadl, byl „dolů a doleva”. Pojmy „dolů” a „doleva” rozvíjela svůj poznatek „symbol pomocí směru”. Tereza navrhla druhý způsob symbolického záznamu – pomocí šipek – a postupně kreslila dvě šipky od bodu *B* do bodu *A*. K úloze 1b) se dívky nevrátily.

Potom mi dívky okomentovaly své řešení. Přečetla jsem ještě jednou zadání úlohy a zdůraznila slova „z bodu *A* do bodu *B*”. Jitku ihned napadlo, že šipky musí mít opačný směr. Karolína opravila směr šipek v obrázku (viz obr. 4.34) a také v popisu průběhu řešení úlohy nahradila po mírném zaváhání v jednotlivých směrech šipek slova „dolů a doleva” slovy „doprava a nahoru”. Pomohlo zde mnou důrazné přečtení zadání úlohy.



Obr. 4.34

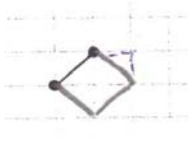
V řešení úlohy 1b) dívky nejprve navrhly žlutě označenou cestu (dva dílky doleva a tři dílky nahoru) jako nejkratší cestu. Své řešení zdůvodily tím, že je to hned tak napadlo. Zeptala jsem se, zda neexistuje ještě jiná možnost. Karolína si uvědomila, že musí postupovat pouze pomocí vodorovných a svislých kroků, proto „přímou” cestu hned zavrhla. Tereza ještě připomněla řešení pomocí „schůdků”. Zeptala jsem se, která z těchto možností cest je delší. Karolína odpověděla, že obě jsou stejně dlouhé, a hned ji také napadlo, že „Těch cest může být hodně”. Letmo naznačila ostatním jinou možnost (tři čtverečky nahoru a dva doprava) a Jitka vzápětí přispěla jiným řešením: dva čtverečky nahoru, dva doprava a jeden nahoru. Na závěr Karolína prohlásila, že žlutě označená cesta (dva dílky doleva a tři dílky nahoru) je nejjednodušší.

Zadala jsem úlohu 2. Dívky nejprve přečetly zadání úlohy. Karolína se zeptala, co jsou uzlové body. Ostatní dívky intuitivně chápaly pojem „uzlový bod” a ukázaly na jeden ze dvou uzlových bodů znázorněných na obrázku. Jitka ještě slovy vysvětlila Karolíně, která ještě nechápala, co je to „uzlový bod”: „Co dělá tu čtvercovou síť? Takhle čáry [ukazuje nad pracovním listem tužkou svisle tři přímky a vodorovně tři přímky] a takhle čáry. [...] No a vždycky jak se to protne, tam jsou podle mě ty uzly a tam musí být ty vrcholy.“ Potom začala Jitka řešit úlohu – nakreslila příslušný mřížový čtverec k mřížové úsečce 2 – 1 (viz obr. 4.35). Při tom využila strategie od levého zadaného bodu dva čtverečky dolů a jeden doprava. Dále dívky začaly popisovat postup načrtnutí čtverce. Karolína poznamenala, že si nejprve musely ujasnit, co jsou to uzlové body. Opět se zde projevilo sociální hledisko, kdy se dívky snažily popsat vše pravdivě (Karolína: „Pak napiš, že to někteří nechápali.“).

Obr. 4.35

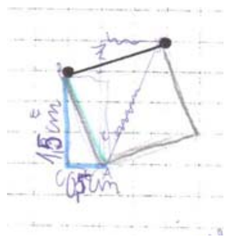
Jitka si uvědomila možnost dvou řešení úlohy, každé v jedné polorovině; vzápětí se však opravila, že řešení je více, neuvedla však, která další řešení myslí. Potom mi dívky začaly popisovat své řešení. Zajímalo mě, jakým způsobem získaly zbylé dva vrcholy. Jitka se ujala vysvětlování, že vzniklé strany čtverce tvoří vždy úhlopříčku obdélníku, který vznikne sloučením dvou sousedních čtverečků čtvercové sítě. Karolína a Tereza začaly komunikovat se skupinkou chlapců, zatímco Jitka stále ještě popisovala postup řešení. Potom mě dívky zavolaly a já jim zadala další úlohu.

Dívky si začaly ihned pročítat zadání úlohy 3. Karolína chtěla začít kreslit mřížový čtverec 3 – 1, protože před ní tato část úlohy právě ležela. Jitka ji zastavila s tím, že tam se teprve dostanou, a dokreslila příslušný mřížový čtverec 1 – 1 (viz obr. 4.36). Jitka si dále uvědomila, že čtvercová síť je tvořena ze čtverců strany délky 0,5 cm, a začala tuto svou myšlenku popisovat na pracovní list. Karolína a Tereza sledovaly Jitku při práci, ale při tom se opět bavily na jiné téma, prý aby mě pak „pobavily“, až si nahrávku budu později pouštět. Jitka se také částečně do jejich hovoru zapojovala. Karolína mezitím načrtla mřížový čtverec 3 – 1. Tereza a Karolína si snažily vzpomenout, jak se vypočítá obsah čtverce. Tereza by počítala obsah čtverce jako a^4, Jitka ji však opravila, že obsah čtverce se vypočítá a^2. Tereza tímto vyvolala u Jitky vzoreček, což může být projevem paměťového uchopení vzorce.



Obr. 4.36

Zatímco Jitka popisovala stále své řešení v úloze 3a), Karolína začala řešit úlohu 3c) (viz obr. 4.37), která byla na druhém listu. Uvědomila si, že aby mohla vypočítat obsah čtverce, musí zjistit délku strany čtverce, a to jako délku přepony pravoúhlého trojúhelníku pomocí Pythagorovy věty. Jitka jí to odsouhlasila a stále nerušeně popisovala řešení úlohy 3a), kde právě psala také o výpočtu přepony vzniklého trojúhelníka pomocí Pythagorovy věty.[93]



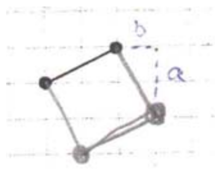
Obr. 4.37

Karolína se mezitím zeptala Jitky, co je odvěsna, a ukázala na přeponu, i přes to, že před chvílí pojem přepona správně použila. Karolína dále barevně zvýraznila příslušný pravoúhlý trojúhelník a vypočítala délku přepony daného pravoúhlého trojúhelníku. Zeptala se však dívek, jak zní Pythagorova věta – ty jí odpověděly, že $a^2 + b^2 = c^2$. Karolína nejprve vypočítala délku přepony s tím, že délku strany čtverce čtvercové sítě počítá jako 1 jednotku, poté si však s úsměvem sama uvědomila, že délka strany čtverečku mřížové sítě není 1 jednotka, a přepočítala délku přepony původní úvahou, tzn. uvažovala skutečnou délku strany čtverečku 0,5 cm. Poté si

[93] Karolína to zde vyslovila sice jako první, ale Jitka to už také popisovala (jak je vidět z videonahrávky).

ještě všechny úsečky pravítkem přeměřila, zřejmě se potřebovala ujistit o správnosti výpočtu.

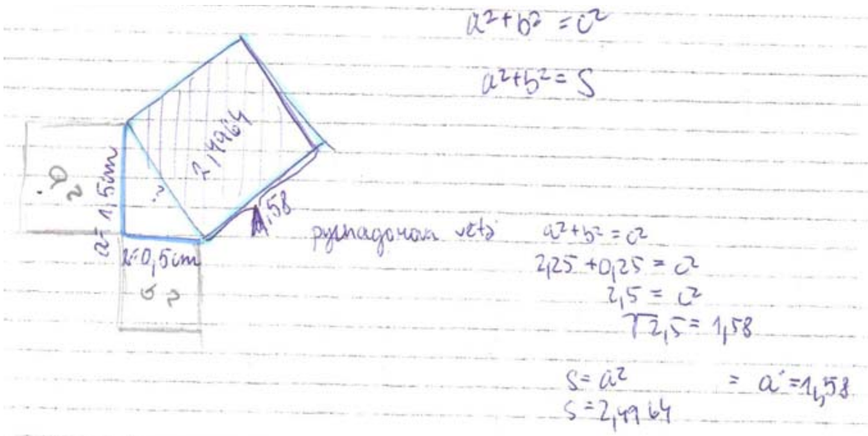
Jitka zatím sama popsala řešení úlohy 3a) a provedla potřebné výpočty. Když zaslechla Karolínu, že při řešení odmocňuje, uvědomila si, že zapomněla odmocnit, a výpočet opravila. Tereza začala spolupracovat s Jitkou, pomáhala jí radou, kam má co napsat. Jitka začala řešit úlohu 3b), komentovala ji tak, že je to totéž, jen v jiném provedení. Dokreslila příslušný mřížový čtverec (viz obr. 4.38) a opět popsala řešení této úlohy, včetně výpočtů. Karolína si mezitím pročítala řešení své úlohy, nezapojila se do řešení úlohy 3b). Tereza sledovala střídavě práci Jitky a skupiny chlapců sedících poblíž. Pak Karolína okomentovala způsob řešení úlohy 3 s tím, že ji Jitka trochu doplňovala.[94]



Obr. 4.38

Zeptala jsem se, jestli je nenapadá ještě jiné řešení této úlohy, dívky však už jiný nápad neměly. Karolína se ještě chvilku zamýšlela nad jinou možností. Potom nastala kratší prodleva, dívky na mě čekaly. Karolína si posteskla, že by už chtěla další úlohu.

Zadala jsem jim úlohu 4. Dívky si opět pročetly zadání úlohy. Karolína zavtipkovala, že by chtěly poprosit o obě nápovědy. Jitka důrazně přečetla: „[Zkoumejte vztah mezi] délkou strany čtverců a jejich obsahem.“ Dívky se krátce zamyslely a Jitku napadlo: „Ta strana je vždycky odmocnina z toho obsahu.“ I Karolíně se zdálo, že řešení úlohy je zřejmé, tedy že: „ To c^2 je úplně to samý jako ten obsah.“ Karolína se ujala psaní a napsala svou myšlenku. Potom také Jitka napsala svůj nápad. Poprosila jsem dívky, aby popsaly řešení názorněji, např. pomocí obrázku. Karolína nakreslila pravoúhlý trojúhelník s příslušným čtvercem nad jeho přeponou a popsala výpočet obsahu čtverce nad touto přeponou pravoúhlého trojúhelníka z úlohy 3c).



Obr. 4.39

Karolína mi vysvětlila svůj popis (viz obr. 4.39) s tím, že c^2 je téměř stejné číslo jako výsledek obsahu tak, že po odmocnění $c^2 = 2{,}5$ získáme $c = 1{,}58$ a to když znovu umocníme, abychom vypočítali obsah čtverce, dostaneme

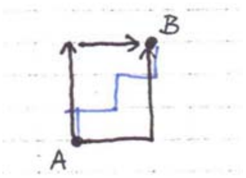
[94] Obě dívky to řešily stejným způsobem.

$S = 2{,}4964$. Zeptala jsem se ještě na obecné řešení – kdyby nebyl dán uvedený konkrétní čtverec. Dívky tvrdily, že takto to půjde vypočítat vždycky u jakéhokoliv trojúhelníku, a Jitka připojila vysvětlení, že se to vždycky vypočítá podle Pythagorovy věty, protože se tam vždycky najde pravoúhlý trojúhelník, jehož přepona je délka strany čtverce. Jitka dokreslila do náčrtku zbývající dva čtverce s obsahy a^2 a b^2. Karolína uvedla, že $a^2 + b^2 = c^2$, a tedy $a^2 + b^2 = S$.

Dívky používaly Pythagorovu větu již průběžně, a tak zde můj záměr (znovuobjevení Pythagorovy věty pomocí metody postupného uvolňování konstant) nebyl možný. V této skupině navíc vznikaly velké časové prostoje, chvíli vždy trvalo, než jsem se k dívkám dostala. Nečekala jsem v řešení úloh velké pokroky, proto jsme úlohu uzavřely tak, jak jsme ji uzavřely, a k metodě postupného uvolňování konstant jsme se nedostaly.

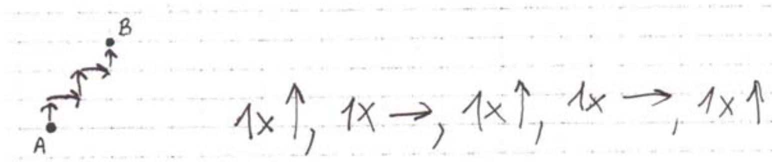
Skupina 4 – David, Jakub, Martin (kopie jejich řešení je v příloze 11)

Po přečtení zadání úlohy 1a) začali chlapci přemýšlet nad tím, co znamená slovo „symbolicky". Martin navrhl, že symbolicky znamená vyznačit cestu tečkami. Všichni tři chlapci se snažili řešit úlohu samostatně, pohybovali se buď tužkou, nebo prstem po čtvercové síti různými způsoby a napočítali vždy 5 kroků: „Je to pět." David napsal (aniž by četl úlohu 1b)) „Zkoušíme najít nejkratší cestu", aniž by se chlapci zmínili o tom, že hledají nejkratší cestu. Martin si vzápětí všiml, že hledat nejkratší cestu je předmětem následující úlohy 1b). Škrtl tedy tuto větu v úloze 1a) a přepsal ji do úlohy 1b). Martin prohlásil, že šikmo by to šlo, ale podle zadání to nejde, Jakub a David souhlasili. Martin dokreslil do obrázku v úloze 1b) cestu 1 dílek nahoru, 1 doprava, 1 dílek nahoru 1 doprava a ještě 1 dílek nahoru (viz obr. 4.40) a přemýšlel, jestli by úloha nešla vyřešit pomocí čtyř kroků. Diskutoval s Jakubem, který stále přesvědčivě tvrdil, že je to pět dílků.



Obr. 4.40

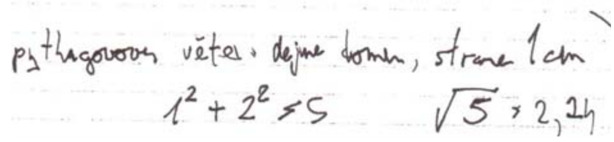
David mezitím řešil sám úlohu 1a), kde zapsal symbolicky pomocí šipek cestu z bodu A do bodu B (viz obr. 4.41), a potom dokreslil jednotlivé šipky do obrázku. Tuto úlohu zapsal s papírem „vzhůru nohama", musel si správně uvědomovat směr šipek. Poté si David přečetl zadání úlohy 1b) a přemýšlel nad jejím řešením. Jakub a Martin ho nechali řešit úlohu bez jejich pomoci. David samostatně zapsal „Je to cesta z 5ti úseků, ale jsou i jiné možnosti. Všechny cesty mají 5 úseků, neexistuje kratší," a dokreslil další dvě možné cesty z bodu A do bodu B. Potom mi David okomentoval řešení úlohy, právě jsem procházela kolem. Byla jsem s vysvětlením spokojená a zadala jsem úlohu 2.



Obr. 4.41

Chlapci si opět postupně přečetli zadání úlohy. Martin položil otázku: „Co je to uzlový bod?" David mu ukázal na zakreslené dva krajní body mřížové úsečky v obrázku. Jakub s Martinem pozorovali práci vedlejší skupinky dívek a připomněli Davidovi, který začal úlohu sám zapisovat, že má nahlas komentovat své řešení úlohy. David tedy řekl, že ho napadlo řešení pomocí

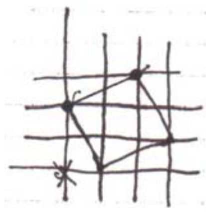
Pythagorovy věty. Zvolil si jednotku – délku strany čtverce ve čtvercové síti 1 cm[95] a vypočítal délku mřížové úsečky pomocí Pythagorovy věty (viz obr. 4.42). David přemýšlel nad úlohou dále a napadlo ho, že by to spíše měl být nějaký kosočtverec. Jakub začal komentovat také problematiku měřítka a navrhl, že by se délka mřížové úsečky měla počítat pomocí hodnot, které odpovídají jednotce 0,5 cm. To však David zamítl.



Obr. 4.42

David si začal vpravo dole na pracovním listě kreslit příslušný mřížový čtverec (viz obr. 4.43), doprovázel to slovy „To je úplně nádhernej čtverec, že mě to nenapadlo hned," a dokreslil čtverec do obrázku nahoru k zadané mřížové úsečce (viz obr. 4.44). Dále popsal své řešení na pracovní list: „Nejprve to vypadalo tak, že jsem vytvářel pseudokosočtverec. Pak mi to došlo, jak je to jednoduchý." Do závorky dal výpočet pomocí Pythagorovy věty s poznámkou „To bylo [nanic][96], pouze nás to navedlo sem" a nakreslil šipku k pomocnému nákresu, kde si mřížový čtverec rozdělil na 4 pravoúhlé trojúhelníky a 1 čtvereček uprostřed a ještě orámoval mřížový čtverec 2 – 1 čtvercem 3 x 3. Potom mi David okomentoval své řešení a tvrdil, že mřížový čtverec vytvářel tak, že vlastně kopíroval a otáčel obdélník 2 x 1, který vznikl orámováním mřížového čtverce a rozdělením mřížového čtverce na 4 pravoúhlé trojúhelníky a 1 čtvereček uprostřed.

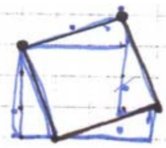

Obr. 4.43


Obr. 4.44

Martin přečetl nahlas zadání úlohy 3 a prohlásil „No tak to bude přesně stejně jako předtím" a začal dokreslovat mřížový čtverec v úloze 3a) a 3b) (viz obr. 4.45). David začal dokreslovat čtverec v úloze 3c). Martin přemýšlel, jak vypočítat obsah čtverce, David mu poradil, že musí zase použít Pythagorovu větu, aby vypočítal délku strany čtverce. Martin se tomu podivil a znejistil, jak se „počítá" Pythagorova věta. David se ujal vysvětlování. Jakub zatím dokreslil čtverce v úloze 3c). David si opět stanovil jednotku (délka strany čtverce ve čtvercové síti je 1 cm) a vypočítal délku strany příslušného mřížového čtverce pomocí Pythagorovy věty a dopočítal jeho obsah. Vyšlo mu, že obsah mřížového čtverce 1 – 1 je 2 cm^2.


Obr. 4.45

Jakub se mezitím pokusil dokreslit příslušné pravoúhlé trojúhelníky ve čtverci v úloze 3c) (viz obr. 4.46), aby mohl také použít Pythagorovu větu. Vypočítat příslušnou délku přepony se mu však nepodařilo, své řešení přeškrtal. David začal řešit úlohu 3b) – pomocí Pythagorovy věty opět vypočítal nejprve délku strany mřížového čtverce 2 – 1 a potom dopočítal jeho obsah. Při tom si uvědomil, že může využít výpočtu z úlohy 2, kdy zbytečně vypočítal délku mřížové úsečky 2 – 1. Dále si uvědomil, že když počítá obsah čtverce tímto způsobem, nemusí nejprve danou hodnotu odmocňovat a hned pak zase umocňovat, aby vypočítal obsah čtverce,

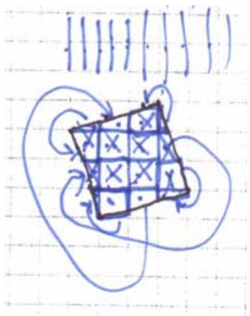

Obr. 4.46

[95] Volba jednotky 1 cm je výhodou oproti všem ostatním skupinám (problém měřítka).
[96] David použil jiné slovo.

a napsal: „Platí, že při počítání obsahu se nemusí odmocňovat, vyjde to samé.”[97]

Chlapci pak začali opět řešit problematiku měřítka. Martinovi totiž přišlo divné, že obsah čtverce 2 – 1 je 5 cm², neuvědomil si, že David používá jednotku 1 cm (Martin považoval za jednotku 0,5 cm). Jakub odhadl, že čtverec v úloze 3c) má obsah 8 cm². V té době jsem se nezeptala Jakuba na zdůvodnění, a tak nevím, jak k výsledku dospěl. David úlohu vyřešil opět obdobným způsobem – pomocí Pythagorovy věty. Tentokrát však využil poznatku, že nemusí danou hodnotu odmocňovat a pak zase umocňovat, a vypočítal obsah čtverce jako 10 cm². Jakub se pokusil Davidovi vysvětlit svůj způsob řešení – mřížový čtverec 3 – 1 otočil, a získal tak čtverec 3 x 3. Martinovi připadala hodnota 10 cm² opět nesmyslná, neztotožnil se ještě s myšlenkou zvoleného měřítka.

Poté mi David okomentoval postup řešení. Vyzvala jsem chlapce, aby se ještě pokusili zamyslet nad tím, jestli neexistuje ještě jiný způsob řešení této úlohy. Martina napadlo vzít si pravítko a změřit strany čtverce. To jsem však úplně neuvítala s tím, že to není moc přesné, a chlapci neprotestovali. Potom na popud Martina nastala diskuze nad zvoleným měřítkem, délkou strany čtverce a odpovídajícími hodnotami obsahu čtverce. David se pokusil ověřit svůj výpočet (10 cm²) – rozdělil si mřížový čtverec na jednotlivé části (čtverečky a části čtverečků) a pokusil se šipkami naznačit, které dvě části čtverečků vytvoří sjednocením jeden celý čtvereček (viz obr. 4.47), a tím vypočítal počet čtverečků a získal obsah čtverce.



Obr. 4.47

Dále se David zamyslel nad dalším způsobem řešení, a to v úloze 3b). Obsah čtverce vypočítal jako součet obsahu čtverečku uvnitř čtverce a čtyřnásobku obsahu pravoúhlého trojúhelníka. Na pracovní list napsal: „1 čtvereček uprostřed má 1 cm² a zbylé pravoúhlé trojúhelníky se spočítají: $4 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = 4 \cdot \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$ cm².”[98]

Martin s Jakubem diskutovali nad jiným tématem, při tom však pozorovali práci Davida. Poté Jakub zmínil, že vypočítaný obsah čtverce 10 cm² nemůže být správně – není reálný. David už své řešení nezdůvodnil, jen zdůraznil, že je to vypočítané podle vzorce, že je to správně a že používá „jiná čísla” (myslí tím, že má jinou jednotku). Jakub tedy přistoupil na měřítko Davida a zkusil určit obsah čtverce (výpočtem délky strany čtverce pomocí Pythagorovy věty a následným umocněním), byl překvapený, že obsah vyjde 10 cm². Dále David vypočítal a zapsal druhý způsob u úlohy 3a) $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ cm² a u úlohy 3c) $4 \cdot \frac{3}{2} = 6 + 4 = 10$ cm².[99] Potom David opět okomentoval druhý způsob řešení úlohy, a tak jsem zadala 4. úlohu.

---

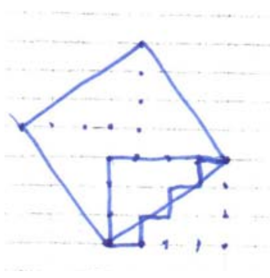
[97] Myslím, že si zde David neuvědomuje geometrický význam Pythagorovy věty, ale pouze numerické zjednodušení (protože to vychází stejně), protože i dále vypočítá, že c^2 je 5, potom napíše $\sqrt{5}$ a to hned škrtne a napíše rovnou obsah, že je 5 cm².

[98] Formálně chybně zapsaná rovnost.

[99] Opět chybně zapsaná rovnost.

Po zkušenostech s jinými skupinami jsem zadání úlohy 4 přeformulovala. David navrhl, že je to vlastně totéž, co druhý způsob v úloze 3. Martina napadla následující myšlenka: „Vztah strany mezi obsahem? No tak když neznáme tu stranu, nemůžeme vypočítat obsah, ne? To je na sobě závislé[100].” Chlapci nevěděli, co dál, a tak se Martin rozhodl, že požádá o nápovědu. David Martina však zastavil a společně přemýšleli. Martin uvažoval „Víme, že strana je vždycky na druhou… x^2 rovná se obsah čtverce, ne?”, na což reagoval David „Jasně, ale když nevíme to x?”. Martin ho přesvědčoval: „No ale to je ten vztah, my nemáme vypočítat obsah čtverce, máme určit vztah mezi nima.” A David reagoval: „Až takhle primitivní že by to bylo?” Martin opět požadoval nápovědu, David se však nevzdal a přemýšlel sám. Nakonec přesto Martin požádal o nápovědu a David nebyl proti.

Podala jsem nápovědu ústně s tím, že to bude rychlejší a pochopitelnější (jak jsem zjistila po předchozích zkušenostech z jiných skupin): „Jak zjistíte obsah čtverce, aniž byste vypočítali délku strany toho čtverce? … Uvědomte si, jak jste si charakterizovali ten čtverec – čím byl daný?… Délku strany neznáme, ale chceme pomocí jiných údajů, které můžeme vyčíst z obrázku, určit obsah čtverce.” David urputně přemýšlel nad možným řešením, Martin a Jakub se už na práci tolik nesoustředili. David okomentoval Martinovi, který se chtěl ještě do práce zapojit, aby už jako skupina mohli skončit, vzniklý problém: „Nejde o to spočítat obsah, ale najít nějaké obecné pravidlo jiné než $a^2 = S$.” Martin a Jakub začali do vzorce zapojovat obvod čtverce: $a^2 = o : 4$, David podrážděně zareagoval na nesmyslný vzorec: „Dosaďte si trojku!” Jakub však stále dosazoval $a = 4$. Potom jsem do hry vstoupila já, protože chlapci už zůstali ve třídě sami jako poslední. Pokusila jsem se je navést: „Podívejte se na první úlohu, jak se dostaneme z jednoho bodu do druhého bodu?” Jakub se opět pokusil připomenout obvod, to jsem však zamítla s tím, že délku strany neznáme a že pouze víme, jak je ten čtverec natočený. Davida napadla myšlenka „Jo jasně, tu… minimální počet těch polí […] vždycky v tom čtverci půjde udělat ten…”, nakreslil si mřížový čtverec 4 – 3 (viz obr. 4.48) a dokreslil různé cesty z jednoho bodu (dole) do druhého (vpravo) a pak pokračoval: „No a vždycky je to stejný počet těch polí.” Zeptala jsem se: „A jak tam vypočítáme ten obsah pomocí těch polí teda?” David odpověděl: „Sedm, tady je to sedm… a to mělo by to… to je ten pravoúhlej trojúhelník.” Poté jsem ukončila práci chlapců z praktických důvodů (aby stihli ještě oběd ve školní jídelně). Vztah si měli rozmyslet doma a přinést mi řešení, to mi však už nedonesli, již se tím nezabývali, protože se přiblížil konec školního roku. Pythagorova věta zde tedy objevena nebyla.



Obr. 4.48

[100] Martin použil pojem závislosti (poprvé zaznělo).

4.3.3 Analýza práce skupin

Analýzu provedu ve dvou krocích. Nejdříve bude udělána podrobná analýzy práce skupiny 1 a teprve poté na základě jejích výsledků se vrátím i k práci skupin 2 a ž 4, která byla popsána v odstavci 4.3.2.1.

4.3.3.1 Analýza práce skupiny 1

Pro podrobnou analýzu jsem vybrala skupinu číslo 1, která se mi jevila jako komunikativní a tvořivá a již v průběhu realizace experimentu jsem jí věnovala více času. Celý průběh akce jsem následně zaznamenala do obdobné tabulky jako v odstavcích 4.1.3 a 4.2.3 (viz příloha 13). Tato tabulka obsahuje a) hlavičku, ve které jsou poznamenány údaje charakterizující dané vyučovací hodiny – datum, pořadí vyučovací hodiny, čas, označení skupiny, počet žáků ve skupině, účast externí pozorovatelky a zdroj zpracování tabulky a také b) tři sloupce (viz tab. 4.10) – 1) očíslování promluv, označení úlohy, popř. komentáře úlohy, event. s časovou kótou, 2) činnost žáků, popř. experimentátora (popis) a 3) poznámky (jako u předcházejících experimentů).

	Činnost žáků, popř. experimentátora (popis – account of)	*Poznámky*
10 Úloha 3 – 2. způsob: (22:20)	**a) -** N.: „Tak já to napíšu. (obrátí se na M.) Nebo chceš psát ty?“ **b) -** M. kývne hlavou, že ne. **c) -** A. si vezme pracovní list s úlohou 3c) (pro urychlení práce, nechce se v tom už babrat) **d) -**N. má pracovní list s úlohami 3a) a 3b) a napíše tam 2 **e) -** K.: „Já budu dělat kalkulačku.“ **f) -** M. si také bere kalkulačku **g) -** N.: „Strana *a* se rovná straně *b*, že jo?“ (potřebuje ujištění), nikdo neodpovídá, N. zapisuje: $a^2 + a^2 = b^2$, a označuje stranu *a* a *b* na obrázku	- samostatné rozdělení práce (chtějí si práci urychlit) - K. se také chopí práce, najde si (samostatně) nějakou činnost ve skupině

Tab. 4.10

Při zpracování tabulky jsem využívala následujících zdrojů informací: videonahrávka a její protokol, žákovské práce (viz příloha 12), participační pozorování, terénní poznámky přímo z hodiny, poznámky externí pozorovatelky.

Analýzu práce skupiny 1 jsem provedla z hlediska konstrukce poznatků, a to na třech úrovních:

1. Výsledek, k němuž se skupina v konstrukcích jednotlivých poznatků dobrala.
2. Cesta, jakou to dívky udělaly.
3. Celý proces z hlediska jednotlivých členek skupiny.

Výsledek analýzy zapíši do přehledné tabulky (viz tabulka 4.11), která pokračuje na několika stránkách. Tabulku je možné číst po řádcích, které představují jednotlivé úrovně analýzy, i sloupcích, které představují jednotlivé poznatky, k nimž se měly dívky řešením úloh dobrat (celkem pět, P1 až P5). Ve druhém řádku získáme představu o tom, jaký způsob řešení dívky nakonec vytvořily. Ve třetím řádku se dočteme o procesu, jakým tyto způsoby řešení vznikaly. V dalších čtyřech řádcích pak je možné projít celým procesem řešení úloh z pohledu každé dívky ze skupiny (pro stručnost používám jen jejich iniciály). Do těchto řádků jsou vybrány pozorovatelné projevy dívek ukazující na to, jak asi uvažovaly. Pokud čteme tabulku po sloupcích, pak se směrem dolů zvyšuje podrobnost celého popisu konstrukce každého z poznatků.

Začátek tab. 4.11

<table>
<tr><th>Konstruované poznatky</th><th>Symbolický zápis (P1[101])</th><th>Rovnost nejkratších cest (P2)</th><th>Postup konstrukce mřížového čtverce (P3)</th></tr>
<tr><td><u>Úroveň 1</u>
Výsledek práce celé skupiny</td><td>Šipkový zápis</td><td>Rovnost délek cest</td><td>Pomocí kolmic</td></tr>
<tr><td><u>Úroveň 2</u>
Proces konstrukce poznatku celé skupiny</td><td>Dívky nejprve nakreslily řešení a N. ho popsala: „3 čtverečky nahoru a 2 čtverečky doprava.“ a dokreslila šipky.</td><td>Určily, že obě uvedené dráhy jsou stejně dlouhé. Dokreslily šipkový zápis.</td><td>A. vyřeší úlohu; N. diktuje popis konstrukce čtverce (pomocí tří „čar“) a A. na závěr vysvětlí svou strategii (pomocí kolmic).</td></tr>
<tr><td><u>Úroveň 3</u>
Proces konstrukce Nely</td><td colspan="2" rowspan="4">Popis v úrovni 3 u poznatku P1 a P2 jsem nezaznamenávala, protože se u takto jednoduchého poznatku nedal u jednotlivých žákyň sledovat.</td><td>N. diktuje postup řešení, které nakreslila A.: „Nejprve jsme udělaly čáru číslo 1, potom čáru číslo 2 a nakonec čáru číslo 3.” (2m)[102])
N. ještě doplní závěrečný komentář Aleny: „A potom jsme to tady spojily.“ (3f)</td></tr>
<tr><td>Proces konstrukce Anežky</td><td>A. nejprve dokreslí zbývající tři strany mřížového čtverce (2j))
A. na závěr komentuje řešení úlohy: „No vždycky kolmici k téhle úsečce.“ (3d))</td></tr>
<tr><td>Proces konstrukce Kláry</td><td>Pouze přihlíží.</td></tr>
<tr><td>Proces konstrukce Marcely</td><td>Pouze přihlíží.</td></tr>
</table>

101 Označení konstruovaného poznatku.
102 Odkaz na promluvy v příloze 13.

Pokračování tab. 4.11

Konstruované poznatky	*Strategie hledání obsahu čtverce 1 – 1 (P4a)*	*Strategie hledání obsahu čtverce 2 – 1 (P4b)*
Úroveň 1 *Výsledek práce celé skupiny*	Rozřezání čtverce na jednotlivé části (4 trojúhelníky a čtverec) a jejich přeskládání	Rozřezání čtverce na jednotlivé části (4 trojúhelníky a 1 čtverec) a jejich přeskládání
Úroveň 2 *Proces konstrukce poznatku celé skupiny*	A. začne přemýšlet s N. nad délkou strany čtverce 1 – 1, K. napadne řešení, že obsah čtverce jsou dva čtverečky, tuto myšlenku postřehne N.; A. a N. nedojdou zatím k závěru. N. zopakuje přesvědčivě řešení K., že obsah čtverce jsou dva čtverečky. K. to komentuje: Jo, já už to vidím.“ – jako by v tom K. neviděla své řešení (K. popostrčila svým nápadem N., N. to dotáhla, protože K. to asi až teď pochopila). A. vnímá návrh řešení N. a ujme se dále řešení úlohy, N. jí přizvukuje a snaží se A. doplňovat. Na závěr dopočítají A. a K. konkrétní výpočet obsahu.	K. ihned spočítá počet čtverečků, které tvoří daný čtverec: „Je to jedna, dva, tři, čtyři, pět čtverečků.“ A. Kláru doplní/upřesní, že obsah je: „Pět krát tenhle ten.“ (5g), i)) a napíše vzorec $S = 5(a \cdot a)$. K. tedy počítá na kalkulačce 5 · 0,5, ale N. ji opraví 0,5 · 0,5 a K. dále dopočítá obsah správně $S = 5 \cdot 0{,}25$. N. zkontroluje reálnou hodnotu výpočtu.
Úroveň 3 *Proces konstrukce Nely*	N. přemýšlí s A. nad délkou strany čtverce 1 – 1, ale zároveň vnímá i poznámku K. o obsahu čtverce a následně pak zopakuje řešení Kláry jako své: „No jsou to dva čtverečky, že jo, protože tady jsou takhle ty trojúhelníčky.“ (4r)) N. zřejmě převzala řešení K., protože když K. své řešení vyslovila, nikdo na K. nereagoval, jen N. se na ni udiveně podívala (4g)). Potom se ujme s A. dále řešení úlohy, N. ji spíše doplňuje (4z)).	Opravuje výpočet Kláry (z 5 · 0,5 na 5 · 0,5 · 0,5) (5m)). Na závěr zkontroluje, jestli výpočet odpovídá reálné hodnotě (5p)).
Proces konstrukce Anežky	A. nejprve přemýšlí nad délkou strany čtverce 1 – 1 (4e)–q)). Poté, když nedojde k žádnému závěru, začne vnímat návrh řešení Nely, že obsah čtverce jsou dva čtverečky a ujme se dale řešení úlohy: „Jo, tak dobře. Tak *a* krát *a* krát 2.“ (4t)), „*a* krát *a* je jeden čtvereček, krát	Anežka upřesňuje Klářinu myšlenku („[…]pět čtverečků“), že obsah je: „Pět krát tenhle ten.“ (5g), i)) a napíše vzorec $S = 5(a \cdot a)$ (5k)). Dále zapisuje řešení úlohy a dohlíží na výpočet K.

	2 je druhý čtvereček." (4w)). – převzala převzaté od N. a dále se ujala řešení úlohy. Na závěr dopočítají A. a K. konkrétní výpočet obsahu (4ag)–al)).	
Proces konstrukce Kláry	„Obsah jsou dva čtverečky." (4g)), vypálí celkem jistě na začátku a pak se již hned připojí k diskuzi A. a N. nad délkou strany čtverce 1 – 1 (4n)). Potom již přihlíží k práci A. a N. Na závěr dopočítají A. a K. konkrétní výpočet obsahu (4ag)–al)).	K. ihned spočítá počet čtverečků, které tvoří daný čtverec: „Je to jedna, dva, tři, čtyři, pět čtverečků." (5d)) K. se potom ujme výpočtu obsahu čtverce – nejprve počítá chybně 5 · 0,5 (5l)), ale N. ji opraví 0,5 · 0,5 a K. dále dopočítá obsah správně $S = 5 \cdot 0{,}25 = 1{,}25$ (5o)).
Proces konstrukce Marcely	Pouze přihlíží.	Pouze pozoruje.

Pokračování tab. 4.11

Konstruované poznatky	*Strategie hledání obsahu čtverce (P4c)*
<u>Úroveň 1</u> *Výsledek práce celé skupiny*	Výpočet délky strany mřížového čtverce pomocí Pythagorovy věty
<u>Úroveň 2</u> *Proces konstrukce poznatku celé skupiny*	A. navrhne vypočítat délku strany mřížového čtverce pomocí Pythagorovy věty.[103] Dívky si přirozeně/samostatně rozdělí práci[104] – K.: „Já budu dělat kalkulačku." (10e)), M. odmítne zapisovat řešení úlohy a vezme si do ruky také kalkulačku, N. má pracovní list s úlohami 3a) a 3b), A. si vezme pracovní list s úlohou 3c). N. a A. začnou samostatně řešit příslušnou úlohu. N.: „Strana *a* se rovná straně *b*, že jo?" (potřebuje ujištění, nikdo neodpovídá), N. zapisuje: $a^2 + a^2 = b^2$ (10g)). N. pracuje sama, M. její řešení pozoruje. A. zároveň píše v úloze 3c): $c^2 = a^2 + b^2$ (neopisují to od sebe) (10i)). A. a K. pracují spolu (A. vede práci). Klára Anežku trochu znejistí, že to takto nemůže vypočítat (10j)), A. odloží list s úlohou 3c) stranou (10p)). N. dopočítá celou úlohu sama (10af), am), ao), at), az)). A. začne řešit úlohu 3b): „Tady to půjde." (10ad)). Opět zde A. navrhne způsob řešení pomocí Pythagorovy věty (10ah)). K. vybarví příslušný trojúhelník, ale A. se dále pokusí předat práci Marcele (10ba)). A. řídí práci M. – vlastně ji přesně instruuje, co má napsat (10bc), bg)). N. také radí M., jak má postupovat (10bk)). K. mezitím vznese pochyby, že úlohu nelze řešit pomocí Pythagorovy věty

[103] Poprvé zazněla Pythagorova věta, ale nebyla použita na příslušný trojúhelník a obsah výsledného mřížového čtverce, ale pro výpočet strany toho čtverce.

[104] Chtějí urychlit práci.

	(10bd)), avšak vzápětí pochopí vysvětlení A., že ano (aha-efekt): „Tady to je *c*, znáš tyhle dvě strany [v pravoúhlém trojúhelníku], máš tenhle ten centimetr a tenhle půlcentimetr.“ (10bg)). M. vypočítá na kalkulačce příslušnou odmocninu (10bq)). N. jí dále radí, že má toto číslo umocnit na druhou (aby získala obsah) (10bt), bv), by)), avšak M. na to nereflektuje. A. začne diktovat vzorec pro výpočet obsahu (10bz), cb)), M. to zapisuje, N. vypočítá sama příslušný obsah (10ca), cc)). Dále dívky řeší pomocí Pythagorovy věty úlohu 3c).
Úroveň 3 *Proces konstrukce Nely*	N. začne řešit úlohu 3a): „Strana *a* se rovná straně *b*, že jo?“ (potřebuje ujištění, nikdo neodpovídá), N. zapisuje: $a^2 + a^2 = b^2$ (10g)). N. řeší celou úlohu sama (10af), am), ao), at), az)). Dále N. řídí práci M. (v úloze 3b)) – instruuje ji, co má přesně napsat (10bk), bp), br)) (v řízení se střídá s A). N. jí dále radí, že má toto číslo umocnit na druhou (aby získala obsah) (10bt), bv), by)), avšak M. na to nereflektuje. N. vypočítá sama na závěr příslušný obsah (10ca), cc)).
Proces konstrukce Anežky	A. navrhne: „Ještě třeba si můžeme Pythagorovou větou vypočítat tady tu přeponu *a*.“ (9ac)). Vezme si pracovní list s úlohou 3c) a začne samostatně řešit tuto úlohu. K. se k A. přidá, A. vede práci. K. Anežku trochu znejistí, že to takto nemůže vypočítat (10j)), A. odloží list s úlohou 3c) stranou (10p)) a začne řešit úlohu 3b): „Tady to půjde.“ (10ad)). Opět zde A. navrhne způsob řešení pomocí Pythagorovy věty (10ah)) a pokusí se předat práci Marcele (10ba)). A. řídí práci M. – vlastně ji přesně instruuje, co má napsat (10bc), bg), bz), cb)) (v řízení se střídá s N.).
Proces konstrukce Kláry	K. se samostatně ujme funkce „kalkulačky”: „Já budu dělat kalkulačku.“ (10e)), avšak nic na ní nepočítá. A. a K. pracují spolu (A. vede práci). Klára Anežku trochu znejistí, že to takto nemůže vypočítat (10j)), A. odloží list s úlohou 3c) stranou (10p)). Po návrhu A. způsobu řešení pomocí Pythagorovy věty (10ah)) vybarví K. příslušný pravoúhlý trojúhelník. K. potom vznese pochyby, že úloha nelze řešit pomocí Pythagorovy věty (10bd)), avšak vzápětí pochopí vysvětlení A., že ano.
Proces konstrukce Marcely	M. odmítne zapisovat řešení úlohy a vezme si do ruky kalkulačku (kterou pak nepoužívá). V průběhu pouze pozoruje postup řešení dívek. A. se dále pokusí předat práci v úloze 3b) Marcele (10ba)). A. a N. však řídí celou její práci, diktují jí, co má napsat, M. pouze samostatně vypočítá na kalkulačce příslušnou odmocninu (10bq)).

Pokračování tab. 4.11

Konstruované poznatky	*Strategie hledání obsahu čtverce* *(P4d)*
Úroveň 1 *Výsledek práce celé skupiny*	Součet obsahů jednotlivých trojúhelníků a čtverce uvnitř

Úroveň 2 *Proces konstrukce poznatku celé skupiny*	N. napadá další strategie řešení: „A ještě bychom tam třeba mohly vypočítat obsahy těch jednotlivých trojúhelníků a pak toho čtverce a pak to sečíst.“ (12b)). Ostatním dívkám už se do dalšího řešení úlohy nechce. N. začne uvažovat nad vzorcem pro výpočet obsahu trojúhelníka, nemůže si vzpomenout (12g), j)). A. vzorec vysloví (12m)). K. Nelu upozorňuje, že musí ale znát tu výšku trojúhelníka (12o)). A. na to reaguje: „Výšku si ani počítat nemusíš, protože to je výška v pravoúhlým, že jo, to je ta strana.“ (12w)). Všichni ji poslouchají. K. nesouhlasí s A.: „Ne ne. Výška je vždycky kolmice k tomuhle tomu.“ (12y)). N. pochopí a vysvětluje K.: „No vždyť jo. Tady máš kolmici, když tam je pravý úhel.“ (12z)). K. stále nechápe. I M. pochopí, převezme tuto myšlenku a ujme se vysvětlování: „No a vždyť když by to byl tenhle ten trojúhelník, tak tam máš kolmici tady.“ (12ab)). Ex. oznamuje, že se bude pracovat bez přestávky, dívky začnou uvažovat nad jiným, snadnějším způsobem řešení (viz následující poznatek). Později se k tomuto způsobu řešení ještě vrátí – N. a A. spolu dopočítají úlohu tímto způsobem (13af), ai)–at)). N. vyžaduje pomoc od A. v označení stran trojúhelníku v a a.
Úroveň 3 *Proces konstrukce Nely*	N. napadá další strategie řešení: „A ještě bychom tam třeba mohly vypočítat obsahy těch jednotlivých trojúhelníků a pak toho čtverce a pak to sečíst.“ (12b)). N. začne uvažovat nad vzorcem pro výpočet obsahu trojúhelníka, nemůže si vzpomenout (12g), j)). A. vzorec připomene (12m)). Začne diskuze nad tím, že je nutné znát tu výšku trojúhelníka (12o)). A. na to reaguje: „Výšku si ani počítat nemusíš, protože to je výška v pravoúhlým, že jo, to je ta strana.“ (12w)). N. pochopí myšlenku A. a vysvětluje K.: No vždyť jo. Tady máš kolmici, když tam je pravý úhel.“ (12z)). Později N. a A. spolu dopočítají úlohu (13af), ai)–at)). N. vyžaduje pomoc od A. v označení stran trojúhelníku v a a.
Proces konstrukce Anežky	A. poslouchá návrh řešení N. a vysloví vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka (12m)). Svou myšlenku doplňuje tím, že „Výšku si ani počítat nemusíš, protože to je výška v pravoúhlým, že jo, to je ta strana.“ (12w)). Později N. a A. spolu dopočítají úlohu (13af), ai)–at)). N. vyžaduje pomoc od A. v označení stran trojúhelníku v a a.
Proces konstrukce Kláry	K. není jasné, jak vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka použít, upozorňuje Nelu, že musí ale znát výšku trojúhelníka (12o)). K. oponuje myšlence A. („Výšku si ani počítat nemusíš, protože to je výška v pravoúhlým, že jo, to je ta strana.“ (12w))): „Ne ne. Výška je vždycky kolmice k tomuhle tomu.“ (12y)). K. stále nechápe ani vysvětlení N..
Proces konstrukce Marcely	M. opět pozoruje průběh řešení úlohy a diskuzi dívek. Na závěr také M. pochopí, převezme tuto myšlenku a ujme se vysvětlování: „No a vždyť když by to byl tenhle ten trojúhelník, tak tam máš kolmici tady.“ (12ab)).

Pokračování tab. 4.11

Konstruované poznatky	*Strategie hledání obsahu čtverce (P4e)*	*Tvorba systematického přístupu (P5)*
Úroveň 1 *Výsledek práce celé skupiny*	Výpočet délky strany mřížového čtverce pomocí měření pravítkem	Hledání závislosti
Úroveň 2 *Proces konstrukce poznatku celé skupiny*	N. napadne další způsob řešení úlohy: „Já vím. Třeba si vzít pravítko [bere pravítko ze svého penálu] a třeba to změřit.. tu jednu stranu [dívá se na A.], a pak to normálně to..“ (12aq)). A. se ujímá psaní a dokončí myšlenku N. (že vypočítá obsah $S = a \cdot a$) (12ba)). N. a K. diskutují nad přesností řešení(12au)–az)).	N. se snaží najít nějakou závislost (z předcházející úlohy 3): „Tady u toho [ukazuje na úlohu 3a) – 2. způsob], že 0,707 a obsah je 0,5, to znamená, že ta strana je trochu delší, než je potom obsah toho čtverce.“ (14dg)) Dívky si začnou mezi sebou povídat a už dale nerozvíjejí tuto myšlenku, později se však N. sama k této strategii vrátí a snaží se zpřehlednit jednotlivé případy:[105] „Jenže to nemá jako to.., protože tohle je 1,11, pak je to 1,25 [u a)], tady 0,7, pak 0,5, a tady je to 1,5 a pak je to 2,5 [u c)], takže to vůbec nedá [???].“ (15e)) To také N. nepomohlo. Ex. nabíne dívkám 1. nápovědu, dívky ji přijmou (15l)). Ani nápověda jim řešení neusnadní. Ex. přeformuluje zadání úlohy a dívky navede v postupu řešení (15ao)–be)). N. se ujme psaní a popíše postup řešení: „Když je čtverec položen úhlopříčně a já se chci dostat z bodu *A* do bodu *B*, vždycky jdu nějakou vzdálenost nahoru a určitou vzdálenost doprava. Tím se mi vytvoří pravoúhlý trojúhelník. Přepona toho trojúhelníku je strana čtverce.” (15bj)). Ostatní nespolupracují, jen A. přihlíží. N. si dále určí jednotku: „No a i když teda nemám žádný měřidlo, čím bych to mohla změřit, tak prostě si můžu určit nějakou jednotku, kterou... kterou jako si určím jedna – nějakou vzdálenost..“ (15bo)), „No a prostě potom z toho vypočítáme tu vzdálenost.“ (15br)). Dále N. čeká na Ex., ta se však snaží řídit práci dívek dál s tím, aby je moc nenavedla. N. kreslí úhlopříčně mřížový čtverec 3 – 1 a čárkovaně dokreslí stranu *m* a *n*. (15co)) Ex.: „Jak vypočítáte obsah toho čtverce, když neznáte délku strany?“ (15cp)) N. popisuje: „Tady si teda udělám ten trojúhelník na to.“, „A tady si určím, že tahle vzdálenost [ukazuje na *m*] je prostě nějaká jednotka. A teď si to jako

[105] Vzhledem k tomu, že 1 dílek dívky považovaly za 0,5 cm a ne 1 jednotku, zkomplikovalo to jejich další práci.

		převedu na tu stranu. Jako že jsme to tady do toho vložily 3krát. Takže jakoby máme jednu jednotku a jakoby tři jednotky a potom z Pythagorovy věty jakoby dopočítám, kolik jednotek je jedna a strana a potom to jako normálně vypočítám obsah.”[106] (15cq) – cy)) Ex. vyzve N. k obecnému řešení: „No a zkuste teď tohle to.. přesně zkuste popsat teď jenom obecně – když nebudete mít 1 jednotku a 3 jednotky, ale třeba *m* jednotek a *n* jednotek, tak jak to bude vypadat s tím obsahem?” (15df)) A. to komentuje: „Takže si tam dáš písmenka.“ (15dg)). N.: „Takže napíšu *m* jednotek na druhou plus *n* jednotek na druhou se rovná *x* jednotek na druhou.“ (15dh)) „A když vím *x* jednotek, takže *x* jednotek [píše] krát *x* jednotek se rovná S.“ (15dk)) Ex. požádá dívky, zda by ještě nevymyslely obecný vzorec. N. si bere pracovní list: „Takže tady máme ten obecný obrázek,“ ukazuje na obrázek vlevo dole, v obrázku označí příslušné strany *m* a *n*, „To je *m*, to je *n* a tady to je *x*.“ (15dt)) N. říká a píše: „Takže *m* na druhou plus *n* na druhou se rovná *x* na druhou,“ a dál píše $x \cdot x = S$ (15dv)). N. ještě píše sama: $S = m^2 + n^2$… (částečné dosazení – viz vztah v rámečku viz obr. 4.51, s. 103), „Já se to ještě pokouším napsat do jednoho jako. Tohle to je x^2 [ukazuje na $m^2 + n^2$], takže jako by, to musí bejt.. Ne, když tohle to odmocním…“, N. chce své řešení!!!: „*a* krát…“ a napíše[107]: $S = \sqrt{m^2 + n^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2}$ (15eb), ed), ef))[108].
<u>*Úroveň 3*</u> *Proces konstrukce Nely*	N. napadne další způsob řešení pomocí měření strany pravítkem. Pro ujištění se dívá na A. (12aq)). Po výpočtu obsahu čtverce diskutuje s K. o přesnosti řešení (12au)–az)).	Dtto (pracuje už převážně pouze N.)

[106] *Objev Pythagorovy věty* – pro řešení úloh v tomto cyklu. Před tím sice již byla použita Pythagorova věta, ale v jiném smyslu (jen pro výpočet délky strany v trojúhelníku) – Nela si neuvědomuje geometrický význam Pythagorovy věty – nevidí v ní obsahy čtverců nad stranami pravoúhlého trojúhelníku), ale zřejmě jen vzorec jako nástroj pro výpočet.
[107] Nela si stále neuvědomuje si geometrický význam Pythagorovy věty.
[108] Mohla jsem ještě chtít úpravu výsledného vztahu, že $m^2 + n^2 = x^2 = S$.

Proces konstrukce Anežky	A. se ujímá psaní a dokončí myšlenku N. (že vypočítá obsah $S = a \cdot a$) (12ba)).	A. sleduje řešení N., občas do řešení vstoupí užitečnou připomínkou.
Proces konstrukce Kláry	K. řešení dívek nejprve sleduje, po výpočtu obsahu čtverce diskutuje s N. nad přesností řešení(12au)–az)).	K. přihlíží, občas něco pronese (což však pravděpodobně nepřispěje k řešení úlohy).
Proces konstrukce Marcely	Pouze přihlíží.	Pouze přihlíží.

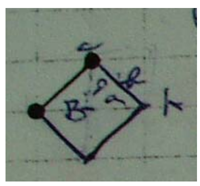
Tab. 4.11

Nyní se podíváme na výsledky analýzy práce první skupiny z hlediska výzkumných otázek.

1. *Individuální konstrukce poznatku*[109]

Podkategorie Individuální (samostatná) konstrukce poznatku zahrnuje proces, kdy si žák sám konstruuje poznatek na základě úlohy nebo otázky (kterou mu zadá zpravidla učitel). Je zřejmé, že na to, zda ke konstrukci došlo skutečně individuálně, můžeme usuzovat jen z projevů žáků, v mém případě jsem tak činila na základě toho, co bylo vidět na videozáznamu a co dívky samy říkaly.

- U skupiny 1 jsem identifikovala několik možných individuálních konstrukcí poznatků. Např. u poznatku P4c (*Výpočet délky strany mřížového čtverce pomocí Pythagorovy věty,* tedy pomocí dokreslení nebo představy pravoúhlého trojúhelníka u strany čtverce), kdy zřejmě došlo k individuální konstrukci výpočtu délky strany mřížového čtverce pomocí Pythagorovy věty u Nely a také u Anežky (viz tab. 4.11, sloupec P4c, úroveň 2 a 3). Nela si vzala pracovní list[110] s úlohami 3a) a 3b), Anežka pracovní list s úlohou 3c), a začaly samostatně řešit příslušnou úlohu. Nela se po chvilce samostatného řešení zeptala „Strana a se rovná straně b, že jo?“. Potřebovala ujištění, nikdo jí však neodpověděl, a tak zapsala: $a^2 + a^2 = b^2$ (viz příloha 13, promluva 10g, viz také obr. 4.49). Nela pracovala a dopočítala celou úlohu sama. Anežka zároveň napsala v úloze 3c): $c^2 = a^2 + b^2$; Nela a Anežka od sebe neopisovaly. Anežka a Klára spolu sice pracovaly, ale Anežka se ujala vedení práce, Klára spíše přihlížela. Ke konci Klára Anežku trochu znejistila, že to takto nemůže vypočítat, a tak Anežka odložila list s úlohou 3c) stranou a začala řešit úlohu 3b): „Tady to



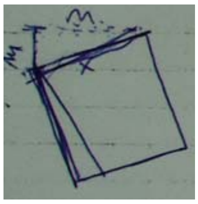
Obr. 4.49

[109] Podrobnější charakteristika kategorie bude podána v odstavci 5.1.1.
[110] Pracovní listy skupiny 1 se nacházejí v příloze 12.

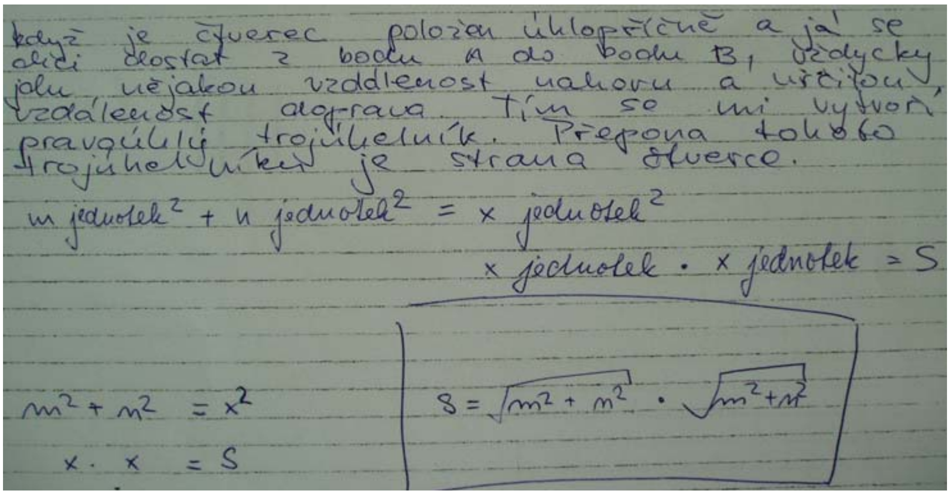
půjde." (ibid, 10ad)). Anežka zde opět navrhla způsob řešení pomocí Pythagorovy věty (ibid, 10ah)).

- Dalším příkladem individuální konstrukce poznatku je konstrukce poznatku P5 (*Hledání závislosti,* viz tab. 4.11, sloupec P5, úroveň 2 a 3). Nela pracovala sama, snažila se najít nějakou závislost z úlohy 3 a také se snažila zpřehlednit jednotlivé případy. To ji však k řešení nedovedlo. Nepomohla ani první nápověda, takže jsem se ujala role já a přeformulovala jsem ještě zadání úlohy. U Nely došlo patrně k individuální konstrukci poznatku s vyšší mírou řízenosti učitelem/experimentátorem. Nela se ujala psaní a popsala sama postup řešení: „Když je čtverec položen úhlopříčně a já se chci dostat z bodu *A* do bodu *B*, vždycky jdu nějakou vzdálenost nahoru a určitou vzdálenost doprava. Tím se mi vytvoří pravoúhlý trojúhelník. Přepona toho trojúhelníku je strana čtverce." Nela si dále určila jednotku, což je možno považovat za individuální konstrukci poznatku *Určení jednotky* v původní individuální konstrukci poznatku *Hledání závislosti.*

  Nela dále pokračovala v řešení úlohy – nakreslila úhlopříčně mřížový čtverec 3 – 1 a čárkovaně dokreslila stranu *m* a *n* (viz obr. 4.50). Nela se tedy snažila uchopit úlohu obecně bez ohledu na délku strany čtverce. Zeptala jsem se: „Jak vypočítáte obsah toho čtverce, když neznáte délku strany?" Nela popsala postup pomocí dokreslení pravoúhlého trojúhelníku ke straně čtverce a pomocí odkazu na předchozí konkrétní případ popsala v podstatě obecné řešení úlohy. To následně popsala i symbolicky jako $S = \sqrt{m^2 + n^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2}$ (viz obr. 4.51). Postup řešení je popsán v tabulce 4.11 (sloupec P5 – úroveň 2 a 3). Můžeme tedy říci, že u Nely došlo k individuální konstrukci poznatku P5 zobecněním konkrétních případů, i když toto zobecnění nebylo uděláno pomocí tabulky.



Obr. 4.50



když je čtverec položen úhlopříčně a já se chci dostat z bodu A do bodu B, vždycky jdu nějakou vzdálenost nahoru a určitou vzdálenost doprava. Tím se mi vytvoří pravoúhlý trojúhelník. Přepona tohoto trojúhelníku je strana čtverce.

m jednotek^2 + n jednotek^2 = x jednotek^2

x jednotek · x jednotek = S

$m^2 + n^2 = x^2$

$x \cdot x = S$

$S = \sqrt{m^2 + n^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2}$

Obr. 4.51

2. *Společná konstrukce poznatku*[111]

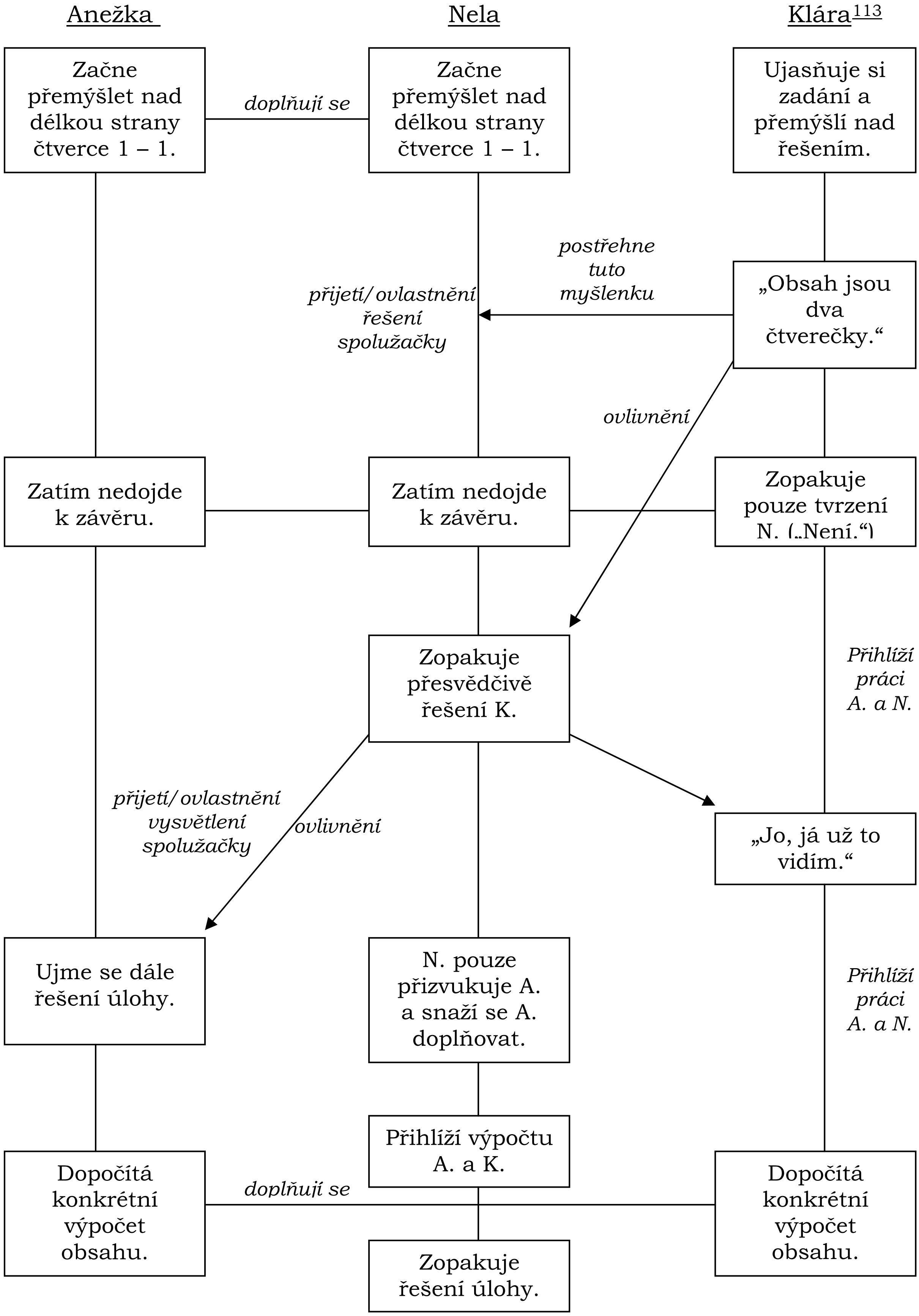
Při společné konstrukci poznatku žáci do jisté míry spolupracují a společně dospějí k novému poznatku. Tedy promluvy spolužáků je mohou navést na důležitý stavební kámen pro vlastní konstrukci poznatků. Při analýze dat jsem si uvědomila poměrně důležitou věci, a sice že tato spolupráce může být záměrná v tom smyslu, že žáci si navzájem sdělují své poznatky, vysvětlují je a kladou si navzájem otázky. Ovšem může být také, řekněme, bezděčná či nezáměrná, kdy si žák ujasňuje sám pro sebe myšlenky tím, že je říká nahlas, což jiného žáka může inspirovat v jeho řešení. Pokud žák převezme poznatek od spolužáka bez porozumění, jen paměťově, pak o konstrukci poznatků zpravidla nemluvíme.

- Konstrukce poznatku P4a (*Rozřezání čtverce na jednotlivé části a jejich přeskládání*) je příkladem společné konstrukce poznatku (viz tab. 4.11, sloupec P4a, úroveň 2 a 3). Nela přemýšlela s Anežkou nad délkou strany čtverce 1 – 1, zároveň ale vnímala i poznámku Kláry o obsahu čtverce a následně pak zopakovala řešení Kláry jako své: „No jsou to dva čtverečky, že jo, protože tady jsou takhle ty trojúhelníčky.“ (Viz příloha 13, promluva 4r).) Nela zřejmě převzala řešení Kláry, protože když Klára své řešení vyslovila, nikdo na ni nereagoval, jen Nela se na ni udiveně podívala. Potom se Nela ujala s Anežkou dále řešení úlohy, Nela ji však spíše doplňovala.

  Objevuje se zajímavá otázka, zda dokážeme nějak schematizovat tuto společnou konstrukci poznatků. Navrhla jsem tedy schéma[112] pro tuto konkrétní konstrukci (viz obr. 4.52), v němž je naznačeno, jakým způsobem se dívky navzájem ovlivňovaly, co vedlo k další části procesu konstrukce apod. Šipky ukazují, kde asi došlo k vzájemnému ovlivnění a jakým způsobem (s jakým výsledkem).

[111] Podrobnější charakteristika kategorie bude podána v odstavci 5.1.2.

[112] Schéma jsem zpracovala na základě tabulky 4.11 (sloupec P4a) a přílohy 13 (promluva 4a)–an)).



Obr. 4.52

[113] Marcela pouze přihlíží řešení dívek.

- V případě konstrukce poznatku P4d (*Součet obsahů jednotlivých trojúhelníků a čtverce uvnitř,* viz tab. 4.11, sloupec P4d, úroveň 2 a 3) se nejprve jednalo o individuální konstrukci poznatku Nely, kdy ji napadla další strategie řešení: „A ještě bychom tam třeba mohly vypočítat obsahy těch jednotlivých trojúhelníků a pak toho čtverce a pak to sečíst.“ Nela začala uvažovat nad vzorcem pro výpočet obsahu trojúhelníka, nemohla si vzpomenout. Anežka vyslovila vzorec. Klára Nelu upozornila, že musí ale znát tu výšku trojúhelníka. Anežka na to zareagovala: „Výšku si ani počítat nemusíš, protože to je výška v pravoúhlým, že jo, to je ta strana.“ Klára nesouhlasila s Anežkou: „Ne ne. Výška je vždycky kolmice k tomuhle tomu.“ Teprve potom došlo ke společné konstrukci poznatku, kdy Nela převzala vysvětlení od Anežky a pokračovala ve svém řešení. O tom, že vysvětlení Anežky Nela pochopila, svědčí i to, že ho byla schopna vysvětlit Kláře. Ta však stále nechápala. I Marcela pochopila, převzala tuto myšlenku a ujala se vysvětlování sama. Dívky se později ke zmíněnému způsobu řešení ještě vrátily – Nela a Anežka spolu dopočítaly úlohu tímto způsobem. Nela si vyžádala pomoc od Anežky v označení stran trojúhelníku v a a.
- Jiným případy, kdy jedna dívka přebrala poznatek od jiné, je konstrukce poznatku P4e (*Výpočet délky strany mřížového čtverce pomocí měření pravítkem*, viz tab. 4.11, sloupec P4e, úroveň 2 a 3). Zpočátku se opět jednalo o individuální konstrukci poznatku, kdy Nelu napadl další způsob řešení úlohy pomocí měření strany pravítkem (viz příloha 13, promluva 12aq)). Potom se však Anežka ujala psaní a dokončila myšlenku Nely (vypočítala obsah $S = a \cdot a$). Jedná se zde tedy o společnou konstrukci poznatku, kdy Anežka převzala úvodní poznatek Nely a dokončila jeho konstrukci.

3. *Typ interakce*, který pravděpodobně vedl ke společné konstrukci

Podobně jako já ve své práci se věnují R. Hershkowitz a N. Hadas (2007) práci několika skupin žáků a ve shrnutí vždy popisují, jaký typ interakce vlastně vedl ke konstrukci poznatku – např. vyjasnění nedorozumění, žádost o vysvětlení, žádost o přeformulaci něčeho apod. To mě inspirovalo, abych typ interakce sledovala i v práci skupiny 1.

V konstrukci matematických poznatků skupiny 1 byly rozhodující např. následující aspekty komunikace (odkaz na promluvu v hranatých závorkách je vždy vzhledem k příloze 13): vyžádání pomoci v řešení úlohy [4aq), 8l), 12g)], potřeba ujištění položením otázky [10g), 10ai), 12j)], přijetí/ovlastnění vysvětlení spolužačky [2i), 10bi), 10cn), 12z)], prosebný pohled na spolužačku [13ai)], žádost o přeformulaci otázkou [2e), 2aa)].

V průběhu experimentu se vyskytla také taková komunikace, kdy žák řekl něco nahlas ne proto, aby to řekl ostatním, ale aby si to sám ujasnil [10g), 13ac)]. To samozřejmě též mohlo ostatní ve skupině inspirovat pro vlastní práci (viz mé odlišení „záměrné“ a „nezáměrné“ spolupráce výše).

4.3.3.2 Analýza práce skupiny 2, 3 a 4

V tomto odstavci uvedu stručnou analýzu ostatních skupin se zaměřením na společnou, event. individuální konstrukci poznatků žáky.

Skupina 2 – Alena, Monika, Katka

Ve skupině 2 byla dominantní Alena, i když se do řešení úloh aktivně zapojovala i Monika. Katka pečlivě sledovala práci dívek, často měla užitečné připomínky, které Aleně napomohly v řešení úloh.

V práci dívek se vyskytlo několik společných konstrukcí poznatků. Např. v úloze 2, kdy Alena při řešení úlohy využila návrhu v postupu Katky. Alena navrhla způsob řešení úlohy pomocí geometrického konstruování, a to pomocí pravého úhlu, který před chvilkou zmínila Katka.

V řešení úlohy 2 se objevila také individuální konstrukce poznatku, kdy Alenu napadl další způsob řešení, které ihned sama popsala: „Vždy o dva řádky výše než základní úsečka a o jedno doleva." Monika kontrolovala její řešení a souhlasila, je možné, že si ho též ovlastnila. Katka přihlížela.

Druhým příkladem individuální konstrukce poznatku v úloze 2 byl následující způsob řešení Aleny: „Z bodu *A* o dva čtverečky doprava a jeden nahoru. Z bodu *B* o dva čtverečky nahoru a jeden doleva. Z bodu *C* o dva čtverečky doleva a jeden dolů a spojit body."

Další příklad společné konstrukce poznatku se objevil v úloze 3, na jejímž řešení se podílely všechny tři dívky. Alena přečetla zadání úlohy a ihned dokreslila příslušné mřížové čtverce v úloze 3a), 3b) a 3c). Dívky přemýšlely nad výpočtem obsahu. Nejprve však začaly řešit problematiku měřítka, jestli zvolit délku strany čtverečku čtvercové mřížky 1 jednotku („1 čtvereček", jak zmínily), nebo 0,5 cm. Zvolily první možnost a řešení úlohy 3a) komentovala Katka slovy: „Obsah budou dva čtverečky, protože to máš půl čtverečku, půl čtverečku, půl čtverečku a půl čtverečku [myslí tím obsahy čtyř pravoúhlých trojúhelníků, ze kterých se skládá mřížový čtverec 1 – 1]." Alena zapsala tento způsob řešení (viz obr. 4.28, s. 84). Dívky si tedy tímto zavedly jednotku (délku strany čtverce ve čtvercové síti 1 čtvereček).

Individuální konstrukce poznatku se vyskytla v úloze 3a), kdy Alena vymyslela druhý způsob řešení pomocí Pythagorovy věty, a to v jejím navrhovaném měřítku 0,5 cm (viz obr. 4.29, s. 84). Katka a Monika pouze kontrolovaly Alenu, jak zapisuje řešení úlohy.

V úloze 4 bylo možné vysledovat individuální konstrukci poznatku s vyšší mírou řízenosti učitelem. Dívky neporozuměly přesně zadání, nevěděly, co mají přesně zkoumat, nápovědu dostat nechtěly, a tak jsem se jim tedy pokusila přeformulovat zadání úlohy. Chtěla jsem, aby se zamyslely nad tím, jakým způsobem můžeme charakterizovat stranu čtverce, který si dívky nakreslily v úloze 4. Dívky nejdříve nechápaly, co myslím. Připomněla jsem dívkám úlohu 3 a Alena určila, že vždycky jde o několik čtverečků nahoru a pak doprava. Zajímalo mě, jestli i v tomto případě nelze charakterizovat získat danou stranu obdobně. Alena dokreslila k horní straně čtverce 5 x 5 pravoúhlý trojúhelník (viz obr. 4.33, s. 86). Poté s mou pomocí zobecnila délky odvěsen *m* a *n* pro obecný případ, dokreslila nad obě odvěsny příslušné čtverce a určila, že vlastně $m^2 + n^2$ je rovno obsahu čtverce nad přeponou, tento obsah označila *S*.

Skupina 3 – Karolína, Jitka, Tereza

Ve skupině 3 většinou docházelo k individuálním konstrukcím poznatků. Karolína a Jitka působily obě dominantně – Karolína se snažila řešit úlohy s tím, že většinou potřebovala dopomoc Jitky, ale také organizovala práci, aby dívky splnily úkol a opravdu vyřešily, co měly vyřešit; Jitka většinou sama řešila jednotlivé úlohy. Tereza pouze přihlížela práci dívek.

Příklad individuální konstrukce poznatku je vidět v Jitčině řešení úlohy 2. Při kreslení příslušného mřížového čtverce k mřížové úsečce 2 – 1 (viz obr. 4.35, s. 88) využila Jitka strategie od levého zadaného bodu dva čtverečky dolů a jeden doprava, zároveň zapisovala postup načrtnutí čtverce. Uvědomila si také možnost dvou řešení úlohy, každé v jedné polorovině; vzápětí se však opravila, že řešení je více, neuvedla však, která další řešení myslí.

Dalším příkladem individuální konstrukce poznatku se ukázalo v řešení úlohy 3, kdy Jitka dokreslila příslušný mřížový čtverec 1 – 1 (viz obr. 4.36, s. 88) a dále si uvědomila, že čtvercová síť je tvořena ze čtverců strany délky 0,5 cm, a začala tuto svou myšlenku popisovat na pracovní list.

V řešení úlohy 3 se objevila také společná konstrukce poznatku Karolíny a Jitky. Zatímco Jitka popisovala své řešení v úloze 3a), Karolína začala řešit úlohu 3c) z druhého listu (viz obr. 4.37, s. 88). Po načrtnutí mřížového čtverce 3 – 1 si Karolína uvědomila si, že aby mohla vypočítat obsah čtverce, musí zjistit délku strany čtverce, a to jako délku přepony pravoúhlého trojúhelníku pomocí Pythagorovy věty. Jitka jí to odsouhlasila a pokračovala v nerušeném popisování řešení úlohy 3a), kde právě psala také o výpočtu přepony vzniklého trojúhelníka pomocí Pythagorovy věty. Z videonahrávky je vidět, že Karolína zde vyslovila pojem Pythagorovy věty sice jako první, ale Jitka to již také popisovala ve svém řešení. Karolína potřebovala ke své práci prodiskutovat řešení s Jitkou, jedná se tedy o společnou konstrukci poznatku (způsobu řešení úlohy), u Jitky proběhla spíše individuální konstrukce způsobu řešení.

Na závěr došlo ještě ke společné konstrukci poznatku, kdy dívky tvrdily, že řešení, které nalezly, je možné použít vždycky: Jitka připojila vysvětlení, že se to vždycky vypočítá podle Pythagorovy věty, protože se tam vždycky najde pravoúhlý trojúhelník, jehož přepona je délka strany čtverce. Jitka dokreslila do náčrtku zbývající dva čtverce s obsahy a^2 a b^2. Karolína uvedla, že $a^2 + b^2 = c^2$, a tedy $a^2 + b^2 = S$.

Skupina 4 – David, Jakub, Martin

Dominantní roli ve skupině 4 zastával David. Martin a Jakub se také do práce zapojovali, ovšem mnohem menší měrou. Pro tuto skupinu byla typická individuální konstrukce poznatku, ve dvou případech se objevila i společná konstrukce poznatku.

V řešení úlohy 2 se objevila individuální konstrukce poznatku, kdy Davida napadlo řešení pomocí Pythagorovy věty. Zvolil si jednotku – délku strany čtverce ve čtvercové síti 1 cm a vypočítal délku mřížové úsečky pomocí Pythagorovy věty (viz obr. 4.42, s. 91). V pomocném nákresu si David rozdělil mřížový čtverec na 4 pravoúhlé trojúhelníky a 1 čtvereček uprostřed a ještě orámoval mřížový čtverec 2 – 1 čtvercem 3 x 3. Pak dokreslil čtverec do obrázku nahoru k zadané mřížové úsečce (viz obr. 4.44, s. 91). David své řešení vysvětlil tím, že mřížový čtverec vytvářel tak, že vlastně kopíroval a otáčel obdélník 2 x 1, který vznikl orámováním mřížového čtverce a rozdělením mřížového čtverce na 4 pravoúhlé trojúhelníky a 1 čtvereček uprostřed.

V úloze 3 došlo ke společné konstrukci poznatku. Martinovi se zdála úloha 3 obdobná jako úloha 2 a ujal se dokreslování mřížového čtverce v úloze 3a) a 3b) (viz obr. 4.45, s. 91). David totéž provedl u čtverce v úloze 3c). Martin přemýšlel, jak vypočítat obsah čtverce, David mu poradil, že musí zase použít Pythagorovu větu, aby vypočítal délku strany čtverce. Martina Davidův návrh řešení překvapil a nemohl si vzpomenout, jak „počítat" pomocí Pythagorovy věty. David se tedy ujal vysvětlování. Jakub mezitím dokreslil čtverce v úloze 3c). David si opět stanovil jednotku 1 cm, vypočítal délku strany příslušného mřížového čtverce pomocí Pythagorovy věty a dopočítal jeho obsah.

David dospěl při řešení úlohy 3b) k individuální konstrukci poznatku. Pomocí Pythagorovy věty opět vypočítal nejprve délku strany mřížového čtverce 2 – 1 a potom dopočítal jeho obsah. Zde si uvědomil, že může využít výpočtu z úlohy 2, kdy zbytečně vypočítal délku mřížové úsečky 2 – 1. Důležitým objevem bylo, že při výpočtu obsahu čtverce nemusí nejprve danou hodnotu odmocňovat a hned pak zase umocňovat, aby vypočítal obsah čtverce. David si zde zřejmě neuvědomuje geometrický význam Pythagorovy věty, ale pouze numerické zjednodušení (protože to vychází stejně), jak bylo vidět i z dalšího řešení.

Jiný příklad individuální konstrukce poznatku se objevil opět u Davida v dalším způsobu řešení úlohy 3b), kdy obsah čtverce vypočítal jako součet obsahu čtverečku uvnitř čtverce a čtyřnásobku obsahu pravoúhlého trojúhelníka.

Ke společné konstrukci poznatku mohlo dojít při řešení úlohy 4, kterou však žáci z časových důvodů nedořešili. David s Martinem přemýšleli nad požadovaným vztahem, jak zjistit délku strany čtverce x, aby vypočítali obsah čtverce x^2. Martin se však ohradil: „My nemáme vypočítat obsah čtverce, máme určit vztah mezi nima." Byl tedy na dobré cestě, ovšem chlapci úlohu z časových důvodů nedořešili.

4.3.4 Reflexe

Reflexe směrem do výuky

V průběhu experimentu jsem se dopustila několika pedagogických chyb. Jedním z nich je např. následující situace. Při shrnutí řešení úlohy 1b) ve skupině 3 jsem se měla zeptat na zdůvodnění, proč si dívky myslí, že obě jejich navržené cesty jsou stejně dlouhé – zda by dívky dokázaly vysvětlit, nebo zda to tuší jen intuitivně. Dalším mým nedostatkem bylo, že jsem měla podrobněji a výstižněji zformulovat řešení úlohy 4, protože ani dvě nápovědy, které jsem žákům písemnou formou zadala, nepomohly v dalším řešení úlohy. Také jsem měla na pracovním listu zvolit čtvercovou síť se čtverci s délkou strany přibližně 1 cm a ne 0,5 cm, jak tomu bylo v tomto experimentu, protože volba měřítka vedla u všech skupin kromě skupiny 4 ke zkomplikování řešení.

Ukázalo se, že ani v takto malém počtu žáků není jednoduché zorganizovat práci ve skupinách tak, aby mohly pracovat víceméně samostatně bez mé pomoci a postupovat vlastním tempem. Žáci měli díky čekání na další úlohy časové prodlevy, díky nimž se zmenšovalo jejich pracovní nasazení. V běžné výuce by snad bylo možné, aby žáci nemuseli čekat na další úlohu teprve poté, co své řešení učiteli vysvětlí, ale mohli by si další úlohu samostatně vyzvednout. Klíčové však je, aby úlohy byly velmi dobře připraveny a předem rozmyšleny. Velká péče musí být věnována přípravě případných nápověd.

Reflexe směrem k dalšímu výzkumu

Ve zdokumentování dat došlo v tomto cyklu k významnému vylepšení. Zaprvé jsem získala díky externí pozorovatelce vnější náhled na průběh celého experimentu a na práci jednotlivých skupin. Např. díky ní jsem si uvědomila, jak jsem v průběhu práce změnila svůj přístup k práci. Zpočátku jsem se více zaměřovala na povzbuzování a formu práce, teprve později jsem žáky více směřovala v práci. Externí pozorovatelka byla také schopna zhodnotit, kolik času jsem strávila u té které skupiny, se kterou skupinou jsem pracovala více (skupiny 1 a 4) než s ostatními, kterou jsem se snažila více navést (skupina 4), kterou skupinu jsem nejvíce žádala o vysvětlení (skupiny 1 a 4), u kterých skupin jsem se zaměřovala spíše na formální instrukce v práci a věnovala se jim méně (skupiny 2 a 3) atd.

Druhou nespornou výhodou získání dat bylo využití čtyř videokamer, díky nimž jsem mohla mnohem podrobněji popsat a analyzovat práci žáků, a tak rozpracovat centrální kategorii *Konstrukce poznatků žáky*.

4.4 Závěr kapitoly

V kapitole 4 jsem popsala svůj výzkum, který zahrnuje tři výukové experimenty spojené tématem Pythagorova věta. Postupně jsem zpřesňovala výzkumné otázky, vylepšovala metody analýzy získaných dat, analyzovala experimenty a výsledky analýzy reflektovala. Identifikovala jsem jednotlivé kategorie a jejich dimenze, včetně centrální kategorie *Konstrukce poznatků žáky*. Podrobnější závěry jsou popsány v samostatné páté kapitole.

Kapitola 5

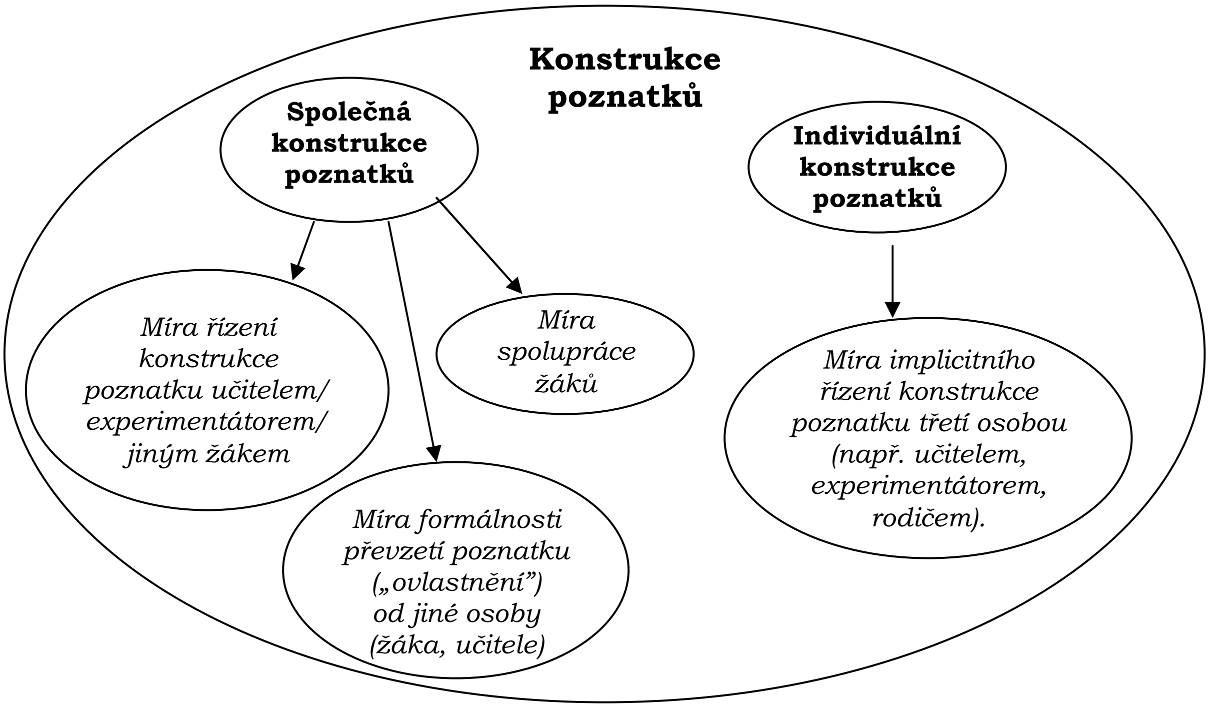
Výsledky a závěry z experimentů

V závěrečné kapitole dizertační práce popíši obsahové a metodologické výsledky a závěry z experimentů, zamyslím se nad jejich praktickým využitím a nad možnostmi dalšího výzkumu. Předem je nutno upozornit, že můj výzkum měl charakter kvalitativní, jehož cílem byla hloubka záběru, ne jeho šířka. Při zobecňování závěrů je tedy na místě velká opatrnost.

5.1 Závěry z hlediska konstrukce matematických poznatků

Cílem práce bylo blíže popsat proces konstrukce matematických poznatků žáky. Experimenty potvrdily, že na konstrukci poznatků je třeba nahlížet jako na sociální proces, tedy že nestačí popisovat individuální konstrukce, ale je třeba zkoumat i vzájemné interakce mezi žáky. Byly rozlišeny dva typy konstrukce poznatků, a sice společná a individuální.

Zatímco na začátku jsem se zaměřovala na výukovou situaci v celé její komplexnosti, později jsem se soustředila na její určité parametry. Dokladem toho je schéma na obr. 4.17, s. 67, které ukazuje výsledek hluboké analýzy druhého experimentu pomocí technik zakotvené teorie. Schéma obsahuje matematické, didaktické, kognitivní i sociální kategorie, které jsem se snažila přehledně utřídit ve vztahu pojem – nadpojem). Schéma dobře ukazuje velkou komplexnost výukové situace, která neumožila, abych ve své práci sledovala všechny její aspekty. Proto jsem se zaměřila na centrální kategorii Konstrukce matematických poznaků žáky a novou situaci jsem uchopila jednodušším schématem (viz obr. 5.1), kde se kromě typů konstrukcí poznatků objevují též jejich dimenze, které jsem ve svých experimentech identifikovala.



Obr. 5.1

5.1.1 Individuální konstrukce poznatku

Při individuální (samostatné) konstrukci si žák konstruuje poznatek sám bez očividného podnětu ostatních žáků (alespoň do té míry, do které jsme to schopni z jeho projevů posoudit). Role učitele je v tomto procesu spíše implicitní daná výběrem úloh, které žák řeší. Jinak žáka učitel nijak neřídí. Konkrétní příklady individuální konstrukce poznatků byly podány v odstavcích 4.3.3.1 a 4.3.3.2.

Někdy se stane, že určitý problém žák řeší delší dobu – pak se může stát, že když se k problému vrátí po delší době, aktualizuje si jinou mentální strukturu, což mu umožní nalézt řešení, které mu předtím unikalo. Často jsou podobné situace uváděny na příkladech matematiků, kteří nemohou dlouho vyřešit obtížný problém, aby je pak řešení jakoby náhle napadlo, když přemýšleli o něčem naprosto jiném. Ovšem ve svém výzkumu jsem dlouhodobé pozorování neprováděla, nemohu tedy podat žádný příklad této situace.

Důležitým parametrem individuální konstrukce poznatků jsou určité rysy osobnosti žáka. Žák musí být ochoten se problémem zabývat, k čemuž by měl být učitelem systematicky veden a motivován, a mít také dostatečnou míru sebevědomí v matematice, aby mohl pracovat autonomně. Příkladem takových charakteristik je žák Petr (viz odstavec 4.1.2), který přicházel s vlastními nápady poměrně často. Na druhou stranu se několikrát v mých experimentech projevilo, že někteří žáci odmítali mou nápomoc obrázkem, jako by nechtěli do situace proniknout, ale stačil by jim návod, jak postupovat (viz odstavec 4.1.3). To bylo pro mě jistým zklamáním, protože jsem se při své výuce snažila tyto tendence potlačit. Vypozorovala jsem, že se většinou jednalo o žáky, které objevování moc nebaví, kteří se neradi zabývají problémy a spíše čekají, že to objeví někdo jiný a oni převezmou výsledek. Je možné, že u těchto žáků převládá povrchový přístup k učení (Mareš, 1998, s. 38) a spíše dávají přednost paměťovému záznamu vzorců. Na to mohly mít vliv jejich osobnostní charakteristiky a zcela jistě i jejich předchozí zkušenost s výukou matematiky. Je možné, že získali dojem, že na úspěch v matematice stačí znalosti reproduktivního a imitativního charakteru. U takových žáků se může při konstruktivisticky vedené výuce objevit dokonce pocit ohrožení, jak uvádí ve svých závěrech i J. Hanušová (2007) a N. Stehlíková (2004c). V mých experimentech jsem však tento pocit u žáků nepozorovala, což bylo snad dáno i tím, že jsem ve své výuce žáky systematicky vedla k experimentování a práci s chybou a že šlo o žáky osmiletého gymnázia, které matematika zpravidla bavila.

5.1.2 Společná konstrukce poznatku

Společná konstrukce poznatku je taková konstrukce poznatku, na níž se podílí více než jeden žák. Poznatek již není „individuálním konstruktem jednotlivce, ale stává se majetkem celé skupiny“ (Stehlíková, 2004a, s. 288), ovšem jen potud, pokud se poznatek v poznatkové struktuře žáka neuloží jako formální, pokud si ho žák „ovlastní“ a pokud se objeví propojení na další poznatky. (Příklady společné konstrukce poznatků lze najít v odstavcích 4.3.3.1 a 4.3.3.2.) *Míra tohoto ovlastnění, resp. míra formálnosti přijetí poznatku,* který navrhl někdo jiný (jiný žák) je pak důležitou dimenzí kategorie společné konstrukce poznatku.

V mých experimentech se jasně ukázalo, že proces konstrukce poznatku není lineární proces, kdy žák A ujde kousek cesty, pak na to napojí žák B svým kouskem a pokračuje žák C atd., ale že se spíše jedná o bludiště cest, které jednotliví žáci různě odhalují, porovnávají, zkracují, až nakonec dojdou k nějakému řešení (viz např. proces konstrukce poznatku P4a v tab. 4.11 a schéma na obr. 4.52, s. 105). Řešení navržené nějakým žákem pak může být např. vylepšeno úplně jiným žákem (např. ve zmíněné konstrukci poznatku P4a dovedla k cíli Klárou navržené řešení Nela a Anežka). Do společné konstrukce poznatků přispívá každý žák na základě svých zkušeností. Tak například Táňa na obr. 4.25 (s. 72) konstruuje osu úhlu a tento proces vychází z konceptu „úhlopříčky čtverce jsou osy úhlu“ a procesu konstrukce osy úhlu, kterou má zřejmě spojenu jen s „čistým papírem“. Spolužák, který uvažuje v kontextu čtverečkovaného papíru, si na jejím řešení může všimnout, že osa prochází mřížovým bodem a dokreslí celý čtverec. Tak se propojením dvou pohledů na stejnou situaci stává tato bohatší pro oba zúčastněné žáky.

Z hlediska dimenze spolupráce žáků můžeme společnou konstrukci poznatků rozdělit na interakci, při které je *míra spolupráce*

- vysoká: jde o záměrnou spolupráci, kdy žáci cíleně diskutují o daném problému, nabízejí ostatním své myšlenky ke kritické reflexi a aktivně naslouchají ostatním (např. již zmíněná konstrukce poznatku P4a, viz tab. 4.11, s. 96),

- nízká, nebo chybí: jde např. o případ, kdy žák uvažuje nahlas spíše proto, aby si to sám pro sebe ujasnil, a jeho poznámka může případně inspirovat řešení jiného žáka (např. konstrukce poznatku P5, viz tab. 4.11, s. 100).

První typ spolupráce je samozřejmě ve výukovém procesu žádoucí, ovšem i v mých experimentech se ukázalo, že není jednoduché takové interakce dosáhnout. Na to mohla mít vliv jednak má určitá pedagogická nezkušenost, ale také některé osobnostní rysy žáků. Např. žák upřednostňuje přejímání hotových poznatků (je to „jednodušší" a navíc s touto strategií měl dosud úspěch), nevěnuje tedy energii naslouchání ostatním a snaze pochopit jejich úvahy. Ovšem v mých konkrétních experimentech se projevila silněji tendence žáků osmiletých gymnázií prosazovat pouze svoje řešení a malá ochota naslouchat úvahám jiných (příklady viz odstavce 4.1.3 a 4.2.4).

U obou typů konstrukcí hrál v mých experimentech podstatnou roli učitel, a sice výběrem úloh a případným směřováním pozornosti žáků k určitým jevům (nápovědami). Tedy v obou případech můžeme mluvit o *míře řízenosti konstrukce poznatku učitelem* (případně jinou třetí osobou), přičemž nevylučuji ani takový případ, kdy učitel nemá na konstrukci poznatku vliv žádný, a to ani prostřednictvím úlohy (žák si např. úlohu formuluje sám, nebo si zkonstruuje poznatek, který zdánlivě s danou úlohou vůbec nesouvisí – důležité je zde slovo zdánlivě, neboť to, zda se jedná o individuální konstrukci, dokážeme rozhodnout jen z viditelných projevů žáka a z toho, co sám řekne; často však žák není schopen své myšlenkové pochody nějak smysluplně zformulovat).

5.1.3 Konstrukce poznatků u vybraných autorů

Procesem konstrukce poznatků v kontextu malých skupin nebo školní třídy se zabývá zejména ve světové literatuře řada autorů. V tomto odstavci se podíváme na výsledky třech výzkumů z hlediska typů konstrukcí, k nimž jsem dospěla ve svém výzkumu. [114]

H. Steinbring (2005) hovoří o tzv. *interaktivní konstrukci poznatku* („interactively-created knowledge"), který sice přesně nevymezuje, ale z konkrétních příkladů, jež uvádí, se zdá, že se jedná o takovou konstrukci, kterou jsem zde nazvala společná. Do interaktivní konstrukce zahrnuje H. Steinbring i učitele. Také společná konstrukce poznatků se uskutečňuje mezi žáky i učitelem s tím, že míra zapojení učitele je dimenzí této vlastnosti.

H. Steinbring (2005, s. 79) dále zmiňuje další důležitou dimenzi procesu interaktivní konstrukce poznatků ("křehkost") a dotýká se též problematiky výuky:[115]

[114] Zmínění autoři uvádějí ve svých článcích řadu příkladů konstrukcí poznatků žáky, které zde uvádět nebudu.

[115] „The interactive construction of new knowledge is a fragile process in the sense that, ultimately, its success cannot be forced or guaranteed. Like any creative, constructive act, the creation of new knowledge is subject to the continued effort of producing something as yet unknown and not yet existing in this form. However, one might think that in teaching, construction of new knowledge could be a methodically guided and successfully organized process rather than a free creative act. In fact, it is possible as well as necessary to

> Interaktivní konstrukce poznatku je „křehký“ proces v tom smyslu, že jeho úspěch nemůže být vynucen či zaručen. Jako jakýkoli kreativní, konstruktivní čin, tvorba nové znalosti je podmíněna neustálým úsilím vytvořit něco, co dosud nebylo známo a v této podobě neexistovalo. Ale dá se předpokládat, že při výuce může být konstrukce poznatku systematicky řízeným a úspěšně organizovaným procesem spíše než volným tvůrčím počinem. Ve skutečnosti je možné stejně jako nezbytné podpořit proces vyučování a učení se novým matematickým poznatkům takovým způsobem, že úspěch je pravděpodobný a ne zcela nahodilý. Jedním ze způsobů, jak takový proces konstrukce řídit je prostřednictvím výběru vhodných úloh.

Druhý mé práci tematicky blízký výzkum je výzkum R. Hershkowitz a N. Hadas (2007), v němž se hovoří o *konstrukci sdílené znalosti* („shared knowledge“). Jde o znalosti, které si prostřednictvím společné interakce vytvářejí členové určité skupiny (od několika žáků až po celou třídu). Sdílenou znalostí je nazvána taková znalost, která je skupině společná, členové skupiny ji sdílejí, a která jim umožňuje společně konstruovat další znalosti v dané oblasti. Ve zmíněném výzkumu se však nehovoří o individuální konstrukci poznatků.

Konečně B. Jaworski (1994) mluví o *individuálním kognitivním zpracování* („independent cognitive processing“) v případě, kdy žák přijde na nějaký poznatek sám bez pomoci učitele (i když na základě nějakého podnětu, stimulu – např. úlohy nebo nějaké poznámky, která žáka navedla na souvislosti). Na druhou stranu pak staví *intersubjektivní znalost* („intersubjective knowledge“), což je znalost, k níž dochází na základě „vyjednávání” („negotiation“) mezi žáky. Bohužel autorka oba konstrukty blíže nepopisuje, není tedy možné zjistit, zda jde o podobné rozlišení jako to, ke kterému jsem dospěla ve své práci.

5.2 Metodologické závěry

Svou výzkumnou práci jsem začala dělat s myšlenkou, že budu zkoumat účinnost konstruktivistických přístupů k výuce matematiky a konkrétněji proces konstrukce matematických poznatků při výuce. Přirozeně jsem si jako výzkumný přístup vybrala akční výzkum, a sice jeho kooperativní variantu. Již první provedené výukové experimenty však ukázaly, že bez pomoci technik „tradičního“ výzkumu nebudu schopna získat dostatečná data pro hlubokou analýzu celého procesu konstrukce. (Na druhou stranu pro další rozvoj mě jako učitelky by tato původní data zřejmě stačila, a to je podle mnoha autorů hlavním cílem akčního výzkumu, viz odstavec 2.3.) Proto jsem postupně využila kromě participačního pozorování i videozáznamy a přítomnosti externího pozorovatele.

Teprve třetí výukový experiment, který měl již znaky spíše klinického experimentu (menší počet žáků, vylepšený způsob získávání dat, výukové

---

support the process of teaching and learning of new mathematical knowledge in such a way that success becomes likely and does not remain completely arbitrary.“

cíle potlačeny ve prospěch výzkumných cílů), mi přinesl data, která jsem považovala již za uspokojivá z hlediska vhledu do situace. Nicméně nadále si musíme být vědomi omezení mého výzkumu, který byl limitován počtem zkoumaných žáků i šíří tematiky. V analýzách v odstavci 4.3.3 jsem také popsala několik příkladů omezení kvalitativního výzkumu, jehož cílem je poznávat, co se děje v mysli žáků při řešení matematických úloh. Při nejlepší vůli výzkumník nedokáže zrekonstruovat tyto procesy věrně, jen s větší či menší dávkou pravděpodobnosti, a to na základě pozorovatelných projevů žáků. V mém případě to bylo na základě toho, co žáci řekli, napsali, nakreslili, jaká zvolili slova, jaký postoj vyjadřovali, jaké nejazykové prostředky použili při vysvětlování apod.

Z výše řečeného plyne, že by si výzkumník měl být vědom omezení akčního výzkumu z hlediska získávání hlubokého vhledu do problematiky a měl by již předem plánovat jeho kombinování s klinickými experimenty.

Z metodologického hlediska dále považuji za přínos své práce návrh analýzy práce skupiny ze tří hledisek (viz odstavec 4.3.3.1): výsledek práce celé skupiny, proces konstrukce poznatku u celé skupiny, proces konstrukce poznatku z hlediska jednotlivých členů skupiny. Také schematizace společné konstrukce poznatků, jejíž příklad je na obr. 4.52, s. 105, se mi jeví jako nadějná z hlediska popisu vzájemného ovlivňování členů skupiny při řešení úloh.

Konečně pro začínající výzkumníky v didaktice matematiky může být přínosný podrobný popis technik zakotvené teorie tak, jak jsem je použila ve svém výzkumu. Pokud je mi známo, zakotvená teorie nebyla dosud v kontextu výzkumu didaktiky matematiky česky popsána. Výhodou z tohoto hlediska jsou bohaté přílohy, které dokumentují postupný proces kódování a kategorizace dat, a mohly být tak praktickým rádcem tomu, kdo chce tyto techniky použít.

5.3 Možné aplikace výzkumu ve výukové praxi a možnosti dalšího výzkumu

Z výukových experimentů uvedených v práci i z těch, jejichž seznam je uveden v příloze 7, a konečně i z mé práce učitelky na osmiletém gymnáziu, která se vždy snažila o konstruktivisticky vedenou výuku, vyplynula některá doporučení týkající se výuky.

- Důležitým aspektem konstruktivisticky orientované výuky (viz odstavec 2.2) je vytvoření podnětného prostředí podněcujícího tvořivost, navození klimatu objevování a aktivní diskuze mezi žáky (s tím souvisí potlačení role učitele při konstrukci poznatků). Důraz je také třeba klást na volbu vhodných úloh, pomocí kterých by byl žák motivován, a získal tak dostatečné množství izolovaných modelů pro vznik generického modelu. Dostatečné množství izolovaných modelů je nezbytné i proto, aby se zamezilo formálnímu poznání. Ve shodě např. s M. Hejným (2001) se domnívám, že v řadě případů trpí současná výuka matematiky právě nedostatkem izolovaných modelů a že se příliš rychle přechází k abstraktní znalosti.

- Volba vhodné formy práce v rámci konstruktivistických přístupů (individuální, skupinová práce, frontální výuka, domácí práce) a dobrá organizace práce žáků je také významným aspektem konstruktivisticky vedené výuky. V dnešní době se prostřednictvím kurikulárních dokumentů podporuje zejména práce ve skupinách. Ovšem z mých experimentů plyne nejednoznačný závěr. Objevily se případy účinné spolupráce, které vedly ke konstrukci matematického poznatku, ovšem na druhé straně v řadě případů dospěli žáci k žádoucímu výsledku i individuální konstrukcí. Ne všichni žáci byli ochotni (a schopni) spolupracovat a sdílet své myšlenky s ostatními, což, jak jsem již uvedla, mohlo být dáno jak mou pedagogickou nezkušeností, tak jejich osobnostními charakteristikami (žáků osmiletého gymnázia dávajících přednost spíše vlastním strategiím a chtějícím vyniknout individuálně).
- Ať už je zvolena forma práce jakákoli, vždy platí, že učitel by měl podporovat zvídavost žáků, vytvořit tvůrčí klima, měl by vést žáky k objevování, zdůvodňování a formulaci vlastních myšlenek, k ověřování správnosti, diskuzím, experimentování atd.

Z hlediska výukové praxe může být přínosná didaktická analýza tématu Pythagorova věta z odstavce 3.2, která ukazuje na určitá úskalí, jimž by se učitel měl vyhnout, a navrhuje takový přístup výuky tohoto tématu, který je podle mého názoru v souladu s principy konstruktivizmu. Experimenty z kapitoly 4 pak mohou sloužit jako praktický příklad pokusu využít navržené přístupy.

Konečně můj výzkum znovunastolil či otevřel nové otázky. I když jsem svou prací do jisté míry poskytla další vhled do procesu konstrukce matematických poznatků, nelze tuto otázku v žádném případě považovat za uzavřenou. Další možnost se objevuje v oblasti interakcí podporujících společnou konstrukci poznatků, které jsem pouze nastínila v odstavci 4.3.3.1. Tyto interakce by bylo třeba zkoumat hlouběji a i na jiných matematických tématech. Podobně je možné pokračovat ve studiu společné konstrukce poznatků na jiných tématech a využít k tomu mnou navržený způsob analýzy dat (viz odstavec 3.6). Pro konstruktivisticky vedenou výuku jsou, jak jsem již zmínila, důležité osobnostní charakteristiky žáka. Ty jsem až na kusá pozorování systematicky nezkoumala a pro výukovou praxi by bylo jistě přínosné zjistit, kteří žáci jsou vlastním konstrukcím matematických poznatků přístupnější a kteří méně. Též otázka, do jaké míry jsou překážky konstruktivisticky vedené výuky dány právě osobnostními charakteristikami a do jaké míry předchozím způsobem výuky matematiky, je velmi zajímavá. Konečně je třeba se na proces konstrukce poznatků hlouběji podívat z longitudinálního hlediska – jak se poznatky konsolidují, co k tomu přispívá apod.

Na úplný závěr si dovolím ještě osobní poznámku. Má práce v rámci doktorského studia mi přinesla nejen výše uvedené teoretické poznatky týkající se toho, jak asi žáci v matematice uvažují, ale také, jak věřím, přispěla k mému rozvoji jako učitelky matematiky. Jistě se zvýšila určitá citlivost na způsob uvažování žáků, naučila jsem se lépe reagovat na jejich návrhy a postřehy a být trpělivější při očekávání okamžitých výsledků.

Kapitola 6

Přehled použité literatury

Altrichter, H., Posch, P. *Lehrer erforschen ihren Unterricht. Eine Einführung in die Methoden der Aktionsforschung*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, 1990.

Baumgart, J. K. et al. *Historical Topics for the Mathematics Classroom.* Reston: NCTM, 2004.

Bertrand, Y. *Soudobé teorie vzdělávání*. Praha: Portál, 1998.

Breen, Ch. *Mathematics Teachers as Researchers*. In Bishop, A. J. et al. (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003, pp. 523–544.

Crawford, K., Adler, J. Teachers as Researchers in Mathematics Education. In Bishop, A. J. et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996, pp. 1187–1205.

Dubinsky, E. Reflective abstraction in mathematical thinking. In Tall, D.O. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991, pp. 95–123.

Edwards, T. G., Hensien, S. M. Changing instructional practice through action research. *Journal of Mathematics Teacher Education,* **2**, 1999, pp. 187–206.

Elliott, J. *Action-research: A framework for self-evaluation in schools. TIQL-Working Paper No. 1.* Cambridge: Institute of Education, 1981.

Gavora, P. *Úvod do pedagogického výzkumu*. Brno: Paido, 2000.

Glaser, B., Strauss, A. *The Discovery of Grounded Theory: Strategy for Qualitative Research*. New York: Aldine, 1967.

Gray, E. M., Tall, D. O. Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 1994, pp. 115–141.

Hanušová, J. *Cesty učitele ke konstruktivistickým přístupům.* Dizertační práce. Praha: PedF UK, 2007.

Hartl, P., Hartlová, H. *Psychologický slovník*. Praha: Portál, 2000.

Hatch, G., Shiu, Ch. Practitioner Research and the Construction of Knowledge in Mathematics Education. In Sierpinska, A., Kilpatrick, J. (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain*: a Search for Identity. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998, pp. 297–315.

Herman, J. a kol. *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií. Výrazy 1*. Praha: Prométheus, 1995.

Hejný, M. Mechanizmus poznávacího procesu. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: PedF UK, sv. 1, 2004, s. 23–42.

Hejný, M. Budování matematických schémat. In Hošpesová, A., Stehlíková, N., Tichá M. (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2007, s. 81–122.

Hejný, M., Jirotková, D. *Čtverečkovaný papír jako most mezi geometrií a aritmetikou*. Praha: PedF UK, 1999.

Hejný, M., Jirotková, D. 3D geometrie – tělesa. In Stehlíková, N. (Ed.), *Náměty na podnětné vyučování v matematice*. Praha: PedF UK, 2007, s. 95–154.

Hejný, M., Kuřina, F. *Dítě, škola a matematika.* Portál: Praha, 2001.

Hershkowitz, R., Hadas, N. Abstracting Processes, from Individuals' Constructing of Knowledge to a Group's "Shared Knowledge". *Mathematics Education Research Journal,* Vol. 19, No. 2, 2007, pp. 41–68.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., Dreyfus, T. Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 32(2), 2001, pp. 195–222.

Hošpesová, A., Tichá, M. Kolektivní reflexe ve vyučování matematice. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky. Sborník příspěvků ze semináře KMDM.* Praha: PedF UK, 2003, s. 7–15.

Hošpesová, A., Tichá, M. Kvalifikovaná pedagogická reflexe – cesta ke zlepšení kultury vyučování? In Hošpesová, A., Stehlíková, N., Tichá, M. (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice.* České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2007, s. 49–80.

Hricz, M., Horká, K., Korcová, Z., Pavelka, P., Ulrychová, M. Functional thinking and graphic timetables. In Novotná, J. (Eds.), *Proceedings of International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT '05*. Prague, the Czech Republic: Faculty of Education, Charles University, 2005a, pp. 349–350.

Hricz, M., Korcová, Z., Ulrychová, M. Funkční myšlení na základní škole. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky. Sborník příspěvků ze semináře KMDM.* Praha: PedF UK, 2005b, s. 59–68.

Janík, T. Akční výzkum jako cesta ke zkvalitňování pedagogické praxe. In Maňák, J., Švec, V. (Eds.), *Cesty pedagogického výzkumu.* Brno: Paido, 2004, s. 51–68.

Jaworski, B. *Investigating Mathematics Teaching. A Constructivist Enquiry.* London: The Falmer Press, 1994.

Jirotková, D. Grid-paper geometry. In Clarke, B. et al. (Eds.), *International perspectives on Learning and Teaching Mathematics*, Göteborg: Göteborg University, 2004, pp. 173–187.

Jirotková, D. *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie*. Praha: PedF UK, 2010.

Jirotková, D., Kloboučková, J. Pythagorova věta tvořivě. In *Tvořivost v počátečním vyučování matematiky*. Plzeň, v tisku, 2011.

Jirotková, D., Kratochvílová, J. Dva postupy při vyvození Pickovy formule v kurzu geometrie pro budoucí učitele. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: PedF UK, sv. 2, 2004, s. 269–278.

Klieme, E., Pauli, Ch., Reusser, K. The Pythagoras study: Investigating effects of teaching and learning in Swiss and German mathematics classrooms. In Janík, T., Seidel, T. (Eds.), *The Power of Video Studies in Investigating Teaching and Learning in the Classroom*, Münster: Waxmann, 2009, pp. 137–160.

Kratochvílová, J. Jak Klára měnila své pedagogické přesvědčení. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: PedF UK, sv. 2, 2004, s. 299–310.

Kubínová, M., Stehlíková, N. Závislosti a funkce. In Stehlíková, N. (Ed.), *Náměty na podnětné vyučování v matematice*. Praha: PedF UK, 2007, s. 257–317.

Kuřina, F. O matematice a jejím vyučování. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, roč. 31, č. 1, 2002, s. 1–8.

Loomis, E. *The Pythagorean Proposition*. USA: National Council of Teachers of Mathematics, 1968.

Mareš, J. *Styly učení žáků a studentů*. Praha: Portál, 1998.

Mason, J. *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Routledge Farmer, 2002.

Miková, M., Janík, T. Pořizování videozáznamu jako metoda sběru dat. In Švaříček, R. a kol. (Eds.), *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*. Praha: Portál, 2007, s. 192–201.

Miller, D. M., Pine, G. J. Advancing professional inquiry for educational improvement through action research. *Journal of Staff Development,* 2(3), 1990, pp. 56–61.

Müllerová, J., Čižmár, J., Divíšek, J., Macháček, V. *Matematika pro 7. ročník základní školy. I. díl*. Praha: SPN, 1990.

Nezvalová, D. Akční výzkum ve škole. *Pedagogika*, roč. LIII, 2003, s. 300–307.

Novotná, J., Kubínová, M., Sýkora, V. *Matematika s Betkou 3 (pro 8.ročník základní školy)*. Praha: Scientia, 1998.

Pelikán, J. *Základy empirického výzkumu pedagogických jevů.* Praha: Karolinum, 1998.

Průcha, J., Walterová, E., Mareš, J. *Pedagogický slovník.* Praha: Portál, 1998.

Raymond, A. M., Leinenbach, M. Collaborative action research on the learning and teaching of algebra: A story of one mathematics teacher's development. *Educational Studies in Mathematics,* **41,** 2000, pp. 283–307.

Sedláček, M. Ohniskové skupiny a skupinový rozhovor. In Švaříček, R. a kol. (Eds.), *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách.* Praha: Portál, 2007, s. 184–192.

Sfard, A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1991, pp.1–36.

Scherer, P., Söbbeke, E., Steinbring, H. *Praxisleitfaden zur kooperativen Reflexion des eigenen Mathematikunterrichts.* Manuskript. Universitäten Bielefeld & Dortmund, 2004.

Schmuck, R.A. *Practical action research for change.* Arlington Hieghts, Illinois: SkyLight Professional Development, 1997.

Stehlíková, N. Geometrické transformace analyticky. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha: PedF UK, sv. 2, 2004a, s. 279–298.

Stehlíková, N. Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha: PedF UK, sv. 1, 2004b, s. 11–21.

Stehlíková, N. *Structural Understanding in Advanced Mathematical Thinking.* Praha: PedF UK, 2004c.

Stehlíková N. Charakteristika kultury vyučování matematice z pohledu činnosti učitele. In Hošpesová, A., Stehlíková, N., Tichá M. (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice.* České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2007, s. 13–48.

Stehlíková, N. Using videorecordings of lessons in the education of mathematics teachers. In Janík, T., Knecht, P. (Eds.), *New Pathways in the Professional Development of Teachers. Neue Wege in der Professionalisierung von Lehrer/-inne/-n.*Wien: LIT Verlag, 2010a, pp. 265–273.

Stehlíková, N. Interpretace některých didakticko-matematických jevů u studentů učitelství a u učitelů matematiky. *Pedagogika,* roč. LX, č. 3–4, 2010b, s. 303–313.

Stehlíková, N., Ulrychová, M. How to investigate the environment of the mathematics classroom. In Novotná, J. (Ed.), *Proceedings of International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT '05.* Praha: PedF UK, 2005, pp. 291–299.

Steinbring, H. *Z*ur Professionalisierung des Mathematiklehrerwissens – Lehrerinnen reflektierengemeinsam Feedbacks zur eigenen Unterrichtstätigkeit. In Peschek, W. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht.* Hildesheim: Vlg. Franzbecker, 2002, pp. 479–482.

Steinbring, H. *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective.* USA: Springer, 2005.

Strauss, A. *Qualitative Analysis for Social Scientists*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

Strauss, A., Corbinová, J. *Základy kvalitativního výzkumu*. Boskovice: Albert, 1999.

Šeďová, K. Analýza kvalitativních dat. In Švaříček, R. a kol. (Eds.), *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*. Praha: Portál, 2007a, s. 207–247.

Šeďová, K. Zakotvená teorie. In Švaříček, R. a kol. (Eds.), *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*. Praha: Portál, 2007b, s. 84–96.

Švaříček, R. a kol. *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*. Praha: Portál, 2007.

Tichá, M., Macháčková, J., Hošpesová, A. Mathematics classroom and collective reflection. In Novotná, J. (Eds.), *Proceedings of International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT '05*. Praha: PedF UK, 2005, s. 307–315.

Towers, J., Davis, B. Structuring occasions. *Educational Studies in Mathematics*. vol. 49, no. 3, 2002, pp. 313–340.

Ťupová, M. *Didaktické rozpracování prostředí netradiční aritmetické struktury.* Diplomová práce. Praha: PedF UK, 2001.

Ulrychová, M. Pythagorova věta. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky. Sborník příspěvků ze semináře KMDM.* Praha: PedF UK, 2004, s. 25–30.

Ulrychová, M. Discovering Pythagoras' Theorem. In Novotná, J. (Ed.), *Proceedings of International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT '05.* Praha: PedF UK v Praze, 2005, pp. 362–363.

Ulrychová, M. Grafy funkcí. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (Eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky. Sborník příspěvků ze semináře KMDM.* Praha: PedF UK, 2006, s. 173–178.

Vágnerová, M. *Kognitivní a sociální psychologie žáka základní školy*. Praha: Karolinum, 2001.

Vygotskij, L. S. *Psychologie myšlení a řeči.* Praha: Portál, 2004.

Www stránky:

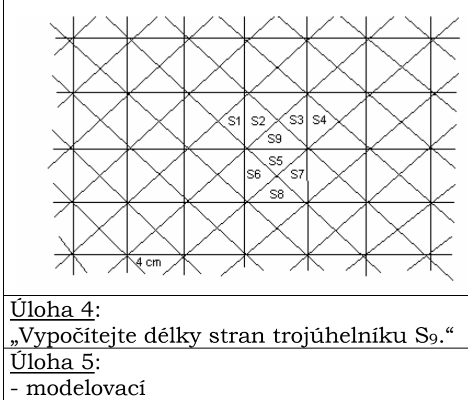
[A] http://epedagog.upol.cz/eped4.2002/clanek02.htm (aktualizováno k datu 12. 3. 2005)

[B] http://www.comenius.upol.cz/documents/zdo.htm (aktualizováno k datu 12. 3. 2005)

Příloha 1

Příprava experimentu Pythagorova věta – „skříň a mozaika“

- datum: říjen 2003
- třída: sekunda (odpovídající 7. ročníku ZŠ)
- cíl: objev Pythagorovy věty
    - znát Pythagorovu větu (její algebraický a geometrický význam)
    - užívat Pythagorovu větu v praxi
    - řešit slovní úlohy vedoucí k užití Pythagorovy věty

Moje činnost *(problém, forma práce)*	*Co tím sleduji?* *(moje očekávání)*
Úloha 1: - frontální forma práce „Projde skříň s rozměry 1,6 m x 2,4 m x 0,8 m (*š* x *v* x *h*) dveřmi s rozměry 1,1 m x 1,9 m (*š* x *v*)?“	- motivace úlohou z praxe
Úloha 2: „Lze tuto skříň naklopit v místnosti vysoké 2,5 m?“	- odhalit to, že řešení závisí na délce úhlopříčky obdélníku s rozměry 2,4 m x 0,8 m
Úloha 3: Pro výpočet délky úhlopříčky nadhodit jiný - následující problém: „Vypočítejte obsahy trojúhelníků S_1, S_2, …, S_9 (viz obrázek), a najděte součty $\lvert S_1\rvert + \lvert S_2\rvert =$, $\lvert S_2\rvert + \lvert S_3\rvert =$, $\lvert S_5\rvert + \lvert S_6\rvert + \lvert S_7\rvert + \lvert S_8\rvert = $.“  	- příprava pro úlohu č. 4
Úloha 4: „Vypočítejte délky stran trojúhelníku S_9.“	- objev Pythagorovy věty
Úloha 5: - modelovací „Máme lano, na kterém je uvázáno 13 uzlů tak, že každé dva mají vždy tutéž vzdálenost mezi sebou. Spojíme 1. a 13. uzel v jeden. Ve kterých uzlech budou vrcholy pravoúhlého trojúhelníku?“	- praktické zamyšlení a modelování Pythagorovy věty
Dále budou následovat procvičovací úlohy z učebnice, tj. výpočet délky strany pravoúhlého trojúhelníku, konstrukce pravoúhlého trojúhelníku, ověření, zda je daný trojúhelník pravoúhlý (početně i graficky), slovní úlohy na užití Pythagorovy věty v praxi.	- procvičování

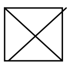
Příloha 2

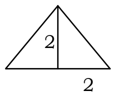
Záznam experimentu Pythagorova věta – „skříň a mozaika“

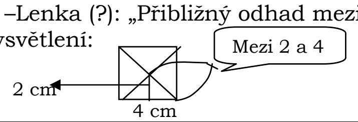
1. vyučovací hodina – středa 15. 10. 2003

- čas: $12^{45} – 13^{30}$
- počet žáků: 30
- externí pozorovatel: nebyl
- zpracováno na základě vlastních poznámek z hodiny

Činnost učitele	*Činnost žáků* (*popis – account of*)	*Poznámky*
1Úloha 1: - nadhodila jsem problém a nakreslila situaci na tabuli (místnost se skříní)	-XX: „Nejde.“ -X: „Nejde, jedině ji rozebrat na kousky.“ -XX: „Jde.“ – žáci mezi sebou: „Když to otočíš.“ – „Jo aha. Jde to.“ - František ukazuje na penálu a krabičce od kalkulačky („Takhle je skříň a dveře. Sklopíme a projdeme.“)	- žáci se nezamýšlejí nad skutečnými rozměry skříně a dveří (nejspíše si představují nějakou určitou skříň, kterou mají třeba doma).

2 Úloha 2: - položila jsem otázku a nakreslila boční pohled, abych zkonkretizovala úlohu, jakým způsobem zvednout skříň.	-X: „Ano, budeme ji zvedat pomalu.“	- žák má dojem, že řešení závisí na rychlosti.
3 „A jak se o tom přesvědčíme početně, že to lze?“	**a)** -X: „Musíme to narýsovat a změřit úhlopříčku.“	
	b) -X: „Ne, o ty dva rohy se to zadrhne.“	-nedokonalá představa - rozhodující je ten jeden roh
4 „A jak ji početně určíme?“	**a)** -X: „Je potřeba získat úhlopříčku.“	- zopakovalo se
	b) -X: „Ano, když to dojde do stropu, spodní část posuneme.“	- opět představa pohybu
	c) -František ukazuje na penálu, jak zvedá skříň	-nebere ohled na zadané rozměry
	d) - XX a Pavel: „To se musí zkusit kružítkem půlkružnicí, jestli ano nebo ne.“ - nakonec většina žáků navrhovala tento způsob řešení	- Pavel – pečlivý, sešit vede v naprostém pořádku, rýsuje přesně, píše úhledně – raději dopisuje úlohu doma …
5 *Volba dalších (mých vlastních) úloh* Úloha 3: Nyní jsem zadala	**a)** - Nikola: „S_1 = 1 cm^2, protože obsah toho čtverce je 4 cm^2 a ještě to musím vydělit čtyřmi.“ 	- numerická chyba – délka strany čtverce je 4cm (ne obsah čtverce je 4cm^2), ale postup správně

úlohu s obsahy trojúhelníků a čtverců, abych žáky dovedla k známému vztahu.	**b)** -XX: „Obsah čtverce je 4 · 4 cm^2 a to je 16 cm^2 a obsah trojúhelníku je 16 děleno 4 a to je 4cm^2.“	- žáci určili všechny obsahy správně.
6 Úloha 4: Žákům, kteří již byli hotovi, jsem zadala další úlohu (délky stran trojúhelníku s obsahem S_9). **7** Individuální přístup k Petrovi: -„Existuje nějaký vztah mezi těmito stranami?“	-Petr: „S = S_3 + S_4 = 8 cm^2. Délka strany čtverce je tedy $\sqrt{8}$ cm. Druhá strana v trojúhelníku je totéž, trojúhelník je rovnoramenný a třetí strana je jasná (4cm).“ - P. přemýšlí (bez reakce)	- správně - zůstalo za DÚ
8 Přešla jsem k frontální práci.	**a)** -X: nápad přes obsah trojúhelníku $S = \frac{z \cdot v}{2} = 2$ 	- nevedlo u žáka k řešení, zamítl to
	b) -X: jiný nápad přes obsah trojúhelníku S_9 $4 = \frac{a \cdot v_a}{2}$ „$a \cdot v_a$ musí být 8.“	- při řešení vyšel z toho, že obsah tohoto trojúhelníku je již známý. - nevedlo dál k řešení

	c) –Lenka (?): „Přibližný odhad mezi 2 a 4.“ Vysvětlení: 	- velmi hrubá představa
	d) -Tamara: „Není to to, že platí $a + b > c$?“	- myslí trojúhelníkovou nerovnost
9 Odpověděla jsem, že nevím, a zadala jsem za DÚ přemýšlet nad těmito problémy.		

2. vyučovací hodina – pátek 17. 10. 2003

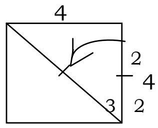
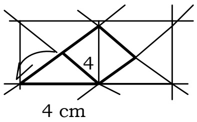
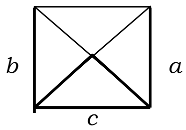
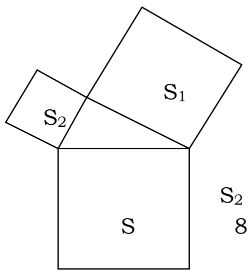
- čas: 8^{00} – 8^{45}

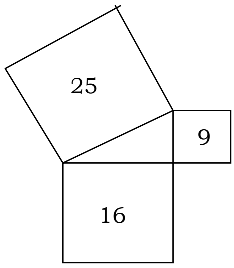
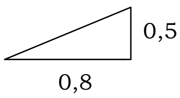
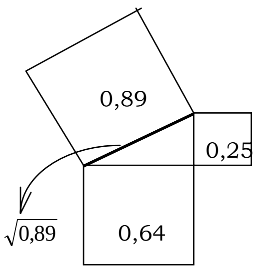
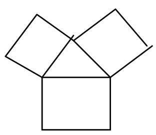
- počet žáků: 31

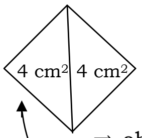
- externí pozorovatel: nebyl

- zpracováno na základě vlastních poznámek z hodiny

Činnost učitele	*Činnost žáků (popis – account of)*	*Poznámky*
10	-František mě hned na začátku hodiny (aniž bych stačila cokoli říct) upozornil, že doma zkoušel stěhovat nábytek a že to vyjde.	Nezmínil rozměry (jako by na ně nebral ohled)
11 Zeptala jsem se, jaké byly rozměry skříně, dveří a výšky pokoje.	- František: „Výška skříně asi 2,9 m, výška dveří 2,1 m a výška pokoje 3 m.“ - „Skříň lze prosunout dveřmi.“	- nevím, jestli rozměry jsou skutečné, nebo jen odhadnuté - opravdu stěhoval

12 <u>Úloha 4</u>: Vrátila jsem se zpět k úloze 4 (délky stran daného trojúhelníku).	- Zdenka i další: „3 cm.“ Vysvětlení:  „Tento úsek je o polovinu té poloviček větší. Tedy 3 cm.“	-mylný názor
13	Lenka: Sklopit úsečku, obě strany jsou potom 4 cm.  Žáci ve třídě přemýšlí samostatně dál nad danými problémy.	-mylný názor
14	Petr – délky stran už vypočítal v 1. hodině, nyní určuje vztah mezi stranami 2 nápady: a) $\frac{a+b}{2} = c$, protože platí  (překresleno z tabule) b) hned začal bez čekání na odezvu pro 1. nápad vysvětlovat 2. způsob (jako by ten první ani nenavrhl):	- toto řešení sám zavrhl, nevracela jsem se už k tomu - neplatí obecně - špatně označené strany trojúhelníku (*a*, *b*), *a*, *b* označil jako strany čtverce ne trojúhelníku
	 $S_2 = S - S_1$ $8 = 16 - (\sqrt{8})^2$	- vyšel z obsahů čtverců v mozaice (úloha 3) - zajímavé: <u>8</u> = 16 – $(\sqrt{8})^2$
15 Dotaz na Petra: „A jak to bude v obecném trojúhelníku?“	-Petr: „I v pravoúhlém?“	- žáci si neuvědomují, že původní trojúhelník je pravoúhlý

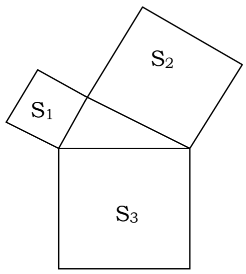
16 Odpověď: „Třeba i v pravoúhlém.“	Petr nakreslil tento náčrtek a určil, že trojúhelník bude mít délky stran 3, 4 a 5.  „Znám-li ty dvě kratší, sečtu je…“ „…a od nejdelší odečtu tu druhou stranu.“	- dobré by bylo zamyslet se nad tím, proč zvolil tak rychle zrovna tento trojúhelník (počty mu jdou rychle) - neuvádí jednotky (zřejmě si uvědomuje nezávislost na jednotkách) - myslí druhé mocniny (nebo obsahy?) - myslí odvěsnu
17 „Co kdybychom měli zadány délky stran desetinnými čísly?“	Petr: „Třeba 0,8 a 0,5.“ A kreslí obrázek  	- dané rozměry navrhl Petr sám
18 „Platí to i obecně?“	Petr (asi 20s) kreslí rovnostranný trojúhelník a říká „Neplatí. Součet obsahů se nemůže rovnat tomu obsahu.“ A demonstruje na obrázku.  „Vždyť tu máme stejné obsahy.“	- nákres rovnostranného trojúhelníku

19 Zpět k úloze 4 mě přivedla Martina	Martina vypočítala také délku strany *a* (pomocí obsahu čtverce)  $\Rightarrow$ obsah čtverce je 8 cm² $S = a \cdot a$ $8 = a \cdot a$ $a = \sqrt{8}$	

3. vyučovací hodina – pondělí 20. 10. 2003

- čas: $8^{55} – 9^{40}$
- počet žáků: 31
- externí pozorovatel: nebyl
- zpracováno na základě vlastních poznámek z hodiny

Činnost učitele	*Činnost žáků* *(popis – account of)*	*Poznámky*
20	Petr přišel ještě s dalším řešením. Přesvědčil se o tom, že daný vztah pro obecný trojúhelník neplatí. Doma totiž zkusil narýsovat obecný trojúhelník, změřil pravítkem délky stran trojúhelníku a vypočítal obsahy. Po dosazení však objevené pravidlo pro součet obsahů čtverců neplatilo.	

21 Společně jsme na začátku hodiny shrnuli dosavadní poznatky: „Známe-li dvě strany v trojúhelníku, jak vypočítáme tu třetí?“	XX: „Vypočteme obsahy, sečteme a odmocníme a vyjde z toho ta strana.“ - na tabuli: $S_1 + S_2 = S_3$ (s příslušným obrázkem na tabuli)  	- tyto dvě délky stran uvažují jako délky odvěsen (neuvažují o přeponě) - volí tu jednodušší variantu z trojice možných!!! - neřekla jsem „v pravoúhlém trojúhelníku“ – intuitivně jsem to ale předpokládala
22 „Když označíme délky stran písmenky, jak vypočítáte danou stranu?“	X na tabuli: $S_1 = a^2$ $S_2 = b^2$ $S_3 = c^2$ $S_1 + S_2 = S_3$ $a^2 + b^2 = c^2$	- žáci automaticky postupují podle abecedy (to způsobí jistě později problémy (viz dozvuky)) - uvědomuji si, že jsem zde promeškala příležitost, jak zamezit u některých žáků formálnímu poznání (např. vést žáky k označení trojúhelníku jinými písmeny)

23 „Jak bychom toto teď formulovali slovně?“ - na tabuli jsem napsala: Pythagorova věta - při společné formulaci Pythagorovy věty jsem seznámila žáky s pojmy přepona a odvěsna	- společně jsem zformulovala s žáky Pythagorovu větu: „V každém pravoúhlém trojúhelníku platí: Součet obsahů čtverců nad odvěsnami se rovná obsahu čtverce nad přeponou.“	- někteří žáci se podivovali nad pojmy odvěsna a přepona
24 Zadala jsem úlohu na procvičení: „Délka jedné odvěsny pravoúhlého trojúhelníku je 3cm, délka přepony je 5cm. Vypočítejte délku druhé odvěsny pravoúhlého trojúhelníku.“	X na tabuli: $a^2 + b^2 = c^2$ $b^2 = c^2 - a^2$ $a^2 = 9$ $c^2 = 25$ $b^2 = 16$ $b = \sqrt{16} = 4$cm	- někteří žáci si opravdu pod druhými mocninami představují obsahy čtverců nad danými stranami pravoúhlého trojúhelníku (označení stran tedy není formální), u některých žáků probíhá formální poznání (projevuje se to v chybnosti výpočtů v následujících úlohách – viz dozvuky). Z mého pozorování vyplynulo, že se jedná převážně o žáky (Marek), kteří se objevováním nechtěli zabývat, ….

25 <u>Úloha 5</u>: za DÚ vymodelovat doma		
26 Dále následovaly procvičovací úlohy z učebnice[2)].		

4. vyučovací hodina – úterý 21. 10. 2003

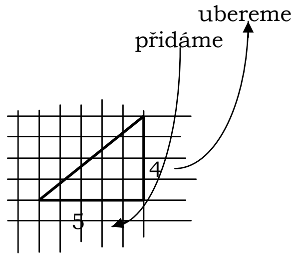
- čas: $10^{00} – 10^{45}$

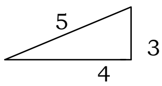
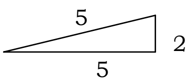
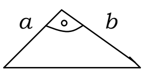
- počet žáků: 30

- externí pozorovatel: nebyl

- zpracováno na základě vlastních poznámek z hodiny

Činnost učitele	*Činnost žáků* *(popis – account of)*	*Poznámky*
27 Na začátku hodiny jsem se zeptala na DÚ.	**a)** Věra vytvořila z provázku pravoúhlý trojúhelník (s vrcholy v uzlech 1, 4 a 8) a nalepila ho na papír.	
	b) Petr tentokrát doma nepracoval, ale byl inspirován prací Věry a ustřihl si proužek papíru, který složil tak, aby přehyby představovaly dané uzly. Pomocí tohoto modelu hledal pravoúhlé trojúhelníky. Objevil též 1., 4. a 8. uzel. „To znamená, že trojúhelník má délky stran 3, 4 a 5 jednotek.“	- provázek nahradil proužkem papíru. (Ví si rady …)

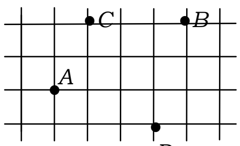
	c) Tamara – určila také vrcholy v uzlech 1, 4 a 8.	- nezabývala se doma úlohou více, nehledala více řešení. Tento úkol řešila zkusmo, tužkou do sešitu.
	d) Tamara – úlohou se více začala zabývat až nyní v hodině. -pracuje na čtverečkovaném papíru, stále uvažuje 13 uzlů - má tuto představu: „Ubereme-li jeden dílek a přidáme ten dílek sem, trojúhelník zůstane pravoúhlý.“ 	
28 „Početně mě o tom přesvědč.“	**a)** Tamara(na tabuli): $a^2 + b^2 = c^2$ $6^2 + 3^2 = c^2$ $36 + 9 = c^2$ $45 = c^2$ $c = \sqrt{45}$ „To není celé číslo. Tak to asi nejde.“	

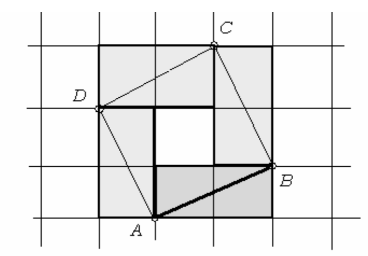
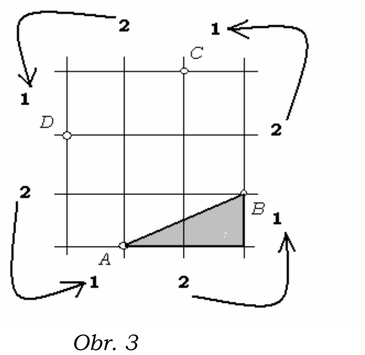
	b) Tamara navrhne jiný trojúhelník a zkouší odebrat a přidat jeden dílek:   „Jo, ale to nemůže být pravoúhlý, protože je rovnoramenný. To by šlo jen v případě, že $a = b$. 	- je myšleno v případě, že půjde o rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ($a = b$).
29 Dále následovalo řešení dalších úloh z učebnice (Müllerová, J. a kol. (1990.): *Matematika pro 7. ročník základní školy. I. díl.* SPN, Praha.).		

Příloha 3

Příprava experimentu Pythagorova věta – „mřížový čtverec 1“

- datum: duben 2004
- třída: sekunda (odpovídající 7. ročníku ZŠ)
- inspirace: RNDr. Darina Jirotková, PhD.
- cíl: objev Pythagorovy věty netradičním způsobem (Pythagorova věta již žákům známa)

Činnost *(problém, forma práce)*	*Co tím sleduji?* *(moje očekávání)*
Úloha 1: *Vzájemná poloha dvou bodů* • a) Zapište symbolicky, jak se dostaneme z bodu *A* do bodu *B*, a pak zpět z bodu *B* do bodu *A* (totéž pro body *C* a *D*) (viz obr. 1). - individuální forma práce  *Obr. 1* Např.: $A \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow B$, popř. $A \uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow B$, $A \rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow B$ $A \overset{4}{\rightarrow} \overset{2}{\uparrow} B$ • b) Najděte nejkratší cestu z bodu *A* do bodu *B*.	- přípravná úloha - očekávám vyšší variabilitu řešení žáků - efektivita práce?

Úloha 2: *Mřížový čtverec* • a) Vytvořte k dané mřížové úsečce[1] mřížový čtverec[2]. - individuální forma práce Různé způsoby řešení: - otočení o 90° i) konceptuální (je obrázek) – otočení obdélníku s příslušnou úhlopříčkou, popř. trojúhelníku (viz obr. 2)  *Obr. 2*  *Obr. 3* popis: $A \overset{2}{\rightarrow}\overset{1}{\uparrow} B \overset{2}{\uparrow}\overset{1}{\leftarrow} C \overset{2}{\leftarrow}\overset{1}{\downarrow} D \overset{2}{\downarrow}\overset{1}{\rightarrow} A$ ii) procesuální (proces 2 - 1, 3 – 1, …) (viz obr. 3) Např. čtverec nad mřížovou úsečkou 3 – 1: $A \overset{3}{\rightarrow}\overset{1}{\uparrow} B \overset{3}{\uparrow}\overset{1}{\leftarrow} C \overset{3}{\leftarrow}\overset{1}{\downarrow} D \overset{3}{\downarrow}\overset{1}{\rightarrow} A$	- přípravná úloha

[1] Mřížová úsečka je úsečka, jejíž krajní body leží v uzlových bodech mřížky.
[2] Mřížový čtverec je čtverec, jehož vrcholy leží v uzlových bodech mřížky.

- b) Popište obecně, jak vznikne mřížový čtverec nad danou mřížovou úsečkou.

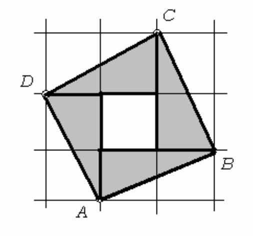
  Obecně: čtverec nad mřížovou úsečkou $m - n$: $A \overset{m}{\rightarrow} \overset{n}{\uparrow} B \overset{m}{\uparrow} \overset{n}{\leftarrow} C \overset{m}{\leftarrow} \overset{n}{\downarrow} D \overset{m}{\downarrow} \overset{n}{\rightarrow} A$
  (zkráceně: mřížový čtverec $m - n$)

Úloha 3: *Obsah mřížového čtverce*

- a) Načrtněte mřížový čtverec 2 – 0 a vypočítejte jeho obsah.
- b) Vypočítejte obsah mřížového čtverce 1 – 1.
- c) Vypočítejte obsah mřížového čtverce 2 – 1.

Způsoby výpočtu obsahu:

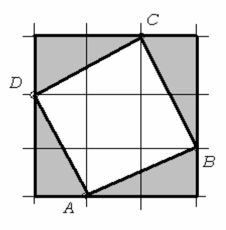
i)



Obsah čtverce *ABCD*
Např.: - 4x obsah trojúhelníku + obsah čtverce 1x1
- 2x obsah obdélníku 2x1 + obsah čtverce 1x1

$S = 5j^2$

ii)



Rámečkovat
Obsah čtverce *ABCD*
Např.: - obsah čtverce 3x3 bez 4x obsah trojúhelníku
- obsah čtverce 3x3 bez 2x obsah obdélníku 2x1

$S = 5j^2$

iii) výpočet délky strany a a výpočet obsahu čtverce $S = a^2$

- vyšší variabilita řešení žáků

- ukázat u tabule

- předpokládám, že

někteří žáci využijí znalosti Pythagorovy větu

- d) Vypočítejte obsah mřížového čtverce 3 – 1.
  atd.

Úloha 4: *Závislost*

- a) Zapište obsahy mřížových čtverců do tabulky.
  → Navrhnout tabulku (pro $n = 1$):

$A \rightarrow$	$B \uparrow$	S
0	1	1
1	1	2
2	1	5
3	1	10
4	1	17
…	…	…
m	1	$m^2 + 1$

+ 1
+ 3
+ 5
+ 7 přirůstají lichá čísla
→ překvapení…

- b) Doplňte řádek 5 – 1, aniž byste si nakreslili obrázek.

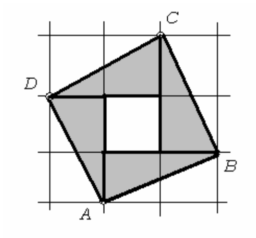
- c) Vytvořte tabulku pro $n = 2, 3, \ldots, n$

$A \rightarrow$	$B \uparrow$	S
0	2	
1	2	
2	2	
3	2	
4	2	
…	…	
m	2	

- objev Pythagorovy věty netradičním způsobem

Moje poznámky:

Odvození požadovaného vztahu:

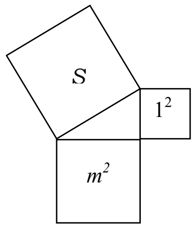


$S = 4S_{\Delta} + S_{\square}$

tj. $S = 4\,\dfrac{m \cdot 1}{2} + (m - 1)^2$

tj. $S = m^2 + 1$

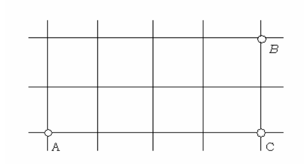
Graficky:



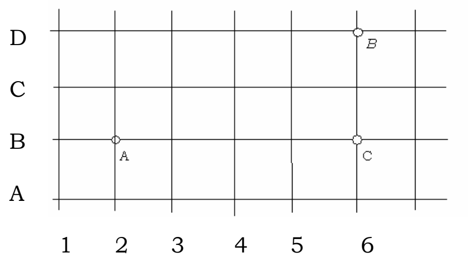
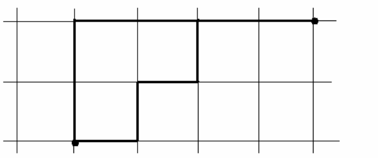
Příloha 4

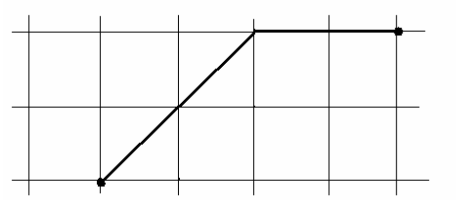
Záznam experimentu Pythagorova věta – „mřížový čtverec 1"

1. vyučovací hodina – pátek 16. 4. 2004
- čas: 8^{00} – 8^{45}
- počet žáků: 29
- externí pozorovatel: nebyl
- zpracováno na základě vlastních poznámek z hodiny

Činnost učitele	*Činnost žáků* *(popis – account of)*	*Poznámky*
1 Úloha 1a): *Vzájemná poloha dvou bodů* Zapište symbolicky, jak se dostaneme z bodu *A* do bodu *B*.	**a)** – Patrik: „*A* → *B*"[1]	Variabilita způsobů řešení úlohy
	b) – Tamara:[1] 1. p, $p \in A$ 2. C, $\lvert AC \rvert$ = 4 cm 3. $p \perp t$, $t \in B$ 4. $\lvert CB \rvert$ = 1 cm  - uč.: *Proč 4 cm?*" - T.: *„Protože mám milimetrový papír. Teda centimetrový, půlcentimetrový.*"	

[1] Řešení úlohy na tabuli.

	c) – Pavel: „*A* →, ↑, →, ↑, →, → *B*"[1]	
	d) – Bára: – zavedení soustavy souřadnic (řešení žáka na tabuli)  $A \in$ 2B $A \Rightarrow$ 6B $A \Rightarrow$ 6D $B \in$ 6D	
2 „Který způsob je nejefektivnější?"	XX_1 – „*Ten Pavlův.*" (tj. řešení Pavla – viz výpověď 1c)) XX_2 – „*Ten Báry.*"	
3 **„**Je to jediný způsob, jak vyjádřit cestu z *A* do *B*?"	**a)** -Marek: „*A* ↑, →, →, →, →, ↑ *B*" (řešení žáka na tabuli) **b)** -Patrik: „*A* ↓, →, →, →, →, ↑, ↑, ↑ *B*" (řešení žáka na tabuli) **c)** -Pavel: „*A* ↑, ↑ , →, →, →, → *B*" (řešení žáka na tabuli) **d)** -Marek: „*Ještě jiný způsob.*" „*A* ↑, 4 →, ↑ *B*" (řešení žáka na tabuli)	
4 Úloha 1b): „Která cesta bude nejkratší?"	**a)** -Marek: „*Pavlova..*" **b)** -Martina: „*Pavlova. Přišla mi nejpřímější.*" (intuice)	
5 „Ne stejně dlouhé?"	**a)** –Pavel: „*Je to vždy šest.*" (Kreslí obrázek na tabuli.) 	

	b) –Patrik: *„V zápisu je vždy šest šipek.“* (souhlasí)	
	c) –Tamara: *„Nejkratší by mohla být tahle.“* (řešení žáka na tabuli) 	
6 „My nechceme úhlopříčně.“	**a)** –Tamara: *„Aha.“*	
7 „Jak bychom mohli zapsat zkráceně Pavlovo řešení?“	**a)** –Marek: „*A* 2 ↑, 4 → *B*“ (řešení žáka na tabuli)	
8	**a)** -Bára popisuje cestu svým způsobem. (řešení žáka na tabuli) $A \in$ B2 $B \in$ 7E Nedokončí své řešení, ostatní ji přeruší. **b)** -XX: *„Jednodušší je to s šipkama.“* **c)** -Bára: *„S šipkama je to jednodušší, ale nevíme, kde je Áčko.“*	Bára preferuje své řešení.

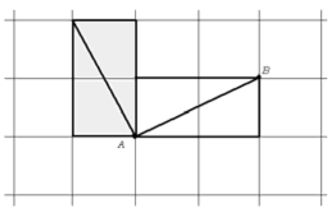
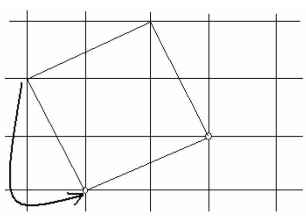
2. vyučovací hodina – středa 21. 4. 2004

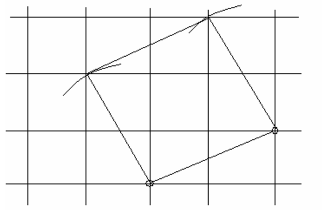
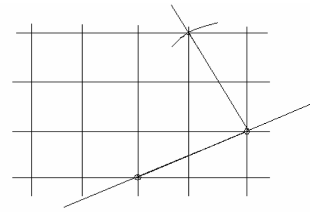
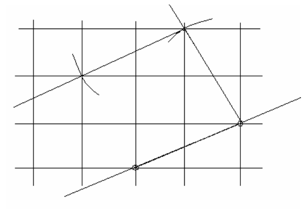
- čas: 12^{45} – 13^{30}

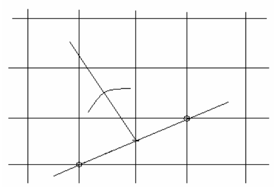
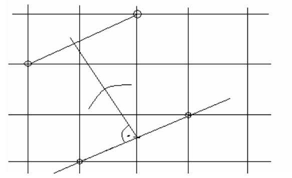
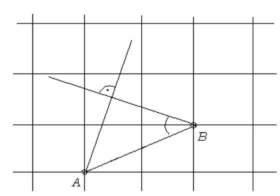
- počet žáků: 30

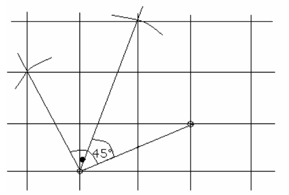
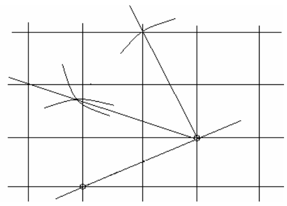
- externí pozorovatel: nebyl

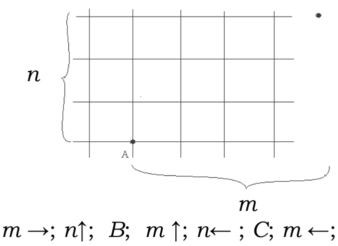
- zpracováno na základě vlastních poznámek z hodiny

Činnost učitele	*Činnost žáků* *(popis – account of)*	*Poznámky*
9 Úloha 2a): *Mřížový čtverec* „Vytvořte k dané mřížové úsečce mřížový čtverec.“	**a)** –Pavel: *„Máme dva čtverečky a propojíme je. Ty čtverce dáme sem a doděláme tak, aby to byl pravý úhel.“* 	
	b) –Nikola: *„Z A do B.“ … „Z A dvakrát doprava a jednou nahoru a dál budeme postupovat stejně. Jednou nahoru a dvakrát doleva, dvakrát doleva a jednou dolů, aby to bylo do čtverce.“* - v sešitě: správně -opravila se na tabuli: *„Dvakrát nahoru a jednou doleva, dvakrát doleva a jednou dolů. Pořád je to stejné, když to otočím.* (myslí čtverec) *Pro každý bod dostávám stejný obrázek – dvakrát doprava a jednou nahoru – po každém otočení“.* 	- zobecnění -otáčí čtverec a vidí proces 2 - 1

	c) –Anička: *„Kružítkem – sestrojím kružnici z bodu B s poloměrem BA a kružnici z bodu A s poloměrem BA. Protne se to v bodech.* (myslí uzlových) *Musí se to protnout v těch bodech, ta vzdálenost se přenese i kružítkem.“* 	
	d) –Bára: *„Pravítkem – proložím body A a B přímkou, udělám kolmici pomocí rysky, kružítkem nanesu stejnou vzdálenost. A pak zase kolmici k přímce v bodě C.“*   2. zp.: *„A nebo nanesu 90°, 90°a zase 90°.“*	

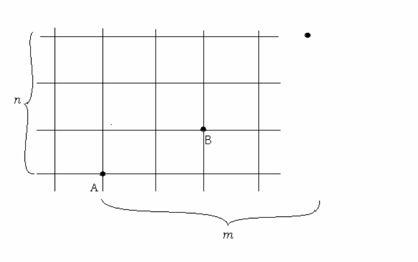
	e) –Martina: *„Přes průsvitku.“* Graficky najde střed čtverce. *„Tento bod je střed a pomocí průsvitky otočíme tak, aby to bylo rovnoběžné.“*  	
	f) –Zdenka: *„Úhlopříčkou. Spojím body a naměřím 45°u B. Potom sestrojím kolmici, která prochází bodem A a odměřím kružítkem vzdálenosti a dodělám body C a D.“* 	
	g) –Blanka: *„Sestrojím kolmice v bodě A a B a kružítkem nanesu vzdálenost AB.“*	

	h) –Tamara: *„Spočítat úhlopříčku pomocí Pythagorovy věty. Ale není to přesné.“* - Měří pravítkem délku strany *AB*. *„11 mm.“* - píše: $11^2 + 11^2 = c^2$ $121 + 121 = c^2$ $\sqrt{242} = c$ $15{,}5 = c$ - *„Úhlopříčka je dlouhá 15,5. Teď sestrojím 45°z A, kružítkem nanesu úhlopříčku 15,5 a dostanu tak bod C. Pak sestrojím 90° z bodu A a nanesu 11 cm, a tak dostanu bod D.“*  	- jednotky!
	i) –Táňa: *„Pomocí osy úhlu.“* 	

	j) –Marek: *„Pomocí šipek.“* – bez obrázku Na tabuli: *A*; 2 →; ↑; *B*; 2 ↑; ← ; *C* (představuje si a rukou si ukazuje ve vzduchu, jak postupuje, a pak píše) 2←; ↓ ; *D* 2↓; → *A* *„To by bylo pro dvojku a pro trojku by to bylo takhle..“* a opravuje zápis (místo 2 píše 3). *„Pro 3 – 1 by to bylo A; 3 →; ↑; B; 3 ↑; ← ; C; 3←; ↓ ; D 3↓; → A“*	-pracuje sám zobecnění
10 <u>Úloha 2b):</u> „A obecně by to bylo jak?“	–Marek – nechápavý pohled Návodný obr. - uč.  - píše na tabuli: *A*; *m* →; *n*↑; *B*; *m* ↑; *n*← ; *C*; *m* ←; *n*↓ ; *D* *m* ↓; *n*→ *A*	- obecný předpis

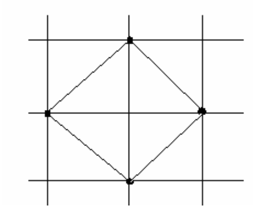
3. vyučovací hodina (jen první část hodiny – pro připomenutí) – pátek 23. 4. 2004

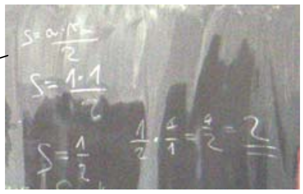
- čas: část 1. vyučovací hodiny (8^{00} – 8^{12})
- počet žáků: 32
- externí pozorovatel: nebyl
- zpracováno na základě vlastních poznámek z hodiny

Činnost učitele	*Činnost žáků* *(popis – account of)*	*Poznámky*
11 Nakreslila jsem obrázek na tabuli (viz promluva č. 10) a zeptala se, jak je možné zapsat takový čtverec obecně. - nikdo se nehlásil, vyvolala jsem Marka	- Marek – si do sítě zakreslil bod B  - *„Když je tady A a tady B, tak m je to, co je na té vodorovné a n na svislé…“* a píše na tabuli: *A, m* →, *n*↑, *B, m* ↑, *n*← , *C, m* ←, *n*↓ , *D* , *m* ↓, *n*→ , *A*	- první část zápisu (*A, m* →, *n*↑) určil Marek z obrázku, ostatní už odvodil bez pomoci obrázku
12 Je tam nějaká závislost?	- Tamara – *„První je vždy m a druhé je vždy n a šipky se střídají. U m je to doprava, nahoru, doleva a dolů a u n nahoru, doleva, dolů a doprava.“*	

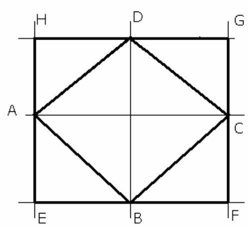
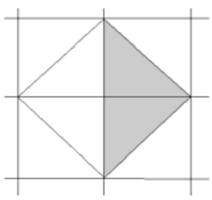
4. vyučovací hodina – pondělí 26. 4. 2004

- čas: 8^{00} – 8^{45}
- počet žáků: 30
- externí pozorovatel: RNDr. Darina Jirotková, PhD., prof. Graham Littler (UK)
- zpracováno na základě vlastních poznámek z hodiny, nahrávky z diktafonu a videonahrávky

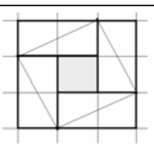
Činnost učitele	*Činnost žáků* *(popis – account of)*	*Poznámky*
13 Úloha 3a): *Obsah mřížového čtverce* Načrtněte mřížový čtverec 2 – 0 a vypočítejte jeho obsah.	XX – *„Obsah je čtyři.“*	- bez problému
14 Úloha 3b): Vypočítejte obsah mřížového čtverce 1 – 1.	**a)** Pavel – *„No, takže tady máme vlastně dvě poloviny a to je jedna celá kostička, takže to je jedna* (mezivýpočet)*, dva.“* 	

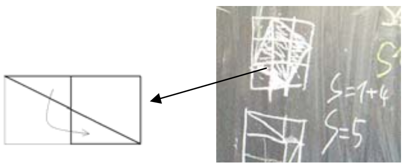
	b) Petr – *„Takže tady máme obsah čtverce a·a. … No a dalo by se to i vypočítat pomocí Pythagorovy věty.“* Nástin I. způsobu[2]: $S_{\square} = a \cdot a$ II. způsob (Pyth. věta): $a^2 + b^2 = c^2$ $1^2 + 1^2 = c^2$ $2 = c^2$ $c = \sqrt{2}$ *„Vyjde nám odmocnina ze dvou. … Takže to je iracionální číslo.“* $S = c^2$ $S = \sqrt{2}^2$ $S = 2$	- vyzvala jsem Petra, aby obsah vypočítal pomocí Pythagorovy věty (i přesto, že Petr namítá, že to bude delší) *- videonahrávka*
	c) Jirka – *„Já bych si vypočítal všechny obsahy těch trojúhelníků a potom bych to sečetl.“* $S = a \cdot v_a / 2$ $S = 1 \cdot 1/2$ $(1/2) \cdot (4/1) = 4/2 = 2$ $S = 1/2$ 	*Fotky – ilustrace viz přiložené CD* *- videonahrávka*

[2] Řešení úlohy na tabuli.

	d) Tamara – *„Takže já bych vypočítala povrch …* (uč.: *„Povrch?“*) *… obsah toho většího čtverce. … Kolik to má .. jeden ten čtvereček?“* Uč.: *„To je jedna jednotka.“*  $S = e \cdot e$ $S = 2 \cdot 2$ $S_1 = 4/2$ $S = 4$ $S_1 = 2$ 	*Fotky – ilustrace viz přiložené CD* *- videonahrávka*
	e) Vendula – *„Tak, že bychom si jako nejdřív spočítali obsah tady toho, a pak bychom to vynásobili dvěma.“* $S = a \cdot v_a / 2$ $S = 2 \cdot 1/2 = 1$ $1 \cdot 2 = 2$ 	

	f) Marek – *„Takže já bych ten jeden čtvereček vynásobil …, teda kolik je ten jeden čtvereček* (uč.: *„Strana toho čtverečku je jedna jednotka.“*) *… no, to je jedno, já to stejně nevím. “*	- nechce se mu přemýšlet
	g) Pavel – *„No, jak říkal Marek, takže … když tady máme ty čtyři čtverečky ve velkým, takže vlastně ta půlka toho čtverečku vlastně zaujímá… Každá polovina je vlastně ten malej. Takže když ty čtyři vydělíme jednou polovinou, tak nám vyjde dva. … To je to, co říkal Marek, vlastně.“*	- Pavel si vzal sám slovo - myslí to dobře, spletl si: dělit dvěma = násobit jednou polovinou (4 : 2 = 2)
15 <u>Úloha 3c)</u>: Vypočítejte obsah mřížového čtverce 2 – 1. Na tabuli: *A* 2→ 1↑ *B*	**a)** Patrik – ??? *„Jo, ono je to 1 nahoru.“* Neumí vyřešit.	

16	**a)** Tamara - *„No, takže bychom si mohli zase udělat ten větší čtverec. Takže … bychom si udělali stejný … vlastně, aby nám to vycházelo, abychom to mohli určit, tak si musíme vlastně najít tu … jako jak se to k sobě jako (???), kolik procent z toho zaujímá ten čtverec.“* - uč.: *„A jak to teda vypočítáme?“* **b)** - Tamara - *„No, tak mě napadlo, že bysme si vlastně mohli narýsovat jiný útvary* (kreslí na tabuli) *no a tady máme vlastně jeden čtvereček navíc. Takže, teď víme, že tady máme ty tři jednotky, tak to bude* (2s) *devět a má to … Vlastně mínus jeden ten čtvereček, takže to bude osm a teď mi tam zůstala jedna polovina a to bude čtyři.“* **c)** - Zdenka: *„Nene. Pět to má vyjít.“* Tamara na tabuli:   Tamara píše: S = 9 – 1 S_1 = 8 S_1 = Zdena opravuje: (viz 17a) S = 9 S_1 = 9 – 4 S_1 = 5 **d)** - uč.: *„Kolik je obsah toho velkého čtverce?“* - Tamara - *„Devět.“* - uč.: *„A proč mínus jedna? “* - Tamara - … - uč.: *„Co bude to S_1? “* - Tamara - *„To je obsah toho čtverce.“* - uč.: *„Tak, a jak teda vypočítáme to S_1? “* - Tamara – přemýšlí *„Tak to přičteme.“* (nejistě)	- *videonahrávka* - přičteme, odečteme 1

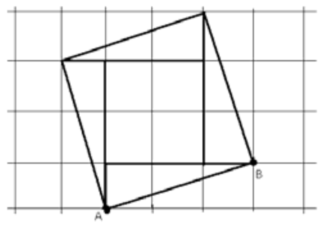
17	**a)** - Zdenka: *„Paní učitelko!“ … „Kdybychom sečetli tadyty přebejvající, tak nám vyjdou čtyři celý čtverečky, takže devět mínus čtyři je pět. Takže pět vyjde.“*	- převzato
18	**a)** Petr (hlásí se) - *„Paní učitelko!“* (kreslí na tabuli) (???) *„Tady bysme ty kousky trojúhelníku přeházeli. … A tudyto je ta je jedna jednotka a tadyto jsou dvě. To znamená, že jeden krát jedna je jedna plus dva krát dva, což je … čtyři plus jedna je pět.“* - uč.: *„Pochopili všichni?“* - XX: *„Ne.“* - uč.: *„Tak to zkus ještě jednou vysvětlit, ať všichni vědí, jo?“* **b)**- XX: *„My tam nevidíme.“ … „Petře, dej to nahoru.“* **c)** Petr: - (kreslí na tabuli útvar viz obr.) *„Takže tady jsou čtyři trojúhelníčky, tudyto je ten velkej čtverec. Když bychom si teď ty malý trojúhelníčky trošku přeházeli* (kreslí 2. obr – dole)*, tak si můžeme dát tady dva vedle sebe a tady dva vedle sebe. Dokreslíme čtvercovou síť. A vlastně víme, že ta strana je jedna jednotka* (píše 1) *a tady to jsou dvě jednotky* (píše 2). *Takže dva krát dva jsou čtyři a jeden krát jedna je jedna. To znamená jedna plus čtyři je pět.“* 	- převzaté od Tamary? - manipulace - *videonahrávka*
19 *„Takže je to všem už jasný?“*	**a)** Jirka se hlásí: *„ … (???) tudyto si dáme k tomu … tohleto nám dá čtvereček, tohle nám dá druhej, tohle třetí a tohle čtvrtej. Tady máme jeden celej* (ukazuje doprostřed). *Takže to nám dá čtyři a ještě ten jeden a to je pět.“* 	Inspirace – Tamara, Zdenka
20 *„Ještě něco dalšího, Pavle?“*	**a)** Pavel se hlásí: *„Já to mám podobně jako Jirka. … No, to, co říkal Jirka. … Takhle ty … No, to je to Petrovo.“*	- chce ukázat, že se problémem také zabýval
21 *„Tak, má ještě někdo nějaký nápad?“* (nikdo se nehlásí) *„Tak víte co, zkusíme si to teda zapsat nějak do tabulky, abychom z toho mohli třeba něco vysledovat, jo?“*	**a)** – X (asi Pavel): „Jo.“	

<table>
<tr>
<td>22 <u>Úloha 4a)</u>: „Udělejme si takovouhle tabulku. V prvním sloupci budeme mít šipky doprava, ve druhém šipky nahoru, bod B a sem si budeme psát příslušné obsahy.“

Na tabuli:
<table><tr><td>A →</td><td>↑ B</td><td>S</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>
„Tak a zkuste určit obsah pro 0 – 1, tzn., že půjdeme o 0 doprava a o 1 nahoru.“</td>
<td>a) Pavel (odpoví ihned): „Jedna.“</td>
<td></td>
</tr>
</table>

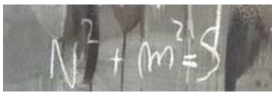
<table>
<tr>
<td>23 „Tak. A když budeme mít tady 1 a tady 1?“</td>
<td>a) XX (odpoví ihned najednou): „Jedna.“ (Patrik)
b) X (vzápětí): „Dva.“
c) XX (žáci se dohadují mezi sebou – 2s): „Jedna - dva.“(převládá „Dva.“) (Patrik)
- uč.: „Tak kolik?“
d) XX (opraví se): „Dva.“ (Patrik)
- uč.: „A proč?“
e) Pavel: „Protože jedna a jedna je dva.“
- uč.: „Jak? Jedna plus jedna?“
f) Petr (vykřikne): „Jedna to je.“
g) XX (dohadují se mezi sebou): „(??? – 5s).“ – není rozumět
h) Vendula: „Je to dva.“
- uč.: „Tak kolik teda dva nebo jedna?“
i) XX (křičí): „Dva.“
- uč.: „A proč?“
j) Vendula: „Protože když to nakreslíme, tak to vyjde.“
- uč.: „(??? – 3s).“ – není rozumět

Na tabuli:
<table><tr><td>A→</td><td>↑B</td><td>S</td></tr><tr><td>0
1</td><td>1
1</td><td>1
2</td></tr></table></td>
<td>- odvolává se na řešení dřív</td>
</tr>
<tr>
<td>24 „Tak a co když budeme postupovat takhle dál? Tady budou samé jedničky a tady nám to bude vzrůstat? Zkuste doplnit takovou tabulku. (3s) Tak jak to bude dál?“</td>
<td>a) XX (reagují ihned najednou): „Dva, tři čtyři, pět, šest , sedm.“ (sborově)
b) Vendula (zároveň vykřikne důrazně): „Pět! … Pět! … To už jsme taky dělali“
- uč.: „Hm. Tak dál? … Když budeme mít 3 – 1?“
c) Blanka, Marek: „Sedm.“
X: „Dvanáct.“
- uč.: „Tak někdo říká 7 a někdo 12. … (3s)… Jak jste přišli na tu sedmičku?“
d) Blanka: „Tak když si to nakreslíme … (kreslí na tabuli) …tak tady máme ten bod A a tady máme bod B. No, protože tady jsou ty tři … takže vlastně je to tři plus tři.“
- uč.: „Proč tři plus tři?“
- Blanka: mlčí</td>
<td>- náhodně pracuje s čísly???</td>
</tr>
</table>

25 *„Marku, pomož Blance, když jsi říkal taky sedm.“*	**a)** Marek: nesleduje **b)** Pavel: *„Můžu jí pomoct?“* - uč.: *„Tak jí pojď pomoct. Ty si taky myslíš, že je to sedm?“* **c)** Tamara: *„Je to deset, paní učitelko!“* XX: *„Je to deset.“* **d)** Pavel: *„Není. … No, takže vlastně tadyhle máme takovej trojúhelník. A těch je … Tady, tady a tady. A těch jsou dohromady čtyři a obsahujou tři… A potom… Tak je to raz, dva, tři … A tady nám vznikne další trojúhelník* (vyznačuje 2. trojúhelník)*, tady další a tady další. A potom přičteme ještě ty veprostřed.“* - uč.: *„A jak tedy vypočítáme obsahy těch trojúhelníků?“* **e)** Pavel: *„No, že si je dáme dohromady. Tady ty dva trojúhelníky dáme dohromady.“* - uč.: *„A to je kolik teda?“* **f)** Pavel: *„Takže tady to jsou tři a tady to jsou taky tři. Tři a tři je šest a čtyři je deset.“* 	- hlásí se ke slovu, i když nesouhlasí se 7
26 *„Tak a někdo navrhoval ještě tu sedmičku a dvanáctku…? “*	- nikdo se k řešení nehlásí **a)** Tamara (špatně slyšet – není přesvědčená o svém řešení): *„Dva, jedna, tři, … Dva plus tři je pět.“* - uč.: *„Kde je dva plus tři?“* - Tamara: *„Ale to je jedno…“* (nechce vysvětlovat)	- převzali Pavlovo řešení za vlastní

27	**a)** Pavel (s radostí vykřikne): *„Štěpán tady, paní učitelko, něco vymyslel!“* - uč.: *„Dobře. Tak na co jsi přišel, Štěpáne? … Pojď k tabuli.“* **b)** Štěpán: *„Tady to vždycky vychází … Tudyto číslo vlevo na druhou plus tohlensto a tak mi vždycky vyjde tohle.“* - uč.: *„Jo a jakto že to tak vychází?“* **c)** Štěpán: *„No, protože dva krát dva je čtyři plus tohle je pět. Tři krát tři je devět plus tohlensto je deset. Jedna krát jedna plus tohle je dva.“* **d)** X (asi Tamara): *„To je chytrý, paní učitelko!“*	- objev (ještě ne úplně správný)
28 *„Hm. Tak nám to zkus zapsat ještě obecně, jak bychom to tu měli v nějakém n plus prvním kroku…. Tak pro n zkus, jak by to vypadalo.“*	**a)** Štěpán: *„No, n na druhou… “* **b)** Vendula: *„Ale v tom dalším to nevyjde.“* **c)** Pavel (přesvědčivě): *„Vyjde!“* - uč.: *„Pro další to nevyjde?“* **d)** X: *„Vyjde!“* - uč.: *„Tak vyjde to nebo to nevyjde? Zkuste to!“* **e)** XX: *„Vyjde!“*/ *„Nevyjde!“* (uč. nechá žáky samostatně řešit)	- obecný tvar - bez problému

<table>
<tr>
<td>29 - k Štěpánovi: „Tak. A jak to teda bude vypadat?“</td>
<td>
a) Štěpán: „No, n na druhou plus jedna.“
- uč.: „Tak to tu napiš.“

Na tabuli:
<table>
<tr><td>$A \rightarrow$</td><td>$\uparrow B$</td><td>S</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>10</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>…</td><td></td></tr>
<tr><td>n^2</td><td>1</td><td>$n^2 + 1$</td></tr>
</table>
b) Marek: „Paní učitelko!“
c) Pavel: „Štěpáne! Se rovná S!“ (napovídá)
- uč.: „No, hezký! Co na to říkáte?“
d) Marek (jde k tabuli a píše): „N na druhou plus třeba m na druhou. Jedna na druhou je jedna, takže prostě že i to m je na druhou, protože to je vždycky jednička. Jednička na druhou je jednička.“
e) Pavel: „A to je rovno S.“ (snaží se prosadit svoji myšlenku)

Na tabuli:
$N^2 + m^2 = S$
</td>
<td>– chce rovnost $n^2 + 1 = S$

- objev !!! (intuitivně by mohlo platit – pouze algebraický význam)</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>30 „A když tady máme teda n na druhou plus m na druhou, tak co s tím jako? … K čemu nám to je?“

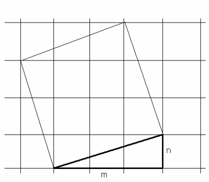
„Tak co vy na to všichni? Máme tu jeden nápad $n^2 + 1$ a druhý nám tu napsal Marek $N^2 + m^2 = S$. Co vy na to?“</td>
<td>
a) Pavel: „No, je to oboje stejný.“
b) Vendula (není slyšet, proto vyvolána k tabuli): „No kdyby tady byla pětka a tady jednička, tak to vyjde sedmnáct. No a pět krát pět je dvacet pět plus jedna je dvacet šest. Tak to nevychází.“
- uč.: „Tak nám teda zkus nakreslit ten obrázek.“
c) Petr: - není rozumět, říká něco v tom smyslu, že to nevychází
d) Pavel: „Podle mě taky, protože to s tou jedničkou vždycky nevychází.“
e) Štěpán: „Podle mě je to to samý.“
f) Pavel: „Ale Marek říkal … nebo … Když tam budou (???).“
DISKUZE – Pavel, Petr, Štěpán (není rozumět – 20 s)
g) Pavel uzavře diskuzi: „Marek zlepšil to Štěpánovo.“
- uč.: „Marek zlepšil Štěpánovo?“
h) Pavel: „No. V podstatě jo.“
i) Tamara (vykřikne zezadu): „Upřesnil!“
j) Pavel: „No, upřesnil.“ (opakuje)
(XX – není rozumět)
(20s) – Vendula – pracuje u tabule (obrázek 5 – 1)
k) Pavel: „Můžu jí s tím jít pomoct?“
- uč.: „Tak pojď.“
(1 min 8s) – Vendula a Pavel – pracují u tabule (obrázek 5 – 1)
- uč.: „Takže kolik to vyjde?“
l) Pavel: „Čtyři krát čtyři a deset. Dvacet šest.“
m) Vendula: „Já jsem si to blbě nakreslila.“
n) X: „Kolik to vyšlo, Pavle?“
o) Pavel: „Dvacet šest.“

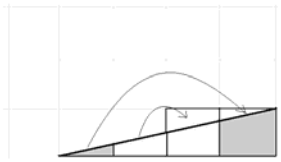
</td>
<td>- Pavel vnímá okolí, reaguje na Petra

- Pavel – typ žáka, který sám vymýšlí, ale i rád přebírá objevy jiných

- chce být zapojen do činnosti</td>
</tr>
</table>

31	**a)** Marek: *„Máme dělat dál?“*	
32	**a)** Petr: *„Tak kdybychom měli čtverec* (kreslí na tabuli) *… a kdyby to bylo 2 – 2. Tak by to vyšlo … Tohleto je čtyři krát čtyři* (ukazuje na čtverec 4x4) *… tyhlety trojúhelníčky - to je vlastně polovina toho celýho obsahu. Podle toho Štěpánova by to bylo 2^2 + 2, to je šest a to nevychází. A podle toho Markova by to bylo $2^2 + 2^2$, a to se rovná osm.“*  - uč.: *„Tak Štěpáne, jak to tedy bude?“* **b)** Štěpán: *„No u těch jedniček…“* **c)** žáci diskutují mezi sebou (nezřetelné)	- Petr – pouští se dál (na příkladu ukazuje, co je správně - chce ukázat, že druhý vztah je správně)

33	**a)** Tamara: *„Je to vlastně na principu Pythagorovy věty, protože tam máme i ten trojúhelník* (smích) *Fakt! … Tady máme takhle ten trojúhelník. A tady je ten největší čtverec…“* **b)** Pavel: *„To jsem říkal já.“* (brání se) **c)** Tamara: *„Aha, já jsem neposlouchala.“* - uč.: *„Víš co, nakresli nám to znovu, ať se v tom vyznáme.“*  Na tabuli naznačila i čtverce nad odvěsnami. **d)** Pavel: *„Takhle to sice není, ale…“* - uč.: *„Není, Pavle? … Tak půjdeš hned po Tamaře k tabuli, jo?“* **e)** Tamara: *„Tohle je to m, tohle je to n. No a vlastně … má pravdu Marek, protože když jako … protože tak nám vyjde to to.“* **f)** Pavel: *„Podle tý Pythagorovy věty to jde, no.“* (zklamaně) **g)** Tamara: *„No, podle tý Pythagorovy věty, že když sečteme tyhle dva menší obsahy, tak nám vyjde ten velký.“* - uč.: *„Hm. Tak nám to zkus ještě hezky zapsat. … Nějakou rovnost tam třeba zkus…“* - Píše bez problému na tabuli: Na tabuli: m = 3 n = 2 $m^2 + n^2 = S$ $3^2 + 2^2 = S$ 9 + 4 = S 13 = S **h)** Pavel: *„No…“* - uč.: *„Tak a co nám Tamara vypočítala?“* **i)** Tamara: *„Obsah toho největšího čtverce.“*	- *videonahrávka* - objev - myslí čtverec nad přeponou trojúhelníka - neříkal (je mu líto, že na to nepřišel on) - jistá forma zobecnění (i přes to, že se jedná o 3 – 1, píše m – n) - objev - potřeba konkrétních hodnot

34 *„Pěkný! Máte k tomu někdo nějakou připomínku?“*	**a)** Pavel: *„Já.“* - uč.: *„A jakou máš připomínku?“* **b)** Pavel: *„Ale ne k tomu. Já k tomu… Jak Petr říkal, že u tý osmičky a čtyřky, že ty prostřední celý čtverečky vlastně jsou polovinou toho celýho obsahu, tak to není pravda.“* - uč.: *„On neříkal polovinou celýho, on říkal polovinou tý čtvrtiny obsahu.“*	- chce něčím zaujmout (konkuruje Petrovi) (měl to v hlavě – využil toho teď) - nemám pravdu
35 *„Tak a Věra přišla taky na hezkou věc.“*	**a)** Věra: *„No já prostě když jsem (??) ….* (kreslí)*.“* - uč.: *„Tak máme čtverec 4 – 1.“* **b)** Věra: *„(???) … leze to vždycky o liché číslo – tady (ukazuje na tabulku) o 1, tady je to o 3, tady o 5, tady o 7, a potom když bych pokračovala, bylo by to o 9.“* - uč.: *„Tak. Vyšlo to tak všem?“* **c)** Pavel: *„To je dobrý.“* - uč.: *„Myslíte, že to takhle bude platit i obecně?“* **d)** X: *„Ne.“* - uč.: *„Víte co, zkuste si doma doplnit tu tabulku třeba tady s dvojkama, s trojkama a se čtyřkama a zkuste hledat takový různý závislosti …. A potom zkuste i, když tu budeme mít jenom n.“* Věra – z poznámek: výpočet obsahu čtverce 	- a dál - funguje? - překvapen, co vše lze vymyslet

Příloha 5

1. fáze otevřeného kódování – Označování jevů

Poznámka: Kódovací systém (spolu s odkazy na výpovědi žáků) vytvořen na základě tabulky zpracování Pythagorovy věty – metody postupného uvolňování konstant

Od-kaz	*Pojem*	*Charakteristika*
1a	Zavedení/ konstrukce vlastní symboliky	- žák si konstruuje/zavádí vlastní symboliku
	Akceptování symboliky	- učitel i žáci symboliku přijali/nepřijali (zde přijali) - *pracovní poznámka*: Je nutné sledovat, zda to je ovlivněno učitelem.
1b	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	- využití zkušeností a poznatků z jiné matematické oblasti (zde z planimetrie) - *dimenze*: spontánní/nespontánní přenos z jedné matematické oblasti do jiné (žákyně sama navrhla, využívá svých zkušeností v jiném kontextu (zde spontánně)
	Chyba žáka	- chyba z nepozornosti (viz 1 cm)
	Nepřesné řešení	- konstrukce není jednoznačně určena
1c	Konstrukce symboliky	- pokračování v symbolice - *dimenze*: individuální/společná konstrukce poznatků
	Společná konstrukce poznatků	
1d	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	- viz 1b - zde zavedení soustavy souřadnic
2		- bez zdůvodnění
3a, b, c	Konstrukce symboliky	- viz 1c
	Společná konstrukce poznatků	- viz 1c - žáci využívají předchozích poznatků jiných žáků (procvičování)

3d	Konstrukce symboliky	- viz 1c
	Společná konstrukce poznatků	- viz 1c - žák využívá předchozích poznatků jiných žáků, navíc ale zefektivňuje řešení (*dimenze*) = převezme, ale i zefektivní (posune to dál)
	Zefektivnění práce	- *dimenze*: stupeň efektivity práce
4a		- bez zdůvodnění
4b	Intuitivní řešení	- řešení úlohy na základě intuice - žákyně využívá intuici při řešení úlohy, aniž by se o správnosti řešení přesvědčila
5	Řízená konstrukce poznatků ???	- žáci se řídí pokyny učitele (zde otázkou)
	Vliv učitele	- *dimenze*: negativní/pozitivní vliv učitele (zde negativní ve smyslu vlastního objevování) - *pracovní poznámka*: V této fázi experimentu jsem chtěla urychlit práci žáků (není hlavním předmětem objevování žáků)
5a	Verifikace	- obrázkem/odkazem na symboliku (zde podá vysvětlení obrázkem)
	Zjednávání vhledu do situace	- žák si nakreslí obrázek (náčrtek), pomocí kterého je schopen řešit úlohu
5b	Využití svého objevu	- Odkaz na symboliku - žák využívá svého objevu (zavedení symboliky pomocí šipek)
5c	Společná konstrukce poznatků	- viz 1c - žákyně projevila lepší analýzu úlohy, využila nedostatečného zadání úlohy
	Chyba učitele	- zadat úlohu přesněji - pochválit za správné řešení žákyně
6a	Řízená konstrukce poznatků ???	- viz 5 - zde výzva učitele - *dimenze*: výzva nepomohla (nepřijata)/pomohla (přijata) – zde přijata
7a	Řízená konstrukce poznatků ???	- viz 5 - zde otázka
	Zefektivnění	- žák zde využívá svých poznatků ze začátku řešení této úlohy (viz 3d) a zefektivňuje je
8a	Preferování/ využití svého řešení	- viz 5b - žák preferuje svoje řešení (viz 1d→8) - otázka individuality - osobnosti žáka - *dimenze* – s možností volby/bez možnosti volby (zde s možností volby) – žákyně preferuje polohové

		řešení úlohy (ne „nepolohové“), i když byly objeveny jiné způsoby řešení úlohy
8 b, c	Volba efektivnějšího způsobu řešení (z hlediska žáka)	- viz 3d - žáci zamítají konstrukční řešení (viz 8a) navrhují efektivnější způsob řešení - volba složitějšího způsobu řešení za cenu přesného popisu řešení úlohy - žákyně uznává námitku ostatních žáků (viz 8b), nicméně upozorňuje na (pro ni) „nepřesnost“ řešení
	Uznání námitky (soc.)	
8c	Argumentace	- žákyně argumentuje
9a-j	Variabilita způsobu řešení úloh	- žáci uvádí různé způsoby řešení konstrukčních úloh - projev nadaných žáků
9a	Procesuální řešení (řešení pohybem)	- řešení úlohy pomocí pohybu - *dimenze* – s odkazem na geometrickou transformaci/bez odkazu – (zde bez odkazu)
	Absence vysvětlení	- žák nevysvětluje - žák má zřejmě geometrické vidění („vidí“ to)
	Propedeutika určitého učiva	- úloha propedeuticky připravuje žáka na nové učivo (zde propedeutika rotace), popř. propedeuticky připravuje na nový kontext (zde: shodnost trojúhelníků) - *fenomén 2. typu* (z hlediska učitele/matematiky samé – zde z hlediska matematiky samé)
	Nový kontext	
	Využití čtvercové sítě	- žák využívá ke svému řešení čtvercovou síť - *dimenze* – zcela/částečně/vůbec (zde: zcela)
9b	Procesuální řešení	- viz 9a - řešení úlohy pomocí pohybu - žákyně využívá při řešení úlohy pohyb - proces, popř. určité rytmizace - periodicity (dvakrát nahoru a jednou doleva, dvakrát doleva a jednou dolů, …) - *dimenze* – s odkazem na geometrickou transformaci/bez odkazu – (zde s odkazem)
	Zobecnění	- na základě rytmizace je žákyně schopna zobecnit řešení
	Využití čtvercové sítě	- viz 9a - žákyně využívá ke svému řešení čtvercovou síť - *dimenze* – zcela/částečně/vůbec (zde: zcela)
9c	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	- viz 1b - využití zkušeností a poznatků z jiné matematické oblasti (zde z planimetrie – konstrukční úlohy) - *dimenze*: zde spontánní
	Využití čtvercové sítě	- viz 9a - žák využívá ke svému řešení čtvercovou síť - *dimenze* – zcela/částečně/vůbec (zde: částečně)

9d	Společná konstrukce poznatků	- viz 1c - žák využívá předchozích poznatků jiných žáků a řešení úlohy vysvětluje jiným způsobem - jedná se o druhý způsob řešení konstrukční úlohy (kolmice) - viz 9c
	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	- viz 1b - využití zkušeností a poznatků z jiné matematické oblasti (zde z planimetrie – konstrukční úlohy) - *dimenze*: zde nespontánní (zřejmě využívá řešení viz 9c)
	Využití čtvercové sítě	- viz 9a - žák využívá ke svému řešení čtvercovou síť - *dimenze* – zcela/částečně/vůbec (zde: vůbec)
9e	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	- viz 1b - využití zkušeností a poznatků z jiné matematické oblasti (zde z planimetrie – konstrukční úlohy, shodnosti) - průsvitky jsme využívali v loňském roce (učivo Osová souměrnost) – žákyně si práci s průsvitkou vybavila - *dimenze*: zde nespontánní (zřejmě využívá řešení viz 9c)
	Konstrukce poznatků	- spontánní využití zkušeností, poznatků ze shodných zobrazení (symetrie – modelování, využívání průsvitného papíru) - *dimenze* – společná/ individuální/ řízená – zde: indiv. (??) konstrukce poznatku ve smyslu zavedení pojmu rotace (žákyně využívá rotace, aniž bychom toto zobrazení kdykoli ve výuce zmínili (zkonstruovala si pojem rotace kolem středu čtverce)) - na základě znalosti práce s průsvitkou, když jsme jen průsvitku překládali, ona vytvořila otočení
	Modelování	- zde: modelování, využívání průsvitného papíru
	Využití čtvercové sítě	- viz 9a - žák využívá ke svému řešení čtvercovou síť - *dimenze* – zcela/částečně/vůbec (zde: částečně) (čtverečkované sítě využívá pouze ke konstrukci středu úsečky)
9f	Společná konstrukce poznatků	- viz 1c - žákyně využívá zřejmě předchozích poznatků jiných žáků a řešení úlohy vysvětluje jiným způsobem - jde pouze o přístup bez využití čtverečkovaného papíru a využití konstrukčních postupů

	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	- viz 1b - využití zkušeností a poznatků z jiné matematické oblasti (zde z planimetrie – konstrukční úlohy) - *dimenze*: zde nespontánní (viz 9c)
	Využití čtvercové sítě	- viz 9a - žák využívá ke svému řešení čtvercovou síť - *dimenze* – zcela/částečně/vůbec (zde: vůbec)
	Konceptuální řešení	- žák má čtverec v hlavě (vidí vlastnosti: 45°)
9g	Sociální složka	- žákyně chce něčím přispět (vidí, že ostatní žáci mají mnoho nápadů) – zopakuje řešení viz 9c - žákyně využívá předchozích poznatků jiných žáků - obdobné řešení viz 9c
9h	Společná konstrukce poznatků	- viz 1c - žákyně využívá předchozích poznatků jiných žáků a řešení úlohy vysvětluje jiným způsobem
	Kombinace přesného řešení s nepřesným	- měří délku strany, aby mohla použít Pythagorovu větu - Pythagorovu větu v tom nevidí (čtverečkovaný papír jí není pomocníkem)
	Konceptuální řešení	- žákyně má čtverec v hlavě
	Využití čtvercové sítě	- viz 9a - žák využívá ke svému řešení čtvercovou síť - *dimenze* – zcela/částečně/vůbec (zde: vůbec)
	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	- viz 1b - využití zkušeností a poznatků z jiné matematické oblasti (zde Pythagorova věta a planimetrie – konstrukční úlohy) - *dimenze*: zde spontánní (Pythagorova věta) i zřejmě nespontánní (viz 9c – konstrukční úlohy)
	Využití výpočtu při řešení konstrukční úlohy	- žákyně využívá výpočtu při řešení konstrukční úlohy
9i	Společná konstrukce poznatků	- viz 1c - žák využívá předchozích poznatků jiných žáků a řešení úlohy vysvětluje jiným způsobem
	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	- viz 1b - využití zkušeností a poznatků z jiné matematické oblasti (zde z planimetrie – konstrukční úlohy) - *dimenze*: zde nespontánní (viz 9c), z oblasti osy úhlu spontánní
	Pojem - pojmenování	- pojmenování osy úhlu - žákyně využívá nový pojem

9j	Společná konstrukce poznatků	- viz 1c - žák využívá předchozích poznatků jiných žáků a řešení úlohy vysvětluje jiným způsobem
	Využití matematických poznatků a zkušeností (v jedné matematické oblasti)	- žák zde využívá svých poznatků ze začátku řešení této úlohy (viz 3d, 7) – využívá způsobu zavedení symboliky
	Zobecnění	- žák úlohu zobecňuje o řád vyšší (pro čtverec 3 – 3) - *dimenze* – spontánní/nespontánní (zde spontánní)
10	Řízená konstrukce poznatků ??? Chyba učitele	- viz 5 - zde otázka (nebylo žákům jasné), návodný obrázek na tabuli pomohl - *pracovní poznámka*: Poprvé ve vyučování zazněla otázka po obecném předpisu (není divu, že žák takto zareagoval) – na základě jeho „velkorysého“ chování jsem předpokládala, že je mu konkrétní úloha jasná, proto jsem položila tuto otázku - učitel neodhadl žákovy schopnosti
	Zobecnění	- žák je schopen zobecnit své řešení (pro čtverec m – n)
11	Připomenutí	(na začátku vyučovací hodiny) - viz 5 - zde návodný obrázek na tabuli
	Zobecnění	- žák opakuje své zobecnění z konce minulé hodiny (pro čtverec m – n) - zobecnění na základě jednoho konkrétního (separovaného) modelu - první část zápisu (A, $m \rightarrow$, $n\uparrow$) určil žák z obrázku, ostatní už odvodil bez pomoci obrázku
12	Řízená konstrukce poznatků ???	- viz 5 - zde otázka
	Vidění vzoru	- vidění periodicity - žákyně vidí, že se šipky pravidelně střídají
13	Řízená konstrukce poznatků ???	- viz 5 - zde úloha
	Řešení jednoduché úlohy	- úkolem je vypočítat obsah čtverce se stranou délky 2 jednotky (bez problému) - smyslem bylo předložení určité posloupnosti obsahů čtverců
14 a-g	Variabilita způsobu řešení úloh	- viz 9a-j - žáci uvádí různé způsoby výpočtu obsahu čtverce

14a	Představa pohybu	- žák modeluje danou reálnou situaci v mysli, zde dále pak vychází ze základních poznatků (obsah čtverce 1x1)
14b	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	- viz 1b - využití zkušeností a poznatků z jiné matematické oblasti (zde Pythagorova věta, stereometrie – výpočet obsahu čtverce) - *dimenze*: zde spontánní (Pythagorova věta)
	Využití čtvercové sítě	- viz 9a - žák využívá ke svému řešení čtvercovou síť - *dimenze* – zcela/částečně/vůbec (zde: částečně)
14c	Konstrukce poznatků	- viz 1c - žák využívá předchozích poznatků jiných žáků a řešení úlohy vysvětluje jiným způsobem - žák se inspiruje způsobem řešení viz 14a ??? - *dimenze* – individuální/společná (zde zřejmě společná) – inspirace žákem P. – viz video
	Metoda rozkrájení útvaru	- podkategorie kategorie: variabilita řešení
	Využití čtvercové sítě	- viz 9a - žák využívá ke svému řešení čtvercovou síť - *dimenze* – zcela/částečně/vůbec (zde: zcela)
	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	- viz 1b - využití zkušeností a poznatků z jiné matematické oblasti (zde ze stereometrie - výpočet obsahu trojúhelníku, násobení dvou zlomků) - *dimenze*: zde nespontánní (viz 14a)
14d	Konstrukce poznatků	- viz 1c - žák využívá předchozích poznatků jiných žáků a řešení úlohy vysvětluje jiným způsobem - žák se inspiruje způsobem řešení viz 14a, c - *dimenze* – spíše individuální
	Metoda doplňování útvaru	- podkategorie kategorie: variabilita řešení - zbývající dílky počítá vzorečkem
	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	- viz 1b - využití zkušeností a poznatků z jiné matematické oblasti (zde ze stereometrie - výpočet obsahu čtverce)
	Označování	- žákyně má potřebu (na rozdíl od kluků) to přesně matematicky uchopit (označení strany *e*, …)
14e	Konstrukce poznatků	- viz 1c - žákyně se inspiruje způsobem řešení viz 14c a volí jiný trojúhelník (rovnoramenný), pomocí kterého vypočítá obsah čtverce – tj. vysvětluje jiným způsobem řešení úlohy - *dimenze* – spíše individuální

	Metoda rozkrájení útvaru	- viz 14c - jinak než v 14c – na vyšší úrovni (žákyně vidí útvar, který tam není nakreslený)
	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	- viz 1b - využití zkušeností a poznatků z jiné matematické oblasti (zde ze stereometrie - výpočet obsahu trojúhelníku) - *dimenze*: zde nespontánní (viz 14a, c, d)
14f		- nevysvětleno, bez zdůvodnění
14g	Žák si vzal sám slovo	
	Inspirace	- v nástinu řešení jiného žáka vidí své řešení - žák se inspiruje řešením jiného žáka a jiným způsobem zde vysvětluje své původní řešení (viz 14a)
	Preferování/ využití svého způsobu řešení	- viz 5b - žák preferuje svoje řešení (viz 14a→14g) - otázka individuality - osobnosti žáka
15a	Řízená konstrukce poznatků ???	- viz 5 - zde úloha
	Žák neví	- žák neumí úlohu vyřešit
16a	Preferování/ využití svého způsobu řešení	- viz 5b - žákyně využívá/preferuje svoje řešení - otázka individuality - osobnosti žáka
	Využití matematických poznatků a zkušeností (v jedné matematické oblasti)	- využití svého způsobu řešení úlohy (viz 14d) - žák zde využívá svých poznatků ze začátku řešení této úlohy
	Metoda doplňování útvaru	
	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	- viz 1b - využití zkušeností a poznatků z jiné matematické oblasti (zde procenta – část celku) - *dimenze*: zde spontánní
	Modelování?	
16b	Využití matematických poznatků a zkušeností (v jedné matematické oblasti)	- využití svého způsobu řešení úlohy (viz 14d) - žák zde využívá svých poznatků ze začátku řešení této úlohy
16c		-

16d	Zmatek	- žákyně vysvětluje postup svého řešení - úloha je zřejmě příliš komplexní na to, aby její řešení udržela v hlavě
17a	Individuální konstrukce poznatku	- viz 1c
	Představa pohybu	- využití pohybu při řešení úlohy
18 a, c	Procesuální řešení	- viz 9a - řešení úlohy pomocí pohybu - žák modeluje, manipuluje s rovinnými útvary - *dimenze* – s odkazem na geometrickou transformaci/bez odkazu – (zde bez odkazu)
	Konzervace útvaru	- žák uchopí útvar, přenese ho, útvar nezmění vlastnosti
	Metoda doplňování útvaru	- viz 14d - žák tuto metodu povyšuje na vyšší úroveň (ukazuje, jak manipulovat se zbytkem)
	Využití čtvercové sítě	- viz 9a - žák využívá ke svému řešení čtvercovou síť - *dimenze* – zcela/částečně/vůbec (zde: zcela)
	Individuální konstrukce poznatku	- viz 1c
	Verifikace	- viz 5a - obrázkem podá vysvětlení - důkaz svého tvrzení
18b	Zaujetí žáků	- žáky řešení úlohy zaujalo, soustředí se, aby řešení pochopili
19a	Procesuální řešení	- viz 14a - řešení úlohy pomocí pohybu - žák modeluje danou reálnou situaci v mysli, zde dále pak vychází ze základních poznatků (obsah čtverce 1x1)
	Konstrukce poznatků	- viz 1c - žák využívá předchozích poznatků jiných žáků a řešení úlohy vysvětluje jiným způsobem - žák se inspiruje způsobem řešení viz 14a - *dimenze* – spíše společná (viz dále) - vliv ostatních – vymýšlí své druhé řešení (opouští své řešení a inspiruje se ostatními), inspiruje se, ale vidí v tom něco nového – více krájí (vidí v tom zřejmě symetrie)
	Metoda rozkrájení útvaru	
20a	Upozornění na sebe	- sociální vliv – potřeba uznání - žák se pouze snaží upoutat učitele – chce ukázat, že se problémem také zabýval
21	Řízená konstrukce	- viz 5

	poznatků ???	- zde výzva učitele
22	Řízená konstrukce poznatků ????	- viz 5 - zde úloha
22a		- bez vysvětlení (jde jen o zaznamenávání získaných správných výsledků do tabulky – nejde o objevování)
23	Řízená konstrukce poznatků	- viz 5 - zde úloha
23 a-j		- bez vysvětlení (jde jen o zaznamenávání získaných výsledků do tabulky – nejde o objevování)
24	Řízená konstrukce poznatků ???	- viz 5 - zde úloha
24 a-d		- bez vysvětlení (jde jen o zaznamenávání získaných výsledků do tabulky – nejde o objevování)
25	Řízená konstrukce poznatků ????	- viz 5 - zde prosba učitele o pomoc spolužačce
25 a-c		- bez vysvětlení (jde jen o zaznamenávání získaných výsledků do tabulky – nejde o objevování)
25d	Společná konstrukce poznatků	- viz 1c - žák využívá předchozích poznatků jiných žáků a řešení úlohy vysvětluje jiným způsobem - žák se inspiruje způsobem řešení viz 14d, 16a
	Metoda rozkrájení útvaru	- viz 14c - podkategorie kategorie: variabilita řešení - sám rozřeže a dobře ukazuje, které jdou dohromady
	Řízená konstrukce poznatků ????	- viz 5 - zde otázka
25 e, f	Představa pohybu	- viz 14a - řešení úlohy pomocí mentálního modelování - žák modeluje danou reálnou situaci v mysli, zde dále pak vychází ze základních poznatků (obsah čtverce 1x1)
	Aplikace dříve vytvořené strategie	- buď úspěšně převzal nebo paralelně zkonstruoval
26		- bez vysvětlení
27a	Radost z úspěchu spolužáka	- žák upozorňuje učitele na řešení svého spolužáka
27b	Zobecnění	- žák je schopen vyjádřit obecný vztah z tabulky slovy
27c	Vysvětlení svého řešení	- žák ukazuje na konkrétních příkladech, že vztah platí
27d	Radost z úspěchu spolužáka	- žákyně chválí objev svého spolužáka

28	Řízená konstrukce poznatků ???	- viz 5 - zde výzva učitele
28a	Zobecnění	- viz 27b - žák je schopen vyjádřit obecný vztah z tabulky pomocí matematických symbolů $n^2 + 1$
28b	Nesouhlas	- žákyně nesouhlasí s prezentovaným řešením
28 c-e	Diskuze	- diskuze bez zdůvodňování (vyjde – nevyjde)
29	Řízená konstrukce poznatků ???	- viz 5 - zde výzva učitele
29a	Zobecnění	- viz 27b, 28a - žák je schopen vyjádřit obecný vztah z tabulky pomocí matematických symbolů $n^2 + 1$
	Chyba zápisu	- *dimenze* – formální/neformální (zde formální) - *dimenze* – řešení ostatních to ovlivnilo/neovlivnilo (zde neovlivnilo) - v tabulce je n místo n^2
29b		- pouze oslovení učitele
29c	Nápověda žáka	- žák v lavici dokončuje řešení žáka u tabule $n^2 + 1 = S$
29d	Individuální konstrukce poznatku	- viz 1c - učitel žáka neřídí, žák provádí zobecnění vyššího řádu
	Zobecnění	- nesprávný zápis v tabulce (n místo n^2) ho nemate
		- žák je schopen zobecnit vztah o řád vyšší
	Společná konstrukce poznatků	- viz 1c - žák využívá předchozích poznatků jiných žáků a řešení dovede do konce - žák se inspiruje způsobem řešení viz 28a, 29a, c
29e	Nápověda žáka	- žák v lavici opět připomíná (viz 29c), že daný výraz se rovná S
30	Řízená konstrukce poznatků ???	- viz 5 - zde výzva učitele
30a		- bez zdůvodnění
30b	Nesouhlas	- žákyně nesouhlasí s prezentovaným řešením - viz 28b
30 c-j	Diskuze	- diskuze bez zdůvodňování (vyjde – nevyjde)
30 g, i	Převzetí poznatku	- žáci dobře pochopili, že je to zobecnění vyššího řádu - *dimenze* – s porozuměním/bez porozumění (zde s porozuměním)
30 k-o	Nabídka pomoci žáka	- žák pomůže své spolužačce u tabule

30 m	Chyba	- žákyně za pomoci spolužáka objeví chybu, která vznikla z nepřesného náčrtku
31a	Dotaz žáka	- žák se ptá, jestli má pokračovat dál
32a	Vysvětlení platnosti vztahu	- žák ukazuje platnost vztahu na konkrétním příkladu
	Špatné pochopení	- žák vyvrací Š. řešení, jako by toto bylo $n^2 + m$, což Š. netvrdil
32 b, c		- bez vysvětlení
33a	Konstrukce poznatku	- viz 1c - učitel žáka neřídí, on sám dojde k objevu Pythagorovy věty (algebraický i geometrický význam Pythagorovy věty) - *dimenze* – individuální (význam Pythagorovy věty), společná (viz 33e – odkaz na M.)
	Převzetí poznatku	- viz 30g, i - žáci dobře pochopili, že je to zobecnění vyššího řádu - *dimenze* – s porozuměním/bez porozumění (zde s porozuměním) - *pracovní poznámka*: když něco žáci nepochopí, neberou na to ohled a vymyslí si své řešení (charakteristické pro nadané žáky)
	Cíl experimentu splněn	
33b	Emoce	- žákovi je líto, že na to nepřišel on sám
33c	Řízená konstrukce poznatků ???	- viz 5 - zde výzva učitele
	Vysvětlení své myšlenky	- žákyně vysvětluje na základě obrázku svou myšlenku
33d	Emoce	- žák se nechce smířit s tím, že k objevu nedošel on sám
	Nesouhlas s řešením	
33e	Verifikace	- žákyně potvrzuje myšlenku žáka viz 29d
33f	Emoce	- zklamání
33g	Vysvětlení své myšlenky	- žákyně zopakuje svou myšlenku a popisuje vše na tabuli
	Ilustrace vzorce	- na konkrétních číslech ukazuje, jak se vzorec používá
33h	Emoce	- zklamání
33i	Vysvětlení své myšlenky	- žákyně dokončuje své řešení na tabuli

<table>
<tr><td>34</td><td>Volný prostor pro připomínky žáků</td><td>- učitel dává volný prostor pro připomínky žáků</td></tr>
<tr><td rowspan="3">34 a, b</td><td>Emoce</td><td rowspan="2">- zmíněný žák chce něčím zaujmout (konkuruje svému spolužákovi)</td></tr>
<tr><td>Nesouhlas</td></tr>
<tr><td>Chyba učitele</td><td>- připomínku jsem zamítla (z důvodu upozornění žáka na sebe) – jde ale pravděpodobně pouze o původní nepřesné řešení žáka</td></tr>
<tr><td>35 a-d</td><td>Společná konstrukce poznatku</td><td>- „postupné“ krájení</td></tr>
<tr><td>35a</td><td>Popis svého řešení</td><td>- žákyně kreslí obrázek na tabuli</td></tr>
<tr><td>35b</td><td>Objevení vzoru</td><td>- sama objevuje vzor (nezávisle)</td></tr>
<tr><td>35c</td><td>Emoce</td><td>- žák je překvapen, co všechno lze vymyslet</td></tr>
<tr><td>35d</td><td>Zadání domácího úkolu</td><td></td></tr>
</table>

Příloha 6

2. fáze otevřeného kódování – Analytické kategorie

1) Matematické a didaktické kategorie

<table>
<tr><th>Kód</th><th>Kategorie</th><th>Podkategorie</th><th colspan="2">Dimenze</th></tr>
<tr><td rowspan="6"></td><td rowspan="6">Konstrukce poznatků</td><td>Spontánní konstrukce poznatků</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Řízená konstrukce poznatků</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Společná konstrukce poznatků</td><td rowspan="2">zahrnující transmisi
x inspirace</td><td>Převzetí poznatku s porozuměním</td></tr>
<tr><td>Převzetí poznatku bez porozumění</td></tr>
<tr><td>Individuální konstrukce poznatků</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Zavedení/ konstrukce vlastní symboliky</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">Projev nadaných žáků</td><td rowspan="2">Preferování/ využití svého řešení/objevu</td><td colspan="2">s možností volby</td></tr>
<tr><td colspan="2">bez možnosti volby</td></tr>
<tr><td>otázka individuality (osobnosti) žáka</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Variabilita způsobu řešení úloh</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="5"></td><td rowspan="5">Způsob řešení žáků</td><td rowspan="2">Procesuální řešení (řešení pohybem)</td><td colspan="2">s odkazem na geometrickou transformaci</td></tr>
<tr><td colspan="2">bez odkazu na geometrickou transformaci</td></tr>
<tr><td>Představa pohybu</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Intuitivní řešení</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Využití čtvercové sítě</td><td colspan="2">zcela</td></tr>
</table>

			částečně
			vůbec
		Modelování	
		Konceptuální řešení (představa v mysli)	
		Kombinace přesného řešení s nepřesným	
		Využití výpočtu při řešení konstrukční úlohy	
		Metoda rozkrájení útvaru	
		Metoda doplňování útvaru	
		Metoda „postupného“ krájení	
		Konzervace útvaru	
		Vidění/objevení vzoru	závisle
			nezávisle
		Aplikace dříve vytvořené strategie	
	Transfer zkušeností a poznatků	Transfer z jedné matematické oblasti do jiné	spontánní přenos z jedné matematické oblasti do jiné
			nespontánní přenos z jedné matematické oblasti do jiné
		Využití matematických poznatků a zkušeností (v jedné matematické oblasti)	
	Chyba žáka	Formální chyba (z nepozornosti, …)	řešení ostatních to ovlivnilo
			řešení ostatních to neovlivnilo
		Neformální chyba	řešení ostatních to ovlivnilo
			řešení ostatních to neovlivnilo
	Efektivita	Zefektivnění práce	stupeň efektivity práce
		Volba efektivnějšího způsobu řešení (z hlediska žáka)	stupeň efektivity práce
	Pojmenování, označování	Pojem	
		matematické uchopování (označování)	
	Učitel	Vliv učitele	pozitivní vliv učitele (ve smyslu vlastního objevování)
			negativní vliv učitele (ve

			smyslu vlastního objevování)
		Chyba učitele	
	Zobecnění	Rytmizace	
		Vyjádření obecného vztahu	
		Zobecnění vztahu o řád výše	
	Verifikace	Obrázek/náčrtek	
		Odkaz na symboliku	
		Vysvětlení platnosti svého řešení na konkrétním příkladu	
	Argumentace		

2) Sociální kategorie

Kód	*Kategorie*	*Podkategorie*	*Dimenze*
	Projev nadaných žáků	Preferování/ využití svého řešení/objevu	s možností volby
			bez možnosti volby
		otázka individuality (osobnosti) žáka	
		Variabilita způsobu řešení úloh	
	Upozornění na sebe	Opakování vysloveného řešení	Míra upozornění na sebe
		Žák si vzal sám slovo	- chce prezentovat své řešení
			- chce na sebe upozornit
		Nesouhlas s řešením	
	Nabídka pomoci žáka		
	Emoce	Lítost/zklamání z neuplatnění se	Žák to vzdává
			Žák se nevzdává
		Překvapení z množství a způsobu řešení	
		Radost z úspěchu spolužáka	

	Zjednávání vhledu do situace
1a	Akceptování symboliky
1b	Nepřesné řešení
	Absence vysvětlení
	Připomenutí
	Žák si vzal sám slovo
	Žák neví
	Zmatek
	Zaujetí žáků
	Nesouhlas s řešením
	Diskuze
	Nápověda žáka
	Dotaz žáka
	Špatné pochopení řešení spolužáka
	Vysvětlení své myšlenky
	Volný prostor pro připomínky žáků
	Popis svého řešení
	Nový kontext

Propedeutika určitého učiva	- úloha propedeuticky připravuje žáka na nové učivo (zde propedeutika rotace), popř. propedeuticky připravuje na nový kontext (zde: shodnost trojúhelníků)
Nový kontext	

Příloha 7

Přehled dalších výukových experimentů

Zde uvádím přehled některých výukových experimentů, které jsem provedla během doktorského studia a které ovšem nezapadají do linie tří hlavních experimentů.

- *Grafy funkcí – funkční myšlení žáků*

Tento výukový experiment popsaný v (Hricz a kol., 2005b; Ulrychová, 2006) jsem provedla v tercii osmiletého gymnázia v běžných hodinách matematiky s 31–33 žáky v roce 2005. Mým cílem (nejen v tomto experimentu) bylo motivovat žáky pro jejich vlastní práci v matematice, propojit úlohy s reálným životem a vymyslet a vyzkoušet netradiční úlohy zaměřené na funkční myšlení žáků. Celý proces jsem charakterizovala následujícími čtyřmi etapami[1]:

1. etapa: Růstové křivky populace
2. etapa: Grafy reálných dějů
3. etapa: Vlastnosti funkcí
4. etapa: Úloha Co říká tento graf?

- *Měření teplot*

Experiment Měření teplot jsem provedla v sekundě a tercii osmiletého gymnázia v roce 2004. Úkolem bylo měřit pravidelně třikrát denně venkovní teplotu vzduchu na různých místech ČR v prvním červnovém týdnu 2004 – na školách v přírodě, na chatě[2], ve škole[3]. Poté během vyučování žáci graficky zpracovávali tabulky naměřených hodnot. Tento experiment je popsaný v (Hricz a kol., 2005b).

- *Plán výletu – Dvůr Králové*

Experiment byl uskutečněn v primě a sekundě osmiletého gymnázia v roce 2004. Úkolem bylo popisovat graf průměrných měsíčních teplot v průběhu roku a naplánovat výlet na základě zadaných podmínek. Experiment je popsán v (Hricz a kol., 2005b).

[1] Těmito čtyřmi etapami je možné charakterizovat, jak se původní úloha Růstové křivky populace vyvíjela. Na počátku nebyly etapy takto stanovené a ucelené, ale postupně se vyvíjely.
[2] Dva žáci se nezúčastnili ŠVP z rodinných důvodů, trávili tento týden na chatě.
[3] Ostatní žáci, kteří nejeli na ŠVP, se účastnili náhradního vyučování.

- *Jízdní grafy*

Tento experiment popsaný v (Hricz a kol., 2005a) jsem provedla v tercii osmiletého gymnázia v hodinách matematiky v roce 2005. Žáci pracovali ve dvojicích. Úkolem bylo popisovat jízdní graf.

- *Počasí – den a noc*

Zmíněný experiment byl zaměřen na popis klimatických změn v průběhu roku, zaznamenávání teplot do grafu, rozdíl délky stínu v zimě a v létě v určitou denní dobu, na problematiku střídání a délky dne a noci, dopad slunečních paprsků na zeměkouli (modelování pomocí globusu a baterky; propedeutika pojmu vrchlík). Experiment byl proveden v sekundě osmiletého gymnázia v roce 2004.

- *Ciferník*

Experiment Ciferník jsem uskutečnila v tercii osmiletého gymnázia v roce 2004. Úkolem bylo nakreslit ciferník do prázdného kruhu a dále vepisovat do ciferníku různé geometrické útvary (rovnostranný trojúhelník, čtverec, apod.). Žáci pracovali ve dvojicích.

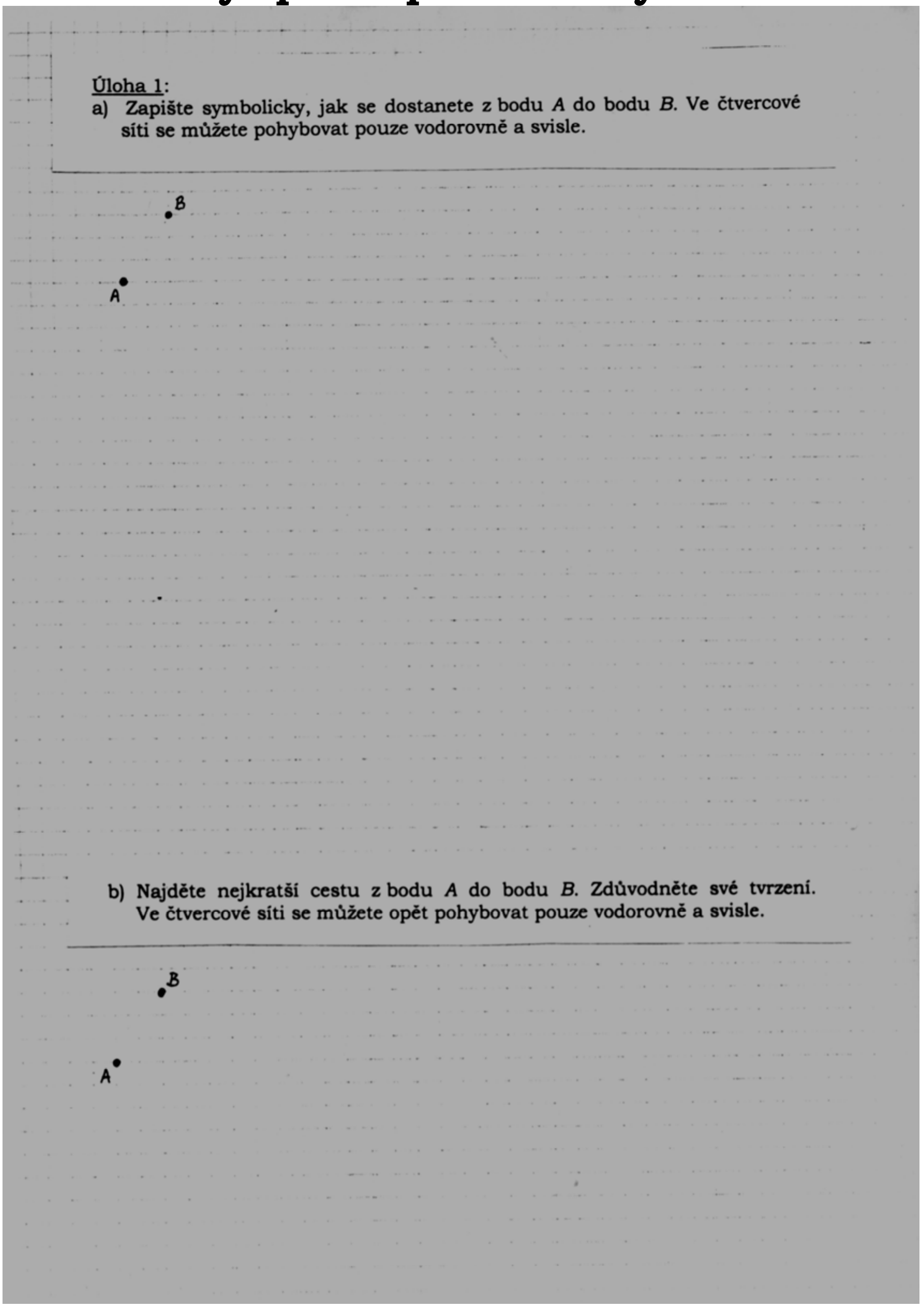
- *Grafy Eisenmann*[4]

Tento experiment jsem provedla v tercii a kvartě osmiletého gymnázia v hodinách matematiky v roce 2005. Žáci pracovali v obou třídách nejprve individuálně, poté přešli ke skupinové práci (5–6 žáků). Úkolem bylo přiřadit dané situaci zachycené na obrázku příslušný graf vyjadřující určitou závislost (na výběr bylo ze čtyř různých možností).

[4] Jméno autora úloh.

Příloha 8

Pracovní listy[1] pro experiment cyklu C3[2]



Úloha 1:

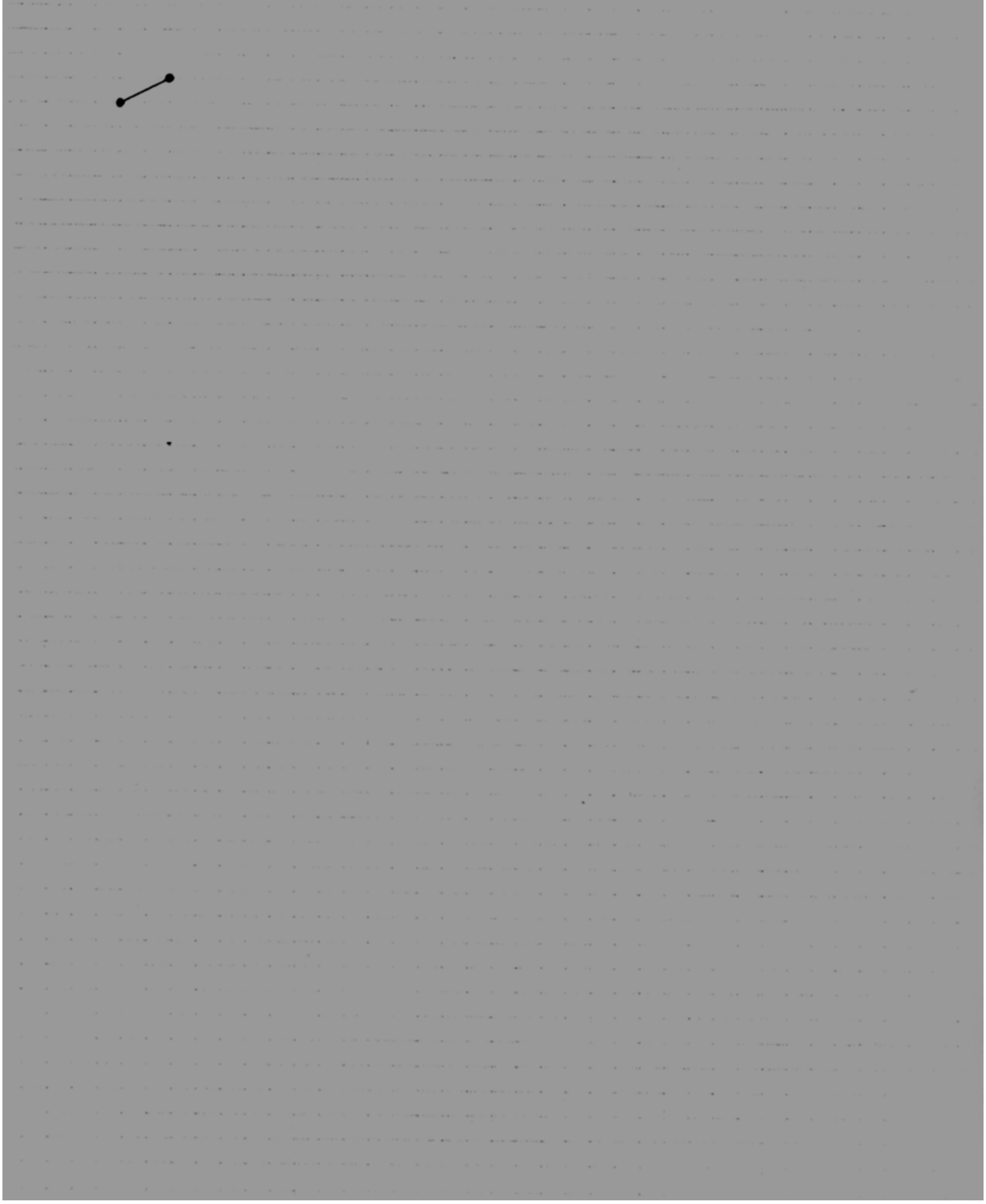
a) Zapište symbolicky, jak se dostanete z bodu *A* do bodu *B*. Ve čtvercové síti se můžete pohybovat pouze vodorovně a svisle.

b) Najděte nejkratší cestu z bodu *A* do bodu *B*. Zdůvodněte své tvrzení. Ve čtvercové síti se můžete opět pohybovat pouze vodorovně a svisle.

[1] Každá úloha byla uvedena zvlášť na čtverečkovaném papíře.
[2] Pythagorova věta – „mřížový čtverec 2“

Úloha 2:

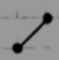
Vytvořte k dané úsečce čtverec. Vrcholy čtverce musí ležet pouze v uzlových bodech čtvercové sítě. Popište podrobně, jak jste postupovali.



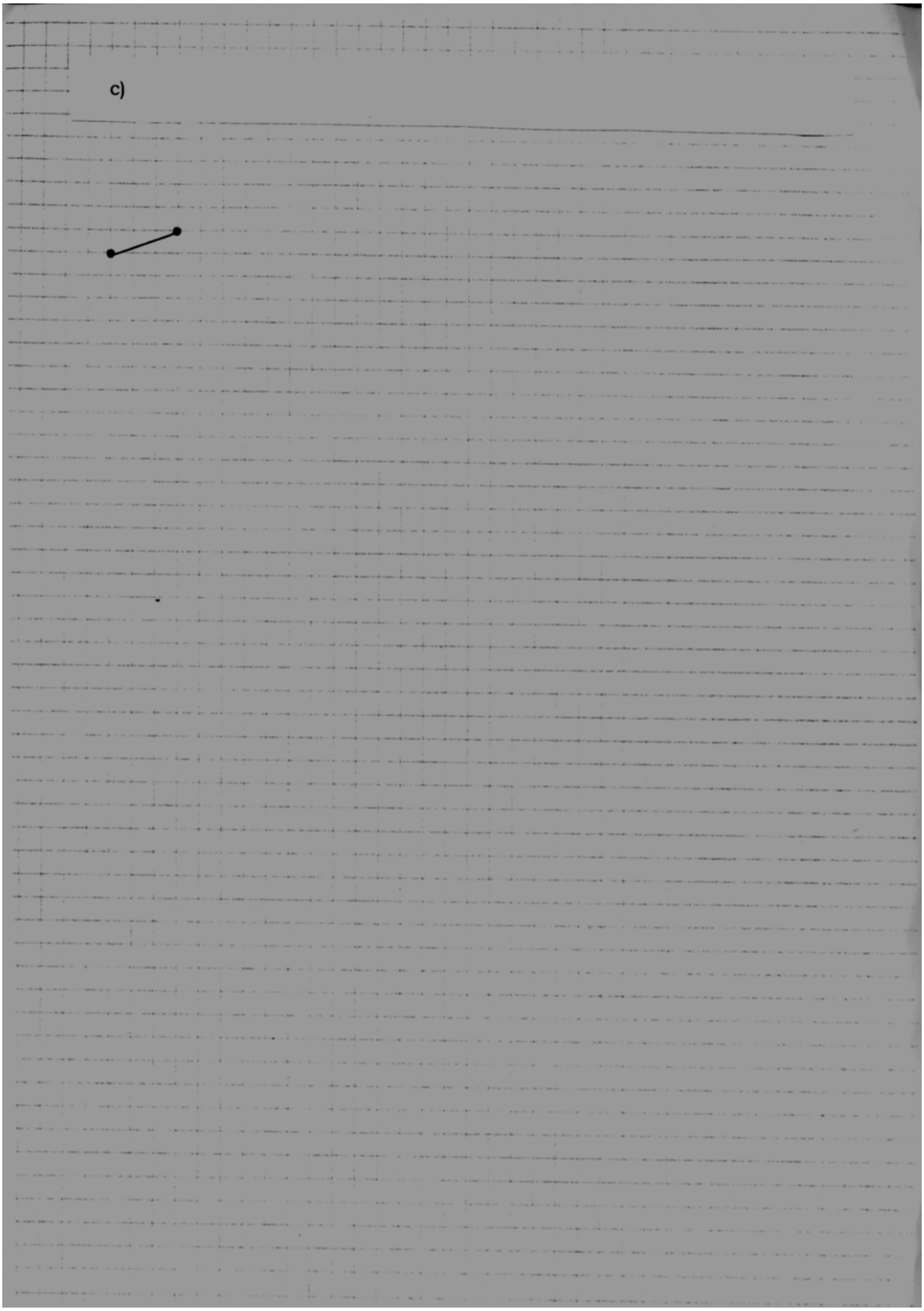
<u>Úloha 3</u>:

Načrtněte příslušné čtverce a zjistěte jejich obsah.

a)



b)


c)

Úloha 4:
Zkoumejte vztah mezi délkou strany čtverců a jejich obsahem.
(V případě nutnosti, požádejte o 1., popř. 2. nápovědu.)

Existuje, mezi danými údaji a obsahem čtverce určitá závislost?

Úloha 4 (1. nápověda):

Vytvořte jednotlivé tabulky, ve kterých zafixujete svislé kroky a necháte probíhat vodorovné kroky (např. od 0 do *m*), abyste prošli všechny možnosti.

Úloha 4 (2. nápověda):
Zapište obsahy čtverců do tabulky a poté zkoumejte vztah mezi délkou strany čtverců a jejich obsahem.

→	↑	S
0	1	
1	1	
2	1	
3	1	
4	1	
...	...	...
m	1	

→	↑	S
0	2	
1	2	
2	2	
3	2	
4	2	
...	...	...
m	2	

atd.

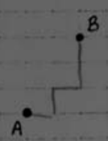
→	↑	S
0	n	
1	n	
2	n	
3	n	
4	n	
...	...	...
m	n	

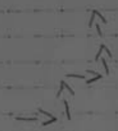
Příloha 9

Pracovní listy skupiny 2

Úloha 1:

a) Zapište symbolicky, jak se dostanete z bodu *A* do bodu *B*. Ve čtvercové síti se můžete pohybovat pouze vodorovně a svisle.



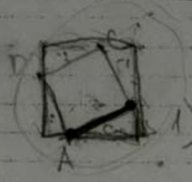


b) Najděte nejkratší cestu z bodu *A* do bodu *B*. Zdůvodněte své tvrzení. Ve čtvercové síti se můžete opět pohybovat pouze vodorovně a svisle.

Jedna z cest která vede po pěti čtverečcích.

Kratší cesta jít nelze, protože bychom cestu musely vést přes diagonálu

Úloha 2:
Vytvořte k dané úsečce čtverec. Vrcholy čtverce musí ležet pouze v uzlových bodech čtvercové sítě. Popište podrobně, jak jste postupovali.

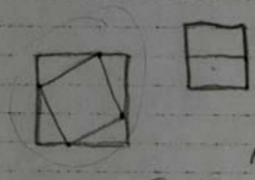


1) nejprve jsme si udělali rovnoběžku na vzdálenosti a poté jsme spojili čtyři body

2) ještě pomocí pravého úhlu udělat kolmice na úsečku a a spojit ve vzdálenosti a

3) vždy o dva řádky výše než základní úsečka a o jeden do leva.

4) z bodu A o dva čtverečky do prava a jeden nahoru.
z bodu B o dva čtverečky nahoru a jeden do leva
z bodu C o dva čtverečky doleva a jeden dolů.
a spojit body



1
2,25 − 1 = 1,25

st ob
0,5 − 0,25
1 − 1
1,5 − 2,25 0,75
2 − 4
2,5 − 6,25 1,25 1,75
3 − 9 3 2,25
3,5 − 12,25 5,25 2,75
4 − 16 8

<u>Úloha 3</u>:
Načrtněte příslušné čtverce a zjistěte jejich obsah.

a)

1) jednotka 1 čtvereček = 1 č

$4 \times 0{,}5$ č = 2 č.

2) strana čtverečku = 0,5 cm

$0{,}5^2 + 0{,}5^2 = \sqrt{a}$

$0{,}5^2 + 0{,}5^2 = 0{,}5$

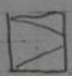
$\sqrt{0{,}5} = 0{,}707$

strana a = 0,707

$0{,}707^2 = 0{,}5\ cm^2$

b)

1) 5 čtverečků
protože každé vybarvené pole je jeden čtvereček



2) $1{,}25\ cm^2$

fialový trojúhelník 1. odv. - 0,5 cm
2. odvěsna - 1 cm
přepona - ? = 1,1

$1{,}1^2 = 1{,}25$

3) vytvořený čtverec má délku strany 1,5 cm
obsah = $2{,}25\ cm^2$
trojúhelníky které nepatří do původního čtverce tvoří dohromady čtverec o straně 1 cm
obsah tohoto čtverce je $1\ cm^2$
obsah původního čtverce je $2{,}25 - 1 = 1{,}25\ cm^2$

c)

1) 10 čtverečků

2) trojúhelník (odv. - 0,5 cm)
2.3/2 - 1,5 cm
přepona - 1,58 cm
obsah - 2,5 cm²

Vié 63

Úloha 4:
Zkoumejte vztah mezi délkou strany čtverců a jejich obsahem.
(V případě nutnosti, požádejte o 1., popř. 2. nápovědu.)

1) čím delší strana: tím delší obsah

2) obsah je strana na druhou

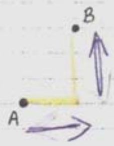
3) $m^2 + m^2 = S$

Příloha 10

Pracovní listy skupiny 3

Úloha 1:

a) Zapište symbolicky, jak se dostanete z bodu *A* do bodu *B*. Ve čtvercové síti se můžete pohybovat pouze vodorovně a svisle.



doprava a nahoru

Snažili jsme se najít co nejkratší a nejjednodušší cestu, i když nás též napadla složitější cesta která vypadá lépe vizuálně!

Později jsme přikreslili šipky.

b) Najděte nejkratší cestu z bodu *A* do bodu *B*. Zdůvodněte své tvrzení. Ve čtvercové síti se můžete opět pohybovat pouze vodorovně a svisle.

K této úloze nás nenapadlo nic nového, protože se nám zadání zdálo podobné tomu předchozímu.

Možností je více ale naše je nejsnazší.

Úloha 2:

Vytvořte k dané úsečce čtverec. Vrcholy čtverce musí ležet pouze v uzlových bodech čtvercové sítě. Popište podrobně, jak jste postupovali.

Nejdříve jsme si museli ujasnit, co jsou uzlové body.

Poté jsme udělaly ~~B~~ zbylé dva vrcholy, a spojili je.

Možností je více

Vrcholy jsme tvořili pomocí čtverečků, protože vidíme, že ty předem dané jsou na úsečce, která dělí obdélníček vzniklý ze dvou čtverečků

a podle této předlohy sme vytvořily ty zbylé. Snad to je aspoň trochu přesné a připomíná to čtverec.

Úloha 3:

Načrtněte příslušné čtverce a zjistěte jejich obsah.

a)

Pokud je tento papír jako všechny ostatní, které jsem někdy dříve měřila, měla by být jedna strana tohoto □ čtverce 0,5 cm. Musíme zjistit, kolik je přepona ~~tohoto~~ trojúhelníka vzniklého rozpůlením tohoto čtverečku. Použijeme k tomu Pytagorovu větu.

$a^2 + b^2 = c^2$ → odmocníme = 0,7

$0,5^2 + 0,5^2 =$ 0,5 a tím pádem víme jednu stranu čtverce, který sme nakreslily.

Dále použijeme vzorec pro vypočítání obsahu čtverce $S = a \cdot a$

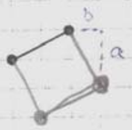
Dosadíme: $S = 0,7 \cdot 0,7$

$S = 0,49\ cm^2$

Tím pádem máme obsah čtverce.

Další způsob nás nenapadl.

b)



Postupujeme jako v předchozím případě.

Musíme zjistit jednu stranu čtverce. Použijeme Pytagorovu větu.

$a^2 + b^2 = c^2$

$1^2 + 0,5^2 = c^2$

$c^2 = 1,25$

$c = 1,11$

Teď víme jednu stranu a spočítáme obsah.

$S = a \cdot a$

$S = 1,11 \cdot 1,11$

$S = 1,21$

Obsah čtverce je 1,21 cm.

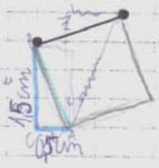
Další postup, nám není znám.

c)

Jestliže chceme zjistit

$a^2+b^2=c^2$

délku jedné strany, musíme použít pythagorovu větu.
počítáme kolik cm má přepona



čtverec jsme si narýsovali pomocí 2. úlohy

Jestliže má strana malého čtverečku 0,5 cm tak △ má jedna odvěsna 1,5 cm a druhá 0,5 cm

Trojúhelník jde umístit na každou stranu čtverce

Tudíž $a^2+b^2=c^2$

$2,25+0,25=c^2$

$2,5=c^2$ ⇒ musíme odmocnit $\sqrt{2,5}$

⇒ $c=1,58$

pak jsme si výpočet spočítali rnaši i prakticky

$S=a^2$ pak nám stačilo jen vypočítat obsah

$S=2,4964$ a tak jsme dostali obsah.

Jiné způsoby nás nenapadly.

Úloha 4:

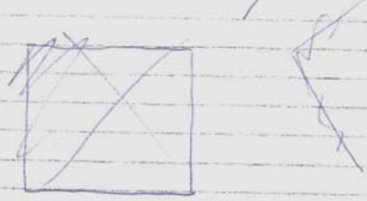
Zkoumejte vztah mezi délkou strany čtverců a jejich obsahem.

(V případě nutnosti, požádejte o 1., popř. 2. nápovědu.)

c^2 pythagorovy věty -

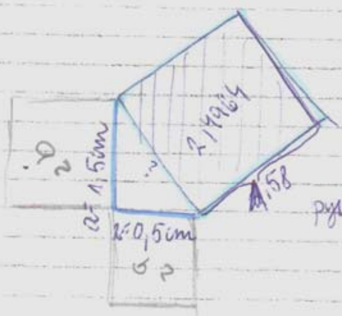
c^2 je skoro samý údaj jako výsledek obsahu

Strana čtverce je odmocnina z obsahu.



$a^2+b^2=c^2$

$a^2+b^2=S$



pythagorova věta $a^2+b^2=c^2$

$2{,}25+0{,}25=c^2$

$2{,}5=c^2$

$\sqrt{2{,}5}=1{,}58$

$S=a^2$ $= a=1{,}58$

$S=2{,}4964$

Příloha 11

Pracovní listy skupiny 4

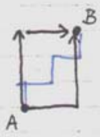
Úloha 1:

a) Zapište symbolicky, jak se dostanete z bodu *A* do bodu *B*. Ve čtvercové síti se můžete pohybovat pouze vodorovně a svisle.

1x ↑, 1x →, 1x ↑, 1x →, 1x ↑

~~zkoušíme najít nejkratší cestu~~

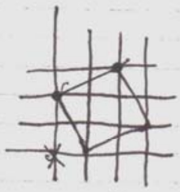
b) Najděte nejkratší cestu z bodu *A* do bodu *B*. Zdůvodněte své tvrzení. Ve čtvercové síti se můžete opět pohybovat pouze vodorovně a svisle.



Je to cesta ~~[illegible]~~ z 5ti úseků, ale jsou i jiné možnosti, všechny cesty mají 5 úseků, neexistuje kratší.

zkoušíme najít nejkratší cestu

Úloha 2:
Vytvořte k dané úsečce čtverec. Vrcholy čtverce musí ležet pouze v uzlových bodech čtvercové sítě. Popište podrobně, jak jste postupovali.

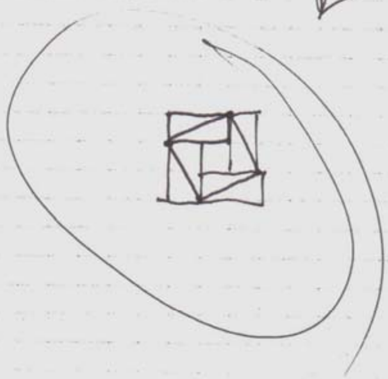


pythagorova věta. dejme tomu, strana 1cm

$$1^2 + 2^2 = 5 \qquad \sqrt{5} \doteq 2{,}24$$

nejprve to vypadá tak, že jsem vytvářel pseudokosočtverec. Pak mi to došlo, jak je to jednoduchý.

to bylo naprd, pouze nás to navedlo sem



Úloha 3:
Načrtněte příslušné čtverce a zjistěte jejich obsah.

a)

pokud 1 strana tohoto čtverce má 1cm

zjistíme délku jedné strany (pythágorova věta

$a^2+b^2=c^2$

$1+1=2$ $\sqrt{2} = 1,4142$

1 strana

obsah je $2\,cm^2$

2. zp. $4 \cdot \frac{1}{2} = 2\,cm^2$

$1+0,25 = \sqrt{1,25}$

Platí, že při počítání obsahu se nemusí odmocňovat, vyjde to samé

b)

$a^2+b^2=c^2$

$1+4=5$

1,25

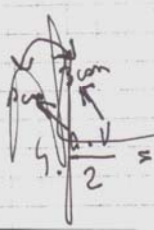
$1+0,5$

$1+4=5$

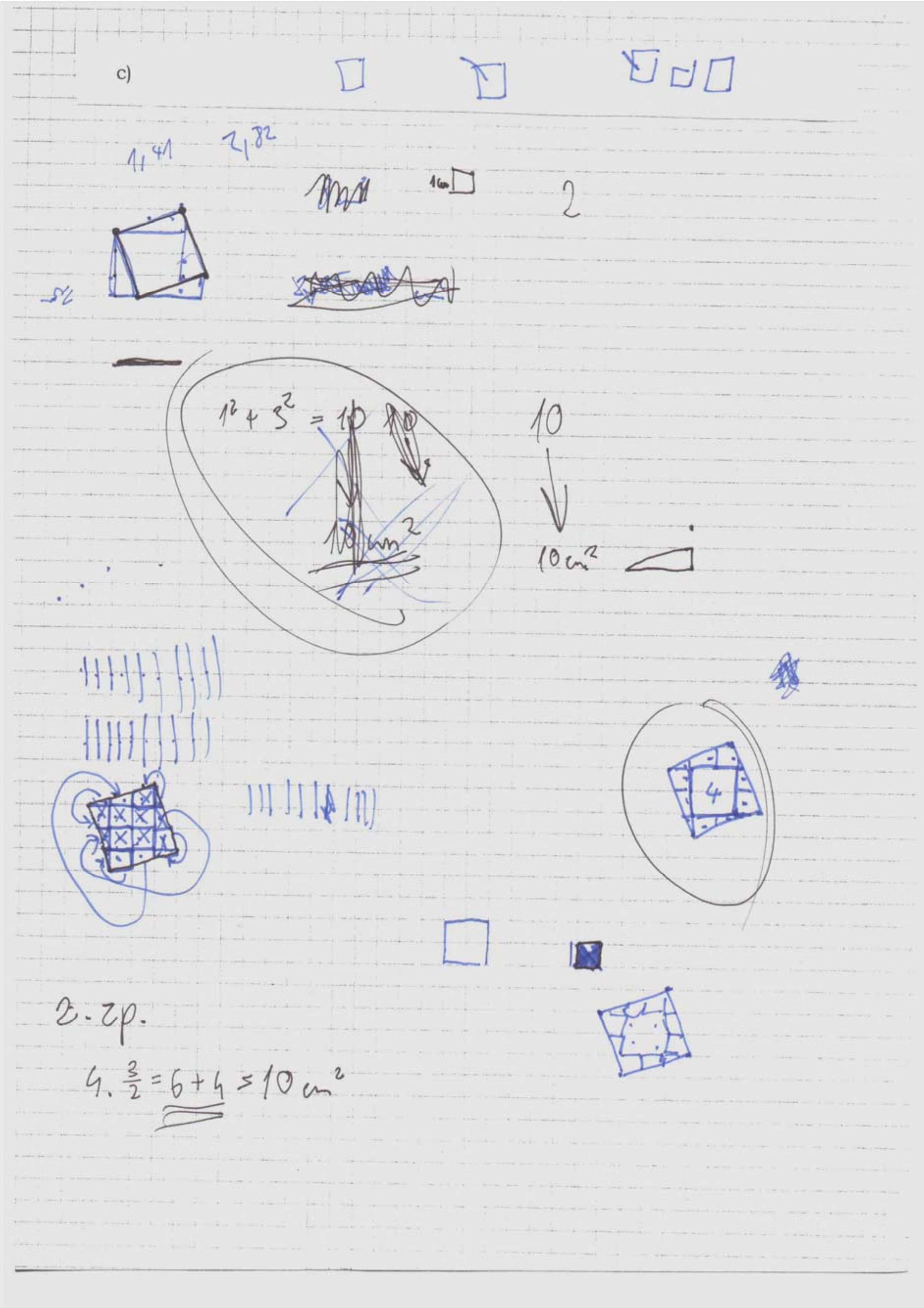
$\sqrt{5}=2,24$

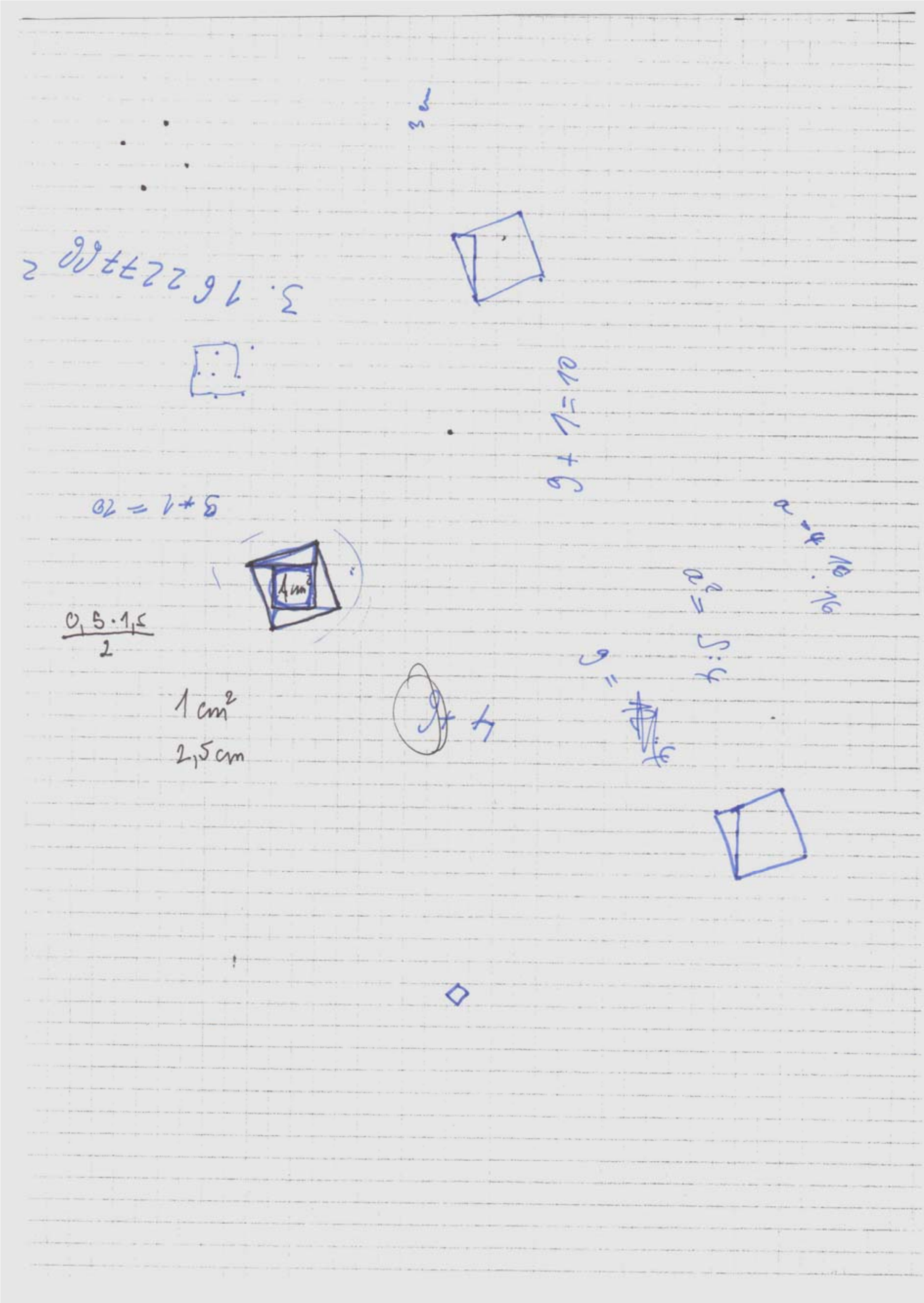
Čtverec má $5\,cm^2$

2. zp. 1 čtv. uprostřed má $1\,cm^2$ a zbylé prav. trojúhelníky se sečtají:

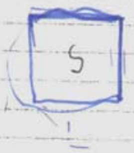


$4 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = 4 \cdot \frac{2}{2} = 4+1 = 5\,cm^2$


c)
1,41
2,82
2
$1^2 + 3^2 = 10$
$10 cm^2$
10
$10 cm^2$
4
2. zp.
$4 \cdot \frac{3}{2} = 6 + 4 = 10 cm^2$


0,5 · 1,5
2
1 cm²
2,5 cm

Úloha 4:
Zkoumejte vztah mezi délkou strany čtverců a jejich obsahem.
(V případě nutnosti, požádejte o 1., popř. 2. nápovědu.)



$\cancel{a} = S$

$a^2 = S$

$a^2 = 0 : 4$

$\cancel{0 = 4 : S}$

$S = 0 : 4$

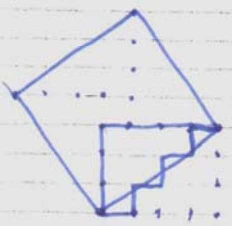
4

$16 = 16 : 4$

4x

$9 = 9 : 4$

16



Příloha 12

Pracovní listy skupiny 1

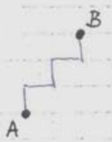
Úloha 1:

a) Zapište symbolicky, jak se dostanete z bodu *A* do bodu *B*. Ve čtvercové síti se můžete pohybovat pouze vodorovně a svisle.

3. čtverečky nahoru potom 2 čtverečky doprava.

↑ →

b) Najděte nejkratší cestu z bodu *A* do bodu *B*. Zdůvodněte své tvrzení. Ve čtvercové síti se můžete opět pohybovat pouze vodorovně a svisle.

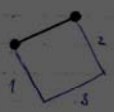


1 čtvereček nahoru 1 doprava, 1 nahoru, 1 doprava, 1 nahoru

Obě dráhy jsou stejně dlouhé.

↑ → ↑ → ↑

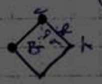
Úloha 2:
Vytvořte k dané úsečce čtverec. Vrcholy čtverce musí ležet pouze v uzlových bodech čtvercové sítě. Popište podrobně, jak jste postupovali.



Nejprve jsme nakreslili čáru číslo 1, potom čáru číslo 2 a nakonec čáru číslo 3.
Dávali jsme pozor na to, aby vrcholy byly v uzlových bodech čtvercové sítě

Úloha 3:
Načrtněte příslušné čtverce a zjistěte jejich obsah.

a)



(1) S = (a · a) · 2

S = 0,5 cm²

(2) $a^2 + a^2 = b^2$

$0,5^2 + 0,5^2 = b^2$

$0,5 = b^2 \quad / \sqrt{\ }$

$0,707 = b$

$S = b \cdot \cancel{b} \, b$

$S = 0,5\ cm^2$

(3) vezmeme si pravítko a změříme jednu stranu. Pomocí ní vypočítáme obsah S = a · a

Tento způsob bohužel není ~~???~~ tolik přesný.

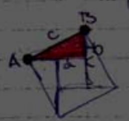
(4) vypočítáme obsah trojúhelníku ABC a vynásobíme ho čtyřmi.

$\frac{a \cdot r}{2} = 0,125$

S = 0,125 · 4

S = 0,5 cm²

b)



(1) S = 5 (a · a)

S = 1,25 cm²

(2) $c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 1^2 + 0,5^2$

$c^2 = \sqrt{1,25}$

$c = 1,118$

$S = c \cdot c$

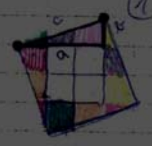
$S = 1,25\ cm^2$

(3) Vezmeme si pravítko a změříme jednu stranu čtverce. Pomocí ní vypočítáme obsah. S = a · a

Tento způsob bohužel není tolik přesný

(4) vypočítáme obsah trojúhelníku ABC a vynásobíme ho čtyřmi, potom vypočítáme obsah čtverce a sečteme ho s obsahem všech čtyř trojúhelníků

c)



1\. $S = (a \cdot a) \cdot 10$

$S = 2{,}5\ cm^2$

2\. $c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 1{,}5^2 + 0{,}5^2$

$c^2 = \sqrt{2{,}5}$

$c = \cancel{2{,}25}\ 1{,}5$

$S = c \cdot c$

$S = 2{,}5\ cm^2$

3\. Vezmeme si pravítko a změříme jednu stranu čtverce. Pomocí ní vypočítáme obsah. $S = a \cdot a$

Tento způsob bohužel není tolik přesný.

Úloha 4:
Zkoumejte vztah mezi délkou strany čtverců a jejich obsahem.
(V případě nutnosti, požádejte o 1., popř. 2. nápovědu.)

když je čtverec položen úhlopříčně a já se chci dostat z bodu A do bodu B, vždycky jdu nějakou vzdálenost nahoru a určitou vzdálenost doprava. Tím se mi vytvoří pravoúhlý trojúhelník. Přepona tohoto trojúhelníku je strana čtverce.

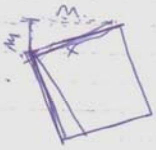
m jednotek^2 + n jednotek^2 = x jednotek^2

x jednotek · x jednotek = S

$$m^2 + n^2 = x^2$$

$$x \cdot x = S$$

$$\boxed{S = \sqrt{m^2 + n^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2}}$$



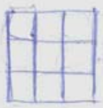
a = strana čtverce
a · a = obsah – ″ –

~~obrázek musí být nakreslen, když nestačí [illegible] 1 strana.~~
Pro výpočítání obsahu čtverce stačí pouze 1 strana.

- Strana je odmocninou obsahu

Úloha 4 (1. nápověda): Existuje mezi danými údaji a obsahem čtverce určitá závislost?

Vytvořte jednotlivé tabulky, ve kterých zafixujete svislé kroky a necháte probíhat vodorovné kroky (např. od 0 do m), abyste prošli všechny možnosti.

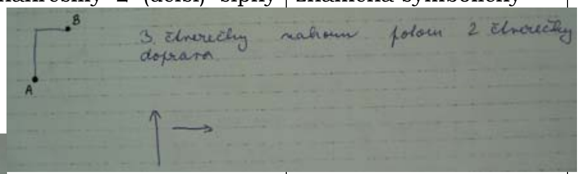


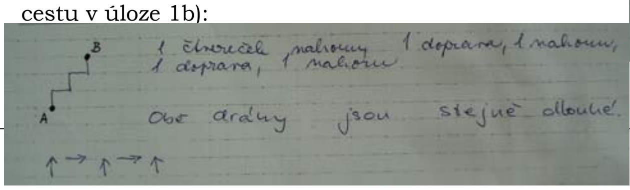
Příloha 13

Záznam experimentu Pythagorova věta – „mřížový čtverec 2“ – skupina 1

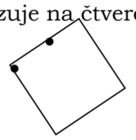
- 5. – 6. vyučovací hodina – středa 11. 6. 2008
- čas: 11^50^–13^30^
- externí pozorovatel: přítomen
- zpracováno na základě videonahrávky
- skupina č. 1 (Nela, Anežka, Klára, Marcela)
- počet žáků: 4

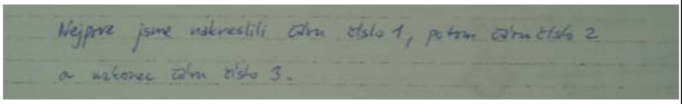
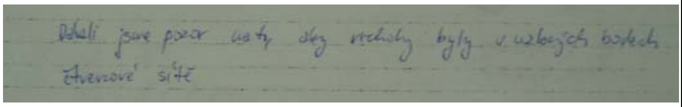
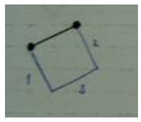
	Činnost žáků, popř. experimentátora (popis – account of)	*Poznámky*
1 Úloha 1: (shrnutí)	**a) -** dívky nejprve nakreslily řešení + určily, že dráhy jsou stejně dlouhé - na výzvu experimentátora „zapsat symbolicky“, popsaly slovně - po výzvě experimentátora „zapsat pomocí symbolů“ nakreslily 2 (delší) šipky (jednu nahoru a druhou doprava) a N to okomentovala: **b) -** N.: „3 čtverečky nahoru a 2 čtverečky doprava.“ **c) -** Na základě řešení pomocí šipek popsaly dívky cestu v úloze 1b):	 - problém, co to znamená symbolicky





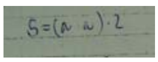
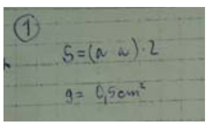
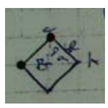
2 Úloha 2: (5:05)	**a) -** N. přečte zadání úlohy nahlas **b) -** poté si i ostatní pročítají zadání úlohy pro sebe (potichu) **c) -** K.: „Co jsou to uzlové body čtvercové sítě? To jsou tohle to?“ **d) -** M.: „Hm, tyhle ty podle mě.“ **e) -** N. se ujišťuje: „Jako že to nemá být takhle (ukazuje na čtverec s větší délkou strany než je zadáno), ale takhle?“ (ukazuje na čtverec, který není mřížový)	- N. - celkem nadchnutá pro čtení zadání úlohy - spolupracují všechny 4 dívky - N. nepochopila, co znamená, že vrcholy čtverce leží v uzlových bodech
	f) - A. se ujímá vysvětlení (rozvážně): „Ne, že ty vrcholy mají být v uzlových bodech. A uzlový bod je třeba tady ten.“ **g) -** ostatní poslouchají A. **h) -** K. špitne: „No vždyť jo, na to jsem se ptala, jestli to má být tady?“ **i) -** N.: „Jo, jako že to nemá být mimo.“ (pochopí vysvětlení A.) **j) -** A. dál samostatně přemýšlí nad řešením, aniž by se dál zabývala pojmem uzlový bod a začíná kreslit **k) -** N. připomíná: „Máme podrobně popsat, jak jsme postupovaly.“ **l) -** A. se dál zamýšlí nad tím, jak popsat to, že „namalovaly jen 3 čáry“. **m) -** N. diktuje: „Nejprve jsme udělaly čáru číslo 1, potom čáru číslo 2 a nakonec čáru číslo 3. (7:05) **n) -** A.: „Takže číslo 2 a číslo 3.“, podívá se na N., jestli souhlasí **o) -** N.: „Ano.“ **p) -** A. přistupuje na návrh N. a začne popisovat obrázek: „Tak jo, tak tady to byla číslo 1.“ **q) -** N.: „Ne, tady to byla číslo 1.“ (ukazuje na jinou úsečku) **r) -** A.: „Jo.“, a píše dál // **s) -** ostatní pozorují **t) -** po chvilce má N. připomínku: „Jsou to strany čtverce, tak by tam spíš měla být písmena, ale to už je jedno.“ **u) -** nikdo na tuto výzvu nahlas nereaguje – tváří se, že to je sice pravda, ale	- vysvětlení sobě navzájem - K. se utvrdila/ujistila, že zadání úlohy pochopila správně - K. i N. – ?? převzetí poznatku spolupráce A. a N. - A. převzala (- utvrzení) a pokračuje dál v práci

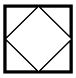
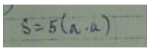


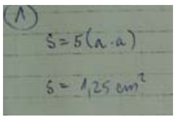
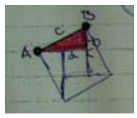
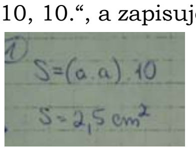
	v tomto případě je čísla neruší… **v)** - A. dopíše postup práce, **w)** - N. ji sleduje s tím, co dál, co A. řekne  **x)** - 8:00 – ještě asi na popud M. dopisuje A.:  **y)** - A. píše **z)** - N. po chvilce (8:13) komentuje to, že vrcholy jsou v uzlových bodech: „To stejně musí být, protože tahle ta úsečka musí být rovnoběžná s touto. Takže to tak musí být.“ **aa)** - K.: „Co musí být?“ **ab)** - N.: „No ty… v těch uzlových bodech.“ **ac)** - A. se vkládá do diskuze: „Nemusí být.“ **ad)** - N.: „Jak to, že ne?“ (3s odmlčení) „To by musela být posunutá a to by potom nebyl čtverec (M. zároveň: „To by nebyl čtverec.“), to by byl kosočtverec.“ **ae)** - A. „Byl.“ (pousmála se) **af)** - N.: „Kdyby to bylo posunutý..“ **ag)** - A.skočí do řeči: „Ale ty jsi říkala, že tady to je celá strana, ta úsečka (??? 8:31).. ale když to tady prodloužíš.“ **ah)** - N.: „To jo, ale proč bychom to dělaly?“ (myslí prodlužovaly) **ai)** - A.: „Já vím, ale potom by to nemuselo právě v těch uzlových bodech.“ **aj)** - N.: „Hm.“ **ak)** - M. se ujišťuje: „Takže pak by to mohlo být takhle větší?“ (myslí větší čtverec) **al)** - N. reaguje na A., drží se zadání úlohy: „To jo, ale takhle to musí být v těch	- autorita A. pro N.  - N. – využití (jiné??) matem. oblasti (rovnoběžnost – vlastnosti geom. útvarů) - A. pravděpodobně reaguje na jiný posun než N. - řeší to, že když se strana čtverce prodlouží, tak vrcholy

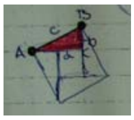
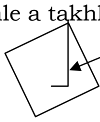
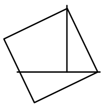
	uzlových bodech, aby to byl čtverec.“ (N. by to ráda řešila, ale A. už to řešit nechce a aniž by jí (N.) odpověděla, zavolá Ex. **am)** - A.: „Už to máme.“ **an)** - ostatní ji respektují a čekají na Ex ., úlohu již neřeší	pak nemusí být v uzlových bodech
3 Komentář úlohy 2:	**a)** - Ex.: „Tak jak jste postupovaly?“ **b)** - N. shrne: „No nejdřív jsme udělaly tuhle čáru, pak tuhle a pak tuhle.“ **c)** - Ex.: „A jak jste postupovaly konkrétně, když jste sestavovaly ty jednotlivé úsečky?“ **d)** - A.: No vždycky kolmici k téhle úsečce.“ **e)** - Ex.: „Mhm.“ **f)** - N.: „A potom jsme to tady spojily.“ **g)** - Ex.: „Mhm, a ono vám to tady vždycky vyšlo v tom průsečíku?“ **h)** - A.: „Vždycky na tom uzlovém bodě, no.“ **i)** - Ex.: „A proč to tak vychází?“ **j)** - N.: „No protože to..“ **k)** - ostatní jí skočí do řeči a dokončí větu: „..je čtverec.“ (smích) **l)** - N. se probojovává: „No protože, když by to bylo posunutý, tak by to nebyl čtverec.“ **m)** - M. 10:20 zopakuje jen něco o stranách… **n)** - Ex.: „Dobře a nějaké jiné řešení vás nenapadlo?“ **o)** - N.: „Třeba by to mohlo být na druhou stranu.“ (smích) **p)** -Ex.: „Dobře, na druhou stranu. A nějaký jiný způsob, jak by se ten čtverec dal sestrojit?“ **q)** - A.: „Ještě by se ta strana mohla prodloužit a udělat větší čtverec.“ **r)** -Ex.: „Mhm. A kdybychom měly danou úsečku jen takto?“ **s)** - N.: „Tak dala by se udělat rovnoběžka a potom to nějak spojit.“ **t)** - Ex.: „Takže pomocí těch kolmic vás napadá.. A nenapadá vás nic jiného?“ **u)** -N.: „Tak to je asi nejjednodušší. (odmlka) Tak jako od té kolmice a potom zase udělat kolmici.“ **v)** - Ex.: „Mhm, dobře. Tak já vám zadám ještě další úlohu.“	-Ex. záměrně nepoužil termín „zkonstruovat“ - A. – využití (jiné??) matem. oblasti (kolmice, vlastnosti geom. útvarů) – nahlas to ale předtím nevyslovila - Standardní řešení u konstrukčních úloh – řešení ve dvou polorovinách - Ex. měl spíše navrhnout přesnější řešení ne jiné řešení (nebylo by to tak nemotivující) - N. – se to snaží napasovat na standardní postupy (konstrukce), nevymýšlí nový způsob

4 Úloha 3a): Čtverec 1-1 (11:12)	**a)** - všechny čtyři žákyně si pročítají zadání úlohy potichu, N. polohlasem **b)** - N. se ujímá řešení: „Tak to teda spojíme prostě.“, kreslí **c)** - K. se na něco ptá – kvůli ujasnění: „A to může být (?? jakkoli ?) – nikdo na ni nereaguje **d)** - N.: „No a teď tam máme zjistit ten obsah.“ **e)** - A.: „To znamená, že ta strana… je *a* krát *a*.“ **f)** - N.: „Jenže nevíme *a*.“ **g)** - K.: „Obsah jsou dva čtverečky.“ (vypálí celkem jistě) – nikdo na K. (opět) nereaguje, jen N. se na ni udiveně podívá, ale dále se nepouští řešení Aničky. **h)** - A.: „Víme.“ **i)** - N.: „Jo počkat, vlastně víme.“ **j)** - A.: „*a* je..“ (11:55) **k)** - N.: „No jo, ale tohle není jeden, že jo.“ **l)** - A.: „To není jeden?“ **m)** - N.: „Není. **n)** - K.: „Není.“ **o)** - A. hned dojde: „Není. Jo, tohle je větší.“ **p)** - N.: „To je větší, to máš přeponu, že jo.“ **q)** - A.: „No, tak to vypočítáme.“ (úsměv) **r)** - N. povídá samozřejmě: „No jsou to dva čtverečky, že jo, protože tady jsou takhle ty trojúhelníčky.“ **s)** - K.: „Jo, já už to vidím.“ **t)** - A.: „Jo, tak dobře. Tak *a* krát *a* krát 2.“ **u)** - K.: „Co?“ **v)** - N.: „Cože?“ (úsměv) **w)** - A.: „No, *a* krát *a* je jeden čtvereček, krát 2 je druhý čtvereček. (odmlka) Chápeš? (na N.)“ **x)** - N.: „Jo.“ **y)** -A.: „Protože když to jsou dva čtverečky..“ → **z)** - N.: „Protože když tohle je *a*..“ (snaží se pochopit A. nápad) **aa)** - A.: „No, takže to můžem napsat třeba.., nějak inteligentně, S se rovná..“ (přemýšlí, čemu vlastně se S rovná)	-Individuální konstrukce?? -N. – společná konstr. (jen naťuknutí, ne vysvětlení/prozrazení) - A. si myslí čtverec *a·a*, kde *a* = 1 -N. převzala řešení Katky a podává ho za své -K. – jako by v tom neviděla své řešení??? (K. popostrčila svým nápadem N., N. to dotáhla, protože K. to asi až teď pochopila) - A. – převzala to převzaté od N.

	ab) - N.: „Tady si označíme *a*.“ (označuje v obrázku dvě úsečky písmenem *a* (poloviny úhlopříček)) **ac)** - K.: „To nebude vidět.“ **ad)** - N.: „To nevadí.“ **ae)** - A. píše *a* krát *a*, N. komentuje: „Plus *a* krát *a* (odmlka) mhm.“ (N. schvaluje toto:)  **af)** - N.: „No a..“ **ag)** - A.: „To znamená – S se rovná (odmlka) půl krát půl… **ah)** - K.: „0,25“ **ai)** - A. počítá na kalkulačce (nerespektuje výpočet K.) **aj)** - K. diktuje (opakuje): „Půl krát půl“ **ak)** - A.: „To je 0,5 cm²“ (dále ji nerespektuje) **al)** - A. zapisuje **am)** - N. to shrne: „Takže půl cm².“ **an)** -N. i A. se ještě dívají na řešení a nad výsledkem pravděpodobně přemýšlí, neuzavřou to.  **ao)** - A.: „To je blbost.“ (1s) **ap)** - N.: „To je blbost.“ (1s) **aq)** - K.: „Proč?“ **ar)** - M.: „To je blbost.“ (1s) **as)** - A.: „Není to blbost, protože..“, bere si do ruky kalkulačku **at)** - K.: „Když máš.., není to blbost.“ **au)** - A. počítá na kalkulačce a říká si: „50 …5 mm“ (počítá samostatně) **av)** - N.: „Ne, není to blbost. (odmlka) Protože centimetr čtvereční máš, že jo, když máš.., to je tohle.“ (ukazuje Katce) **aw)** - A. – po svém výpočtu to shrne: „Není to blbost.“	-Nepřebírá po ní (a po N. ano??) 

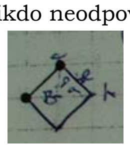
	ax) - N.: „No, není to blbost, protože centimetr čtvereční je tohle.“, a ukazuje na tento větší čtverec  **ay)** - A.: „Mhm.“ **az)** - N. cítí podporu A., je si jistější: „Takže tohle je půl cm^2. (odmlka) Jo, to odpovídá, jsou to dva čtverečky, takže to musí být tak.“, dívá se na A., která jí to kývnutím odsouhlasí. **ba)** - A.: „Hele, máme to ještě nějak víc popisovat?“ **bb)** - K.: „Vždyť to tady není napsaný.“ **bc)** - N.: „Teď jsme to tady řekly všechno.“	- podpora - A. se vžila do role zapisovatelky - zodpovědnost
5 Úloha 3b): Čtverec 2-1 (13:39)	**a)** - dívky samostatně přejdou na úlohu 3b) **b)** - A.: „Nakreslím čtverec (kreslí čtverec).. A je to obsah..“ **c)** - všichni se zamyslí (2s) **d)** - K.: „Je to (počítá) jedna, dva, tři, čtyři, pět čtverečků.“ (rychle spočítá) **e)** - A.: „Pět?“ **f)** - K.: „Mhm.“ **g)** - A.: „Jak pět čtverečků? (odmlka) Pět krát tenhle ten.“ **h)** - K.: „Co?“ **i)** - A.: „Pět krát tenhle ten.“ (smích), zopakuje a ukazuje na pracovním listě **j)** - K.: „Vždyť jo.“ **k)** - A.: „To znamená, že..“, a píše na pracovní  list **l)** - K.: „5 krát 0,5“, počítá na kalkulačce místo A. **m)** - N.: „Ne. 0,5 krát 0,5 krát ..“ **n)** - A.: „Protože *a* krát *a* je 0,25.“ **o)** - K.: „..krát 0,25. (pozoruje prac. list) Tohle to je 0,25, víš (odmlka) A to je 1,25.“ **p)** - N.: „A to asi takhle odpovídá, že jo.“	- svůj způsob řešení (K. čtverečky, A. výpočty) - převzato?? - *a* je opět jednotka mřížky (ne délka strany čtverce) - obě to myslí dobře (0,5 . 0,5 = 0,25) - N. kontroluje reálnost řešení

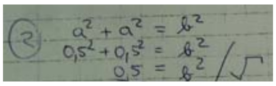
	q) - K.: „Jo.“ **r)** -A.: „No, takže kolik?“ **s)** - K.: „1,25“ **t)** - A. zapisuje 1,25 cm^2  **u)** - M. jen pozoruje	
6 Úloha 3c): Čtverec 3-1 (14:33)	**a)** - A.: „No, tak, nechcete to teď dělat vy?“, otočí papír ke Katce **b)** - K. (se ráda ujímá psaní) – kreslí čtverec, A. a N. jí ukazují uzlový bod, protože si K. není jistá, kde bude mít úsečka koncový bod. **c)** - K.: (smích) „Teďko mi to trochu nevyšlo.“ **d)** - A.: „No a zase kolik je tam čtverečků?“ (pokládá otázku ostatním) **e)** - N.: „4 a něco.“ **f)** - K.: (počítá potichu) „9.“ **g)** - N.: „Osm?“ **h)** - A.: (vezme si tužku z ruky od K.a ukazuje) „Hele, tady ten.“ **i)** -K.: „Jo, dobrý. (bere si tužku zpět) Já jsem to.. vlastně asi 10, 10.“, a zapisuje (po vzoru A.) a počítá na kalkulačce: „2,5.“, a zapíše to  **j)** - N.: „Tak a teďko tam napíšeme postup.“ **k)** - A.: „Vždyť to tam nemáme psát.“ (ukazuje na zadání) **l)** - K.: „To tam nemáme psát.“ (opakuje) „To nemáme.“ **m)** - N. a A. volají Ex.: „Už to máme.“	- A. kontroluje - N. chce splnit žádost Ex.
7 Komentář úlohy 3:	**a)** - Ex.: „Tak jak jste postupovaly?“ **b)** - A. se ujímá slova: „Takže jsme si pomocí kolmic vytvořily čtverec a pak spočítaly obsah.“ **c)** - Ex.: „Tak a jak jste ho počítaly, ten obsah?“ **d)** - A.: „Jsme si vždycky spočítaly, kolik tam je čtverečků.“ **e)** - Ex.: „A jak - kolik je tam čtverečků?“ **f)** - M (16:20): „No, protože to je na první pohled (???)“ **g)** - A.: „V té čtverečkované síti.“ **h)** - Ex.: „Mhm. To znamená… v tom prvním případě to bylo jak teda?“	-A. využívá způsobu řešení úlohy č. 2 - strategie řešení (výpočet obsahu)

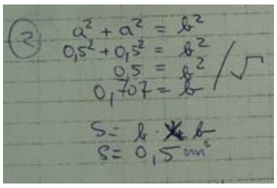
	i) - N, M, K.: „Tam byly 2 čtverečky.“ **j)** - A.: „Obsah čtverce se vypočítá *a* krát *a*, a když strana *a* má půl cm, tady je to označený (ukazuje na obrázek, 16:40)“ **k)** - Ex.: „Mhm, dobře. Tak jak jste postupovaly v dalším?“ **l)** - K.: „Úplně stejně.“ **m)** - Ex.: „A to znamená jak?“ **n)** - Všichni: „Že jsme..“ **o)** - M (důrazněji): „5 čtverečků.“ **p)** - Ex.: „Můžete mi je tam teda nakreslit? Kterých pět? Zvýrazněte mi je tam.“ **q)** - A. rozdělí čtverec 2-1 na 4 trojúhelníky a 1 čtverec (viz obr. úl. 3b)):  **r)** - Ex.: „Mhm.“ **s)** - N.: „A ta strana *a* je?“ **t)** -M.: „A tohle (ukazuje na úlohu 3c) zase úplně stejně.“ **u)** - Ex.: „Mhm, dobře, tak mi to tu zase nakreslete, jak jste si to tam rozdělily.“	
8 Úloha 3c):	**a)** - M. se ujímá kreslení **b)** - všichni sledují M. **c)** - M.: „Tady bude jeden.“ (ujišťuje se) **d)** - N.: „No takhle.“ - (5s) **e)** - N.: „Ne, celý ne.“ **f)** - A. ukazuje tužkou **g)** - M.: „Tady tenhle jeden.“ (není si jistá) **h)** - K., N., A. sledují M. a jsou trochu netrpělivé, protože vědí… **i)** -N. vysvětluje a ukazuje: „Ne, hele, tenhle, tenhle a takhle jeden.“ **j)** -M.: „To je jedno, tak udělám nejdřív tohle to.“  *nedokreslila svislý trojúhelníček* **k)** -N.: „A teďko tohle je jeden.“ (ukazuje) **l)** -M.: „takže takhle a takhle?“, a dokreslí toto:  **m)** - N.: „Ne. (ukazuje) Ne, ne, to není.“	- M. kreslí podle A. úlohu 3b) (převzala!!) - N. - kontrola - M. nechce přiznat chybu („To je jedno…“)

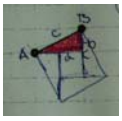
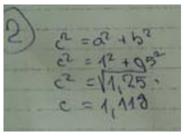
	n) - K.: „Můžu? (kreslí) Jeden kousek, tohle to a tohle to.“ **o)** - všichni pozorují její řešení **p)** - K.: „No a jak to mám vyznačit?“ /které části k sobě patří/ **q)** - N.: „Tak to očísluj.“, A.: „Nechceš to udělat barevně?“ - řekly skoro zároveň **r)** - N.: „Hele, já tu mám pastelky, jestli chceš?“ **s)** - M. na N.: „To je jedno.“ **t)** - K. vybarvuje nejprve růžově: „To není moc vidět.“, bere do ruky červenou **u)** - N. ukazuje: „To bude tenhle ten a tenhle.“ **v)** - K. vybarvuje: „No?“ (1s) „Jo.“ (pochopila) „Pak je tam tohle a tohle.“, a vybarvuje postupně sv. modře, oranžově, fialově **w)** - N.: „Ne, hele, to nebude..“ **x)** - K.: „Jo.“ (zamyslí se) **y)** - N.: „To bude s tímhle.“ **z)** - K.: „Jo aha.“ **aa)** - N.: „Protože tady máš ještě ty (???)“ **ab)** - K. vybarvuje dál zeleně, fialově **ac)** - N.: „Ne!“ (kontroluje, aby to nespletly) **ad)** - K.: „Vždyť jsi to říkala.“ **ae)** - N.: „Tohle to s tímhle.“ **af)** - K. opravuje zeleně: „No vždyť jo. Já musím udělat snad stejnou barvu, ne? **ag)** - N.: „Jo takhle.“ **ah)** - K.: „To je jasný.“ **ai)** - N.: „Tak to promiň.“ (uzná to) **aj)** - K.: „A tohle je tohle.“ **ak)** - N., A.: „Jo.“ **al)** - K.: „To je pěkný.“ (už má vybarveno) **am)** - A.: „To je blbost.“ **an)** - K.: „Není to blbost. Paní učitelko, už to mám..me!““ **ao)** - čekají (15s), neřeší úlohy, jen N. přemýšlí **ap)** - N.: „A je jich opravdu 10?“ **aq)** - K.: „Jo.“ **ar)** - K. a N. přepočítávají, K. nahlas: „1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9“ (smích)	- N. upouští od písmen

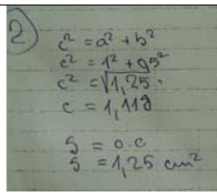
	as) - N.: „Cože?“ (smích) **at)** - M. chce přepočítat, ale K. ji nepustí – K.: „Ne, počkej.“ **au)** - N.: „Tak přepočítejte ty barvy, ne?“ **av)** - K.: „Vždyť já je počítám. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Deset.. (rozhodně) Už to máme, paní učitelko.“ **aw)** - čekání 3s	
9 Komentář úlohy 3c):	**a)** - Ex.: „Tak.“ **b)** - K.: „Už je to barevně vyznačený.“ **c)** - Ex.: „Tak mi to vysvětlete, jak to tam teda funguje.“ **d)** - K.: „No, vždycky že když tady ten kousek chybí, tak ho doplníme jiným kouskem.“ **e)** - Ex.: „Takže to znamená, že tady ta růžová patří k té růžové?“ **f)** - N.: „Tahle ta růžová (ukazuje) patří k téhle.“ **g)** - Ex.: „Tak to tam.. Když-tak to..“ **h)** - K.: „Uděláme to jinou barvou.“ **i)** - Ex.: „Nebo to zakreslete nějak šipkama – třeba jak to k sobě patří.“ **j)** - M.: „Spojit normálně takhle venkem.“ (ukazuje nad pracovním listem) **k)** - K. váhá (neví jak) **l)** - M. jí ukazuje: „Jako že takhle třeba.“ **m)** - K (21:20): „To bude hrozně nahuštěný, když tady bude..“ **n)** - M.: „Tak aspoň ty, co nejsou vidět.“ **o)** - N.: „Takže třeba tahle žlutá je jasná.“ **p)** - K.: „Ale tohle to není vidět.“, a přebarvuje to. **q)** - N.: „A tady ta růžová, ta je tady dole, že jo?“ **r)** - K.: „No.“ **s)** - M.: „No a tady tu musíš předělat.“ **t)** - Ex.: „Takže teď to k sobě patří barevně, jo?“ **u)** - K.: „Ano.“ **v)** - M., N.: „No.“ **w)** - M.: „A tohle to je taky..“ (ukazuje) **x)** - N.: „To je zase tady.“ **y)** - Ex.. (21:50): „Mhm, dobře. Takže vy vlastně vypočítáte, kolik tam máte těch	- u K. vítězí estetické hledisko

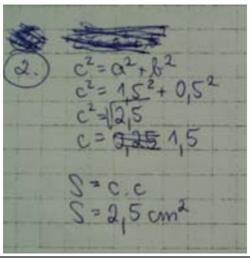
	čtverečků a potom? Jak to počítáte?“ **z)** - K.: „Obsah toho jednoho čtverečku a vynásobíme to počtem těch..“ **aa)** - A.: „..čtverečků.“ **ab)** - Ex.: „Mhm. Dobře, tak jo. A ještě jsem se chtěla zeptat, nenapadá vás ještě nějaké jiné řešení, jak by se to dalo vypočítat? Tohle je jako první způsob a nenapadá vás třeba nějaký jiný? **ac)** -A.: „Ještě třeba si můžeme Pythagorovou větou vypočítat tady tu přeponu a..“ **ad)** - Ex.: „Tak to zkuste. Tady si k tomu napište zaprvé..“ **ae)** - K.: „To byl blbej nápad, Ančo.“ (smích) **af)** -Ex.: „..a teď tam napište zadruhé a zkuste to vyřešit jiným způsobem.“	-strategie řešení - Poprvé zazněla **<u>Pythagorova věta</u>** (ale nepoužito na příslušný trojúhelník a obsah čtverce, ale pro výpočet uvnitř toho čtverce) - nebaví je vymýšlet víc způsobů, nejsou na to zvyklé!!
10 Úloha 3 – 2. způsob: (22:20)	**a)** - N.: „Tak já to napíšu. (obrátí se na M.) Nebo chceš psát ty?“ **b)** - M. kývne hlavou, že ne. **c)** -A. si vezme pracovní list s úlohou 3c) (pro urychlení práce, nechce se v tom už babrat) **d)** - N. má pracovní list s úlohami 3a) a 3b) a napíše tam: 2 **e)** - K.: „Já budu dělat kalkulačku.“ **f)** - M. si také bere kalkulačku **g)** - N.: „Strana *a* se rovná straně *b*, že jo?“ (potřebuje ujištění), nikdo neodpovídá, N. zapisuje: $a^2 + a^2 = b^2$, a označuje stranu *a* a *b* na obrázku  **h)** - N.: „To je blbost.“ (pracuje individuálně) **i)** - A. zároveň píše v úloze 3c): $c^2 = a^2 + b^2$ (neopisují to od sebe) **j)** - K. na A.: „Hele, chápeš, že tady nemáš, tady když nemáš.., že jo, nemůžeš spočítat trojúhelník.“	- samostatné rozdělení práce (chtějí si práci urychlit) - K. se také chopí práce, najde si (samostatně) nějakou činnost ve skupině

	k) - N. pozoruje řešení A.	-převzala N. něco?
	l) - A.: „Já vím.“	
	m) - K.: „To bys musela počítat každej.. a tady třeba někde nemáš..“	
	n) - A.: „Jasně.“ A škrtá $c^2 = a^2 + b^2$	-N. pracuje sama, M. její řešení pozoruje, A. a K. pracují spolu (A. vede práci)
	o) - N. se vrací ke svému řešení: „Takže, $0{,}5^2$..“	
	p) - A. odloží list s úlohou 3c) stranou	
	q) - K.to komentuje: „Takže tady prostě žadnej jinej způsob není.“ (uzavře to)	
	r) - N.: „..rovná se b^2.“	-Dvojí konverzace do sebe
	s) - K. i A. ještě přemýšlí nad odloženým listem	
	t) - A.: „Je.“	
	u) - N.: „Můžu kalkulačku?“	
	v) - K (na A.): „Jo?“	
	w) - A.: „Když to rozdělíš na půl, ale nevyšel (??? 23:00)“	
	x) - K. smích	
	y) - A. podává kalkulačku N.	
	z)-K.:„Počkej a když to rozdělíš na půl, tak máš.., tak to nejde skrz ty čtverce, co?“	
	aa) - A.: „Ne.“	
	ab) - K.: „Tak tady to půjde, hele.“, a bere pracovní list N., která počítá na kalkulačce výpočet v úloze 3a)- 2. způsob	
	ad) - A.: „Tady to půjde.“, ukazuje na úlohu 3b)	
	ae) - K.: „No tady to teda nepůjde.“ , a tužkou ukazuje úhlopříčně ve čtverci	
	af) - N. dopisuje své řešení úlohy 3a)- 2. způsob	
		
	ag)-K.:„Tady si můžeš vypočítat jeden trojúhelník.“ řekly zároveň – není ovlivněno	-odešly od řešení pomocí Pythagorovy věty, ale nyní se k němu vrátily jako k možnému způsobu řešení
	ah) - A.: „Ale tady u toho to jde Pythagorovou větou.“ (tj. u úlohy 3b))	
	ai) - K.: „No, můžeš jeden, protože tady ty jsou stejný.“	
	-N. (pracuje si na svém): „No a teď to odmocním, že jo?“ (nikdo neodpoví)	
	aj) -A. (na K.): „No vždyť jo. (odmlka) Vypočítáš si tuhle stranu a vynásobíš ji čtyřma.“	-to je snad obvod??

	ak) - K.: „No, že jo a tady víš, protože to je..“ (K. nepochybuje o řešení A.)	
	al) - A.: „No vždyť jo. (odmlka) Takže tady by to šlo udělat taky druhým způsobem.“, a kreslí do 3b) co???- obtahuje nebo kreslí/dokresluje trojúhelník	
	am) -N. zapisuje: $0{,}707 = b$ $S = b \cdot 4$ $S =$	
	an) - K.: „Já ho vybarvím červeně.“ (a vybarvuje trojúhelník v úloze 3b))	
	ao) - N. počítá na kalkulačce: „Mně to trochu nevyšlo.“	
	ap) - K.: „Tak to jsi asi počítala špatně.“ - pozornost K. a A.se obrátí na N.	
	aq) - A.: „Co jsi počítala?“	
	ar) - K.: „Tak podle toho, jestli jsi zaokrouhlovala, že jo?“	-zaokrouhlení hraje roli (poprvé zmíněno)
	as) - A.: „To není $b \cdot 4$, to je $b \cdot b$. (odmlka), $b \cdot 4$ je obvod.“	
	at) - N. opravuje své řešení a povzdechne: „Ach jo. (odmlka) Takže je to b^2, že jo?“, počítá na kalkulačce	
	au) - M.: „A to bylo přesně 0,7?“	
	av) - N.: „Ne, právě že to nevyšlo přesně, to znamená, že..“	Odmocní a umocní (nedojde jí, ze to už je čtverec) – ví ale, že to musí vyjít stejně
	aw) - M.: „Tak tam dej celý to číslo..“	
	ax) - N.: „..to celé na druhou rovná se..“	
	ay) - K.: „Tak zapiš..“	
	az) - N.: „Jo, vyjde to! Vyjde to. Tak jo, no.“	
		
	ba) - A.: „Tak ještě udělejte tohle (ukazuje na úlohu 3b)), třeba Marcela zase. (odmlka) Vypočítej tuhle tu stranu Pythagorovou větou.“	-1. přidělení práce
	bb) - M.: „Takže zase a^2..“	

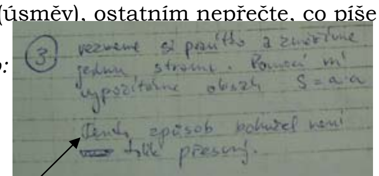
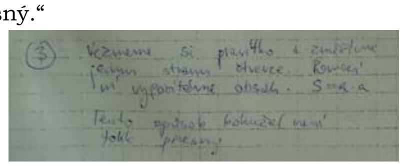
	bc) - A.: „Tady to máš napsaný.“ (ukazuje na obrázek v úloze 3b)	
	bd) - K.: „Ne, to nemůžeš dělat Pythagorovou větou.“	
	be) - A. (na K.): „Můžeš.“ (přesvědčivě bez vysvětlení)	
	bf) - N.: „Jo.“	
	bg) - A.: „Tady to je *c*, znáš tyhle dvě strany, máš tenhle ten centimetr a tenhle půlcentimetr.“	
	bh) - M.: „Jo.“	
	bi) - K.: „Jo takhle.“	Aha-efekt, pochopila, převzala
	bj) - M.: „Takže c^2..“, a píše $c^2 = a^2 + b^2$	
	bk) -N.: „Napiš si tam ty strany.“	-A. a N. berou M. jako slabší (radí jí)
	bl) - M. označuje strany *a*, *b*, *c* v červeném trojúhelníku 	
	bm) - A.: „To není poznat.“	
	bn) - K.: „Je to poznat, když jsou naznačený ty strany.“	
	bo) - M. píše 2. řádek: $c^2 = 1^2 +$	
	bp) - N.: „$0,5^2$.“	
	bq) - M. počítá na kalkulačce a dopíše 3. a 4. řádek 	
	br) - N.: „To už bude *c*.“	
	bs) -M (26:35): (1,11 ..???)	
	bt) - N.: „Tak to tam napiš tady to zaokrouhleně a potom to dej jako na druhou.“	
	bu) - M.: „Jenže já nevím, jestli to na té kalkulačce vyšlo (šest (26:40) ???)“	-pravděpodobně řeší zaokrouhlení ???
	bv) - N.: „To je jedno, teď dej na druhou.“	
	bw) - A. vezme kalkulačku a přepočítá to: „Osm.“	
	bx) - K.: „Vyšlo to.“, počítá také a kalkulačce	
	by) - N.: „Tady máme na druhou.“, ukazuje na kalkulačce	

	bz) -A.: „Obsah.“ (odmlka), diktuje: „S se rovná..“ 	
	ca) - N.: „1,25“	
	cb) - A.: „*c* krát *c*“	
	cc) - N.: A to vyjde 1,25.“	
	cd) - M.: „Jo, tak dobře.“	
	ce) - N.: „cm^2“	
	cf) - K.: „A tady?“, ukazuje na úlohu 3c)	
Úloha 3c) 2. způsob	**cg)** - N.: „A tady.. Tak tady bychom mohly taky nějakej trojúhelník vzít.“	
	ch) - K.: „Tady najdeš tenhle ten, hele.“	
	ci) - A.: „No tohle to, to je to samý, že jo.“	
	cj) - K.: „No a když znáš jednu stranu, tak můžeš vypočítat..“	
	ck) - M.: „No a co takhle, jak jsme počítaly, tak třeba takhle?“	
	cl) - N.: „No jo, jenže to ti nepomůže, ty potřebuješ zjistit tu stranu, to znamená, že bys mohla třeba udělat tenhle trojúhelník, ale to víš jenom jednu stranu.“	
	cm) - A.: „To víš všechny.“	
	cn) - N.: „No tuhle.. Jo, víš všechny (odmlka), protože tohle jsou tři.“ (myslí 3 dílky)	
	co) - K.: „Takže potřebuju barvičku.“	
	cp) - N.: „Tak to takhle obtáhnem.“	
	cq) - N. a K. se přetahují o práci, N. ustoupí	
	cr) - K.: „Tak a počítej.“, a chce podat papír a tužku N.	
	cs) - A. diktuje K.: „c^2 =“	
	ct) - K. píše $c^2 = a^2 + b^2$	Zaokrouhlování!!
	cu) - N.: „*a* je 1,5.“	$\sqrt{2,5} = 1,58$
	cv) - K. píše a počítá něco na kalkulačce. „Tak a teď..“	$1,5^2 = 2,25$
	cw) - N.: „Teď to musíš celý odmocnit.“	
	cx) - K.: „Jak to mám napsat?“	
	cy) - N.: „Já jsem to napsala takhle - jako krát.“ (ukazuje na úlohu 3a) – 2. způsob	- vyžádání pomoci při zápisu
	cz) - M.: „Já nevím, já jsem to napsala takhle.“ (ukazuje na úlohu 3b) – 2. způsob	
	da)- N.: „Protože ono jako musíš odmocnit celou tu rovnici, že jo, ne jenom to to..“	- algebraický problém

	db) - K.: „To je jedno.“, píše **dc)** - N (29:30): „A teď *c* = 0,25“ **dd)** - K.: „Ale vždyť tohle nemůže být 1,25“, a dívá se na A. (má v ní jistotu) **de)** - M. počítá na kalkulačce: „To je z 2,5 odmocnina, ne 0,25. (odmlka) To je divný, ne? Mně teda vyšlo1,5.“ **df)** - K.: „Je to 0,5.“ **dg)** - A.: „1,5“ **dh)** - K.: „Jo ne, já jsem to napsala špatně (úsměv), já jsem to napsala špatně (utvrzuje ostatní), ještě že to chápu. (odmlka) Takže..“ **di)** - A (30:10): „2,5.“ **dj)** - K. mrkne na kalkulačku a píše **dk)** - N.: „No a teďka dáš *c* krát *c* a tam dáš do kalkulačky na druhou.“, sleduje K. práci, „Na druhou dej, protože jinak ti to nevyjde <u>přesně</u>.“ **dl)** - K. počítá na kalkulačce – nevyšlo jí to: „Takže znova.“ **dm)** - N. sleduje K. při práci a přemýšlí, proč to nevyšlo <u>přesně</u>. **dn)** -K. počítá na kalkulačce a řešení jí vyšlo – zapíše to a zavolá Ex.: „Už to máme.“,, ostatním nevysvětlí, kde byla chyba, ostatní se jí ani neptají na chybu (možná únavou) (1s) **do)** - N.: „Už to máme.“ **dp)** - čekají 10s 	odmocňování součtu?? - viz 3c) - 2. zp. (psáno a škrtáno) - zvláštní důvod - jak jí to ale mohlo vyjít 2,5, když $1,5^2 = 2,25$???
11 <u>Komentář úlohy 3 – 2. způsob</u>:	**a)** -Ex.: „Takže vy jste postupovaly teď jak?“ **b)** - K.: „No, že jsme si (zmlkne)“ – obě zároveň **c)** - N.: „Že jsme si tam našly trojúhelník pravoúhlý a který má přeponu tu stranu a vypočítaly jsme z Pythagorovy věty..“ **d)** - Ex.: „A co jste vypočítaly z..“	

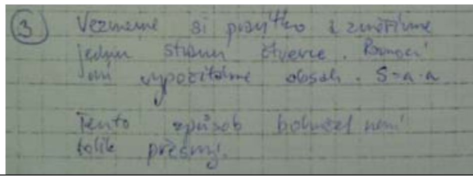
	e) - N.: „..co je to *c*.“, dodá **f)** - Ex.. zopakuje: „To *c*.“ **g)** - N.: „Mhm.“ **h)** - M.: „A vyšlo to stejně.“ **i)** - N.: „A potom jsme vypočítaly *c* krát *c*.“ **j)** - Ex.: „Mhm, pěkný. A ještě mám otázku. Nenapadá vás ještě jiné řešení?“ **k)** - M., N., A. útrpný výraz, K. se podívá na A. a usměje se **l)** - Ex.: Už vás nebaví nad tím přemýšlet?.. nad tím, jak by se to dalo jinak?“ **m)** - A.: „No, tak teďka, když víme, že jo, tyhle ty strany, tak se to (???)“ **n)** - Ex.: „Co když víme?“ **o)** - A.: „Ne, to už..“, nedořekne, zamítne tento návrh. **p)** - Ex.: „Jestli vás třeba nenapadne ještě jinak, jak by se to dalo řešit?“	
12 <u>Úloha 3 – 3. způsob</u>:	**a)** - všichni přemýšlí 25s **b)** - N.: „A ještě bychom tam třeba mohly vypočítat obsahy těch jednotlivých trojúhelníků, a pak toho čtverce a pak to sečíst, ale to by bylo strašný.“ (úsměv) **c)** - A.: „To radši neříkej, ještě bysme to musely dělat.“ **d)** - všichni smích **e)** - M (32:10): (??? Stejně to bude..???) **f)** - všichni smích **g)** - N.: „Stejně neumím vypočítat obsah trojúhelníku.“ **h)** - M. se ujímá vysvětlení: „To je..“ **i)** - K.: „Ošklivej vztah“ **j)** - N.: „To je nějaký to *v* něco, ne?“ **k)** - A. naznačuje tužkou vodorovně zlomkovou čáru **l)** - K.: „Ale musíš napsat, musíš vědět výšku.“ **m)** - A. důrazně: „Podstava krát výška (ukazuje tužkou kolmo) a děleno dvěma.“ **n)** - M. přikyvuje, že to tak je. **o)** - K.: „Jenže musíš vědět tu výšku, že jo.“ (utvrzuje ji) **p)** - <u>ZVONÍ</u> *(konec vyučovací hodiny)* **r)** - Dívky řeší, kdy půjdou na oběd, N. připomíná ostatním – teď bez přestávky, pak dřív na oběd, ostatní: „To je fakt.“ **s)** - A.: „Už to máme, paní učitelko.“	 - N. se nenechá odradit, (domácí vzdělávání) - Upadá pozornost, A. to nebaví -formálnost vztahu

	t) - K.: „Já myslela, že už máš ten třetí způsob?“	
	u) - A.: „Ten třetí způsob.. Tak jako můžeš to vysvětlit.. když jako si vypočítáš výšku a..“	
	v) - K.: „Ale nějakej jinej způsob?“	
	w) - A. důrazně dokončuje svou myšlenku: „..a výšku si ani počítat nemusíš, protože to je výška v pravoúhlým, že jo, to je ta strana.“ (vysvětluje)	- tj. v úloze 3a) 3.zp?
	x) - všichni A. poslouchají	-nechtějí mít plonkový čas, samy diskutují
	y) - K.: „Ne ne. Výška je vždycky kolmice k tomuhle tomu.“	
	z) - N.: „No vždyť jo. (ukazuje) Tady máš kolmici, když tam je pravý úhel.“, vysvětlí a podívá se na K.	
	aa) - K.: „Ne, ale to je kolmice kdekoliv.“	-formální poznatek ?
	ab) - M.: „No a vždyť když by to byl tenhle ten trojúhelník, tak tam máš kolmici tady.“, ukazuje	- přebrala
	ac) - A.: „Ale vždyť tady záleží na tom, podle toho, z jaký strany se na to kdo kouká.“	- zamotá to
	ad) - N. se směje	
	ae) - K.: „Já koukám z týhle strany“	
	af) - M.,N., K. smích	
	ag) - Ex. pro všechny 4 skupinky (34:11): „Teď budeme pokračovat bez přestávky a skončíme dřív.“	
	ah) - A.: „Tak jestli tam chcete psát nějaký ty..“	
	ai) - K.: „Už ne.“	
	aj) - N.: „Já nevím, jako nechce se mi, tak ale co tady budeme dělat?“	- sociální
	ak) - A.: „Půjdem dřív na oběd.“	
	al) - K.: „Vždyť ale říkala, že ještě jeden.“ (myslí způsob)	
	am) - A.: „Jo, ale ten bude třeba ještě těžší.“	- A. straší K., chtějí splnit práci, ale ne se tím moc zabývat, nechtějí se pouštět do složitostí)
	an) - K (34:20): „No ale tím můžem (??vyplnit??) zbytek tý hodiny a můžeme vybarvovat. (2s) Já jdu vybarvovat.“	
	an) - M. pozoruje Ex.	
	ap) - A. a N. pozorují K.	
	- (11s)	- K. chce pořád malovat
	aq) - N.: „Já vím. Třeba si vzít pravítko (bere pravítko ze svého penálu) a třeba to	

	změřit.. tu jednu stranu (dívá se na A.), a pak to normálně to..“	
	ar) - A. se ujímá psaní (viz úloha 3a) – 3. způsob)	
	as) - M.: „Praktická rada: Vezměte si pravítko.“ (vtipně, smích)	
	at) - K.: „Napíšem to u všeho?“ (tím chce pravděpodobně ostatní navést k pečlivosti)	
	au) - N.: „Takže tady změříme přesně..“ , a měří	
	av) - K.: „A není to přesně.“ (odporuje jí)	
	aw) - N.: „Je to přesně. (odmlka) Ono to sice není vidět, ale to bude..“ (nenechá se rušit)	- přesnost x pečlivost
	ax) - K.: „Není to přesně. (zpozorní)	
	ay) - N.: „Je to 7,2.“ (měří délku strany čtverce v úloze 3a))	
	az) - K.: „No ale tady ti to vyšlo jinak. (ukazuje na výpočet v úloze 3a) – 2. způsob) Když počítáš 7,2, tak to nebude přesně.“	
	ba) -A. stále nerušeně píše (3 řádky v úloze 3a) – 3. způsob), ostatní čekají, až dopíše, pak se zeptá: „Mám to psát všechno?“ (úsměv), ostatním nepřečte, co píše	
	Řešení úlohy 3a) – 3. způsob:  ③ vezmeme si pravítko a změříme jednu stranu. Pomocí ní vypočítáme obsah. S = a·a Tento způsob bohužel není tolik přesný.	
	bb) - K.: Jo.	
	bc) -A. píše dál (v úloze 3b) – 3. způsob)	
	bd) - N.: „A co tam vůbec píšeš?“	
	be) - M., N., K. to společně polohlasem přečtou; A. se nenechá rušit a píše <u>totéž</u> (5s) ostatní čekají	
	bf) - N.: „A napiš tam, že to není moc přesný, protože pravítko máme jenom milimetrový.“	- N. nepřiznala svou chybu, <u>převzala myšlenku „nepřesnosti“</u> Katky
	bg) - K.: „To spíš ten papír není moc přesný.“	- nepřesnost – ? chyba v pravítku x nákresu
	Řešení úlohy 3b) – 3. způsob:  ③ Vezmeme si pravítko a změříme jednu stranu čtverce. Pomocí ní vypočítáme obsah. S = a·a Tento způsob bohužel není tolik přesný.	

bh) - N. (úsměv): „Jo, ten obrázek je vlastně nepřesnej, protože ty velký puntíky – to se tam nedá vůbec měřit přesně.“ (úsměv) (6s)
bi) - K.: „Pravítko není přesný, papír není přesný, takže to nemůže vyjít (3s). Ne, spíš to (36:37??? načrtnutí)- tam je nepřesnost. Protože my to bereme, že to je půl a ono to není půl.“
bj) - N.: „To je půl, protože to je čtverečkovanej papír.“
bk) - K.: „Jasně, ale třeba jako... to posunout?“
bl) - N. přemýšlí, co tím K. může myslet (3s): „To není, když to musí být v tom.. jak se to jmenuje? V uzlových bodech. Tak to musí být přesně! To nemůže být posunutý.“
bm) - A. stále píše
bn) - K.: „Hele, takže ten čtverečkovanej papír má třeba ne 0,5, ale 0,4
bo) - N.: „To už je ale problém toho papíru.“ (úsměv)
bp) - K.: „No právě.“
bq) - N. a K. smích, ale nevyřeší to (4s)
br) - N.: „Hele, a jak by to vyšlo, kdyby to bylo takhle? (přiloží pravítko a měří) Tady jsme říkaly, že to.. (měří v úloze 3a)) No, tady je to 7,7 (přeměří to), 7,2 mi vyšlo.“
bs) - M.: „To už je (30:50??? po, půl) centimetru.“
bt) - N.: Ne! Jako ty strany.“
bu) - K. jim vezme pravítko i pracovní list s úlohou 3a
bv) - N. dále vysvětluje: „Ta strana jedna je 7,2 mm.“
bw) - M.: „Milimetrů.“
bx) - K. přeměřuje: „To máš nějak divně.“
by) - N.: „Nemám to divně.“
bz) - A. právě dopsala i řešení úlohy 3c) – 3. způsob

Řešení úlohy 3c) – 3. způsob:



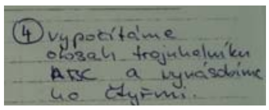
- problém měřítka
- problém měřítka (dílek má délku 0,5, nebo 0,4 cm?) – mohly nasadit obecnější strategii (jednotka 1)
- K. řeší problém „jednotka“

→ **tradiční přístup** – milimetrový papír (1 jednotka = 0,5 cm), nezvolí si to chytře/vhodně

---

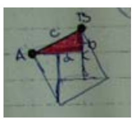
ca) - K. přeměřuje znovu pravítkem úlohu 3a): „Jeden, dva, ..., pět, šest, sedm.. (2s) Podle mě je to 75. 0,75.“, otočí se na N.: „0,75.“
cb) - N.: „Jo, to odpovídá.“
cc) - A.: „Co jste tam teď chtěly psát?“
cd) - K. a N. (společně): „Že 0,75..“
ce) - K.: „Ty jsi říkala..
cf) - N: „Tak já to tam napíšu..“, píše v úloze 3a) – 4. způsob čtyřku v kroužku a přemýšlí, co vlastně bylo tím dalším způsobem řešení
cg) - K.: „Vždycky si můžeš napsat čtvrtej, že se rovná jako..“
ch) - A.: „Co tam počítáte?“
ci) - K.: „Řešení a).“
cj) - A.: „Jo, obsah jednotlivých trojúhelníků a čtverců, který se..“
ck) - K.: „A pak to sečteme.“ (úsměv)
cl) - N.: „Tady u toho teda vypočítáme obsah.“ a píše:

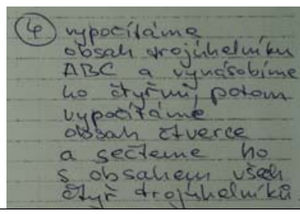
Řešení úlohy 3a) – 4. způsob:



cm) -K. povídá A.: „A když máš pravítko, tak můžeš dělat .. (2s) můžeš si ty trojúhelníky vymejšlet, jak chceš, že jo (*přesvědčující charakter*), můžeš třeba takhle rozpůlit to (ukazuje na obrázku 3c))
cn) - N. sama píše dále řešení úlohy 3b) – 4. způsob, ostatní nesledují práci N., když N. píše ABC, označí zároveň jednotlivé vrcholy také v obrázku A, B, C

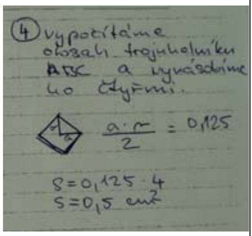
Řešení úlohy 3b) – 4. způsob:

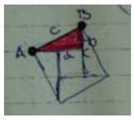
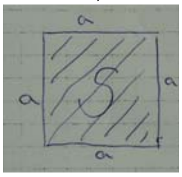


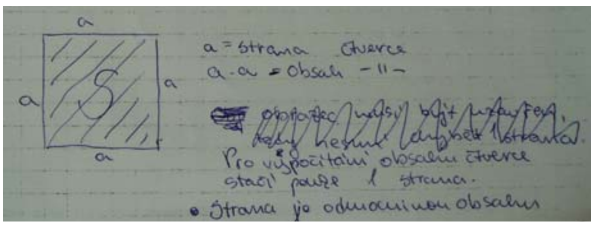


- nechce přiznat chybu
- toto půlení už dál nerozvíjí
- pečlivost

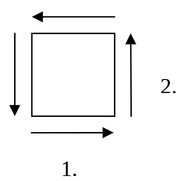
13 Komentář úlohy 3 – 4. způsob:	**a)** - Ex. jde kolem, K. toho využije: K.: „Už to máme.“ **b)** - N.: „Já ještě píšu.“ **c)** - Ex.: Takže.. Ještě píšete, jo? Takže vám mám..“ **d)** - K.: Ale my už .. To už je..“	
	e) - N.: „Ale to nemůžu, protože u každého je to jinak.“, a píše dál řešení úlohy 3b) – 4. způsob **f)** - A.: „Já jsem to taky napsala ke všemu stejně.“ (smích)	- nenechá se odbýt
	g) - N.: „No, ale tady je to trošku jinak.“ **h)** - K.: „To je jedno.“ (už ji to nebaví) **i)** - Ex.: „Tak a kolik tam teda máte.. Ty první dvě jste mi už komentovaly, že jo? A ten třetí? **j)** - A.: „Změříme ty strany a vypočítáme.“ **k)** - Ex.: „A vypočítáte, mhm, dobře.“	- vlastní objev N. – je ráda, že to odhalila
	l) - N.: „Ale je to docela nepřesný (odhlédne od své práce), protože jako tam to má ty malý čárečky.“ **m)** - Ex.: „Mhm.“, zapřemýšlí, co tím N. myslela (4s), ale nechce se tím zabývat, uvědomuje si, že to teď není podstatné, „Takže to asi nikam nevede tohle řešení? (Ex. se ujišťuje) **n)** - A.: „Je přibližné.“ **o)** - Ex.: „Přibližné, dobře. A to čtvrté řešení? Čtvrtý způsob?“ **p)** - N.: „Jako že se vypočítají ty jednotlivý… jako co tam jsou trojúhelníky a čtverce, jejich obsah, a pak se to sečte.“ **q)** - Ex.: „Tak a můžete mi to sem nakreslit, jak to myslíte?“, Ex. ukazuje na úlohu 3a) – 4. způsob **r)** - N. se dívá nechápavě **s)** - Ex.: „Jak že se vypočítají ty jednotlivý trojúhelníky? Jak postupujete?“ **t)** - N.: „No jako že vypočítám tady..“	- N. se vrací k problému nepřesnosti (chce se prosadit)
	u) - Ex.: „Tak si tady nakresli ten čtvereček, tak si to překreslete.“ **v)** - N. kroutí hlavou, nechápe moc, co po ní Ex. chce, N. kreslí čtverec, dokresluje strany *a* a *v* (zatím neoznačuje příslušné strany) a začne se usmívat, už ví: „A vypočítám obsah toho trojúhelníku.“ **w)** - K.: „Ale to je stejný řešení jako tohle.“, ukazuje na řešení úlohy 3a) –	- Ex. navádí k řešení

	1. způsob **x)** - N. (2s): „Není. Tady vypočítáš obsah trojúhelníku a vynásobíš to čtyřma.“ **y)** - Ex.: „A v čem se teda liší ten první a čtvrtý?“ **z)** - K.: „No, že tady se to násobí (ukazuje na 1. způsob) a tady se to sčítá (ukazuje na 4. způsob).“ (smích) **aa)** - N.: „No, jako že .. Tady jako by..“ **ab)** - Ex.: „Tak jak tady vypočítáte.. tady počítáte ty čtverečky (ukazuje na 1. způsob) a tady obsahy trojúhelníků (ukazuje na 4. způsob).“ **ac)** - N.: „Tady počítáme čtverečky a tady obsah trojúhelníků.“, opakuje po mně **ad)** - Ex.: „Tak a jak se vypočítá ten obsah trojúhelníku tedy?“ Konkrétně?“ **ae)** - N. se s úsměvem dívá na A.	
	af) - A. uplatní: „Podstava krát výška děleno dvěma.“ **ag)** - Ex.: „Podstava krát výška.. Základna krát výška děleno dvěma. (Ex. opravuje terminologii) Hm, tak to vypočítejte.“ **ah)** - *ZVONÍ (začátek 6. vyučovací hodiny)* **ai)** - N. vyžaduje pohledem pomoc od A. **aj)** - A. ukazuje v obrázku strany v a a	- využití předešlých znalostí
	ak) - N. označuje v obrázku stranu v a a : „v je tohle, že jo?“, a píše: „a krát v lomeno dvěma?“ **al)** - A.: „Jo.“ **am)** - N. přemýšlí (3s) a zatím počítá na kalkulačce **an)** - K.: „A proč v?“, nikdo jí neodpovídá **ao)** - A.: „A to je 0,125. 0,125 krát 4 je 0,5.“ **ap)** - N. „Žádná celá?“, N. nechápe teď moc, co má psát (co je těch 0,125); zatím napsala: $\frac{a \cdot v}{2} = 0,$ **aq)** - A.: „125.“ **ar)** - N.: „125. S rovná se 0,125 krát 4.“, a zapisuje S = …  *Řešení úlohy 3a) – 4. zp.*	- potřebuje schválení
	as) - A.: „0,5.“ **at)** - N. píše 0,5 cm^2 **au)** - Ex.: „Mhm, dobře.“	- pečlivost

	- **av)** - N.: „A u těch dalších to taky máme dělat?“, N. se ptá Ex. - **aw)** - Ex.: „Tak jak byste tam postupovaly u těch dalších?“ - **ax)** - N.: „Stejně.“ - **ay)** - Ex.: „To znamená jak?“ - **az)** - N.: „Že bychom vypočítaly obsah tady toho trojúhelníku (ukazuje na červený trojúhelník) a obsah tady toho čtverce a ten obsah toho trojúhelníku bychom vynásobily čtyřma a přičetly k tomu obsahu čtverce.“ - **ba)** - Ex.: „Mhm, tak jo, tohle myslím, že už můžeme opustit a tady máte poslední úlohu.“	
14 Úloha 4	**a)** - M. se ujímá čtení zadání, čte nahlas zadání úlohy č. 4 **b)** - A.: „Vztah mezi délkou strany čtverců a jejich obsahem. (4s) Tak si namalujeme čtverec. (3s) Namaluj nějakej čtverec.“, A. zaměstná M. **c)** - M.: „Větší, menší?“ **d)** - A.: „Větší, ať se to počítá líp. Teda..“ , hraje si s pravítkem **e)** - M. kreslí čtverec dole uprostřed na pracovním listě (čtverec 5 x 5, nenatočený, tedy čtverec 5 – 0)  **f)** - A.: „Zaznamenej vztah mezi délkou strany..“ **g)** - N.: „A obsahem?“ **h)** - A.: „.. a obsahem.“, přemýšlí nad zadáním **i)** -(6s) A., M., N. přemýšlí nad zadáním; K. se otáčí na jinou skupinu **j)** - N.: „No tak prostě *a* krát..“ **k)** - M.: „no tak napíšeme *a* rovná se strana; a *a* krát *a* je obsah, nebo já nevím (kroutí hlavou, popisuje čtverec pomocí strany *a*) **l)** - K.: „To je závislost na *a*, že kdyby nebyla strana, tak není ani obsah.“ **m)** - A.: „No.“ **n)** - K.: „Ale to je opravdu, to je vážný.“, nevěnuje pozornost matematice **o)** - A.: „A kdyby nebyl obsah..“ (smích) **p)** - K.: „Tak není ani čtverec.“ (smích 3s) „No ne (vážně), ale kdyby tady třeba ta	- poprvé vysloven pojem „závislost“ (ne vztah – viz zadání) - nechápou zadání

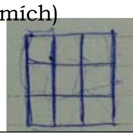
	jedna strana nebyla (ukazuje na čtverec 5 – 0), tak (3s, zamyslí se).. Aha. **q)** - N.: „No musí tam být všechny, protože musíme mít všechny čtyři strany,..“ **r)** - K.: „Stejně dlouhý.“ **s)** - N.: „..abychom mohly mít obsah.“ **t)** - A.: „Ten objekt musí být uzavřenej, že jo.“ **u)** - M. opakuje: „Objekt musí být uzavřený.“, a píše to. **v)** - K.: „Objekt?“ **w)** -A.: „To nemusíš psát takhle doslova, můžeš to vymyslet nějak líp.“ **x)** - M.: „Čtverec musí mít..“ **y)** - A.: „Jenže to není čtverec, kdyby nebyl uzavřený.“ **z)** - K.: „To je pravda.“ **aa)** - A.: „Tak..“ **ab)** - M.: „Těleso.“ - chybná terminologie **ac)** - A.: „Těleso..“ **ad)** - K.: „No ale těleso..“ - korekce terminologie **ae)** - A.: „Obrazec..“ **af)** - K.: „..těleso je 3D.“, ukazuje pomocí rukou prostor, „kouli“ **ag)** - A.: „..musí být uzavřený.“ **ah)** - M. píše  **ai)** - N.: „Napiš tam, že to znamená, že nesmí chybět ani jedna strana. **aj)** - K.(46:04) vznese námitku, že to tak není, že může... **ak)** - N.: „Nemůže.“ **al)** - M. píše a diktuje si: „Tedy nesmí chybět jedna strana.“ **am)** - K.: „Když se počítá, že jo *a* krát *a*, tak tam ti stačí jedna strana.“	úlohy - „Aha“ – efekt/ moment (K. pochopí zřejmě, že jsou dány všechny 4 strany, nemůžou být dány třeba jen 3 strany – otázka omezení plochy, uzavřenost obrazce), N. má zřejmě obdobné uvažování – převzato od K.??? - A má přirozenou autoritu, dává však možnost ostatním lepšího přeformulování atd. - Spor mezi

	an) - N.: „No to jo, ale kdyby tam chyběla ta jedna strana, tak nemáš čtverec. Takže nemůžeš počítat obsah čtverce.“ (smích) **ao)** - A.: „Kdybych měla někde nakreslenou tuhle čáru a tuhle čáru a pomocí těch dvou bych počítala obsah čeho?“ (A. a N. se smějí) **ap)** - K.: „Buď obdélníku nebo čtverce.“ (vážně) **aq)** - A.: „Je fakt, že jo, kdybys měla takhle dvě strany..“ **ar)** - N.: „No, ale ty tam nemáš žádnej čtverec.“ **as)** - K.: „To bys tam pak dokreslila, že jo.“ **at)** - A.: „Je fakt, že by to byl obsah toho.., ale nebylo by to tam nakreslený.“ **au)** - K.: „No byl by to obsah.“ **av)** - A.: „Byl by to obsah.“ **aw)** - M.: „Tady jsme si to nakreslily celý, že jo.“, ukazuje na svůj obrázek **ax)** - N.: „No.“ **ay)** - A.: „Hele, vem si..“ **az)** - K.: „Tady nemáš žádnej jinej čtverec **ba)** - A.: „Takhle máš papír, měla bys tam nakreslený takhle dvě čáry.“ **bb)** - K.: „No a jak bys počítala obsah?“ **bc)** - A.: „*a* krát *b*. Tak to ti vypočítá obsah čtverce, jenom to tam nemáš namalovaný.“ **bd)** - K.: „Právě.“ **be)** - N.: „*a* krát *a* v tomhle případě, že jo.“, N. opraví A. **bf)** - K.: „Takže ti prostě stačí jedna strana, teda dvě strany. **bg)** - N.: „No jedna strana ti nestačí.“ **bh)** - A.: „Jedna ti stačí. (2s) Napiš tam, že pro vypočítání obsahu čtverce stačí pouze jedna strana.“ **bi)** - M. píše **bj)** - K. a N. se usmívají na jinou skupinku, která sleduje jejich bouřlivou debatu **bk)** - N. neřeší dál co…, asi souhlasí… **bl)** - A.: „No, tak já nevím, (47:12??? Jestli to po nás chtějí) **bm)** - M.: „No, tak tam nebudeme psát, že obrazec musí být uzavřen.“, a škrtá tyto dva řádky **bn)** - K.: „To je jedno.“	<u>geometrickým chápáním čtverce</u> a vzorcem pro výpočet obsahu čtverce (N.: ohraničení roviny/čtverce v geometrii x K.: závislost, vzorec) - spor mezi chápáním čtverce a danými údaji k výpočtu obsahu čtverce

	bo) - N., K. sledují ostatní skupinky **bp)** - A. na skupinku Anežky: „Vy máte nápovědu?“ **bq)** - M. píše dál, dopíše a směje se. (6s), M. na Ex.: „Už to máme.“ **br)** - čekají (4s) **bs)** - N.: „Hele, musíme udělat víc čtverců, tady je délkou strany čtverců.“ **bt)** - K.: „Co?“ **bu)** - N.: „Nic.“ (smích) (3s) „Ne, to je blbost, prosím tě, to je obecný, víš?“ **bv)** - M.: „Nebo ještě můžeme udělat takhle šipečky, jako že takhle.“, a ukazuje:  **bw)** - K.: „A k čemu to bude?“ (smích) **bx)** - M.: „Tohle je jako celkově..“ **by)** - N.: „Cože?“ (úsměv) **bz)** - (58s) čekají na Ex., nevěnují se příkladům, hrají si s pastelkami **ca)** - N.: „Tohle jako souvisí se čtvercem, jo?“, K. a A. šermují pastelkami **cb)** - (59s) čekají **cc)** - A.: „Paní učitelko, my už to máme.“ **cd)** - K.: „My už to máme.“ **ce)** - Ex.: „Jo, hned přijdu.“ **cf)** - (17s) čekají **cg)** - N.: „A nenapadá vás ještě něco?“ (vtipně) **ch)** - (24s) čekají **ci)** - A.: „Holky, napište, že strana je odmocnina obsahu. (2s) To jsem slyšela tamhle vedle.“ (smích) **cj)** - M. píše **ck)** - K.: „To jsme na to přišly pěkně.“	- N. si všimne množného čísla v zadání

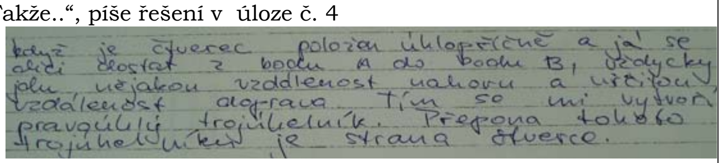
	cl) - A.: „Paní učitelko!“	
	cm) - Ex.: „Tak. Mhm. Takže na co jste přišly?“	
	cn) - M.: „Takže vlastně ta strana *a*, to *a* je strana čtverce a *a* krát *a* dá obsah, takže jsou v tom vztahu.“	Komentář úlohy 4
	co) - Ex.: „Mhm, jo.“	- Ex. tím chápe, že pro výpočet obsahu čtverce stačí znát délku strany.
	cp) - M.: „Pro to vypočítání obsahu čtverce nám stačí teda jenom jedna strana.“	
	cq) - Ex.: „Stačí jedna strana, mhm. (51:40) Dobře, takže tohle to je správně, ale já jsem měla na mysli trošičku.. já jsem to možná nezformulovala úplně správně. Ale já jsem měla na mysli vztah a závislost mezi těmi danými údaji. To znamená – vy jste si všimly, že tady ty čtverce jsou takhle různě nakloněný, natočený, že jo?“	
	cr) - N. kývá	
	cs) - Ex.: „Tak mezi těmi určitými údaji, které.. Když se podíváte na všechny ty úlohy tady.. (Ex. srovnal úlohu 1 – 3 vedle sebe) Když se na to podíváte, tak vlastně, když použijete ty údaje, které tu máte, tak /úkolem je/, abyste se pokusily na základě těch údajů, které tu máte, tak abyste se pokusily vymyslet, jaká tu existuje závislost mezi těmi údaji a tím obsahem. Já nemyslím teď jenom na základě té přepony, ale z těch nějakých dalších údajů – podle toho, jak je třeba ten čtverec orientován. Tak jsem to měla na mysli.“	- přepona – nápověda?
	ct) - dívky přemýšlí (4s), pak se začnou smát	
	cu) - Ex.: „To je jasný, že obsah čtverce se vypočítá v tomto případě *a* krát *a*, to je jasný, jo? Ale mně jde o to, že ten čtverec, který tu máte v té čtvercové síti je nějak natočený.“	
	cv) - A., M., N., K. se smějí	
	cw) - K.: „Ale vždyť to je jedno.“	
	cx) - A.: „To je jedno, jak je natočený. Vždyť to má pořád stejně dlouhý strany i obsah.“	- zopakuje myšlenku vedlejší skupiny
	cy)-M.: „Dobře a ještě strana je tedy odmocninou obsahu.“, čte z pracovního listu.	
	cz) - Ex.: No to jo, to určitě platí, jo, ale já jsem teď spíš měla na mysli, protože vy neznáte tu délku strany *a*, tu vy neznáte, jak je dlouhá ta přepona.“	
	da) - A.: „No známe.“	
	db) - Ex.: „Když to vypočítáte, ale když to neznáte.. Vy víte, jak jste tady postupovaly – jo?, že třeba z toho áčka /myslí bod A z úlohy 1/ se dostanete do	

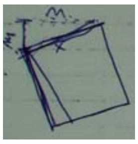
	béčka /bod B/ a vy víte, že jeden bod je tady a druhý bod je tady a aniž byste počítaly délku strany (Ex. ukazuje na úlohu 3c)) – tak jakým způsobem byste vypočítaly ten obsah? O to mi jde.“	
	dc) - M.: „Tak bychom tam napsaly jen *a* krát *a*.“	
	dd) - Ex.: „No, dobře, ale vy to *á*čko neznáte. To *á*čko neznáte. To jste počítaly. I tady jste ho počítaly.“, Ex. ukazuje na úlohu č. 3	
	de) - N.: „No tak že to je jako … ta strana…	
	df) - Ex.: „Tak zkuste se nad tím zamyslet.“	- N. hledá nějakou závislost (z předcházejících úloh)
	dg) - N.: „Tady u toho (ukazuje na úlohu 3a) – 2. způsob), že 0,707 a obsah je 0,5, to znamená, že ta strana je trochu delší než je potom obsah toho čtverce.“ (úsměv)	
	dh) - M. úsměv	
	di) - K. smích na A.	
	dj) - K.: „Co?“	
	dk) - A.: „Nemůžeš porovnávat délku strany s (???)	
	dl) - N.: „Ale tady to neplatí.“	
	dm) - M.: „Protože to máš v cm^2.“ (úsměv)	
	dn) - N.: „Protože tady už to neplatí, tady je to už zase menší.“	
	do) - A.: „Ale nemůžeš porovnávat cm a cm^2.“	
	dp) - N.: „Ale to je jedno.“	
	dq) - M.: „To není.“	- vymýšlí jiný způsob
	dr) - N.: „Tak já nevím., mě nic jinýho nenapadá.“	
	ds) - A.: „A když bych použila.. (všichni smích) A když bych použila stranu *a*. Jak vypočítáme obsah? Pomocí těch čtverečků?“	
	dt) - N. smích	
	du) - K. odpoutává pozornost: „Měla by sis pořídit větší penál.“ (smích)	- dívky nevědí přesně, co mají počítat
	dv) - A.: „Tak něco vymyslete, holky. (5s) Já přemýšlím, co… (10s) Já dneska nemám fakt (???)…“	
	dw) - K.: „Já taky přemýšlím.“	
	dx) - (1min 58s) čekají, neřeší úlohy	
	dy) - K.: „Takže máme stranu *a*.	- otázka měřítka
	dz) - M.: „Já bych vypočítala přesnej obsah.“	

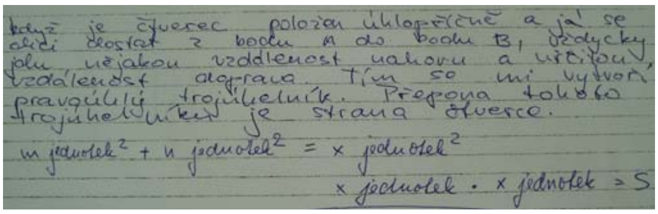
	ea) - N.: „Tak potřebujeme vědět stranu a (3s) a nebo potřebujeme vědět, jak jsou velký čtverečky.“ **eb)** - A.: „Já nevím, co po nás chce.“ **ec)** - N.: „Ale hlavně mně to vůbec nemyslí!“ **ed)** - A.: „Já bych počkala na ten (??? 57:52)“ **ee)** - N. dopisuje (10s) ještě zpětně řešení v úloze 3b) – 4. způsob, který před tím nedopsala, protože přišel Ex. **ef)** - pak (32s) dívky nepracují na úlohách *59:00 KONEC 1. část*	
15 0:00 2. část	**a)** - Ex. jde vyměnit další disky v ostatních skupinách **b)** - dívky nepracují, N. skládá pastelky **c)** - N. (1:30): „Co teď budeme dělat?“ (znuděně) **d)** - A. zívá: „Obsah je (???)“ **e)** - N. (1:44): „Jenže to nemá jako to.., protože tohle je 1,11, pak je to 1,25 (u a)), tady 0,7, pak 0,5, a tady je to 1,5 a pak je to 2,5 (u c)), takže to vůbec nedá (??) **f)** - Ex. otáčí disk u vedlejší skupinky (2:11), N. to vyruší **g)** - dívky nepracují 1min 37s **h)** - Ex. (3:48): „No, holky, na co jste přišly? **i)** - N.: „Na nic.“ **j)** - A.: „Nás už nějak nic nenapadá.“ **k)** - Ex.: „Ale tak to.. Ta závislost vás nenapadla žádná? Takže já vám dám nápovědu teda. Chcete nápovědu?“ **l)** - N., A. „Hm, tak jo.“ (odevzdaně) **m)** - Ex. (4:04): „Tady máte nápovědu.“ **n)** - M. čte nahlas **o)** - N. si vezme papír a čte si zadání ještě jednou. **p)** - M.: „Máme si vytvořit nějaký tabulky.“ **q)** - N. (4:59): „Jako že by musely být takto.“, a ukazuje svisle rukou (smích) **r)** - A. (5:07): „Takový toto.“, ukazuje na úlohu č. 1a) **s)** - N.: „No, ale to není o čtverci přeci, tam neděláš žádný…“ (smích) **t)** -(13s) 	- pokouší se dotáhnout svou myšlenku, i přes to, že A. před tím protestovala (porovnávání cm a cm^2) – problém měřítka, kdyby pracovaly s 1 j, ne 0,5 cm, bylo by řešení snazší - pracovní list – 1. nápověda

	u) - A.: „můžu se kouknout na to? (9s) No to je jednoduchý..“, vezme si pracovní list Úloha 4 (1. nápověda), „Tabulka.“, a kreslí tabulku, „To je tabulka, zafixujete svislé kroky..“, kreslí svisle, „..a necháte probíhat vodorovné.“, obtahuje vodorovně (smích), „..od 0 do ..“ (8s) **v)** - A.: „Všechny možnosti jo?“ **w)** - M.: „Jakoby těch čtverců?“ **x)** - A kreslí – obtahuje různé cesty **y)** - N.: „A co z toho máme?“ **z)** - K.: „A ještě můžeš dělat šipky u čtverců.“, ukazuje tužkou na jednotlivé čtverečky) **aa)** - A. obtahuje dál a rozmýšlí, co s tím.. **ab)** - K.: „Těch bude trochu víc.“ **ac)** - A.: „15.“ **ad)** - K. jezdí tužkou po papíru v tabulce **ae)** - N.: „No ale tam nejsou nakreslený.. A navíc se můžeš pohybovat jenom vodorovně a svisle. Takže ty tam nemůžou být.“ **af)** - K.: „Ale jsou tam.“ **ag)** - (7s) **ah)** - N.: „Ale čeho tabulky?“ **ai)** - (11s) **aj)** - A.: „Mně je hrozný vedro a chci domů.“ **ak)** - Smích **al)** - (48s) **am)** - Ex.: Tak, holky se tady zatím rozutekly, tak se vám jdu hned věnovat. Takže?“ **an)** - A.: „My jsme vytvořily tabulku.“, ukazují tabulku v úloze č. 4 (1. nápověda) **ao)** - Ex.: „No tak se.. Kde máte zpátky ten papír, jak jste na něj psaly tu 4. úlohu?“, Ex. hledá pracovní list s úlohou č. 4, „Tak vy jste tady dobře určily, nebo jste řekly, že obsah je a krát a, no a teď když se podíváte zase znovu na tady ten čtverec (Ex. ukazuje čtverec 3 – 1 v úloze 3c)) a vy vlastně nevíte.. Když byste neznaly tuhle tu délku tý strany, délku tý strany c.. (Ex. napomíná skupinu kluků vedle 9:25) Jo, takže když nebudete znát tuhle délku strany, tak čím je ta	- řeší něco jiného (myslí si „cesty“ – vodorovné a svislé) - propedeutika kombinatoriky -jedna ze skupinek skončila, odchází

	úsečka charakterizovaná?“ **ap)** - A.: „No, že někde končí a někde začíná.“ **aq)** - Ex.: „No, ale jak? Tak čím se liší třeba tyhle ty dvě úsečky třeba?“, ukazuje na strany ve čtverci 1 – 1 (úl. 3a)) a 3 – 1 (úl. 3c)) **ar)** - A.: „Jsou různě dlouhý.“ **as)** - Ex.: „Jsou různě dlouhý. Ale jak byste je definovaly? Jak jsme si tady třeba došly z bodu A do bodu B?“ **at)** - A.: „No vodorovně a svisle.“ **au)** - Ex.: „No zkuste tedy ty úsečky charakterizovat stejně. (3s) Tak, to by bylo úhlopříčně a dokážeme se z toho jednoho bodu dostat do druhého bodu?“ **av)** - A.: „(Dokážeme??)“ **aw)** - Ex.: „No a jakým způsobem? Vždyť se můžeme vlastně pohybovat jen vodorovně a svisle.“ **ax)** - N.: „No nahoru a ..“, ukáže rukou vodorovně. **ay)** - Ex.: „Tak. A když si to vezmete, že jdete několik cest nebo několik čtverečků nahoru a několik čtverečků doprava, no tak jak byste pomocí těch údajů dokázaly vyjádřit ten obsah? (3s) Protože tak můžete charakterizovat každý čtverec, ne?“, otáčením ruky naznačuje různé polohy čtverce. **az)** - N.: „Vždycky jdu nějak nahoru a doleva.“, dívá se na pracovní list shora. **ba)** - Ex.: „Tak, vždycky.“ **bb)** - M.: „Tak jako že popsat všechny ty čtverečky, které jsou uvnitř toho velkého čtverce?“ **bc)** - Ex.: „To možná ani nemusíte, jo? Ale vy, jak teď N. řekla, že vy jdete, že jo, vždycky někam nahoru a někam doprava nebo doleva. Tak pomocí těchto cest – jak byste dokázaly vypočítat obsah toho příslušného čtverce?“ **bd)** - N.: „No tak tam uděláme trojúhelník pravoúhlej.“ **be)** - Ex.: „Tak to zkuste tady popsat do té čtyřky. Přesně to, co teď N. říká.“ **bf)** - K.: „Co jsi řekla?“ **bg)** - N.: „No tak, když mám čtverec, když je úhlopříčně, tak..“ **bh)** - A.: „Prostě vždycky počítáš obsah tady toho trojúhelníku (3s, položí hlavu na lavici), ale to už jsme dělaly.“ (znuděně) **bi)** - M.: „Počkej, ale ona říkala podle..“	Navedení – převzetí od Ex. - nepřeskočila jsem nějaký krok/konstrukci?? - nepochopila

	bj) -N. (11:28): „Takže..“, píše řešení v úloze č. 4  když je čtverec položen úhlopříčně a já se chci dostat z bodu A do bodu B, vždycky jdu nějakou vzdálenost nahoru a určitou vzdálenost doprava. Tím se mi vytvoří pravoúhlý trojúhelník. Přepona tohoto trojúhelníku je strana čtverce. **bk)** - M.: „Co to je polo..“ **bl)** - N.: „Položen úhlopříčně a (diktuje si) A… B…vždycky…. doprava….“ **bm)** - ostatní nespolupracují **bn)** - A. (13:58): „Ukaž.“ **bo)** - N.: „No a i když teda nemám žádný měřidlo, čím bych to mohla změřit, tak prostě si můžu určit nějakou jednotku, kterou.. kterou jako si určím ´jedna´ - nějakou vzdálenost..“ **bp)** - A.: „No vždyť jo.“, souhlasí, ale nevyslovila to **br)** - N.: „No a prostě potom z toho prostě vypočítáme tu vzdálenost.“ **bs)** - K.: „No, takže už to máme, že jo? .. Už to máme.“ **bt)** - A. (14:30) si vezme pracovní list a přečte si to. „Paní učitelko, tak my už to asi taky máme. (5s) Paní učitelko.“ **bu)** - čekají (27s) **bv)** - N.: „Mám to tam napsat s těma těma těma?“ **bw)** - A.: „A s čím čím?“ **bx)** - A., M., N. smích **by)** - N.: „S těma jednotkami?? Že bych to napsala s těma jednotkama. Nebo jak?“ **bz)** - A.: „Jako co chceš napsat?“ **ca)** - N.: „Já nevím. Tak to řeknem.“ **cb)** - čekají (2min 25s), mezitím si to M. ještě jednou přečte, co napsala N. **cc)** - N.: „My jsme tady ještě napsaly to, co jsme před tím tady říkaly.“ **cd)** - Ex.: „No a co? Tak mi to řekněte stručně, ať teď nemusím číst těch 6 řádků.“ **ce)** - N.: „Já píšu velkým, ale to je jedno.“ (smích) „Takže jako že ten čtverec, když je položen úhlopříčně, tak jdu pokaždé nějakou dobu nahoru, když se chci dostat z toho A do B, a nějakou dobu prostě doprava nebo doleva.“	- to je Pyth. věta!!! - <u>individuál. konstrukce!!!!</u> - ?? - <u>převzato, ale konstruuje dál?</u>

	cf) - Ex.: „Hm, a jak je tohle to závislý na nějakém tom obsahu? ..se ptám.“	
	cg) - N.: „No, závislý je to na tom, že potom jako si můžu určit nějaký jakýkoliv jednotky, prostě nějako vzdálenost a potom zjistím, jak jsou dlouhý ty strany.“	
	ch) - Ex.: „Hm, tak to tu popište tohle to. Tady to přesně, jak říkáte, tak to ale popište, obrázek nakreslete a ten vztah nějakej zkuste určit.“	
	ci) - N.: Já nevím, paní učitelko.“, kreslí obrázek vlevo dole (úloha č.4)	
	cj) - Ex.: „Čím je ten čtverec charakterizovaný?“ Řekla jsem, že délku té strany neznáte. A když se na to podíváte, na tenhle případ, tak jak vypočítáte obsah toho čtverce, aniž byste počítaly délku tý strany?“	
	ck) - N. přemýšlí	
	cl) - Ex.: „Jste schopný to vypočítat?“ Obsah toho čtverce?“	
	cm) - N.: „No tak když nevím ty jednotky, který tam jsou, tak jako nemám co počítat, že jo?“	<u>- problém jednotky</u>
	cn) - Ex.: „Tak berte jeden dílek jedna jednotka.“	- <u>o tom už ale uvažovaly???</u>
	co) -N. kreslí čárkovaně stranu *m* a *n* v obrázku: (zatím strany neoznačuje písmenky *m, n, x)* 	
	cp) -Ex.: „Jak vypočítáte obsah toho čtverce, když neznáte délku strany?“	<u>- *m* a *n* – individ. konstrukce??</u>
	cq) - N.: „Tady si teda udělám ten trojúhelník na to.“	
	cr) - Ex.: „Mhm.“	
	cs) - N.: „A tady si určím, že tahle vzdálenost (ukazuje na *m*) je prostě nějaká jednotka.“	<u>– měřítko – 1 jednotka převzato nebo individ. konstrukce?</u>
	ct) - Ex.: „No.“	
	cu) - N.: „A teď si to jako převedu na tu stranu.“	
	cv) - Ex.: „No.“	
	cw) - N.: „Jako že jsme to tady do toho vložily 3krát.“	
	cx) - Ex.: „Tak a dál?“	
	cy) - N.: „Takže jakoby máme jednu jednotku a jakoby tři jednotky a potom z Pythagorovy věty jakoby dopočítám, kolik jednotek je jedna a strana a potom to jako normálně vypočítám obsah."	<u>Není?? indiv., ale spontánní?? -</u> už to zná, teď to použije - **<u>Pythagorova věta!!!</u>** (neuvědomuje si geom.
	cz) - Ex.: „Mhm.“	

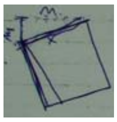
	da) -N.: „A vyjde mi to v nějakých jednotkách.“	význam Pyth.v.- nevidí v tom Pyth.v. (obsahy), ale vzorec jako nástroj pro výpočet - formálně)
	db) - Ex.: „Mhm, takže si pomocí Pythagorovy věty vypočítáš..“	
	dc) - N.: „..tuhle stranu.“	
	dd) -Ex.: „Délku té strany a pak?“	
	de) - N.: „.. a potom si vypočítám ten obsah, což je strana krát strana.“ (odmocnění a umocnění)	-jednotky jsou pro N. podstatné
	df) - Ex.: „No a zkuste teď tohle to.. přesně zkuste popsat teď jenom obecně – když nebudete mít 1 jednotku a 3 jednotky, ale třeba *m* jednotek a *n* jednotek, tak jak to bude vypadat s tím obsahem? A to už bude všechno, jo? Zkuste tohle to ještě. (2s) Je to jasný? Jo? Že nebudete mít 1 jednotku a 3, ale budete mít nějakých *m* jednotek a *n* jednotek, jo?“	- korekce matematic. vyjadřování - zobecnění, navedení??
	dg) - A.: „Takže si tam dáš písmenka.“	
	dh) - N.: „Takže napíšu *m* jednotek na druhou plus *n* jednotek na druhou se rovná *x* jednotek na druhou.“	- indiv.?
	di) - K. si dál hraje s kalkulačkou	
	dj) - M.: „To začíná být rovnice tam.“	
	dk) - N.: „No vždyť jo. (3s) A když vím *x* jednotek, takže *x* jednotek (píše) krát *x* jednotek se rovná S.“	-indiv.?
	 když je čtverec položen úhlopříčně a já se chci dostat z bodu A do bodu B, vždycky jdu nějakou vzdálenost nahoru a určitou vzdálenost doprava. Tím se mi vytvoří pravoúhlý trojúhelník. Přepona tohoto trojúhelníku je strana čtverce. m jednotek^2 + n jednotek^2 = x jednotek^2 ; x jednotek · x jednotek = S	
	dl) - K.: „Už to máš?“	
	dm) - N.: „Jo.“	
	dn) - A.: „Já nevím, jestli to takhle stačí?“	
	do) - N. se hlásí: „Tak už jsme to nějak napsaly.“	
	dp) - M. si to otočí k sobě a přečte řešení. N. jí to přečte nahlas.	
	dq) - Ex.: „A vy myslíte, vy myslíte, jo. A těma jednotkama myslíte jako třeba	

centimetry? Nebo co tím myslíte?"

dr) - N.: „No nějakou jednotku, kterou si samy určíme třeba."

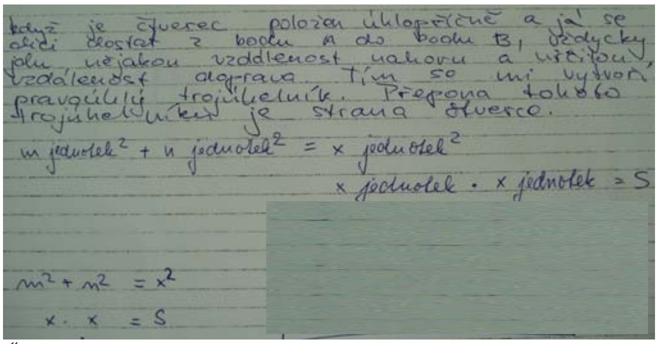
ds) -Ex.: „Mhm, tak teď napište jenom nějaký obecný vzorec. Takhle nevypadají vzorečky v tabulkách, že jo? Tak zkuste napsat jenom ten vzorec, jak by vypadal? Nějakej obecnej obrázek k tomu a konec, jo?"

dt) - N. si bere pracovní list: „Takže tady máme ten obecný obrázek.", ukazuje na obrázek vlevo dole, v obrázku označí příslušné strany *m* a *n*, „To je *m*, to je *n* a tady to je *x*."



du) - A. diktuje: „Prostě *m* na druhou krát *n* na druhou.."

dv) - N. říká a píše: „Takže *m* na druhou plus *n* na druhou se rovná *x* na druhou.", N. neposlouchala A. – neřeší krát a dál píše $x \cdot x$ = S), „Hele, jako takhle?"



dw) - K., A., M.: „Jo."

dx) - N.: „Už to máme."

dy) - skupina vedle: „My už to taky máme."… „My jsme to měly první, jsme lepší."

dz) - čekají

ea) - A., M., K. už nevěnují pozornost práci

eb) - N. ještě píše sama: S = m^2 + n^2… (částečné dosazení – viz vztah v rámečku)

ec) - A.: „Co tam děláš?"

- hezký poznatek!!!!! (škoda, že takto neuvažovaly už před úlohou č. 3)

od Ex. formální???

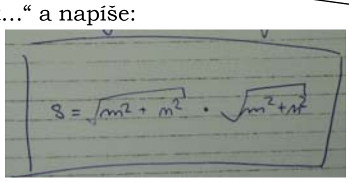
- převzato a dále rozvíjí s chybou
- <u>indiv., převz.?</u>

- <u>sama pokračuje v práci</u>

ed) - N.: „Já se to ještě pokouším napsat do jednoho jako. Tohle to je x^2 (ukazuje na $m^2 + n^2$), takže jako by, to musí bejt.. Ne, když tohle to odmocním.."

ee) -M. ukazuje na $m^2 + n^2 = x^2$: „A to se rovná S, ne?"

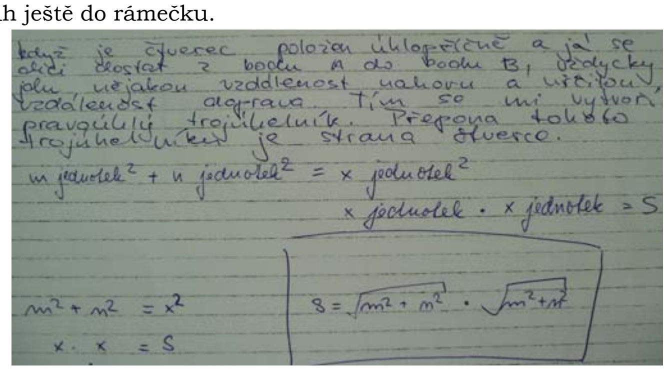
ef) -N. chce své řešení!!!: „*a* krát…" a napíše:



eg) - N.: „Takhle, ne? Protože když tohle odmocním krát… tak…"

eh) - A.: „Jo. Paní učitelko, už to máme."

ei) - N. dá vztah ještě do rámečku.



ej) -Ex.: „Mhm. (čte (5s)) A proč tam máte.., ještě se zeptám odmocnina z $m^2 + n^2$ krát odmocnina z $m^2 + n^2$?"

ek) - N.: „Protože tohle je *x*, jako že prostě $m^2 + n^2$ je x^2 a abych měla to *x*, tak potřebuju to odmocnit."

el) - Ex.: „Jo to *x* bude co?"

- stačilo by $m^2 + n^2 = x^2$ = S, nevadí, důl. je, že chápe a sama zkonstr.
- Převzato

- aby mohla dosadit do $x \cdot x$ = S

– neuvědomuje si geom.

	em) - N.: „A *x* je potom tahle ta strana, tady je ten obrázek.“, ukazuje na obrázek s označením stran *m*, *n*, *x*). **en) -** Ex.: „Jo, mhm, jo, dobře, tak jo. Takže to mně stačí teda, takže děkuju.“ - KONEC 25:59	význam Pyth. věty - Ex. mohl ještě chtít úpravu výsledného vztahu, ale před tím to tam zaznělo od M., že $m^2 + n^2 = x^2 = S$
	Celkový čas: 59:00 + 25:59	